BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM NĂM 2024

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm có 01 trang)

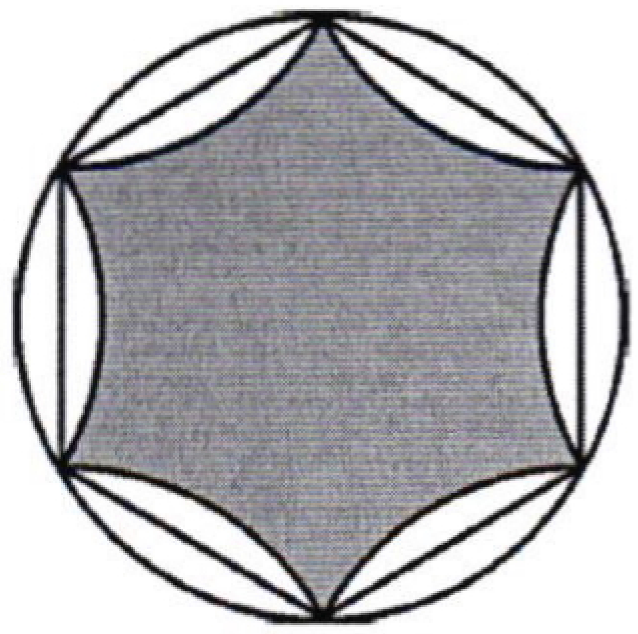
MÔN THI: TOÁN

(Dùng cho mọi thí sinh thi tuyển vào lớp 10 Trường THPT Chuyên Đại học Sư phạm)
Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài 1. (3,0 điểm) a) Cho $A=\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}$. Tìm giá trị của A^3.

b) Cho b, c là hai số thực thỏa mãn $24b+c=-523$. Biết phương trình $x^2+bx+c=0$ có hai nghiệm là hai số nguyên dương. Tìm hai nghiệm đó.

Bài 2. (1,5 điểm) Bạn Hạnh làm một ngôi sao 6 cánh có dạng hình phẳng tô đậm như hình bên theo cách như sau: Trên tờ giấy, bạn vẽ đường tròn bán kính 2 cm, ngoại tiếp một lục giác đều. Sau đó, mỗi cung tròn nhỏ căng dây cung là một cạnh của lục giác đều được lấy đối xứng qua cạnh đó. Hình phẳng tô đậm giới hạn bởi 6 cung tròn vừa được vẽ tạo thành ngôi sao bạn định làm. Em hãy giúp bạn Hạnh tìm diện tích ngôi sao 6 cánh đó (lấy giá trị của π là 3,14 và giá trị của $\sqrt{3}$ là 1,73).



Bài 3. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $DB=2DC$. Đường thẳng qua D song song với AC cắt cạnh AB tại E. Đường thẳng qua E song song với BC cắt cạnh AC tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt AD tại M (M khác A).

a) Chứng minh tứ giác $BDME$ và tứ giác $CDMF$ là hai tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $MB=2MA$.

c) Chứng minh $BMD=2CMD$.

Bài 4. (1,5 điểm) Tìm số thực x sao cho các số $x+\sqrt{2024}$ và $\dfrac{185}{x}-\sqrt{2024}$ đều là các số nguyên.

Bài 5. (1,0 điểm) Cho 45 số $a_1, a_2, ..., a_{45}$, mỗi số chỉ nhận một trong ba giá trị là 0; 2; 3. Biết rằng $(a_1-2)^2+(a_2-2)^2+...+(a_{45}-2)^2=65$ và $(a_1-3)^3+(a_2-3)^3+...+(a_{45}-3)^3=-280$. Hỏi trong 45 số nói trên có bao nhiêu số bằng 0?

----------------------*Hết*----------------------

Ghi chú: Học sinh không được sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

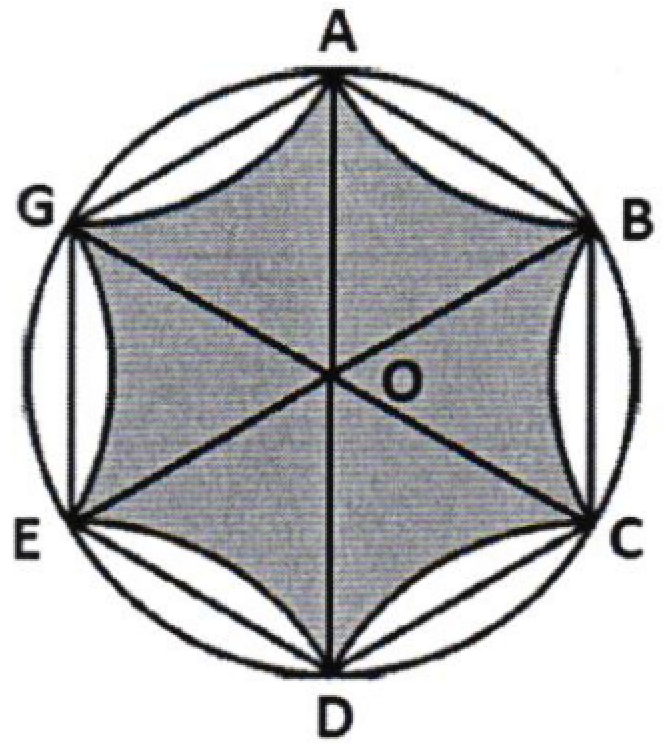
Họ tên thí sinh: .... Số báo danh: ....

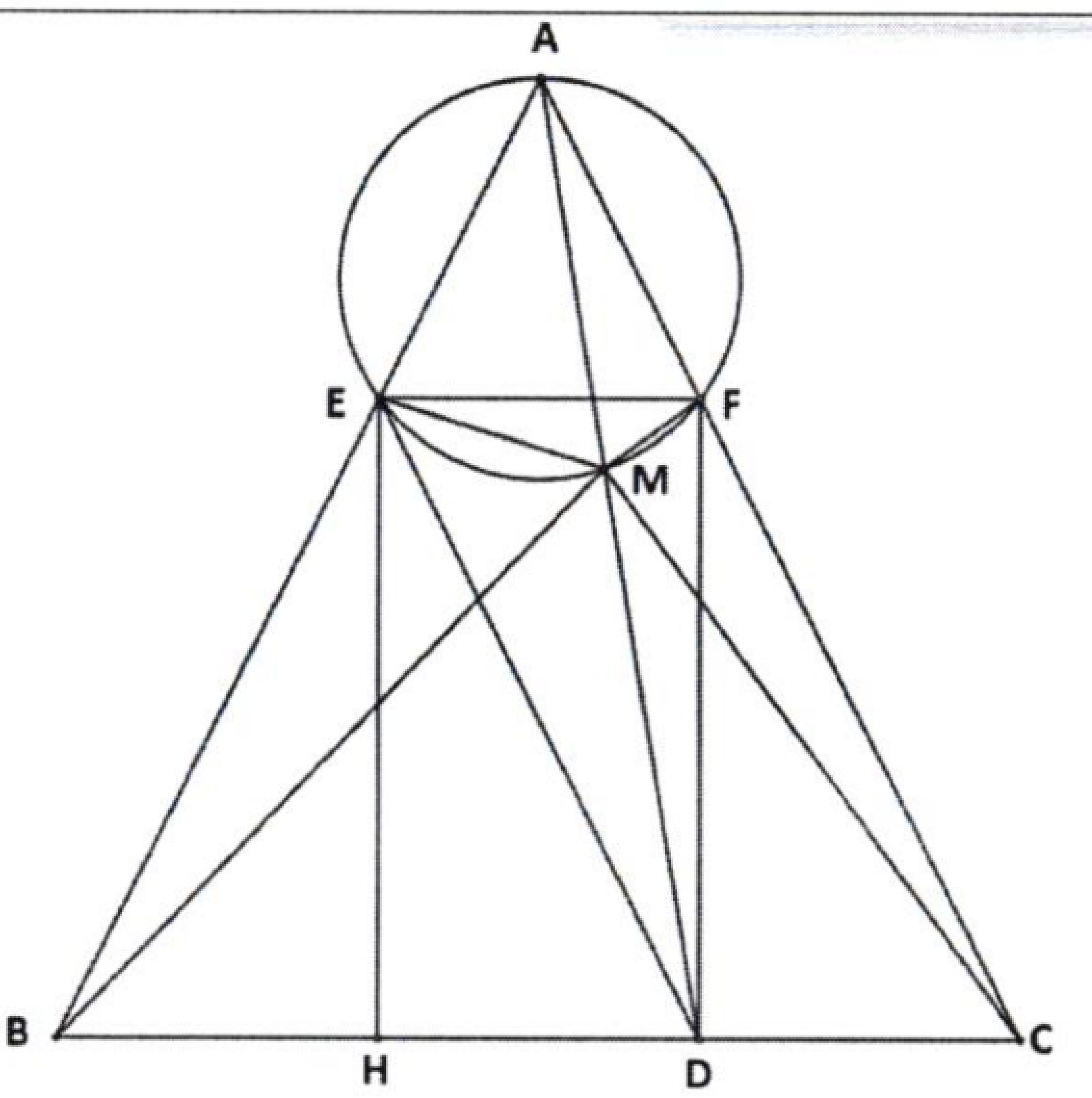
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM NĂM 2024

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐÁP ÁN-HƯỚNG DẪN GIẢI
MÔN THI: TOÁN (CHUNG)

Câu	Đáp án	Điểm
Bài 1		**3,0**
a		**1,5**
	Ta có: $A=\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}=\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(3+\sqrt{2}\right)^2}$ $=\left(3-\sqrt{2}\right)+\left(3+\sqrt{2}\right)=6.$	
	Vậy $A^3=6^3=216.$	
b		**1,5**
	Gọi hai nghiệm của phương trình $x^2+bx+c=0$ (1) là p, q. Theo định lí Vi-ét, ta có: p + q = – b và p.q = c.	
	Dễ thấy: b = – (p + q). Do 24*b* + c = – 523 nên – 24(p + q) + pq = – 523.	
	Hay pq – 24p – 24q = – 523 $\Leftrightarrow$ (pq – 24p) – (24q – 24^2) = 24^2 – 523 $\Leftrightarrow$ p(q – 24) – 24(q – 24) = 24^2 – 523 $\Leftrightarrow$ (p – 24)(q – 24) = 53 = 1. 53 = (– 1).(– 53)(*).	
	Không mất tổng quát, ta có thể giả sử p $\le$ q. Suy ra q – 24 $\ge$ p – 24 (**). Từ (*) và (**) suy ra $\left[\begin{array}{l} p-24=1,\ q-24=53 \\ p-24=-53,\ q-24=-1 \end{array}\right.$	
	+) Xét p – 24 = 1 và q – 24 = 53: Suy ra p = 25 và q = 77. +) Xét p – 24 = – 53 và q – 24 = – 1: Suy ra p = – 29 < 0 (Loại). Vậy phương trình (1) có hai nghiệm là 25 và 77.	
Bài 2		**1,5**

	Hình tròn có bán kính bằng 2 nên diện tích của hình tròn đó là $S_{\text{hình tròn}} = \pi.2^2$. Vì ta lấy giá trị của π là 3,14 nên $S_{\text{hình tròn}} = 3,14.4 = 12,56$.	
	Do lục giác *ABCDEG* là đều nên tam giác *OAB* là tam giác đều có cạnh bằng 2. Suy ra $S_{AOB} = \frac{1}{2}.2.\frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Vì ta lấy giá trị của $\sqrt{3}$ là $1,73$ nên $S_{AOB} = 1,73$. Suy ra $S_{ABCDEG} = 6S_{AOB} = 6.1,73 = 10,38$.	
	Do đó phần hình tròn (màu trắng) nằm ngoài lục giác đều *ABCDEG* có diện tích là $12,56 - 10,38 = 2,18$.	
	Suy ra phần hình tròn (màu trắng) nằm ngoài ngôi sao 6 cánh có diện tích là $2,18.2 = 4,36$.	
	Vậy ngôi sao 6 cánh có diện tích là $12,56 - 4,36 = 8,2$ (cm^2).	
Bài 3		**3,0**
a		**1,0**
	Do tứ giác *AEMF* nội tiếp nên $AME = AFE$.	
	Do $EF \parallel BC$ nên $AFE = ACB$.	
	Mà tam giác *ABC* cân tại *A* nên $ACB = ABC$. Suy ra $AME = ABC$. Vậy tứ giác *BDME* là tứ giác nội tiếp.	
	Bằng cách chứng minh tương tự, ta có tứ giác *CDMF* là tứ giác nội tiếp.	
b		**1,0**
	Do tứ giác *BDME* nội tiếp nên $BME = BDE$. Do $DE \parallel AC$ nên $BDE = BCA$. Do $EF \parallel BC$ nên $BCA = EFA$.	
	Theo chứng minh ở câu a), ta có $AME = AFE$. Suy ra $BME = AME$.	
	Do đó *ME* là đường phân giác của tam giác *AMB*. Suy ra $\frac{MA}{MB} = \frac{EA}{EB}$.	

	Áp dụng định lí Ta-lét cho tam giác ABC với $DE \parallel AC$, ta có: $\dfrac{EA}{EB}=\dfrac{DC}{DB}=\dfrac{1}{2}$. Suy ra $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{DC}{DB}=\dfrac{1}{2}$. Vậy $MB = 2MA$.	
c		**1,0**
	Tứ giác $BDME$ nội tiếp nên $BMD = BED$. Tứ giác $CDMF$ nội tiếp nên $CMD = CFD$.	
	Gọi H là trung điểm của BD, suy ra $BH = HD = DC$. Do tam giác EBD cân tại E nên EH là đường phân giác của BED, suy ra $BED = 2HED$.	
	Xét hai tam giác EDH và FCD, ta có: $DE = CF$ (do $CDEF$ là hình bình hành); $EDH = FCD; DH = CD$. Suy ra $\Delta EDH = \Delta FCD$ (c.g.c). Do đó $HED = DFC$.	
	Vậy $BMD = BED = 2HED = 2DFC = 2CMD$.	
Bài 4		**1,5**
	Đặt $a = x+\sqrt{2024}$ và $b=\dfrac{185}{x}-\sqrt{2024}$.	
	Thay $x = a-\sqrt{2024}$ vào b, ta có: $b=\dfrac{185}{a-\sqrt{2024}}-\sqrt{2024}$ hay $(a-b)\sqrt{2024} = 2209 - ab$.	
	Nếu $a \neq b$ thì $\sqrt{2024}=\dfrac{2209-ab}{a-b}$. Điều này là vô lí (vì $\sqrt{2024}$ là số vô tỉ, $\dfrac{2209-ab}{a-b}$ là số hữu tỉ do a, b là các số nguyên). Suy ra $a = b$ và $a.\ b = 2209$ (1).	
	Từ (1) suy ra $a = 47$ hoặc $a = -47$. Do đó $x = 47-\sqrt{2024}$ hoặc $x = -47-\sqrt{2024}$.	
Bài 5		**1,0**
	Giả sử trong 45 số $a_1, a_2, ..., a_{45}$ có m số bằng 0, có n số bằng 2, có p số bằng 3. Khi đó $m+n+p=45$ (1)	
	Suy ra $(a_1-2)^2+(a_2-2)^2+...+(a_{45}-2)^2=(0-2)^2.m+(2-2)^2.n+(3-2)^2.p=4m+p$, do đó $4m+p=65$ hay $p=65-4m$.	

	Thay $p=65-4m$ vào (1), ta có: $45=m+n+p=m+n+65-4m=-3m+n+65 \Rightarrow 3m-n=20$. (2)	
	Tương tự ta có: $(a_1-3)^3+(a_2-3)^3+...+(a_{45}-3)^3=(0-3)^3.m+(2-3)^3.n+(3-3)^3.p=-27m-n$ nên $-27m-n=-280$ hay $27m+n=280.(3)$	
	Từ (2) và (3) ta có hệ phương trình $\begin{cases}3m-n=20\\27m+n=280\end{cases} \Rightarrow 30m=300 \Rightarrow m=10.$ Vậy trong 45 số đã cho có 10 số bằng 0.	