

# HÀM SỐ PHƯƠNG TRÌNH

# LƯỢNG GIÁC

$$\sin x = \frac{a}{c}$$

$$\cos x = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{a}{b} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{b}{a} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\operatorname{ctg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$$

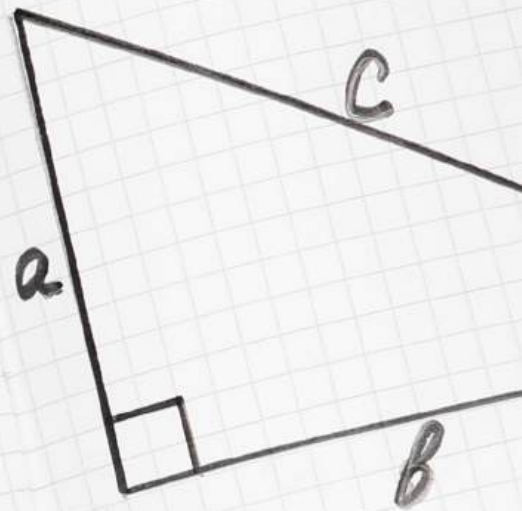
$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = \\ &= 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x = \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2 \operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2 \operatorname{ctg} x}$$

TÁC GIẢ  
TOÁN TỪ TÂM





## MỤC LỤC

### Bài 1. GÓC LƯỢNG GIÁC

#### A. Lý thuyết

1. Đường tròn định hướng và cung lượng giác.....	4
2. Góc lượng giác.....	5
3. Đơn vị Radian.....	5
4. Đường tròn lượng giác.....	6
5. Độ dài cung tròn.....	6

#### B. Các dạng bài tập

↻ Dạng 1. Mối liên hệ giữa độ và radian.....	7
↻ Dạng 2. Độ dài cung lượng giác.....	9
↻ Dạng 3. Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác.....	11

#### C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm.....	14
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai.....	16
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn.....	19

### Bài 2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA 1 GÓC LƯỢNG GIÁC

#### A. Lý thuyết

1. Giá trị lượng giác của một góc lượng giác.....	21
2. Hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác của một góc lượng giác.....	22
3. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc đối nhau.....	22
4. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau.....	22
5. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc phụ nhau.....	22
6. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc hơn kém.....	22

#### B. Các dạng bài tập

↻ Dạng 1. Tính giá trị lượng giác của 1 góc lượng giác.....	24
↻ Dạng 2. Tính giá trị lượng giác liên quan góc đặc biệt.....	26
↻ Dạng 3. Rút gọn biểu thức lượng giác.....	28
↻ Dạng 4. Giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất.....	30

#### C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm.....	32
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai.....	34
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn.....	37

### Bài 3. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

#### A. Lý thuyết

1. Công thức cộng.....	40
------------------------	----



2. Công thức nhân đôi.....	40
3. Công thức biến đổi tích thành tổng.....	40
4. Công thức biến đổi tổng thành tích.....	41
<b>B. Các dạng bài tập</b>	
↪ Dạng 1. Công thức cộng.....	42
↪ Dạng 2. Công thức nhân đôi.....	44
↪ Dạng 3. Công thức biến đổi tích thành tổng.....	46
↪ Dạng 4. Công thức biến đổi tổng thành tích.....	48
<b>C. Luyện tập</b>	
A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm.....	50
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai.....	51
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn.....	53
<b>Bài 4. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC</b>	
<b>A. Lý thuyết</b>	
1. Định nghĩa hàm số lượng giác.....	55
2. Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn.....	55
3. Đồ thị & tính chất hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ .....	56
4. Đồ thị & tính chất hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ .....	57
<b>B. Các dạng bài tập</b>	
↪ Dạng 1. Tập xác định.....	59
↪ Dạng 2. Tính chẵn – lẻ.....	61
↪ Dạng 3. Tính tuần hoàn.....	64
↪ Dạng 4. Giá trị lớn nhất – nhỏ nhất.....	66
<b>C. Luyện tập</b>	
A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm.....	68
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai.....	71
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn.....	73
<b>Bài 5. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC</b>	
<b>A. Lý thuyết</b>	
1. Khái niệm phương trình tương đương.....	76
2. Phương trình $\sin x = a$ .....	76
3. Phương trình $\cos x = a$ .....	77
4. Phương trình $\tan x = a$ & $\cot x = a$ .....	77
<b>B. Các dạng bài tập</b>	
↪ Dạng 1. Phương trình $\sin x = a$ .....	79
↪ Dạng 2. Phương trình $\cos x = a$ .....	81



➤ Dạng 3. Phương trình $\tan x = a$ và $\cot x = a$ .....	83
➤ Dạng 4. Phương trình có nghiệm thuộc khoảng – đoạn.....	85
➤ Dạng 5. Bài toán thực tế liên quan phương trình lượng giác .....	87

**C. Luyện tập**

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm.....	88
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai.....	93
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn .....	96



TOÁN TỬ TÂM



## Chương 01

### Bài 1.

# GÓC LƯỢNG GIÁC



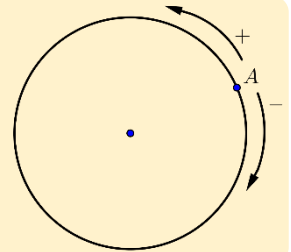
## Lý thuyết

### 1. Đường tròn định hướng và cung lượng giác



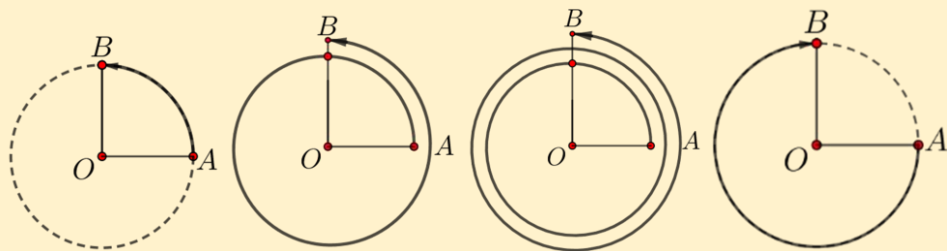
#### Đường tròn định hướng:

- Đường tròn định hướng là một đường tròn trên đó đã chọn **một chiều chuyển động** gọi là chiều dương, chiều ngược lại là chiều âm.
- Quy ước chọn chiều **ngược** với chiều quay của kim đồng hồ làm chiều dương.



#### Cung lượng giác:

- Trên đường tròn định hướng cho 2 điểm  $A, B$ . Một điểm  $M$  di động trên đường tròn luôn theo một chiều từ  $A$  đến  $B$  tạo nên một **cung lượng giác** có điểm đầu  $A$  và điểm cuối  $B$ .
- Với 2 điểm  $A, B$  đã cho trên đường tròn định hướng ta có **vô số cung lượng giác** có điểm đầu  $A$ , điểm cuối  $B$ .
- Kí hiệu  $\widehat{AB}$ .



#### Chú ý

Trên một đường tròn định hướng, lấy 2 điểm  $A, B$  thì:

- (1) Kí hiệu  $AB$  chỉ một cung hình học (lớn hoặc bé) hoàn toàn xác định.
- (2) Kí hiệu  $\widehat{AB}$  chỉ một cung lượng giác điểm đầu  $A$ , điểm cuối  $B$ .



## 2. Góc lượng giác.

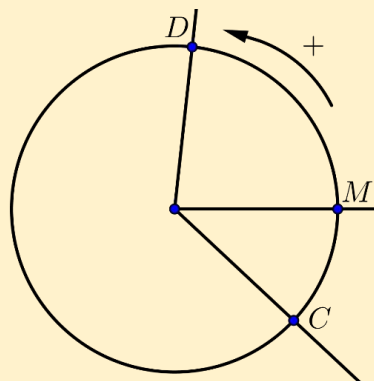


### Góc lượng giác:

- Một điểm  $M$  chuyển động trên đường tròn từ  $C$  đến  $D$  tạo nên cung lượng giác  $\widehat{CD}$ .

Khi đó tia  $OM$  quay xung quanh gốc  $O$  từ vị trí  $OC$  đến  $OD$ . Ta nói tia  $OM$  tạo nên **góc lượng giác**, có tia đầu  $OC$  và tia cuối  $OD$ .

- Kí hiệu:  $(OC, OD)$ .
- Ta quy ước: chiều quay  
+ ngược với chiều quay kim đồng hồ là chiều dương  
+ cùng với chiều quay kim đồng hồ là chiều âm.
- Khi tia  $OM$  quay góc  $\alpha$  thì ta nói góc lượng giác mà tia đó quét nên có số đo  $\alpha$ .
- Số đo của **góc lượng giác** với tia đầu  $OC$ , tia cuối  $OD$  được kí hiệu là  $sd(OC, OD) = \alpha$ .



### Nhận xét

Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu  $OC$  và tia cuối  $OD$  sai khác nhau một bội nguyên của  $360^\circ$  nên có công thức tổng quát là:  $sd(OC, OD) = \alpha^\circ + k.360^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

Thường viết là  $(OC, OD) = \alpha^\circ + k.360^\circ$



### Hệ thức Chasles:

Với 3 tia  $Oa, Ob, Oc$  bất kì ta có:

$$(Oa, Ob) + (Ob, Oc) = (Oa, Oc) + k.360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

## 3. Đơn vị Radian.



### Đơn vị Radian:

- Trên đường tròn tùy ý, cung có độ dài bằng bán kính được gọi là cung có số đo 1 rad.

### Quan hệ giữa độ & radian:

- $1^\circ = \frac{\pi}{180}$  rad và  $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$ .

### Chú ý:

Khi viết số đo của một góc (cung) theo đơn vị radian, ta không viết chữ rad sau số đó.

$$\boxed{180^\circ = \pi \rightarrow 60^\circ = \frac{\pi}{3}}; \boxed{180^\circ = \pi \rightarrow 45^\circ = \frac{\pi}{4}}$$

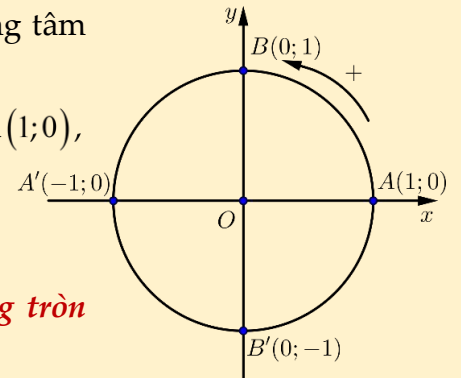


## 4. Đường tròn lượng giác



### Đường tròn lượng giác:

- » Trong mặt phẳng  $Oxy$ , vẽ đường tròn định hướng tâm  $O$ , bán kính  $R = 1$ .
- » Đường tròn này cắt hai trục tọa độ tại bốn điểm  $A(1;0)$ ,  $A'(-1;0)$ ,  $B(0;1)$ ,  $B'(0;-1)$ .
- » Ta lấy  $A(1;0)$  làm điểm gốc của đường tròn.
- » Đường tròn xác định như trên được gọi là **đường tròn lượng giác** (gốc  $A$ ).



## 5. Độ dài cung tròn.



- » Cung có số đo  $\alpha$  rad của đường tròn bán kính  $R$  có độ dài  $l = R\alpha$ .

TOÁN TỪ TÂM



## Các dạng bài tập

### Dạng 1. Mối liên hệ giữa độ và radian



#### Phương pháp

Dùng mối quan hệ giữa độ và radian:  $180^\circ = \pi \text{ rad}$

» Đổi cung  $a$  có số đo từ radian sang độ  $a \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$

» Đổi cung  $x^\circ$  có số đo từ độ ra radian  $x^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$



#### Ví dụ 1.1.

(1) Đổi số đo của các góc sau ra radian:  $72^\circ, 600^\circ, -37^\circ 45' 30''$ .

(2) Đổi số đo của các góc sau ra độ:  $\frac{5\pi}{18}, \frac{3\pi}{5}, -4$ .

#### Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



#### Ví dụ 1.2.

Đổi số đo của góc  $45^\circ 32'$  sang đơn vị radian với độ chính xác đến hàng phần nghìn ?

#### Lời giải

.....

.....

.....

.....







## ➤ Dạng 2. Độ dài cung lượng giác



### Phương pháp

Cung tròn bán kính  $R$  có số đo  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ), có số đo độ  $a^\circ$  ( $0^\circ \leq a \leq 360^\circ$ ) và có độ dài

$$l \text{ thì: } l = R\alpha = \frac{\pi a}{180} \cdot R \text{ do đó } \frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180}$$

► **Đặc biệt:**  $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ, 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$



### Ví dụ 2.1.

Một đường tròn có bán kính 36 m. Độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo là

(1)  $\frac{3\pi}{4}$

(2)  $51^\circ$

(3)  $\frac{1}{3}$

✎ *Lời giải*

.....

.....

.....

.....

.....



### Ví dụ 2.2.

Một hải lí là độ dài cung tròn xích đạo có số đo  $\left(\frac{1}{60}\right)^\circ = 1'$ . Biết độ dài xích đạo là 40.000km, hỏi một hải lí dài bao nhiêu km?

✎ *Lời giải*

.....

.....

.....

.....

.....

.....



### Ví dụ 2.3.

Cho hình vuông  $A_0A_1A_2A_3$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$  (các đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo của các cung lượng giác

$$\widehat{A_0A_i}, \widehat{A_iA_j} (i, j = 0, 1, 2, 3, i \neq j)$$

✎ *Lời giải*



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





### ➤ Dạng 3. Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác



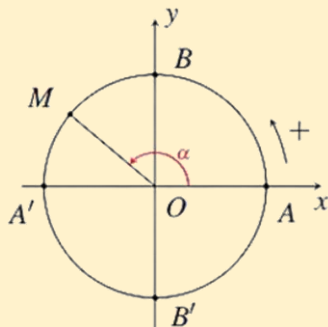
#### Phương pháp

Để biểu diễn góc lượng giác có số đo  $a$  trên đường tròn lượng giác ta cần thực hiện các bước sau:

- » **Bước 1:** Vẽ đường tròn lượng giác. Chọn gốc  $A(1;0)$  làm điểm đầu.
- » **Bước 2:** Chọn điểm cuối  $M$  trên đường tròn lượng giác sao cho  $(OA, OM) = \alpha$ . Điểm cuối  $M$  chính là điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo  $a$ .

#### \*\* Kiến thức cần lưu ý:

- ✓ Đường tròn lượng giác là đường tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính bằng 1, được định hướng với:
  - » Chiều quay dương (ngược chiều quay của kim đồng hồ),
  - » Chiều quay âm (cùng chiều quay của kim đồng hồ).
  - » Lấy điểm  $A(1;0)$  làm điểm gốc của đường tròn.



Các điểm  $B(0;1), A(1;0), B'(0;-1)$  nằm trên đường tròn lượng giác.

- ✓ Nếu  $|a| > 2\pi$  (hoặc  $|a| > 360^\circ$ ) ta phân tích  $\alpha = \beta + k2\pi$  hoặc  $\alpha = \beta + k360^\circ$  với  $-\pi < \beta < \pi$ . Khi đó, điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo  $\alpha$  sẽ trùng với điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo là  $\beta$ .
- ✓  $a > 0$  thì góc  $a$  quay theo chiều dương,  $a < 0$  thì góc  $a$  quay theo chiều âm.



#### Ví dụ 3.1.

Xác định điểm  $M$  trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng

(1)  $45^\circ$

(2)  $-\frac{9\pi}{4}$

#### ➤ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....







## Luyện tập

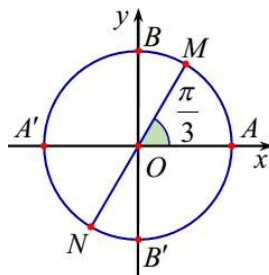
### A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

- » **Câu 1.** Góc có số đo  $\frac{\pi}{24}$  đổi sang độ bằng  
**A.**  $7^\circ$ .                      **B.**  $7^\circ 30'$ .                      **C.**  $8^\circ$ .                      **D.**  $8^\circ 30'$ .
- » **Câu 2.** Một đường tròn có đường kính là 50(cm). Độ dài của cung tròn trên đường tròn có số đo là  $\frac{\pi}{4}$  bằng (làm tròn đến hàng đơn vị):  
**A.** 40(cm).                      **B.** 39(cm).                      **C.** 19(cm).                      **D.** 20(cm).
- » **Câu 3.** Số đo theo đơn vị radian của góc  $315^\circ$  là  
**A.**  $\frac{7\pi}{2}$ .                      **B.**  $\frac{7\pi}{4}$ .                      **C.**  $\frac{2\pi}{7}$ .                      **D.**  $\frac{4\pi}{7}$ .
- » **Câu 4.** Cung tròn có số đo là  $\frac{5\pi}{4}$ . Hãy chọn số đo độ của cung tròn đó trong các cung tròn sau đây.  
**A.**  $5^\circ$ .                      **B.**  $15^\circ$ .                      **C.**  $172^\circ$ .                      **D.**  $225^\circ$ .
- » **Câu 5.** Cung tròn có số đo là  $\pi$ . Hãy chọn số đo độ của cung tròn đó trong các cung tròn sau đây.  
**A.**  $30^\circ$ .                      **B.**  $45^\circ$ .                      **C.**  $90^\circ$ .                      **D.**  $180^\circ$ .
- » **Câu 6.** Góc có số đo  $\frac{2\pi}{5}$  đổi sang độ là:  
**A.**  $135^\circ$ .                      **B.**  $72^\circ$ .                      **C.**  $270^\circ$ .                      **D.**  $240^\circ$ .
- » **Câu 7.** Góc có số đo  $108^\circ$  đổi ra radian là:  
**A.**  $\frac{3\pi}{5}$ .                      **B.**  $\frac{\pi}{10}$ .                      **C.**  $\frac{3\pi}{2}$ .                      **D.**  $\frac{\pi}{4}$ .
- » **Câu 8.** Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là:  
**A.**  $60^\circ$ .                      **B.**  $30^\circ$ .                      **C.**  $40^\circ$ .                      **D.**  $50^\circ$ .
- » **Câu 9.** Trên đường tròn với điểm gốc là  $A$ . Điểm  $M$  thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác  $AM$  có số đo  $60^\circ$ . Gọi  $N$  là điểm đối xứng với điểm  $M$  qua trục  $Oy$ , số đo cung  $AN$  là  
**A.**  $-120^\circ$  hoặc  $240^\circ$ .                      **B.**  $120^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .  
**C.**  $120^\circ$ .                      **D.**  $-240^\circ$ .
- » **Câu 10.** Trên đường tròn bán kính  $r = 15$ , độ dài của cung có số đo  $50^\circ$  là:  
**A.**  $l = 15 \cdot \frac{180}{\pi}$ .                      **B.**  $l = \frac{15\pi}{180}$ .                      **C.**  $l = 15 \cdot \frac{180}{\pi} \cdot 50$ .                      **D.**  $l = 750$ .
- » **Câu 11.** Trên đường tròn bán kính  $r = 5$ , độ dài của cung đo  $\frac{\pi}{8}$  là:  
**A.**  $l = \frac{\pi}{8}$ .                      **B.**  $l = \frac{3\pi}{8}$ .                      **C.**  $l = \frac{5\pi}{8}$ .                      **D.**  $l = \frac{2\pi}{3}$ .
- » **Câu 12.** Số đo của cung tròn có độ dài 75(cm) trên đường tròn có đường kính 30(cm) (lấy  $\pi \approx 3,14$  và làm tròn đến phút) có dạng  $a^0b'$  ( $a, b \in \mathbb{Z}$ ). Giá trị của biểu thức  $P = 2a - b$  bằng:



- A. 533.                      B. 535.                      C. 267.                      D. 266.

» Câu 13. Trên hình vẽ hai điểm  $M, N$  biểu diễn các cung có số đo là:

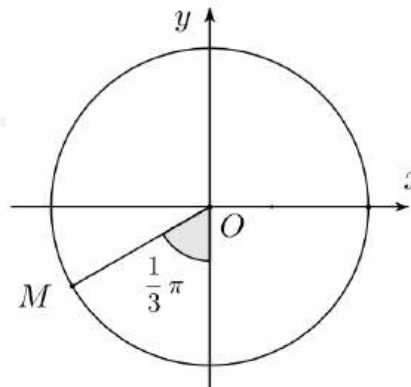


- A.  $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ .                      B.  $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ .                      C.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ .                      D.  $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$ .

» Câu 14. Trên đường tròn lượng giác gốc A, cho điểm M xác định bởi số  $\widehat{AM} = \frac{\pi}{3}$ . Gọi  $M_1$  là điểm đối xứng của M qua trục  $Ox$ . Tìm số đo của cung lượng giác  $\widehat{AM_1}$ .

- A. số  $\widehat{AM_1} = \frac{-5\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$                       B. số  $\widehat{AM_1} = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$   
C. số  $\widehat{AM_1} = \frac{-\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$                       D. số  $\widehat{AM_1} = \frac{-\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

» Câu 15. Điểm M trong hình vẽ sau là điểm biểu diễn của góc  $\alpha$ .



Số đo của  $\alpha$  là

- A.  $\alpha = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .                      B.  $\alpha = -\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
C.  $\alpha = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .                      D.  $\alpha = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

» Câu 16. Khi biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác, khẳng định nào dưới đây sai?

- A. Điểm biểu diễn cung  $\alpha$  và cung  $\pi - \alpha$  đối xứng nhau qua trục tung.  
B. Điểm biểu diễn cung  $\alpha$  và cung  $-\alpha$  đối xứng nhau qua gốc tọa độ.  
C. Mỗi cung lượng giác được biểu diễn bởi một điểm duy nhất.  
D. Cung  $\alpha$  và cung  $\alpha + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$  có cùng điểm biểu diễn.

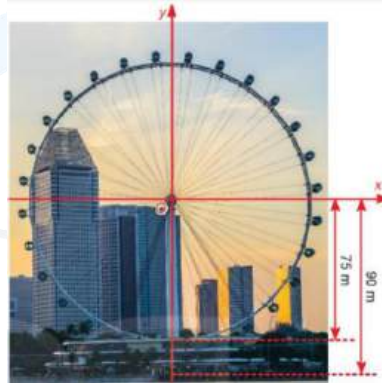
» Câu 17. Một đồng hồ treo tường, kim giờ dài 10,57cm và kim phút dài 13,34cm. Trong 30 phút mũi kim giờ vạch lên cung tròn có độ dài là

- A. 2,78cm.                      B. 2,77cm.                      C. 2,76cm.                      D. 2,8cm.





- » **Câu 18.** Trong 20 giây bánh xe của xe gắn máy quay được 60 vòng. Tính độ dài quãng đường xe gắn máy đã đi được trong vòng 3 phút, biết rằng bán kính bánh xe gắn máy bằng  $6,5\text{cm}$  (lấy  $\pi = 3,1416$ )  
**A.**  $22043\text{cm}$ .      **B.**  $22055\text{cm}$ .      **C.**  $22042\text{cm}$ .      **D.**  $22054\text{cm}$ .
- » **Câu 19.** Một bánh xe đạp quay được 25 vòng trong 10 giây. Tính độ dài quãng đường mà người đi xe thực hiện được trong 2,35 phút, biết rằng bán kính bánh xe bằng  $340\text{mm}$ . (Tính theo đơn vị mét, kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).  
**A.**  $314,5(m)$ .      **B.**  $753,04(m)$ .      **C.**  $514,8(m)$ .      **D.**  $437,8(m)$ .
- » **Câu 20.** Từ một vị trí ban đầu trong không gian, vệ tinh  $X$  chuyển động theo quỹ đạo là một đường tròn quanh Trái Đất và luôn cách tâm Trái Đất một khoảng bằng  $9200\text{km}$ . Sau 2 giờ thì vệ tinh  $X$  hoàn thành hết một vòng di chuyển. Quãng đường vệ tinh  $X$  chuyển động được sau 1 giờ là  
**A.**  $28902,65(km)$ .      **B.**  $29802,65(km)$ .      **C.**  $32102,65(km)$ .      **D.**  $28905(km)$ .
- » **Câu 21.** Một chiếc đu quay có bán kính  $75\text{m}$ , tâm của vòng quay ở độ cao  $90\text{m}$ , thời gian thực hiện mỗi vòng quay của đu quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin tại vị trí thấp nhất của vòng quay, thì sau 20 phút quay, người đó ở độ cao bao nhiêu mét?



- A.**  $127,5(m)$ .      **B.**  $154,3(m)$ .      **C.**  $87,7(m)$ .      **D.**  $157,5$ .

**B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai**

- » **Câu 22.** Đổi số đo của các góc sang radian. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$		
(b)	$\left(\frac{15}{\pi}\right)^\circ = \frac{1}{12} \text{ rad}$		
(c)	$132^\circ = \frac{11\pi}{15} \text{ rad}$		
(d)	$-495^\circ = -\frac{13\pi}{4} \text{ rad}$		

- » **Câu 23.** Đổi số đo của các góc sang độ. Khi đó:

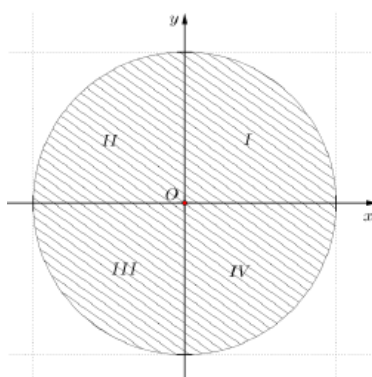
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\frac{3\pi}{4} \text{ rad} = 135^\circ$		
(b)	$-\frac{\pi}{360} \text{ rad} = -0,5^\circ$		



(c)  $\frac{31\pi}{2} \text{ rad} = 27^\circ$

(d)  $-4 \text{ rad} \approx -229,18^\circ$

» Câu 24. Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác. Khi đó:

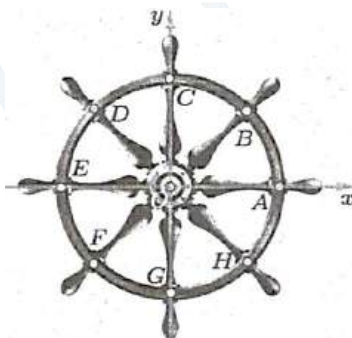


	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$125^\circ$ là điểm $M$ thuộc góc phần tư thứ II		
(b)	$405^\circ$ là điểm $N$ thuộc góc phần tư thứ III		
(c)	$\frac{19\pi}{3}$ là điểm $P$ thuộc góc phần tư thứ II		
(d)	$-\frac{13\pi}{6}$ là điểm $Q$ thuộc góc phần tư thứ IV		

» Câu 25. Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$36^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ là điểm $M$ thuộc góc phần tư thứ II		
(b)	$-60^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ là các điểm $M_1, M_2$ thuộc góc phần tư thứ II và IV		
(c)	$-\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ là $M$ thuộc góc phần tư thứ III		
(d)	$-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ là bốn điểm $M, N, P, Q$ thuộc góc phần tư thứ I, II, III, IV		

» Câu 26. Trong hình vẽ bên, ta xem hình ảnh đường tròn trên một bánh lái tàu thủy tương ứng với một đường tròn lượng giác.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Công thức tổng quát biểu diễn góc lượng giác $(OA, OB)$ theo đơn vị radian: $(OA, OB) = \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ ;		



(b)	Công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với bốn điểm biểu diễn là $A, C, E, G$ theo đơn vị radian là $k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$		
(c)	Công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với hai điểm biểu diễn là $A, E$ theo đơn vị độ là: $k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$		
(d)	Công thức tổng quát biểu diễn góc lượng giác $(OA, OC) + (OC, OH)$ theo đơn vị radian: $\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$		

» **Câu 27.** Đường kính của một bánh xe máy là 60 (cm). Trong mỗi ý ở mỗi câu, hãy chọn đúng hay sai

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Độ dài cung $40^\circ$ của một bánh xe gần bằng 20,94(cm), kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.		
(b)	Mỗi bánh xe phải lăn một vòng thì người đi xe đi được quãng đường 94,2(cm), kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 1.		
(c)	Để người đi xe đi được quãng đường 2(km) thì mỗi bánh xe phải lăn 1000 vòng		
(d)	Nếu xe chạy với vận tốc 50(km/h) thì trong 5 giây bánh xe quay được gần 36,9 vòng.		

» **Câu 28.** Trên đường tròn lượng giác tâm  $O$  và hệ trục tọa độ  $Oxy$  cho điểm  $M$  sao cho  $\angle AOM = \frac{\pi}{5}$ .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số đo của góc lượng giác có tia đầu là $OA$ tia cuối là $OM$ bằng $\frac{\pi}{5} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .		
(b)	Góc lượng giác có số đo $\frac{11\pi}{5}$ có cùng tia đầu và tia cuối với góc lượng giác $(OA, OM)$ .		
(c)	Trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ ta được 6 điểm.		
(d)	Khi biểu diễn góc $\alpha = \frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ lên đường tròn lượng giác ta được tập hợp điểm là một đa giác đều thì diện tích của đa giác đều đó bằng 4.		

» **Câu 29.** Từ một vị trí ban đầu trong không gian, vệ tinh  $X$  chuyển động theo quỹ đạo là một đường tròn quanh Trái Đất và luôn cách tâm Trái Đất một khoảng bằng 9200km. Sau 2 giờ thì vệ tinh  $X$  hoàn thành hết một vòng di chuyển.

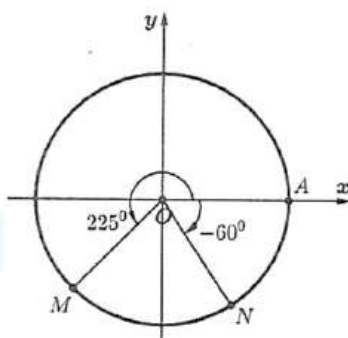
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Quãng đường vệ tinh $X$ chuyển động được sau 1 giờ là: $\approx 28902,65(km)$ , kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.		



(b)	Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1,5 giờ là: $\approx 43353,98(km)$ , kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.		
(c)	Sau khoảng 5,3 giờ thì X di chuyển được quãng đường $240000(km)$		
(d)	Giả sử vệ tinh di chuyển theo chiều dương của đường tròn, sau 4,5 giờ thì vệ tinh vẽ nên một góc $\frac{9\pi}{2}$ rad?		

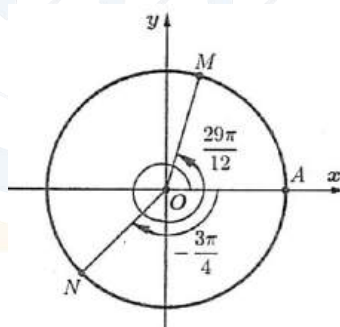
**C. Câu hỏi – Trả lời ngắn**

» **Câu 30.** Từ hình vẽ đường tròn lượng giác, công thức số đo tổng quát của góc lượng giác  $(OA, OM)$ ;  $(OA, ON)$  có dạng lần lượt là  $n^\circ + k360^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ );  $m^\circ + k360^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) với  $n; m$  là các số nguyên. Tính giá trị  $S = \frac{1}{4}m^2 - n$



» **Điền đáp số:**

» **Câu 31.** Từ hình vẽ đường tròn lượng giác, công thức số đo tổng quát của góc lượng giác  $(OA, OM)$ ;  $(OA, ON)$  có dạng lần lượt là  $\frac{n}{m}\pi + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ );  $-\frac{p}{q}\pi + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) với  $m; n; p; q$  là các số nguyên và  $\frac{n}{m}; \frac{p}{q}$  là phân số tối giản. Tính giá trị  $T = (m+p) - (n+q)$



» **Điền đáp số:**

» **Câu 32.** Một bánh xe có đường kính kể cả lốp xe là  $55cm$ . Nếu xe chạy với tốc độ  $50km/h$  thì trong một giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng? (Kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

» **Điền đáp số:**

» **Câu 33.** Một bánh xe đạp quay được 25 vòng trong 10 giây. Tính độ dài quãng đường mà người đi xe thực hiện được trong 2,35 phút, biết rằng bán kính bánh xe bằng  $340mm$ . (Tính theo đơn vị mét, kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị).

» **Điền đáp số:**



- » **Câu 34.** Một cái đồng hồ treo tường có đường kính bằng  $60\text{cm}$ , ta xem vành ngoài chiếc đồng hồ là một đường tròn với các điểm  $A, B, C$  lần lượt tương ứng với vị trí các số  $2, 9, 4$ . Tính tổng độ dài các cung nhỏ  $AB$  và  $AC$  (kết quả tính theo đơn vị centimét và làm tròn đến hàng phần trăm).



Điền đáp số:

- » **Câu 35.** Gọi  $M, N, P$  là các điểm trên đường tròn lượng giác sao cho số đo các góc lượng giác  $(OA, OM), (OA, ON), (OA, OP)$  lần lượt bằng  $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$  và  $MN = NP = 2$ . Tính diện tích tam giác  $MNP$ . Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

Điền đáp số:

----- Hết -----

TOÁN TỪ TÂM



Chương 01

Bài 2.

GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

A

Lý thuyết

1. Giá trị lượng giác của một góc lượng giác

Định nghĩa:

Trên đường tròn lượng giác, gọi  $M(x_M; y_M)$  là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo  $\alpha$ . Khi đó:

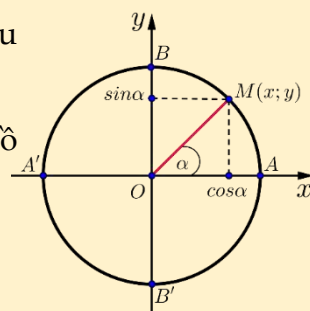
• Qui ước chọn chiều **ngược** với chiều quay của kim đồng hồ làm **chiều dương**.

•  $y_M$  điểm  $M$  gọi là sin của  $\alpha$ . Ký hiệu là  $\sin \alpha = y_M$

•  $x_M$  điểm  $M$  gọi là cosin của  $\alpha$ . Ký hiệu là  $\cos \alpha = x_M$

• Nếu  $\cos \alpha = x_M \neq 0$ ,  $\frac{y_M}{x_M} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  gọi là tang của  $\alpha$ . Ký hiệu  $\tan \alpha = \frac{y_M}{x_M} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ .

• Nếu  $\sin \alpha = y_M \neq 0$ ,  $\frac{x_M}{y_M} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$  gọi là côtang của  $\alpha$ . Ký hiệu  $\cot \alpha = \frac{x_M}{y_M} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ .



Chú ý

(1) Các giá trị:

1.  $\sin \alpha, \cos \alpha$  xác định  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

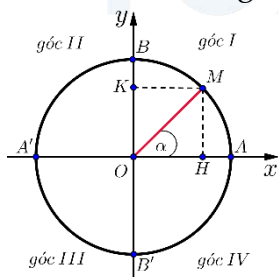
2.  $\tan \alpha$  xác định  $\forall \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .      3.  $\cot \alpha$  xác định  $\forall \alpha \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

(2) Với mọi góc lượng giác  $\alpha$ , ta có

1.  $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha, \forall k \in \mathbb{Z};$       3.  $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z};$

2.  $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha, \forall k \in \mathbb{Z};$       4.  $\cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha, \alpha \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}.$

(3) Dấu của các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$ :



		Góc phần tư			
		I	II	III	IV
Giá trị lượng giác	$\cos \alpha$	+	-	-	+
	$\sin \alpha$	+	+	-	-
	$\tan \alpha$	+	-	+	-
	$\cot \alpha$	+	-	+	-



## 2. Hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác của một góc lượng giác



$$(1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(2) \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(3) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(4) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

## 3. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc đối nhau

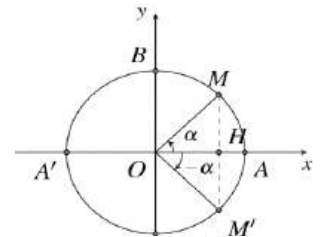
$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

Cos – đối



## 4. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

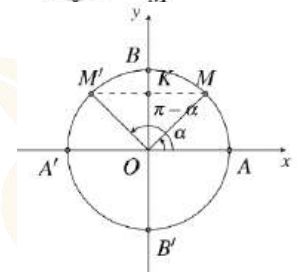
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

Sin – bù



## 5. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc phụ nhau

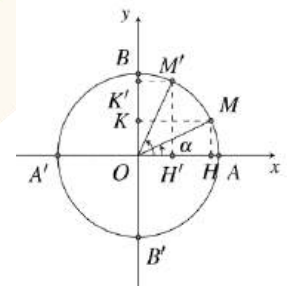
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

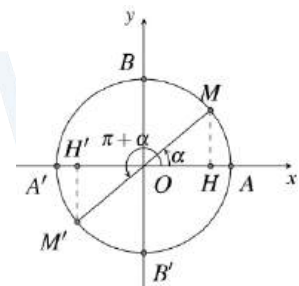
$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

Phụ – chéo



## 6. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc hơn kém

$$\begin{aligned} \sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha & \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \cos \alpha \\ \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin \alpha \\ \tan(\pi + \alpha) &= \tan \alpha & \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\cot \alpha \\ \cot(\pi + \alpha) &= \cot \alpha & \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\tan \alpha \end{aligned}$$





► Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt:

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot \alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



TOÁN TỬ TÂM





## Các dạng bài tập

### Dạng 1. Tính giá trị lượng giác của 1 góc lượng giác



#### Phương pháp

▶ Áp dụng hệ thức cơ bản:

$$(1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(2) \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(4) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(3) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(5) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$(6) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

▶ Đồng thời từ dữ kiện  $a < \alpha < b$  ( $a < b$ ) thì xác định cụ thể dấu của  $\sin \alpha$  và/hoặc  $\cos \alpha$ .

▶ Từ đó tính được chính xác các giá trị lượng giác còn lại.



#### Ví dụ 1.1.

Cho  $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$  ( $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ ). Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

✎ *Lời giải*

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



#### Ví dụ 1.2.

Cho  $\sin x = \frac{3}{5}$  ( $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ). Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

✎ *Lời giải*

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



**Ví dụ 1.3.**

Cho  $\tan x = \frac{3}{4}$   $\left(-\pi < x < -\frac{\pi}{2}\right)$ . Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

*Lời giải*

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



**Ví dụ 1.4.**

Cho  $\cot x = \frac{3}{4}$   $\left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right)$ . Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

*Lời giải*

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

TOÁN TỬ TÂM



**Dạng 2. Tính giá trị lượng giác liên quan góc đặc biệt**



**Phương pháp**

- ▶ Áp dụng các hệ thức cơ bản.
- ▶ Áp dụng mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác.

(1) Cos – đối:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

(2) Sin – bù:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

(4) Phụ – chéo

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

(3) Hơn kém  $\frac{\pi}{2}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

(5) Hơn kém  $\pi$



**Ví dụ 2.1.**

Tính giá trị của biểu thức:

(1)  $S = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$

(2)  $K = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ$

(3)  $M = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \dots + \cos^2 170^\circ + \cos^2 180^\circ$

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....



**Ví dụ 2.2.**

Chứng minh

$$D = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(13\pi + \alpha) - 3\sin(\alpha - 5\pi) = 3\sin\alpha$$

*Lời giải*

.....

.....

.....

.....

.....



**Ví dụ 2.3.**

Trên đường tròn lượng giác, xác định điểm M biểu diễn góc lượng giác có số đo  $\frac{5\pi}{6}$ .  
Cho biết, khi quét góc lượng giác từ  $(-1012\pi; 1012\pi)$  có bao nhiêu cặp góc đối có giá trị  $|\sin|$  bằng  $\sin\frac{5\pi}{6}$ ?

*Lời giải*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TOÁN TỪ TÂM







**Dạng 4. Giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất**



**Phương pháp**

▶ Áp dụng hệ thức cơ bản:

(1)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

(2)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

(4)  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

(3)  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(5)  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

(6)  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

▶ Áp dụng các hệ thức cơ bản.

▶ Áp dụng mối quan hệ: Cos - đối; Sin - bù; Phụ - chéo; Hơn kém  $\frac{\pi}{2} / \pi$ .

▶ Với mọi góc lượng giác  $\alpha$ , ta có:  $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$  và  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

1.  $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha, \forall k \in \mathbb{Z};$

2.  $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha, \forall k \in \mathbb{Z};$



**Ví dụ 4.1.**

Tìm giá trị lớn nhất - nhỏ nhất của:

(1)  $A = \cos(2x) + 3$

(2)  $D = 1 - \sin 2x$

*Lời giải*

.....

.....

.....

.....

.....

.....



**Ví dụ 4.2.**

Tìm giá trị lớn nhất - nhỏ nhất của:

(1)  $Z = \sqrt{2 \cos x + 3} - 4$

(2)  $V = \sqrt{2 + \cos 2x}$

*Lời giải*

.....

.....

.....

.....

.....

.....







## Luyện tập

### A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» **Câu 36.** Cho  $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ . Kết quả đúng là

**A.**  $\sin a > 0, \cos a > 0.$

**B.**  $\sin a < 0, \cos a < 0.$

**C.**  $\sin a > 0, \cos a < 0.$

**D.**  $\sin a < 0, \cos a > 0.$

» **Câu 37.** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

**A.**  $\sin(180^\circ - a) = -\cos a.$

**B.**  $\sin(180^\circ - a) = -\sin a.$

**C.**  $\sin(180^\circ - a) = \sin a.$

**D.**  $\sin(180^\circ - a) = \cos a.$

» **Câu 38.** Chọn đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau

**A.**  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$

**B.**  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x.$

**C.**  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x.$

**D.**  $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cot x.$

» **Câu 39.** Cho biết  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ . Tính  $\cot \alpha$

**A.**  $\cot \alpha = 2.$

**B.**  $\cot \alpha = \frac{1}{4}.$

**C.**  $\cot \alpha = \frac{1}{2}.$

**D.**  $\cot \alpha = \sqrt{2}.$

» **Câu 40.** Cho  $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.**  $\sin a < 0.$

**B.**  $\tan a > 0.$

**C.**  $\cot a > 0.$

**D.**  $\cos a < 0.$

» **Câu 41.** Biết  $\tan \alpha = 2$  và  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ . Tính  $\sin \alpha$ .

**A.**  $-\frac{2\sqrt{5}}{5}.$

**B.**  $\frac{2\sqrt{5}}{5}.$

**C.**  $-\frac{\sqrt{5}}{5}.$

**D.**  $\frac{\sqrt{5}}{5}.$

» **Câu 42.** Biết  $\tan \alpha = -3$ . Tính  $\tan\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right)$ .

**A.**  $-\frac{1}{3}.$

**B.**  $\frac{1}{3}.$

**C.**  $3.$

**D.**  $-3.$

» **Câu 43.** Trong các công thức sau, công thức nào sai?

**A.**  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$

**B.**  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left( \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right).$

**C.**  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left( \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \right).$

**D.**  $\tan \alpha + \cot \alpha = 1 \left( \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right).$

» **Câu 44.** Cho  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Giá trị của  $\cos \alpha$  là:

**A.**  $\frac{4}{5}.$

**B.**  $-\frac{4}{5}.$

**C.**  $\pm \frac{4}{5}.$

**D.**  $\frac{16}{25}.$

» **Câu 45.** Cho  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$  với  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Tính  $\sin \alpha$ .



A.  $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ .      B.  $\sin \alpha = -\frac{1}{5}$ .      C.  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ .      D.  $\sin \alpha = \pm \frac{3}{5}$ .

» Câu 46. Rút gọn biểu thức  $P = \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$ .

A.  $-\frac{3}{2}\cos 2a$ .      B.  $\frac{1}{2}\cos 2a$ .      C.  $-\frac{2}{3}\cos 2a$ .      D.  $-\frac{1}{2}\cos 2a$ .

» Câu 47. Giá trị biểu thức  $P = \sin^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{9\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6} \cot \frac{\pi}{6}$  bằng

A. 2.      B. 4.      C. 3.      D. 1.

» Câu 48. Cho  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Giá trị của  $\cos \alpha$  là:

A.  $\frac{4}{5}$ .      B.  $-\frac{4}{5}$ .      C.  $\pm \frac{4}{5}$ .      D.  $\frac{16}{25}$ .

» Câu 49. Cho  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$  với  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Tính  $\sin \alpha$ .

A.  $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ .      B.  $\sin \alpha = -\frac{1}{5}$ .      C.  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ .      D.  $\sin \alpha = \pm \frac{3}{5}$ .

» Câu 50. Cho  $\tan \alpha = -\frac{4}{5}$  với  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ . Khi đó:

A.  $\sin \alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}}$ .      B.  $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$ ,  $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$ .  
C.  $\sin \alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}$ ,  $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$ .      D.  $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}}$ .

» Câu 51. Trên nửa đường tròn đơn vị cho góc  $\alpha$  sao cho  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$  và  $\cos \alpha < 0$ . Tính  $\tan \alpha$ .

A.  $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .      B.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .      C.  $-\frac{2}{5}$ .      D. 1.

» Câu 52. Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Khi đó  $\cos \alpha$  có giá trị là.

A.  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ .      B.  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .      C.  $\cos \alpha = \frac{8}{9}$ .      D.  $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

» Câu 53. Cho  $P = \frac{3\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}$  với  $\tan x = 2$ . Giá trị của  $P$  bằng

A.  $\frac{8}{9}$ .      B.  $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .      C.  $\frac{\sqrt{8}}{9}$ .      D.  $\frac{5}{4}$ .

» Câu 54. Cho  $\sin x = \frac{1}{2}$  và  $\cos x$  nhận giá trị âm, giá trị của biểu thức  $A = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$  bằng

A.  $-2 - \sqrt{3}$ .      B.  $2 + \sqrt{3}$ .      C.  $-2 + \sqrt{3}$ .      D.  $2 - \sqrt{3}$ .

» Câu 55. Biểu thức  $P = \frac{3}{\cos^4 x} - 2\tan^4 x$  trên  $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$  đạt giá trị lớn nhất tại

A.  $x = 0$ .      B.  $x = \frac{\pi}{3}$ .      C.  $x = \frac{\pi}{6}$ .      D.  $x = \frac{\pi}{12}$ .



- » **Câu 56.** Một vật dao động điều hòa theo phương trình  $x = 1,25 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{12}\right)$  (cm) ( $t$  đo bằng giây). Tính quãng đường vật đi được sau thời gian  $t = 2,5s$  kể từ lúc bắt đầu dao động.  
**A.** 4,21(cm).      **B.** 3,21(cm).      **C.** 1,21(cm).      **D.** 2,21(cm).

- » **Câu 57.** Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu  $h$ (m) của con kênh tính theo thời gian  $t$  (giờ) trong một ngày được cho bởi công thức:

$$h = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 3, \quad 0 \leq t \leq 24.$$

Hỏi tại thời nào trong ngày thì mực nước của con kênh cao nhất?

- A.** 10(h).      **B.** 12(h).      **C.** 14(h).      **D.** 15(h).

**B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai**

- » **Câu 58.** Cho  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Xét được dấu của các biểu thức sau. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A = \sin(\alpha + 90^\circ) > 0$		
(b)	$B = \cos(\alpha - 45^\circ) > 0$		
(c)	$C = \tan(270^\circ - \alpha) < 0$		
(d)	$D = \cos(2\alpha + 90^\circ) > 0$		

- » **Câu 59.** Cho  $\tan x = -2$ . Tính được các biểu thức  $A_1 = \frac{5 \cot x + 4 \tan x}{5 \cot x - 4 \tan x}$ ,  $A_2 = \frac{2 \sin x + \cos x}{\cos x - 3 \sin x}$ , khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cot x = -\frac{1}{2}$		
(b)	Vì $\tan x = -2$ nên $\cos x = 0$		
(c)	$A_1 = -\frac{21}{11}$		
(d)	$A_2 = \frac{3}{7}$		

- » **Câu 60.** Cho  $\cot x = 2$ . Tính được các biểu thức  $B_1 = \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{3 \sin x - 2 \cos x}$ ,  $B_2 = \frac{2}{\cos^2 x - \sin x \cos x}$ , khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Vì $\cot x = 2$ nên $\sin x \neq 0$ .		
(b)	$B_1 = -8$		
(c)	$B_2 = -5$		
(d)	$B_1 + B_2 = -13$		

- » **Câu 61.** Từ một vị trí ban đầu trong không gian, vệ tinh X chuyển động theo quỹ đạo là một đường tròn quanh Trái Đất và luôn cách tâm Trái Đất một khoảng bằng 9200km. Sau 2 giờ thì vệ tinh X hoàn thành hết một vòng di chuyển.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1 giờ là: $\approx 28902,65$ (km).		



(b)	Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1,5 giờ là: $\approx 43353,98(km)$		
(c)	Sau khoảng 5,3 giờ thì X di chuyển được quãng đường 240000km		
(d)	Giả sử vệ tinh di chuyển theo chiều dương của đường tròn, sau 4,5 giờ thì vệ tinh vẽ nên một góc $\frac{9\pi}{2}$ rad		

» Câu 62. Cho  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Xét được dấu của các biểu thức sau. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A = \cos(\alpha + \pi) < 0$		
(b)	$B = \tan(\alpha - \pi) > 0$		
(c)	$C = \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) < 0$		
(d)	$D = \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right) < 0$		

» Câu 63. Tính được các giá trị lượng giác còn lại của góc  $x$ , biết:  $\tan x = \frac{1}{3}$  với  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ , khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos x < 0$		
(b)	$\cos x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$		
(c)	$\sin x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$		
(d)	$\sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{10}}{5}$		

» Câu 64. Tính được các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$ , biết:  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos^2 \alpha = \frac{9}{16}$		
(b)	$\cos \alpha = -\frac{3}{4}$		
(c)	$\cot \alpha = -\frac{3}{\sqrt{7}}$		
(d)	$\tan \alpha + \cot \alpha = -\frac{16\sqrt{7}}{23}$		

» Câu 65. Tính được các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$ , biết:  $\tan \alpha = 2, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cot \alpha = \frac{1}{2}$		



(b)	$\cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$		
(c)	$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$		
(d)	$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$		

» Câu 66. Tính được các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$ , biết:  $\sin \alpha = \frac{2}{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos \alpha < 0$		
(b)	$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$		
(c)	$\tan \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$		
(d)	$\cot \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$		

» Câu 67. Tính được các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$ , biết:  $\cos \alpha = -\frac{3}{4}, -\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\sin \alpha < 0$		
(b)	$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$		
(c)	$\tan \alpha = \frac{-\sqrt{7}}{3}$		
(d)	$\cot \alpha = -\frac{3}{\sqrt{7}}$		

» Câu 68. Tính được các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$ , biết:  $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{9}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cot \alpha = \frac{9}{2\sqrt{10}}$		
(b)	$\cos \alpha = -\frac{9}{11}$		
(c)	$\begin{cases} \cos \alpha < 0 \\ \sin \alpha < 0 \end{cases}$		
(d)	$\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{10}}{11}$		

» Câu 69. Tính được các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$ , biết:  $\cot \alpha = \sqrt{2} + 1, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\begin{cases} \cos \alpha > 0 \\ \sin \alpha > 0 \end{cases}$		



(b)	$\tan \alpha = \sqrt{2} + 1$		
(c)	$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$		
(d)	$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$		

**C. Câu hỏi – Trả lời ngắn**

» **Câu 70.** Cho  $\cos x = \frac{1}{2}$ . Tính giá trị biểu thức  $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x$ .

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 71.** Biểu thức sau:  $T = 2\sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) + 3\cos(19\pi - x) = k \cos x$ . Khi đó  $k = ?$

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 72.** Biểu thức sau:  $S = \frac{\sin\left(\frac{15\pi}{2} - x\right) - 2\cos(x - \pi)}{\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)} = k \cot x$ . Khi đó  $k = ?$

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 73.** Cho tam giác  $ABC$ , khi đó biểu thức  $\frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)} - \frac{\cos(A+C)}{\sin B} \tan B$

bằng?

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 74.** Biểu thức  $A = \tan\left(\frac{17\pi}{2} - x\right) + 2\cot(5\pi + x) = k \cot x$ , khi đó:  $k = ?$

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 75.** Biểu thức  $B = \frac{2\sin(x - 4\pi) + \cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} = k \tan x$ , khi đó:  $k = ?$

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 76.** Cho  $\cot \alpha = \frac{1}{3}$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = \frac{3\sin \alpha + 4\cos \alpha}{2\sin \alpha - 5\cos \alpha}$ .

✎ **Điền đáp số:**



» **Câu 77.** Cho  $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ . Tính giá trị của biểu thức  $B = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$ . Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

» **Điền đáp số:**

» **Câu 78.** Cho  $\tan \alpha = \sqrt{2}$ . Tính giá trị của biểu thức  $C = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$ . Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

» **Điền đáp số:**

» **Câu 79.** Biết  $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$ . Tính giá trị của  $\sin^4 a + \cos^4 a$ .

» **Điền đáp số:**

» **Câu 80.** Đơn giản các biểu thức sau (giả sử mỗi biểu thức sau luôn có nghĩa):

$$C = \frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} - \cot^2 x \cot^2 y.$$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 81.** Trong tam giác  $ABC$  ta có:  $\cos A + \cos(B + C) + \tan \frac{A + B}{2} = k \cot \frac{C}{2}$ . Khi đó:  $k = ?$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 82.** Cho biểu thức  $f(x) = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$  tính  $f(1)$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 83.** Cho biểu thức  $g(x) = \frac{-2 \cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cot x}$  với  $x \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2}, x \neq \pi$ . Tính  $g\left(\frac{2024\pi}{2023}\right)$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 84.** Cho hai góc nhọn  $a$  và  $b$ . Biết  $\cos a = \frac{1}{3}$  và  $\cos b = \frac{1}{4}$ . Tính giá trị của:

$$P = (\cos a \cdot \cos b)^2 - (\sin a \cdot \sin b)^2.$$

Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

» **Điền đáp số:**

» **Câu 85.** Cho  $\tan x = -\frac{4}{3}$  và  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ . Tính giá trị của biểu thức  $M = \frac{\sin^2 x - \cos x}{\sin x - \cos^2 x}$ . Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

» **Điền đáp số:**

» **Câu 86.** Cho  $3 \cos \alpha - \sin \alpha = 1, 0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Tính giá trị của  $\tan \alpha$ . Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

» **Điền đáp số:**



» **Câu 87.** Cho biểu thức  $A = \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x}$  khi  $x = \frac{2024\pi}{2023}$  thì  $A$  bằng bao nhiêu?

Điền đáp số:

» **Câu 88.** Cho biểu thức  $B = \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(10\pi + x) \right]^2 + \left[ \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(8\pi - x) \right]^2$  khi  $x = \frac{2024\pi}{2023}$  thì  $B$  bằng bao nhiêu?

Điền đáp số:

» **Câu 89.** Tính  $S = \sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ + \sin^2 85^\circ$ .

Điền đáp số:

Hết

TOÁN TỬ TÂM





## Chương 01

### Bài 3.

# CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A

## Lý thuyết

### 1. Công thức cộng



$$(1) \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$(2) \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$(3) \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$(4) \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$(5) \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$(6) \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

### 2. Công thức nhân đôi

Cho  $a=b$  trong các công thức cộng, ta được:



*Công thức nhân đôi:*

$$(1) \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$(2) \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$(3) \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

*Công thức hạ bậc:*

$$(4) \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$(5) \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$(6) \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

### 3. Công thức biến đổi tích thành tổng



$$(1) \cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$(2) \sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$(3) \sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$



#### 4. Công thức biến đổi tổng thành tích

Từ công thức biến đổi tích thành tổng, đặt  $u = a - b$ ,  $v = a + b$  ta có



$$(1) \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$(2) \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$(3) \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$(4) \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$



TOÁN TỪ TÂM



**B**

**Các dạng bài tập**

**Dạng 1. Công thức cộng**



**Phương pháp**

(1)  $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

(2)  $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

(3)  $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

(4)  $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

(5)  $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

(6)  $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$



**Ví dụ 1.1.**

Rút gọn các biểu thức:

(1)  $A = \frac{\sqrt{2} \cos a - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}{-\sqrt{2} \sin a + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}$

(2)  $B = (\tan a - \tan b) \cot(a-b) - \tan a \tan b$

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



**Ví dụ 1.2.**

Tính giá trị của các biểu thức sau:

(1)  $A = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  biết  $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  và  $0 < x < \frac{\pi}{2}$

(2)  $B = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$  biết  $\cos a = \frac{1}{3}$  và  $\cos b = \frac{1}{4}$

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....



















Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

- » **Câu 90.** Rút gọn biểu thức  $M = \cos 2x \cdot \cos x + \sin 2x \cdot \sin x$  ta được kết quả là:  
**A.**  $M = \cos x$ .      **B.**  $M = \cos 3x$ .      **C.**  $M = \sin x$ .      **D.**  $M = \sin 3x$ .
- » **Câu 91.** Rút gọn biểu thức  $\cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) - \cos x$  ta được kết quả là  
**A.** 0.      **B.**  $-\cos x$       **C.**  $-2\cos x$       **D.**  $\sin x - \cos x$ .
- » **Câu 92.** Biết  $\sin a = \frac{5}{13}$ ,  $\cos b = \frac{3}{5}$ ,  $\left(\frac{\pi}{2} < a < \pi; 0 < b < \frac{\pi}{2}\right)$ . Kết quả của biểu thức  $\sin(a+b)$  bằng:  
**A.** 0.      **B.**  $\frac{63}{65}$       **C.**  $\frac{56}{65}$       **D.**  $\frac{-33}{65}$ .
- » **Câu 93.** Trong các công thức sau, công thức nào **sai** ?  
**A.**  $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a$ .      **B.**  $\cos 6a = 1 - 2\sin^2 3a$ .  
**C.**  $\cos 6a = 1 - 6\sin^2 a$ .      **D.**  $\cos 6a = 2\cos^2 3a - 1$ .
- » **Câu 94.** Đẳng thức nào **không đúng** với mọi  $x$  ?  
**A.**  $\cos^2 3x = \frac{1 + \cos 6x}{2}$ .      **B.**  $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ .  
**C.**  $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ .      **D.**  $\sin^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$ .
- » **Câu 95.** Nếu  $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$  thì  $\sin 2x$  bằng  
**A.**  $\frac{3}{4}$ .      **B.**  $\frac{3}{8}$ .      **C.**  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .      **D.**  $\frac{-3}{4}$ .
- » **Câu 96.** Biết rằng  $\frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} + \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{\cos(ax)}{b - \sin(ax)}$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Tính giá trị của biểu thức  $P = a + b$ .  
**A.**  $P = 4$ .      **B.**  $P = 1$ .      **C.**  $P = 2$ .      **D.**  $P = 3$ .
- » **Câu 97.** Biết  $\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{2}$ . Tính  $\sin(\alpha + \pi) - 2\cos(\alpha - \pi)$ .  
**A.**  $\frac{3}{\sqrt{2}}$ .      **B.**  $-\frac{3}{\sqrt{2}}$ .      **C.**  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ .      **D.**  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .
- » **Câu 98.** Biết tam giác  $ABC$  có các góc thỏa mãn  $\sin A + \sin B + \sin C = a \cos \frac{A}{b} \cos \frac{B}{b} \cos \frac{C}{b}$  với  $a, b$  nguyên. Tính  $a + b$ .  
**A.**  $a + b = 6$ .      **B.**  $a + b = 4$ .      **C.**  $a + b = 2$ .      **D.**  $a + b = 8$ .
- » **Câu 99.** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sqrt{2 \sin x + 2}$ .  
**A.** -1.      **B.** 1.      **C.** 2.      **D.** 0.
- » **Câu 100.** Cho tam giác  $ABC$ . Giá trị của biểu thức  $P = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C$  bằng  
**A.** 1.      **B.** 3.      **C.** 2.      **D.** 0.



» **Câu 101.** Cho biểu thức  $S = \sin x + \sin(x+a) + \sin(x+2a) + \sin(x+3a) + \sin(x+4a)$ . Nếu  $0 < a < \pi$  thì  $S$  không phụ thuộc vào  $x$  khi  $a$  nhận giá trị nào?

- A.**  $a = \frac{2\pi}{5}$ . **B.**  $a = \frac{2\pi}{5}$  hoặc  $a = \frac{4\pi}{5}$ .  
**C.**  $a = -\frac{2\pi}{5}$  hoặc  $a = \frac{4\pi}{5}$ . **D.**  $a = \frac{4\pi}{5}$ .

**B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai**

» **Câu 102.** Cho biết  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$  và các biểu thức  $A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(\pi + \alpha)$ ;

$B = \cos(\pi - \alpha) + \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ . Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A = \cos \alpha - \sin \alpha$		
(b)	$B = \cos \alpha + \tan \alpha$		
(c)	$A + B = \frac{27}{20}$		
(d)	$A - B = -\frac{29}{20}$		

» **Câu 103.** Cho  $0 < a < \frac{\pi}{2}$ ;  $\frac{\pi}{2} < b < \pi$  và  $\tan a = 3$ ;  $\tan b = -2$ .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\tan(a + \pi) = -3$		
(b)	$\tan(a + b) = -1$		
(c)	$\cot(a - b) = 1$		
(d)	$\sin(a - b) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$		

» **Câu 104.** Cho  $\sin x = -\frac{4}{5}$  và  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos 2x = -\frac{\sqrt{7}}{5}$		
(b)	$\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$		
(c)	$\tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$		
(d)	$C = \frac{2 \sin 2x - \cos 2x}{\tan 2x + \cos 2x} = \frac{-287}{551}$ .		

» **Câu 105.** Biết  $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A = \cos 2\alpha = \frac{3}{5}$		



(b)	$B = (1 + 3\sin^2 \alpha)(1 - 4\cos^2 \alpha) = \frac{17}{25}$		
(c)	$C = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{7}{25}$		
(d)	$D = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-7\sqrt{2}}{10}$		

» Câu 106. Cho tam giác  $ABC$ .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A = 180^\circ - (B + C)$		
(b)	$\sin B + \sin(A + C) = 0$		
(c)	$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$		
(d)	$\triangle ABC$ cân khi $\sin A \cdot \sin C = \cos A \cdot \cos C$		

» Câu 107. Biết  $\tan x = -\frac{1}{2}$  và  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

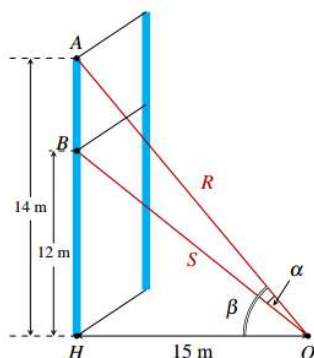
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cot x = -2$		
(b)	$\cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$		
(c)	$\sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$		
(d)	$M = \frac{2\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4\cos^2 x}{5\cos^2 x - \sin^2 x} = -\frac{8}{19}$		

» Câu 108. Trong vật lý, phương trình tổng quát của một vật giao động điều hòa được cho bởi công thức  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$  trong đó  $t$  là thời điểm (tính bằng giây),  $x(t)$  là li độ của vật tại thời điểm  $t$ ,  $A$  là biên độ dao động ( $A > 0$ ). (Dùng cho ba ý a, b, c).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Nếu một vật giao động theo phương trình $x(t) = 5 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ thì li độ của vật ở thời điểm ban đầu là $5\sqrt{2}$ .		
(b)	Một vật giao động điều hòa theo phương trình $x(t) = 10 \sin(50\pi t) \cdot \cos(50\pi t)$ thì biên độ của giao động là 5.		
(c)	Cho hai dao động điều hòa cùng phương có phương trình lần lượt là $x_1 = 5 \cos(100\pi t + \pi)$ (cm) và $x_2 = 5 \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ (cm). Khi đó phương trình dao động tổng hợp của hai dao động trên là $x = 5\sqrt{2} \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ (cm).		
(d)	Một sợi cáp $R$ được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14m. Một sợi cáp $S$ khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất		



tại một vị trí cách chân cột 15 m (Hình vẽ bên dưới). Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai sợi cáp trên khi đó  $\tan \alpha = \frac{10}{131}$ .



### C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 109.** Cho biểu thức  $P = \cos 5x \cdot \cos 3x - \cos(5x + 90^\circ) \cdot \cos(-3x - 90^\circ)$ . Sau khi đơn giản hóa, ta được biểu thức  $P = \cos(ax)$ . Giá trị của  $a$  bằng

» **Điền đáp số:**

» **Câu 110.** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ . Khi đó giá trị biểu thức  $P = \cos^2 2x + \cos^2 x$  bằng  $\frac{a}{b}$ . Tính  $a+b$ . Biết rằng phân số  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản.

» **Điền đáp số:**

» **Câu 111.** Tính giá trị biểu thức:  $A = \frac{\cos 10x - \cos 9x - \cos 8x + \cos 7x}{\sin 10x - \sin 9x - \sin 8x + \sin 7x}$  với  $x = \frac{\pi}{34}$  (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

» **Điền đáp số:**

» **Câu 112.** Cho  $\tan a = 2$  và  $a \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Tính  $A = 2\sqrt{2} \sin \frac{a}{2} \sin \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$  (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

» **Điền đáp số:**

» **Câu 113.** Cho  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Giá trị gần đúng của biểu thức  $E = \frac{2 \tan \alpha - \cot \alpha}{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}$  là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

» **Điền đáp số:**

» **Câu 114.** Cho biểu thức lượng giác sau (giả sử các biểu thức đều có nghĩa):

$A = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$ . Khi đó giá trị của  $10A$  bằng bao nhiêu?

» **Điền đáp số:**

» **Câu 115.** Đơn giản biểu thức  $P = \left(\frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cos \alpha}\right) \sin^2 \alpha$ .



Điền đáp số:

» Câu 116. Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị của tham số  $m$  sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = |\cos^4 x - \cos 2x + m|$  bằng 3. Tính tổng các phần tử của tập  $S$ .

Điền đáp số:

» Câu 117. Cho tam giác  $ABC$  có độ dài ba cạnh  $BC = a, AC = b, AB = c$  thỏa mãn  $a + c = 4b$ . Tính giá trị biểu thức  $P = \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}$ .

Điền đáp số:

» Câu 118. Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hòa cho bởi công thức  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ , trong đó  $t$  là thời điểm (tính bằng giây),  $x(t)$  là li độ của vật tại thời điểm  $t$ ,  $A$  là biên độ dao động ( $A > 0$ ) và  $\varphi \in [-\pi; \pi]$  là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hòa có phương trình:

$$x_1(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (cm)}, \quad x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm)}.$$

Tìm pha ban đầu của dao động tổng hợp này. Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

Điền đáp số:

Hết

TOÁN TỪ TÂM



## Chương 01

### Bài 4.

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A

## Lý thuyết

### 1. Định nghĩa hàm số lượng giác



Định nghĩa:

- **Hàm số sin** là quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực  $x$  với số thực  $\sin x$ , ký hiệu  $y = \sin x$ .
- **Hàm số cos** là quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực  $x$  với số thực  $\cos x$ , ký hiệu  $y = \cos x$ .
- **Hàm số tan** là hàm số được xác định bởi công thức:

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ với } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \text{ ký hiệu } y = \tan x.$$

- **Hàm số cotan** là hàm số được xác định bởi công thức:

$$y = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ với } x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \text{ ký hiệu } y = \cot x.$$

### Như vậy

- (1) Tập xác định của hàm số  $y = \sin x$  và  $y = \cos x$  là  $\mathbb{R}$
- (2) Tập xác định của hàm số  $y = \tan x$  là  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \right\}$
- (3) Tập xác định của hàm số  $y = \cot x$  là  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\}$

### 2. Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn



Hàm số chẵn - hàm số lẻ:

Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là

- **Hàm số chẵn** nếu  $\forall x \in D$  ta có  $-x \in D$  và  $f(-x) = f(x)$ .
- **Hàm số lẻ** nếu  $\forall x \in D$  ta có  $-x \in D$  và  $f(-x) = -f(x)$ .





**Hàm số tuần hoàn:**

Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số  $T \neq 0$  sao cho  $\forall x \in D$  ta có:

- (1)  $x + T \in D$  và  $x - T \in D$ .
- (2)  $f(x + T) = f(x)$ .

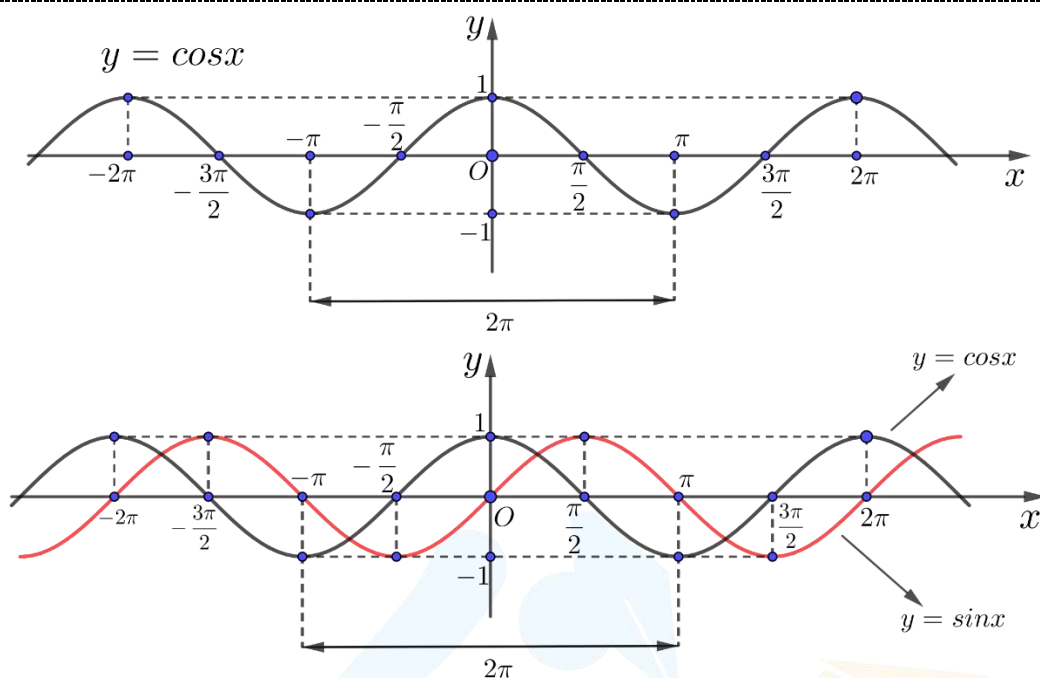
Số  $T$  dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là **chu kì** của hàm số tuần hoàn đó.

**Chú ý**

- (1) Hàm số  $y = \sin x$  và  $y = \cos x$  là các hàm số tuần hoàn với chu kì  $2\pi$ .
- (2) Hàm số  $y = \tan x$  và  $y = \cot x$  là các hàm số tuần hoàn với chu kì  $\pi$ .

**3. Đồ thị & tính chất hàm số  $y = \sin x$  và  $y = \cos x$**

	Hàm số $y = \sin x$	Hàm số $y = \cos x$
1. Định nghĩa:	Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x$ với sin của góc lượng giác có số đo $x$ radian được gọi là hàm số sin. » Kí hiệu $y = \sin x$ .	Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x$ với cos của góc lượng giác có số đo $x$ radian được gọi là hàm số cos. » Kí hiệu $y = \cos x$ .
2. Tập xác định:	$D = \mathbb{R}$	$D = \mathbb{R}$
3. Tập giá trị:	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
4. Tính chất	Là hàm số lẻ.	Là hàm số chẵn.
5. Chu kỳ	Chu kì $2\pi$ .	Chu kì $2\pi$ .
6. Đơn điệu	Hàm số + Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ . + Nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ .	Hàm số + Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ . + Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ .
7. Đồ thị		



**8. Giá trị đặc biệt**

$$\begin{aligned} \sin x = -1 &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi . \\ \sin x = 0 &\Leftrightarrow x = k\pi . \\ \sin x = 1 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi . \end{aligned}$$

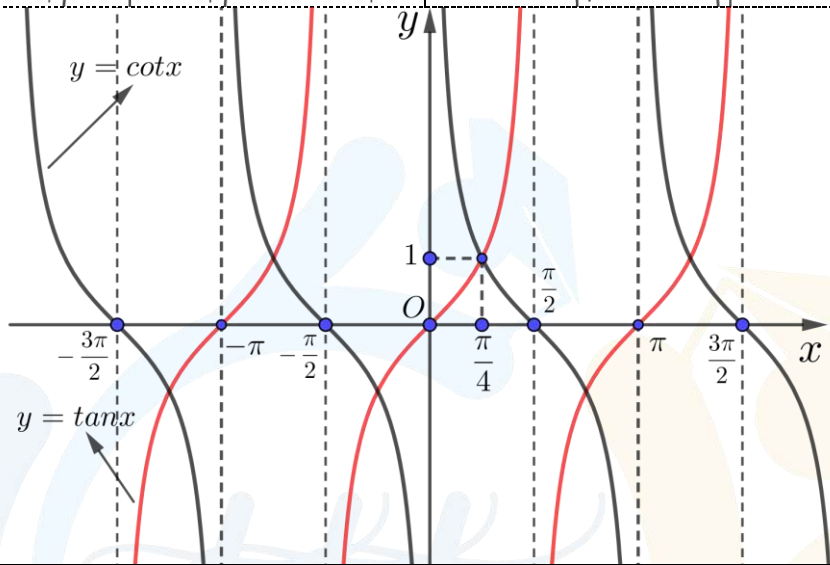
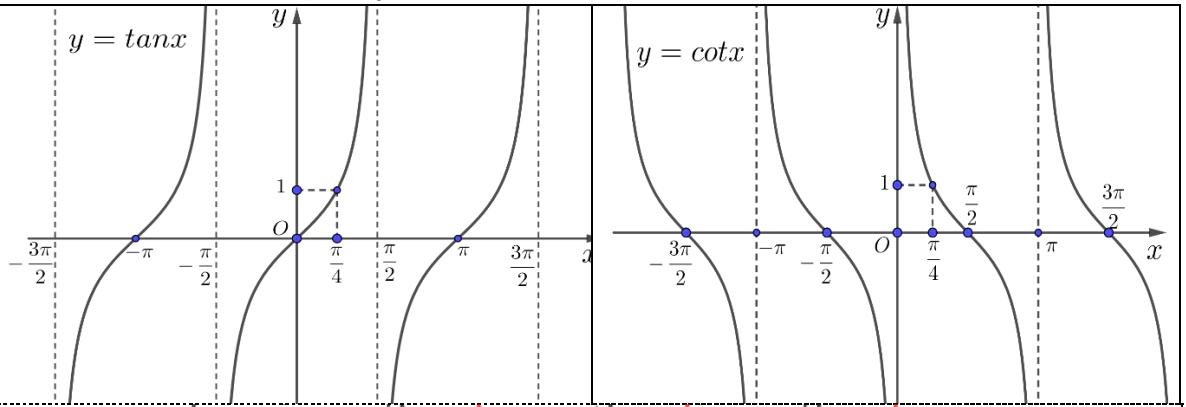
$$\begin{aligned} \cos x = -1 &\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi . \\ \cos x = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi . \\ \cos x = 1 &\Leftrightarrow x = k2\pi . \end{aligned}$$

**4. Đồ thị & tính chất hàm số  $y=\tan x$  và  $y=\cot x$**

	Hàm số $y = \tan x$	Hàm số $y = \cot x$
<b>1. Định nghĩa:</b>	Hàm số tan là hàm số được xác định bởi công thức $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ ( $\cos x \neq 0$ ) » Kí hiệu $y = \tan x$ .	Hàm số cotan là hàm số được xác định bởi công thức $y = \frac{\cos x}{\sin x}$ ( $\sin x \neq 0$ ) » Kí hiệu $y = \cot x$ .
<b>2. Tập xác định:</b>	$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
<b>3. Tập giá trị:</b>	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
<b>4. Tính chất hàm</b>	Là hàm số lẻ.	Là hàm số lẻ.
<b>5. Chu kỳ</b>	Chu kì $\pi$ .	Chu kì $\pi$ .
<b>6. Đơn điệu</b>	Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left( \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{3\pi}{2} + k\pi \right)$ .	Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ .



7. Đồ thị



TOÁN TỪ TÂM







## ➤ Dạng 2. Tính chẵn - lẻ



### Phương pháp

- ▶ **Định nghĩa:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $D$ 
  - » **Hàm số chẵn** nếu  $\forall x \in D$  ta có  $-x \in D$  và  $f(-x) = f(x)$ .
  - » **Hàm số lẻ** nếu  $\forall x \in D$  ta có  $-x \in D$  và  $f(-x) = -f(x)$ .
- ▶ Để xác định **tính chẵn lẻ** của hàm số ta thực hiện theo các bước sau:
  - » **Bước 1:** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số, khi đó:
    - ♦ Nếu  $D$  là tập đối xứng (tức là  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ ), ta thực hiện tiếp **bước 2**.
    - ♦ Nếu  $D$  không là tập đối xứng (tức là  $\exists x \in D$  mà  $-x \notin D$ ), ta kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.
  - » **Bước 2:** Xác định  $f(-x)$ , khi đó:
    - ♦ Nếu  $f(-x) = f(x)$  kết luận hàm số là hàm chẵn.
    - ♦ Nếu  $f(-x) = -f(x)$  kết luận hàm số là hàm lẻ.
    - ♦ Ngoài ra kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

### ▶ Chú ý:

- ① Với các hàm số lượng giác cơ bản, ta có:
 

1. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.	2. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn
3. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.	4. Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.
- ② Công thức liên quan đến việc xử lí dấu “ - ”

1. Công thức hai cung đối nhau:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(-x) = -\sin x \\ \cos(-x) = \cos x \\ \tan(-x) = -\tan x \\ \cot(-x) = -\cot x \end{array} \right.$$

2.  $|-x| = |x|$

3.  $(-x)^n = \begin{cases} x^n & \text{khi } n:2 \\ -x^n & \text{khi } n \not:2 \end{cases}$



### Ví dụ 2.1.

Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

(1)  $y = 3 \cos x + \sin^2 x$

(2)  $y = \frac{1 + \sin^2 2x}{1 + \cos 3x}$

### ➤ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....





### Chú ý

Đôi khi người ta còn phát biểu bài toán dưới dạng:

» Với câu (1)  $y = 2x \sin x$ :

*Chứng minh đồ thị hàm số  $y = 2x \sin x$  nhận trục tung làm trục đối xứng.*

» Với câu (3)  $y = \frac{\cos 2x}{x}$  .:

*Chứng minh đồ thị hàm số  $y = \frac{\cos 2x}{x}$  nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.*

» Đồ thị của hàm số lẻ nhận nhận **gốc tọa độ** làm **tâm đối xứng**.

» Đồ thị của hàm số chẵn nhận nhận **trục Oy** làm **trục đối xứng**.



TOÁN TỬ TÂM





### ➤ Dạng 3. Tính tuần hoàn



#### Phương pháp

► **Tính tuần hoàn** hàm số lượng giác cơ bản:

- (1) Hàm số  $y = \sin x$  và  $y = \cos x$  là các hàm số tuần hoàn với chu kì  $2\pi$ .
- (2) Hàm số  $y = \tan x$  và  $y = \cot x$  là các hàm số tuần hoàn với chu kì  $\pi$ .

► Các kết quả có thể áp dụng:

- (1) Hàm số  $y = A \cdot \sin(ax + b)$  ( $A \cdot a \neq 0$ ) là một hàm số tuần hoàn với chu kì  $T = \frac{2\pi}{|a|}$
- (2) Hàm số  $y = A \cdot \cos(ax + b)$  ( $A \cdot a \neq 0$ ) là một hàm số tuần hoàn với chu kì  $T = \frac{2\pi}{|a|}$
- (3) Hàm số  $y = A \cdot \tan(ax + b)$  ( $A \cdot a \neq 0$ ) là một hàm số tuần hoàn với chu kì  $T = \frac{\pi}{|a|}$
- (4) Hàm số  $y = A \cdot \cot(ax + b)$  ( $A \cdot a \neq 0$ ) là một hàm số tuần hoàn với chu kì  $T = \frac{\pi}{|a|}$
- (5) Nếu hàm số  $y = f(x)$  chỉ chứa các hàm số lượng giác có chu kì lần lượt là  $T_1, T_2, \dots, T_n$  thì hàm số  $f$  có chu kì  $T$  là bội chung nhỏ nhất của  $T_1, T_2, \dots, T_n$ .
- (6) Nếu hàm số  $y = f(x)$  tuần hoàn với chu kì  $T$  thì hàm số  $y = f(x) + c$  ( $c$  là hằng số) cũng là hàm số tuần hoàn với chu kì  $T$ .



#### Chú ý

**Một số dấu hiệu nhận biết hàm số  $y = f(x)$  không phải là hàm tuần hoàn**

Hàm số  $y = f(x)$  không phải là hàm tuần hoàn khi **một** trong các điều kiện sau bị vi phạm:

- (1) Tập xác định của hàm số là tập hữu hạn.
- (2) Tồn tại số  $a$  sao cho hàm số không xác định với  $x > a$  hoặc  $x < a$ .
- (3) Phương trình  $f(x) = k$  có nghiệm nhưng số nghiệm hữu hạn.
- (4) Phương trình  $f(x) = k$  có vô số nghiệm sắp thứ tự:

$$\dots < x_n < x_{n+1} < \dots \text{ mà } |x_n - x_{n+1}| \rightarrow 0 \text{ hay } \infty.$$



#### Ví dụ 3.1.

Tìm chu kì (nếu có) của các hàm số sau:

- |   |                                    |
|---|------------------------------------|
| (1) $y = 1 - \sin 5x$   | (2) $y = \cos^2 x - 1$             |
| (3) $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right)$ | (4) $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$ |

➤ **Lời giải**









## Luyện tập

### A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Tập xác định của hàm số  $y = \tan 2x$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

» Câu 2. Tập xác định của hàm số  $y = \sin x$  là

A.  $[-1; 1]$ .

B.  $(-1; 1)$ .

C.  $(0; +\infty)$ .

D.  $\mathbb{R}$ .

» Câu 3. Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{\sin x}$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{0; \pi\}$ .

» Câu 4. Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{\sin 2x + 1}$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

» Câu 5. Hàm số  $y = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x}$  không xác định trong khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A.  $\left( \frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{4} + k2\pi \right), k \in \mathbb{Z}$ .

B.  $\left( \frac{3\pi}{4} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi \right)$ .

C.  $\left( \pi + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi \right), k \in \mathbb{Z}$ .

D.  $\left( -\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi \right), k \in \mathbb{Z}$ .

» Câu 6. Tập xác định của hàm số  $y = \cot 2x - \tan x$  là:

A.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

B.  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

C.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

D.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

» Câu 7. Chọn phát biểu đúng:

A. Các hàm số  $y = \sin x, y = \cos x, y = \cot x$  đều là hàm số chẵn.

B. Các hàm số  $y = \sin x, y = \cos x, y = \cot x$  đều là hàm số lẻ.

C. Các hàm số  $y = \sin x, y = \cot x, y = \tan x$  đều là hàm số chẵn

D. Các hàm số  $y = \sin x, y = \cot x, y = \tan x$  đều là hàm số lẻ.

» Câu 8. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua trục tung?

A.  $y = \tan x$ .

B.  $y = \cos x$ .

C.  $y = \sin x$ .

D.  $y = \cot x$ .

» Câu 9. Trong các hàm số sau, hàm số nào tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$ ?



A.  $y = \sin x$ .      B.  $y = \tan x$ .      C.  $y = \cot x$ .      D.  $y = \cos 2x$ .

» Câu 10. Chu kì tuần hoàn của hàm số  $\tan x + \sin^2 x$  là

A.  $k2\pi$ .      B.  $2\pi$ .      C.  $\pi$ .      D.  $4\pi$ .

» Câu 11. Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

A.  $y = 2x + \cos x$ .      B.  $y = \cos 3x$ .      C.  $y = x^2 \sin(x+3)$ .      D.  $y = \frac{\cos x}{x^3}$ .

» Câu 12. Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

A.  $y = \cot 4x$ .      B.  $y = \frac{\sin x + 1}{\cos x}$ .      C.  $y = \tan^2 x$ .      D.  $y = |\cot x|$ .

» Câu 13. Cho hai hàm số  $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x}$  và  $g(x) = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x}$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A.  $f(x)$  lẻ và  $g(x)$  chẵn.      B.  $f(x)$  và  $g(x)$  chẵn.  
C.  $f(x)$  chẵn,  $g(x)$  lẻ.      D.  $f(x)$  và  $g(x)$  lẻ.

» Câu 14. Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

A.  $y = \frac{1}{\sin^3 x}$ .      B.  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .      C.  $y = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ .      D.  $y = \sqrt{\sin 2x}$ .

» Câu 15. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) - 1$  lần lượt là:

A. 4; -2.      B. 2; -4.      C. 1; -1.      D. 3; -3.

» Câu 16. Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 6\cos 2x - 7$  trên

đoạn  $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right]$ . Tính  $M + m$ .

A. -14.      B. 3.      C. -11.      D. -10.

» Câu 17. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 2\sin^2 x + 3\sin 2x - 4\cos^2 x$ .

A.  $\min y = -3\sqrt{2} - 1$ ;  $\max y = 3\sqrt{2} + 1$ .      B.  $\min y = -3\sqrt{2} - 2$ ;  $\max y = 3\sqrt{2} - 1$ .  
C.  $\min y = -3\sqrt{2}$ ;  $\max y = 3\sqrt{2} - 1$ .      D.  $\min y = -3\sqrt{2} - 1$ ;  $\max y = 3\sqrt{2} - 1$ .

» Câu 18. Xét sự biến thiên của hàm số  $y = \tan 2x$  trên một chu kì tuần hoàn. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

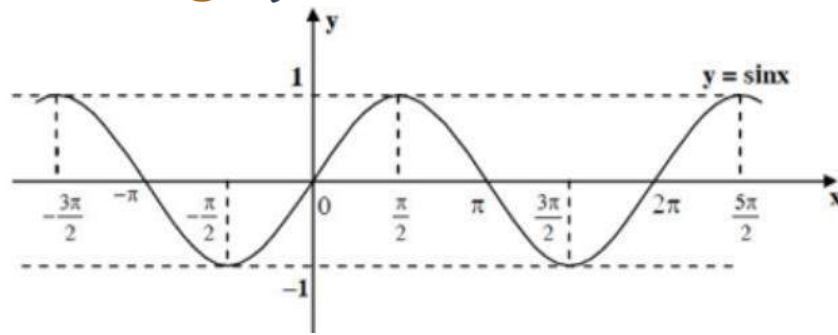
A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$  và  $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$  và nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

C. Hàm số đã cho luôn đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$  và đồng biến trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

» Câu 19. Cho đồ thị hàm số lượng giác  $y = \sin x$  như hình vẽ dưới đây:



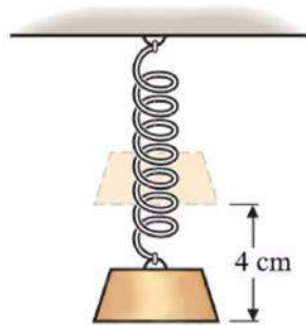
Hàm số  $y = |\sin x|$  có bao nhiêu lần đạt giá trị bằng 1 trong đoạn  $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ ?

- A. 5                      B. 1                      C. 3                      D. 7

» **Câu 20.** Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu tương ứng được gọi là huyết áp tâm thu và huyết áp tâm trương. Chỉ số huyết áp của chúng ta được tính bằng huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương. Giả sử huyết áp của người đó thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức:  $p(t) = 115 + 25\sin(160\pi t)$  trong đó  $p(t)$  là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimet thủy ngân) và thời gian  $t$  tính theo đơn vị phút. Khi đó, chỉ số huyết áp bằng

- A.  $\frac{115}{90}$                       B.  $\frac{150}{60}$                       C.  $\frac{120}{80}$                       D.  $\frac{140}{90}$

» **Câu 21.** Một con lắc lò xo sau khi được kéo xuống dưới vị trí cân bằng 4 cm và thả ra thì nó dao động điều hòa với phương trình:  $y = -4\cos 8t$  (cm) (tham khảo hình vẽ).



Biên độ  $A$  cm và chu kỳ  $T$  của dao động là

- A.  $A = 4\text{ cm}; T = \frac{\pi}{4}$     B.  $A = 4\text{ cm}; T = \frac{\pi}{2}$     C.  $A = 8\text{ cm}; T = \frac{\pi}{4}$     D.  $A = 4\text{ cm}; T = 2\pi$

» **Câu 22.** Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu  $h$  (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm  $t$  (giờ) trong một ngày bởi công thức

$$h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{7=8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12. \text{ Mực nước của kênh cao nhất khi:}$$

- A.  $t = 13$  (giờ).                      B.  $t = 14$  (giờ).                      C.  $t = 15$  (giờ).                      D.  $t = 16$  (giờ).

» **Câu 23.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-10; 10]$  để hàm số

$$y = \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x + m - 1} \text{ xác định trên } \mathbb{R}.$$

- A. 8.                      B. 9.                      C. 12.                      D. 13.



» **Câu 24.** Số giờ có ánh sáng của một thành phố  $A$  trong ngày thứ  $t$  của năm 2021 được cho bởi một hàm số  $y = 4 \sin \left| \frac{\pi}{178}(t - 60) \right| + 10$ , với  $t \in \mathbb{Z}$  và  $0 < t \leq 365$ . Vào ngày nào trong năm thì thành phố  $A$  có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất?

- A.** 28 tháng 5.      **B.** 29 tháng 5.      **C.** 30 tháng 5.      **D.** 31 tháng 5.

**B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai**

» **Câu 25.** Cho hàm số  $y = 3 - \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right)$ , khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$		
(b)	Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2		
(c)	Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4		
(d)	Tập giá trị của hàm số là $T = [2; 4]$		

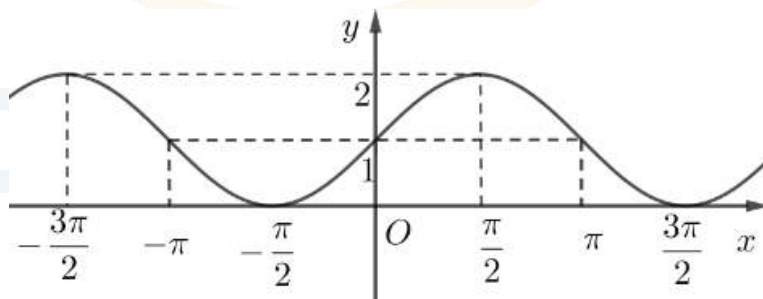
» **Câu 26.** Cho hàm số  $f(x) = \tan 2x - 1$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Giá trị của hàm số tại $x = \frac{\pi}{8}$ bằng 0		
(b)	Giá trị của hàm số tại $x = \frac{\pi}{3}$ bằng $-\sqrt{3} - 1$		
(c)	Có ba giá trị $x$ thuộc $[0; \pi]$ khi hàm số đạt giá trị bằng $-2$ .		
(d)	Hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.		

» **Câu 27.** Cho hàm số  $f(x) = |x| \sin x$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .		
(b)	$f(-\pi) = -f(\pi)$ .		
(c)	Đồ thị hàm số đã cho đối xứng qua gốc tọa độ $O(0; 0)$ .		
(d)	$f(-x) = -f(x)$ .		

» **Câu 28.** Hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như sau



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số có tập xác định $D = \left[ -\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$ .		
(b)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\pi; 0)$ .		





(c)	Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ .		
(d)	Tập giá trị của hàm số là $[0; 2]$ .		

» Câu 29. Cho hàm số  $f(x) = |\tan x| + |x^3 - 3x|$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .		
(b)	Hàm số đã cho là hàm số chẵn.		
(c)	$f(-\pi) = -f(\pi)$		
(d)	Đồ thị hàm số đã cho đối xứng qua gốc tọa độ $O(0; 0)$		

» Câu 30. Cho hàm số  $f(x) = 2\cos x + 1$  và  $g(x) = \sin x + \tan x$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tập xác định hàm số $f(x): D = \mathbb{R}$ .		
(b)	Hàm số $f(x)$ là hàm tuần hoàn.		
(c)	Tập xác định hàm số $g(x): D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .		
(d)	Hàm số $g(x)$ là hàm không tuần hoàn.		

» Câu 31. Cho hàm số  $f(x) = \tan x$  và  $g(x) = \cot^2 x - \frac{\sin 2x}{2}$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tập xác định hàm số $f(x): D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .		
(b)	Hàm số $f(x)$ là hàm không tuần hoàn.		
(c)	Tập xác định hàm số $g(x): D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .		
(d)	Hàm số $g(x)$ là hàm tuần hoàn.		

» Câu 32. Cho hàm số  $f(x) = 2 + 3\cos x$  và  $g(x) = \sin x + \cos x$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ bằng 5		
(b)	Hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = \pi + k2\pi$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )		
(c)	Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ bằng $-\sqrt{2}$		
(d)	Hàm số $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )		

» Câu 33. Cho các hàm số sau:  $f(x) = \sqrt{5 - 3\sin^2 x}$ ;  $g(x) = \tan x - x \cos x$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tập xác định hàm số $f(x)$ là: $D = \mathbb{R}$ .		
(b)	Hàm số $f(x)$ đã cho là hàm số lẻ.		



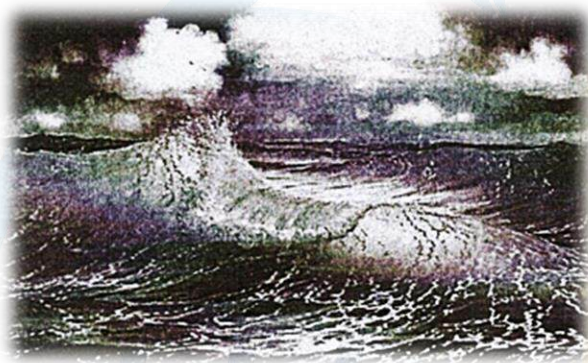
(c) Tập xác định hàm số  $g(x)$  là:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

(d) Hàm số  $g(x)$  đã cho là hàm số lẻ.

» Câu 34. Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu  $h$  (mét) của mực nước trong kênh tính theo thời gian  $t$  (giờ) được cho bởi công thức  $h(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + 14$ .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Công thức tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$ .		
(b)	Chiều sâu của mực nước thấp nhất là 11m.		
(c)	Chiều sâu của mực nước cao nhất là 14m.		
(d)	Thời gian để mực nước cao nhất là $t = 9$ .		

» Câu 35. Chiều cao so với mực nước biển trung bình tại thời điểm  $t$  (giây) của mỗi con sóng được cho bởi hàm số  $h(t) = 75 \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)$ , trong đó  $h(t)$  được tính bằng centimét.



(Tất cả kết quả được làm tròn đến hàng phần mười)

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Chiều cao của sóng tại các thời điểm 5 giây bằng 69,3 (cm)		
(b)	Chiều cao của sóng tại các thời điểm 20 giây bằng 75 (cm)		
(c)	Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 6 giây		
(d)	Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 18 giây		

### C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 36. Tập giá trị của hàm số:  $y = 5 + 4 \sin 2x \cos 2x$  có dạng  $[a; b]$  với  $a; b$  là các số nguyên.

Tính giá trị  $S = a^2 - 2ab$

Điền đáp số:

» Câu 37. Tập giá trị của hàm số:  $y = \sin^6 x + \cos^6 x$  có dạng  $\left[\frac{a}{b}; 1\right]$  với  $a; b$  là các số nguyên,  $\frac{a}{b}$  là

phân số tối giản. Tính giá trị  $S = a + ab^2$

Điền đáp số:



» **Câu 38.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  trong đoạn  $[0;10]$  để hàm số

$$y = \sqrt{m - 2 \sin x} \text{ xác định trên } \mathbb{R}.$$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 39.** Số giờ có ánh sáng của thành phố  $T$  ở vĩ độ  $40^\circ$  bắc trong ngày thứ  $t$  của một năm không nhận được cho bởi hàm số  $d(t) = 3 \cdot \sin \left[ \frac{\pi}{182}(t - 80) \right] + 12$  với  $t \in \mathbb{Z}$  và  $0 < t \leq 365$ .

Bạn An muốn đi tham quan thành phố  $T$  nhưng lại không thích ánh sáng mặt trời, vậy bạn An nên chọn đi vào ngày nào trong năm để thành phố  $T$  có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

» **Điền đáp số:**

» **Câu 40.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  trong đoạn  $[-10;10]$  để hàm số

$$y = \frac{\sin x - 1}{\cos x + m} \text{ có tập xác định } \mathbb{R}.$$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 41.** Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số:  $y = 2 \cos \left( x - \frac{\pi}{3} \right) - 1$ .

» **Điền đáp số:**

» **Câu 42.** Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số:  $y = \sqrt{1 + \sin x} - 3$ . Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

» **Điền đáp số:**

» **Câu 43.** Hàm số  $y = 1 - 3\sqrt{1 - \cos^2 x}$  đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm  $x = \frac{a}{b}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , với  $a; b$  là các số nguyên,  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính giá trị  $S = a + ab^2$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 44.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \sqrt{\frac{m-1}{m}} - 2 \cos 4x$  xác định trên  $\mathbb{R}$ .

» **Điền đáp số:**

» **Câu 45.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [-2024; 2024]$  để hàm số

$$y = \sqrt{\sin^2 x - 2 \sin x + 1 - m} \text{ xác định trên } \mathbb{R}?$$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 46.** Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + 3. \text{ Tính } M + m.$$

» **Điền đáp số:**



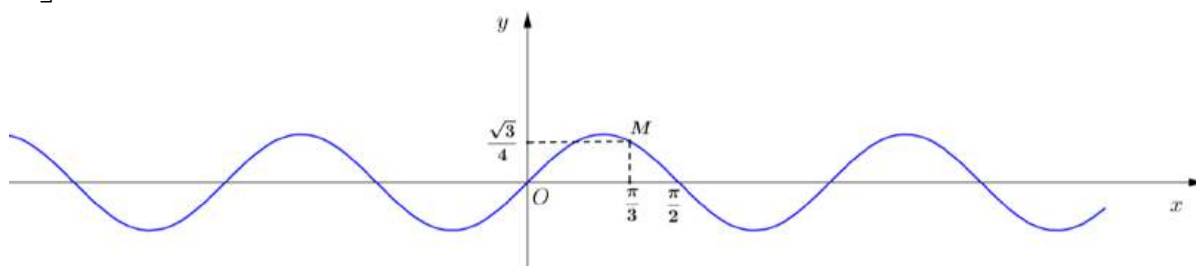
» **Câu 47.** Trong các hàm số  $y = \sin 2x$ ,  $y = \tan|x|$ ,  $y = \tan x + \cot x$ ,  $y = 2 \sin x + 3$  có bao nhiêu hàm số lẻ?

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 48.** Tìm chu kì tuần hoàn của hàm số  $f(x) = \tan 2x$  (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 49.** Cho hàm số  $y = k \sin(tx)$  với  $k, t \in \mathbb{R}$  có đồ thị như hình vẽ. Hàm số có tập giá trị là  $[a, b]$ . Tính  $T = 2a + 6b$ .



✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 50.** Số giờ có ánh sáng của một thành phố  $A$  trong ngày thứ  $t$  của năm 2024 được cho bởi một hàm số  $y = 4 \sin\left[\frac{\pi}{178}(t - 60)\right] + 10$ , với  $t \in \mathbb{Z}$  và  $0 < t \leq 365$ . Vào ngày nào trong tháng 5 năm 2024 thì thành phố  $A$  có số giờ ánh sáng mặt trời chiếu nhiều nhất?

✎ **Điền đáp số:**

----- Hết -----

TOÁN TỪ TÂM



## Chương 01

### Bài 5.

# PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A

## Lý thuyết

### 1. Khái niệm phương trình tương đương



Định nghĩa:

- Hai phương trình được gọi là tương đương khi chúng có cùng tập nghiệm.
- Nếu phương trình  $f(x)=0$  tương đương với phương trình  $g(x)=0$  thì ta viết:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0$$

### Chú ý

- » Để giải phương trình, ta biến đổi phương trình đó thành một phương trình tương đương đơn giản hơn. Các phép biến đổi như vậy được gọi là các phép biến đổi tương đương.
- » Ta có một số phép biến đổi tương đương thường sử dụng sau:
  - (1) **Cộng** hoặc **trừ** hai vế của phương trình với cùng 1 số hoặc cùng 1 biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình.
  - (2) **Nhân** hoặc **chia** hai vế của phương trình với cùng 1 số khác 0 hoặc cùng 1 biểu thức luôn có giá trị khác 0 mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình.
- » Để chỉ sự tương đương của các phương trình, người ta dùng kí hiệu " $\Leftrightarrow$ "

### 2. Phương trình $\sin x = a$



Xét phương trình  $\sin x = a$  (1)

- Nếu  $|a| > 1$  thì phương trình (1) vô nghiệm.
- Nếu  $|a| \leq 1$  thì phương trình (1) có nghiệm 
$$\begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$



**Chú ý**

»  $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

» Trường hợp đặc biệt:

(1)  $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

(2)  $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(3)  $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

» Phương trình  $\sin x = \sin \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k.360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k.360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

### 3. Phương trình $\cos x = a$



Xét phương trình  $\cos x = a$  (1)

• Nếu  $|a| > 1$  thì phương trình (1) vô nghiệm.

• Nếu  $|a| \leq 1$  thì phương trình (1) có nghiệm  $\begin{cases} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

**Chú ý**

»  $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

» Trường hợp đặc biệt:

(1)  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(2)  $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

(3)  $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

» Phương trình  $\cos x = \cos \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k.360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k.360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

### 4. Phương trình $\tan x = a$ & $\cot x = a$



Phương trình	$\tan x = a$	$\cot x = a$
Điều kiện	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$	$x \neq k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$
Nghiệm	$x = \arctan(a) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = \text{arccot}(a) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



**Chú ý**

$$\gg \tan u = \tan v \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ (hay } v \neq \frac{\pi}{2} + k\pi) \\ u = v + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\gg \cot u = \cot v \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq k\pi \text{ (hay } v \neq k\pi) \\ u = v + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

» Trường hợp đặc biệt:

$$(1) \quad \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(4) \quad \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(5) \quad \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(3) \quad \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(6) \quad \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

» Phương trình  $\tan x = \tan \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k.180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

» Phương trình  $\cot x = \cot \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k.180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

TOÁN TỪ TÂM



**B**

**Các dạng bài tập**

**Dạng 1. Phương trình  $\sin x = a$**



**Phương pháp**

Xét phương trình  $\sin x = a$  (1)

» Nếu  $|a| > 1$  thì phương trình (1) vô nghiệm.

» Nếu  $|a| \leq 1$  thì phương trình (1) có nghiệm  $\begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

**Chú ý:**

»  $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

» Trường hợp đặc biệt:

(1)  $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

(2)  $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(3)  $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

» Phương trình  $\sin x = \sin \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k.360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k.360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$



**Ví dụ 1.1.**

Giải các phương trình sau

(1)  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)  $\sin(x - 60^\circ)$

(3)  $\sin 3x = -\frac{4}{3}$

(4)  $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(5)  $2 \sin(3x + 1) = 1$

(6)  $\sin\left[\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 0$

**Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....











➤ **Dạng 3. Phương trình  $\tan x = a$  và  $\cot x = a$**



**Phương pháp**

Xét phương trình  $\cos x = a$  (1)

Phương trình	$\tan x = a$	$\cot x = a$
Điều kiện	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$	$x \neq k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$
Nghiệm	$x = \arctan(a) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = \operatorname{arccot}(a) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**Chú ý:**

»  $\tan u = \tan v \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ (hay } v \neq \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z} \\ u = v + k\pi \end{cases}$

»  $\cot u = \cot v \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq k\pi \text{ (hay } v \neq k\pi), k \in \mathbb{Z} \\ u = v + k\pi \end{cases}$

» Trường hợp đặc biệt:

(1)  $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(4)  $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(2)  $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(5)  $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(3)  $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(6)  $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

» Phương trình  $\cot x = \cot \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

» Phương trình  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$



**Ví dụ 3.1.**

Giải các phương trình sau

(1)  $\tan 2x = \tan \frac{2\pi}{7}$

(2)  $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{3}$

(3)  $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

(4)  $\cot\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

(5)  $\left(\cot \frac{x}{2} - 1\right)\left(\cot \frac{x}{2} + 1\right) = 0$

(6)  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2 \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

➤ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Handwriting practice area consisting of multiple horizontal dotted lines for writing.





### Dạng 4. Phương trình có nghiệm thuộc khoảng - đoạn



#### Phương pháp

Phương pháp tìm nghiệm trong khoảng, đoạn  $(a;b)$  hoặc  $[a;b]$  hoặc  $[a;b)$  hoặc  $(a;b]$ :

- » **Bước 1:** Giải phương trình (đưa về phương trình cơ bản).
- » **Bước 2:** Ứng với mỗi nghiệm thuộc khoảng đoạn, tìm điều kiện của các số nguyên  $k$  thỏa mãn.

**Ví dụ:** Ở bước 1 ta tìm được họ nghiệm 
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

$$\text{Với } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi : a < -\frac{\pi}{4} + k\pi < b \longrightarrow k = ?$$

$$\text{Với } x = \frac{3\pi}{2} + k\pi : a < \frac{3\pi}{2} + k\pi < b \longrightarrow k = ?$$

- » **Bước 3:** Kết luận nghiệm.



#### Ví dụ 4.1.

Giải phương trình lượng giác  $\cos x = 0$  trên khoảng  $(0; 2\pi)$ .

✎ *Lời giải*

.....  
.....  
.....  
.....  
.....



#### Ví dụ 4.2.

Tìm nghiệm của phương trình  $2 \sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3}$  trên khoảng  $(-180^\circ; 180^\circ)$ .

✎ *Lời giải*

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



**Ví dụ 4.3.**

Giải phương trình lượng giác  $\tan x = -1$  trên khoảng  $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ .

*Lời giải*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



**Ví dụ 4.4.**

Giải phương trình lượng giác  $\cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$  trên khoảng  $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ .

*Lời giải*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



**Ví dụ 4.5.**

Tìm nghiệm của phương trình  $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$  trên đoạn  $[2\pi; 4\pi]$

*Lời giải*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



## ➤ Dạng 5. Bài toán thực tế liên quan phương trình lượng giác



### Phương pháp

- » **Bước 1:** Đọc và hiểu nội dung bài toán thực tế đã cho.
- » **Bước 2:** Phân tích bài toán để nhận diện bài toán thuộc nội dung kiến thức liên quan đến hàm số lượng giác, phương trình lượng giác nào.
- » **Bước 3:** Dùng kiến thức đã học, giải bài toán và kết luận nghiệm.



### Ví dụ 5.1.

Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ  $t$  của năm 2017 được cho bởi một hàm số  $y = 4 \sin \left[ \frac{\pi}{178} (t - 60) \right] + 10$  với  $t \in \mathbb{Z}$  và  $0 < t \leq 365$ . Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

#### ➤ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



### Ví dụ 5.2.

Chiều cao  $h(m)$  của một cabin trên vòng quay vào thời điểm  $t$  giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức  $h(t) = 30 + 20 \sin \left( \frac{\pi}{25} t + \frac{\pi}{3} \right)$ . Sau 2 phút kể từ khi bắt đầu chuyển động, Cabin đạt độ cao tối đa bao nhiêu lần?

#### ➤ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

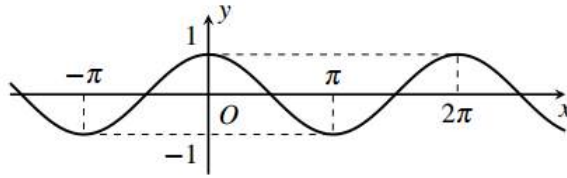




## Luyện tập

### A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

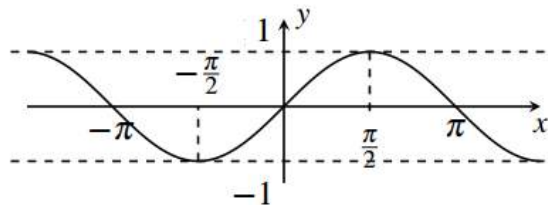
» Câu 1. Cho hàm số  $y = \cos x$  có đồ thị như hình vẽ.



Nghiệm của phương trình  $\cos x = -1$  trong khoảng  $(0; 2\pi)$  là:

- A.  $x = 0$ .                      B.  $x = \pi$ .                      C.  $x = 2\pi$ .                      D.  $x = \frac{\pi}{2}$ .

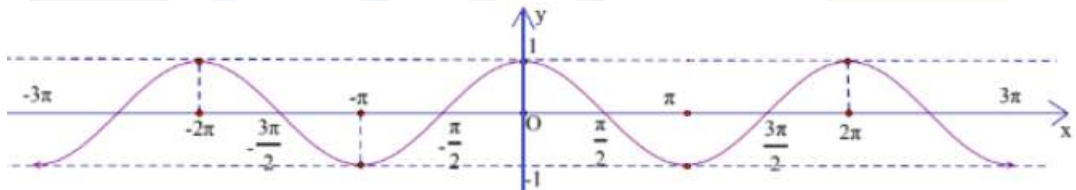
» Câu 2. Cho hàm số  $y = \sin x$  có đồ thị như hình vẽ.



Nghiệm của phương trình  $\sin x = 1$  trong khoảng  $(0; \pi)$  là:

- A.  $x = 0$ .                      B.  $x = \pi$ .                      C.  $x = -\frac{\pi}{2}$ .                      D.  $x = \frac{\pi}{2}$ .

» Câu 3. Cho hàm số  $y = \cos x$  có đồ thị như hình vẽ.



Tập nghiệm của phương trình  $\cos x = 1$  là?

- A.  $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .                      B.  $x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .  
C.  $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .                      D.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

» Câu 4. Phương trình  $\cos x = 0$  có nghiệm là:

- A.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .                      B.  $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .  
C.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .                      D.  $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

» Câu 5. Phương trình  $2.\sin x - 1 = 0$  có tập nghiệm là

- A.  $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .                      B.  $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
C.  $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .                      D.  $S = \left\{ \frac{1}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .



» **Câu 6.** Phương trình  $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$  có tất cả các nghiệm là:

**A.**  $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

**B.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

**C.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

**D.**  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

» **Câu 7.** Tất cả các nghiệm của phương trình  $\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$  là

**A.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**B.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**C.**  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

**D.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

» **Câu 8.** Nghiệm của phương trình  $\cos x = \frac{1}{2}$  là

**A.**  $x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

**B.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi.$

**C.**  $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi.$

**D.**  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi.$

» **Câu 9.** Phương trình  $\cos 2\pi x = \frac{2025}{2024}$  có bao nhiêu nghiệm trong  $(-\pi; \pi)$

**A.** 1.

**B.** 0.

**C.** 2.

**D.** 5.

» **Câu 10.** Nghiệm của phương trình  $2\cos(x - 15^\circ) - 1 = 0$  là

**A.**  $\begin{cases} x = 75^\circ + k360^\circ \\ x = 135^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**B.**  $\begin{cases} x = 60^\circ + k360^\circ \\ x = -60^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**C.**  $\begin{cases} x = 45^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**D.**  $\begin{cases} x = 75^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

» **Câu 11.** Giải phương trình  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**A.**  $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

**B.**  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

**C.**  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

**D.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

» **Câu 12.** Nghiệm của phương trình  $\cos x = \cos \frac{\pi}{12}$  là

**A.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{11\pi}{12} + l2\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}).$

**B.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + l2\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}).$

**C.**  $x = \frac{\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

**D.**  $x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$



» **Câu 13.** Phương trình  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$  có nghiệm là

- A.  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .      B.  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .      C.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .      D.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

» **Câu 14.** Giải phương trình  $\cos x = 1$ .

- A.  $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .      B.  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
C.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .      D.  $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

» **Câu 15.** Phương trình  $2\sin x - \sqrt{3} = 0$  có tập nghiệm là:

- A.  $\left\{\pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .      B.  $\left\{\pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .  
C.  $\left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .      D.  $\left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

» **Câu 16.** Tổng các nghiệm của phương trình  $2\sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3}$  trên khoảng  $(-180^\circ; 180^\circ)$  là

- A.  $20^\circ$ .      B.  $100^\circ$ .      C.  $80^\circ$ .      D.  $120^\circ$ .

» **Câu 17.** Tìm tổng các nghiệm của phương trình  $\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  trên  $[0; \pi]$ .

- A.  $\frac{47\pi}{18}$ .      B.  $\frac{4\pi}{18}$ .      C.  $\frac{45\pi}{18}$ .      D.  $\frac{7\pi}{18}$ .

» **Câu 18.** Số nghiệm phương trình  $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$  thuộc đoạn  $[2\pi; 4\pi]$  là

- A. 7.      B. 6.      C. 4.      D. 5.

» **Câu 19.** Với những giá trị nào của  $x$  thì giá trị của các hàm số  $y = \sin 3x$  và  $y = \sin x$  bằng nhau?

- A.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .      B.  $x = k\frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$ .  
C.  $x = k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .      D.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

» **Câu 20.** Số nghiệm của phương trình  $\sin x = 0$  trên đoạn  $[0; \pi]$  là

- A. 1.      B. 2.      C. 0.      D. 5.

» **Câu 21.** Nghiệm của phương trình  $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 1 = 0$  là

- A.  $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .      B.  $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
C.  $x = -\frac{7\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .      D.  $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

» **Câu 22.** Tập nghiệm của phương trình  $\cos 3x + \sin \frac{2\pi}{3} = 0$  là

- A.  $\left\{\pm \frac{5\pi}{16} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .      B.  $\left\{\pm \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .



C.  $\left\{ \pm \frac{5\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

D.  $\left\{ \pm \frac{5\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

» Câu 23. Trong các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm?

A.  $\cos x = 3$ .

B.  $\sin 2x = -2$ .

C.  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$ .

D.  $\cos(2x - 1) = \frac{\sqrt{7}}{2}$ .

» Câu 24. Phương trình nào sau đây có nghiệm?

A.  $\sin 2021x - 2 = 0$ .

B.  $\cos(2x + 2021) = 3$ .

C.  $\sin^2 x + 1 = 0$ .

D.  $\cos(2x + 2021) = -1$ .

» Câu 25. Phương trình  $2\sin x + \sqrt{3} = 0$  có tổng nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất bằng

A.  $\frac{4\pi}{3}$ .

B.  $2\pi$ .

C.  $\frac{\pi}{3}$ .

D.  $\pi$ .

» Câu 26. Nghiệm của phương trình  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$  là

A.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$ .

B.  $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}$ .

C.  $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$ .

D.  $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}$ .

» Câu 27. Tập nghiệm của phương trình  $\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$  là?

A.  $x = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

B.  $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

C.  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

D.  $x = -\frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

» Câu 28. Cho phương trình  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Số nghiệm của phương trình trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$  là?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

» Câu 29. Phương trình  $3\cos^2 x + 7\cos x - 10 = 0$  có nghiệm là?

A.  $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

B.  $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

C.  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

D.  $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

» Câu 30. Phương trình  $\cos(2x + 30^\circ) + \sin x = 0$  có nghiệm là

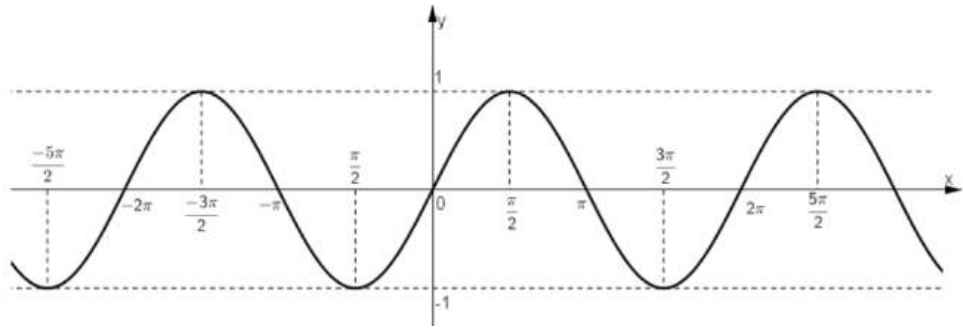
A.  $\begin{cases} x = 60^\circ + k180^\circ \\ x = 40^\circ + k120^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

B.  $\begin{cases} x = 60^\circ + k360^\circ \\ x = -40^\circ + k120^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

C.  $\begin{cases} x = 30^\circ + k360^\circ \\ x = 15^\circ + k180^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

D.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

» Câu 31. Cho hàm số  $y = \sin x$  có đồ thị như hình vẽ.



Hãy tìm tập tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình  $|\sin x| = m$  có nghiệm?

- A.**  $-1 \leq m \leq 1$ .      **B.**  $-1 \leq m \leq 0$ .      **C.**  $-1 < m < 0$ .      **D.**  $0 \leq m \leq 1$ .

» **Câu 32.** Tìm tất cả các nghiệm của phương trình

$$\sin x \cdot \sin \frac{\pi}{3} + \cos 2x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin 2x \cdot \cos \frac{\pi}{4}.$$

**A.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

**B.** 
$$\begin{cases} x = -\frac{7\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

**C.** 
$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

**D.** 
$$\begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{36} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

» **Câu 33.** Phương trình  $\sin 5x - \sin x = 0$  có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn  $[-2018\pi; 2018\pi]$ ?

- A.** 20179.      **B.** 20181.      **C.** 16144.      **D.** 16145.

» **Câu 34.** Nghiệm của phương trình  $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$  là

**A.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{7} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

**B.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

**C.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{7} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

**D.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

» **Câu 35.** Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ  $40^\circ$  bắc trong ngày thứ  $t$  của một năm không nhuận được cho bởi hàm số  $d(t) = 3 \sin \left[ \frac{\pi}{180}(t-80) \right] + 12$  với  $t \in \mathbb{Z}$  và  $0 < t \leq 365$ . Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

- A.** 170.      **B.** 171.      **C.** 172.      **D.** 173.

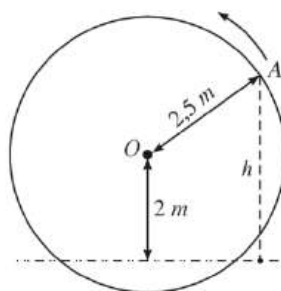
» **Câu 36.** Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5m; trục của nó đặt cách mặt nước 2m (hình vẽ). Khi guồng quay đều, khoảng cách  $h$  (mét) từ một chiếc gàu gắn tại điểm A của guồng đến mặt nước được tính theo công thức  $h = |y|$  trong đó

$$y = 2 + 2,5 \sin \left[ 2\pi \left( x - \frac{1}{4} \right) \right]$$

với  $x$  là thời gian quay của guồng ( $x \geq 0$ ), tính bằng phút (quy



ước  $y > 0$  khi gầu ở bên trên mặt nước và  $y < 0$  khi gầu ở dưới nước). Chiếc gầu cách mặt nước 2m lần đầu tiên khi nào?



- A. 4 phút.      B.  $\frac{1}{4}$  phút.      C. 2 phút.      D.  $\frac{1}{2}$  phút.

» **Câu 37.** Guồng nước (hay còn gọi là con nước) không chỉ là công cụ phục vụ sản xuất nông nghiệp, mà đã trở thành hình ảnh quen thuộc của bản làng và là một nét văn hóa đặc trưng của đồng bào dân tộc miền núi phía Bắc.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 3,5 m; trục của nó đặt cách mặt nước 3 m. Khi guồng quay đều, khoảng cách  $h(m)$  từ một ống đựng nước gắn tại một điểm của guồng đến mặt nước được tính theo công thức  $h = |y|$ , trong đó  $y = 3,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$ , với  $x$  (phút) là thời gian quay của guồng ( $x \geq 0$ ). Hãy chỉ ra giá trị của  $x$  nhỏ nhất để ống đựng nước cách mặt nước 3 m.

- A.  $\frac{1}{4}$ .      B.  $\frac{5}{4}$ .      C.  $\frac{1}{8}$ .      D.  $\frac{7}{8}$ .

**B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai**

» **Câu 38.** Cho phương trình  $\sin x = a$  (1).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Nếu $a > 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm.		
(b)	Nếu $a = 1$ thì phương trình (1) có nghiệm $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .		
(c)	Nếu $-1 \leq a \leq 1$ thì phương trình (1) có nghiệm $\begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ với $a = \sin \alpha$ .		
(d)	Phương trình (1) có hai điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.		

» **Câu 39.** Cho phương trình lượng giác  $2 \sin x - \sqrt{2} = 0$ . Khi đó:

Mệnh đề	Đúng	Sai
---------	------	-----



(a)	Phương trình tương đương với phương trình $\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$ .		
(b)	Phương trình có nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .		
(c)	Phương trình có nghiệm âm lớn nhất là $\frac{\pi}{4}$ .		
(d)	Số nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ là hai nghiệm.		

» Câu 40. Cho phương trình lượng giác  $\sin 2x = -\frac{1}{2}$  (\*). Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình (*) tương đương $\sin 2x = \sin \frac{\pi}{6}$		
(b)	Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có 3 nghiệm		
(c)	Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; \pi)$ bằng $\frac{3\pi}{2}$		
(d)	Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{11\pi}{12}$		

» Câu 41. Cho phương trình lượng giác  $2 \cos x = \sqrt{3}$ , khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình có nghiệm $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$		
(b)	Trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ phương trình có 4 nghiệm		
(c)	Tổng các nghiệm của phương trình trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ bằng $\frac{25\pi}{6}$		
(d)	Trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{13\pi}{6}$		

» Câu 42. Cho phương trình  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$  (\*), vậy:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$		
(b)	Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có 2 nghiệm		
(c)	Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có 2 nghiệm âm		
(d)	Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; \pi)$ bằng $\frac{7\pi}{6}$		

» Câu 43. Cho phương trình lượng giác  $3 - \sqrt{3} \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ , khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai



(a)	Phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .		
(b)	Khi $\frac{-\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$ thì phương trình có ba nghiệm		
(c)	Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{3}$		
(d)	Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(\frac{-\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right)$ bằng $\frac{\pi}{6}$		

» Câu 44. Cho hai đồ thị hàm số  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  và  $y = \sin x$ , khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$		
(b)	Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$		
(c)	Khi $x \in [0; 2\pi]$ thì hai đồ thị hàm số cắt nhau tại ba điểm		
(d)	Khi $x \in [0; 2\pi]$ thì tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là: $\left(\frac{5\pi}{8}; \sin \frac{5\pi}{8}\right), \left(\frac{7\pi}{8}; \sin \frac{7\pi}{8}\right)$ .		

» Câu 45. Cho phương trình lượng giác  $2\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{3} = 0$ .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình tương đương $\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ .		
(b)	Phương trình có nghiệm là: $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .		
(c)	Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{4}$ .		
(d)	Số nghiệm của phương trình trong khoảng $(-\pi; \pi)$ là hai nghiệm.		

» Câu 46. Cho phương trình  $(2\cos x - 1)(\sin 2x - m) = 0$  (1).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$x = \frac{7\pi}{3}$ là một nghiệm của phương trình (1).		
(b)	Khi $m = 2$ thì phương trình (1) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + l2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$		





(c)	Khi $m = 1$ thì tập nghiệm của phương trình (1) có tất cả 4 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.		
(d)	Chỉ tìm được một giá trị của $m$ để phương trình (1) có đúng hai nghiệm thuộc $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ .		

» **Câu 47.** Hằng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu  $h(m)$  của mực nước trong kênh tại thời điểm  $t(h)$  ( $0 \leq t \leq 24$ ) được cho bởi công thức  $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$ .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Độ sâu của mực nước trong kênh nhỏ nhất bằng $9m$ .		
(b)	Độ sâu của mực nước trong kênh lớn nhất bằng $15m$ .		
(c)	Trong 1 ngày có đúng 3 thời điểm mà độ sâu của mực nước trong kênh đạt giá trị lớn nhất.		
(d)	Độ sâu của mực nước trong kênh tại thời điểm $12(h)$ bằng $13m$ .		

**C. Câu hỏi – Trả lời ngắn**

» **Câu 48.** Họ nghiệm phương trình lượng giác:  $\cos(x + 30^\circ) + 1 = 0$  có dạng  $x = a^\circ + k \cdot b^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), với  $a; b$  là các số nguyên. Tính giá trị  $S = b - a$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 49.** Phương trình lượng giác:  $\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$  có họ nghiệm dạng  $x = \frac{\pi}{a} + k \frac{\pi}{b}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), với  $a; b$  là các số nguyên. Tính giá trị  $T = a(a + b)$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 50.** Họ nghiệm phương trình lượng giác:  $\sqrt{3} \tan \frac{\pi x}{2} = 3$  có dạng  $x = a^\circ + k \cdot b^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), với  $m; n$  là các số nguyên và  $\frac{m}{n}$  là phân số tối giản. Tính giá trị  $P = m^n$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 51.** Phương trình  $2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2 = 0$  có bao nhiêu nghiệm trên khoảng  $(0; 2\pi)$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 52.** Cho phương trình  $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$ . Tìm số nghiệm thuộc khoảng  $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}\right)$  của phương trình.

» **Điền đáp số:**

» **Câu 53.** Cho phương trình  $\cos x = \sin 3x$ . Tính tổng các nghiệm thuộc khoảng  $(0; 2\pi)$  của phương trình (làm tròn đến hàng phần chục).

» **Điền đáp số:**



» **Câu 54.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\cos x = m$  có nghiệm?

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 55.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\sin x - m = 1$  có nghiệm.

✎ **Điền đáp số:**

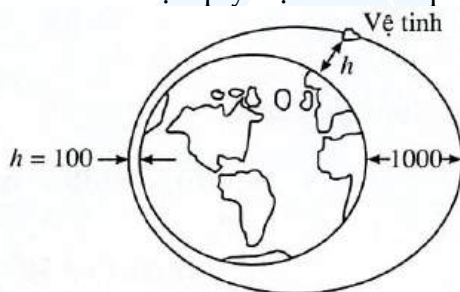
» **Câu 56.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $3\sin^2 x + \sin 2x - m\cos^2 x = 0$  có nghiệm.

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 57.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  trong đoạn  $[-10; 10]$   $m \tan x + 2 = m$  có nghiệm.

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 58.** Một vệ tinh bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo hình Elip (như hình vẽ):



Độ cao  $h$  (tính bằng kilômét) của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi công thức  $h = 550 + 450 \cdot \cos \frac{\pi}{50} t$ . Trong đó  $t$  là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo. Người ta cần thực hiện một thí nghiệm khoa học khi vệ tinh cách mặt đất  $250 \text{ km}$ . Trong khoảng 60 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, hãy tìm thời điểm  $t$  để có thể thực hiện thí nghiệm đó? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 1)

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 59.** Mùa xuân ở Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) thường có trò chơi đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động qua lại vị trí cân bằng. Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách  $h$  (mét) được tính từ vị trí chân người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn bởi hệ thức  $h = |d|$  với  $d = 3 \cos \left[ \frac{\pi}{3} (2t - 1) \right]$  ( $t \geq 0$  và được tính bằng giây), trong đó ta quy ước  $d > 0$  khi vị trí cân bằng ở về phía sau lưng người chơi đu và  $d < 0$  trong trường hợp ngược lại.



Hỏi trong 3 giây đầu tiên, có tất cả bao nhiêu lần người chơi đu ở cách vị trí cân bằng 1 mét?



Điền đáp số:

» **Câu 60.** Trong môn cầu lông, khi phát cầu, người chơi cần đánh cầu qua lưới sang phía sân đối phương và không được để cho cầu rơi ngoài biên.

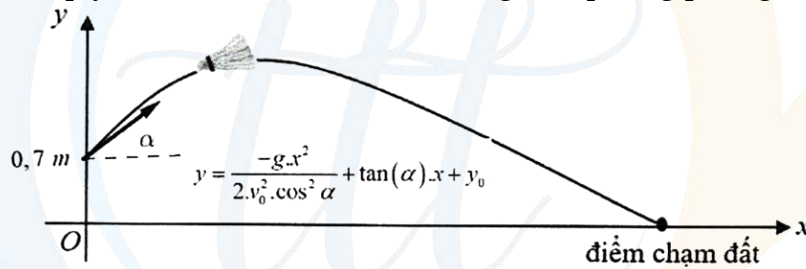
Trong mặt phẳng toạ độ  $Oxy$ , chọn điểm có toạ độ  $(O; y_0)$  là điểm xuất phát thì phương trình quỹ đạo của cầu lông khi rời khỏi mặt vợt là:

$$y = \frac{-g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + x \cdot \tan(\alpha) + y_0$$

Trong đó:

- »  $g$  là gia tốc trọng trường (thường được chọn là  $9,8m/s^2$ );
- »  $\alpha$  là góc phát cầu (so với phương ngang của mặt đất);
- »  $v_0$  là vận tốc ban đầu của cầu;
- »  $y_0$  là khoảng cách từ vị trí phát cầu đến mặt đất.

Đây là một hàm số bậc hai nên quỹ đạo chuyển động của cầu lông là một parabol. Một người chơi cầu lông đang đứng khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa) là  $6,68m$ . Quan sát hình bên dưới, hỏi người chơi đã phát cầu góc khoảng bao nhiêu độ so với mặt đất? Biết cầu rời mặt vợt ở độ cao  $0,7m$  so với mặt đất; vận tốc xuất phát của cầu là  $8m/s$ ; người chơi không phát cầu quá  $50^\circ$  và bỏ qua sức cản của gió và xem quỹ đạo của cầu luôn nằm trong mặt phẳng phẳng đứng).



Điền đáp số:

Hết

TOÁN TỪ TÂM



## Chương 01

### Bài 1.

# GÓC LƯỢNG GIÁC

A

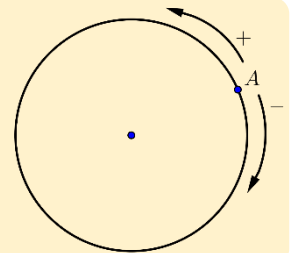
## Lý thuyết

### 1. Đường tròn định hướng và cung lượng giác



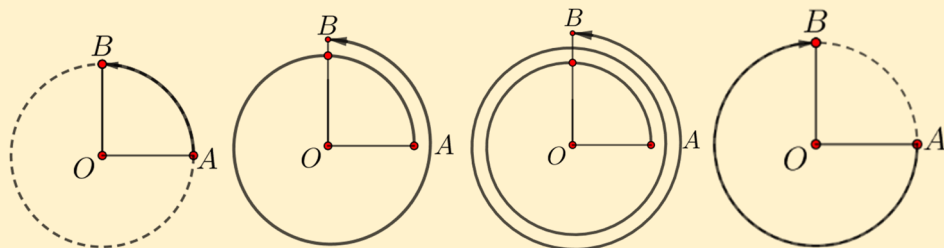
#### Đường tròn định hướng:

- Đường tròn định hướng là một đường tròn trên đó đã chọn **một chiều chuyển động** gọi là chiều dương, chiều ngược lại là chiều âm.
- Quy ước chọn chiều **ngược** với chiều quay của kim đồng hồ làm chiều dương.



#### Cung lượng giác:

- Trên đường tròn định hướng cho 2 điểm  $A, B$ . Một điểm  $M$  di động trên đường tròn luôn theo một chiều từ  $A$  đến  $B$  tạo nên một **cung lượng giác** có điểm đầu  $A$  và điểm cuối  $B$ .
- Với 2 điểm  $A, B$  đã cho trên đường tròn định hướng ta có **vô số cung lượng giác** có điểm đầu  $A$ , điểm cuối  $B$ .
- Kí hiệu  $\overset{\curvearrowright}{AB}$ .



#### Chú ý

Trên một đường tròn định hướng, lấy 2 điểm  $A, B$  thì:

- (1) Kí hiệu  $AB$  chỉ một cung hình học (lớn hoặc bé) hoàn toàn xác định.
- (2) Kí hiệu  $\overset{\curvearrowright}{AB}$  chỉ một cung lượng giác điểm đầu  $A$ , điểm cuối  $B$ .



## 2. Góc lượng giác.

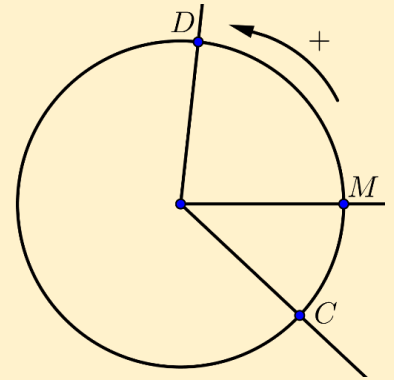


### Góc lượng giác:

- Một điểm  $M$  chuyển động trên đường tròn từ  $C$  đến  $D$  tạo nên cung lượng giác  $\overset{\curvearrowright}{CD}$ .

Khi đó tia  $OM$  quay xung quanh gốc  $O$  từ vị trí  $OC$  đến  $OD$ . Ta nói tia  $OM$  tạo nên **góc lượng giác**, có tia đầu  $OC$  và tia cuối  $OD$ .

- Kí hiệu:  $(OC, OD)$ .
- Ta quy ước: chiều quay
  - + ngược với chiều quay kim đồng hồ là chiều dương
  - + cùng với chiều quay kim đồng hồ là chiều âm.
- Khi tia  $OM$  quay góc  $\alpha$  thì ta nói góc lượng giác mà tia đó quét nên có số đo  $\alpha$ .
- Số đo của **góc lượng giác** với tia đầu  $OC$ , tia cuối  $OD$  được kí hiệu là  $sd(OC, OD) = \alpha$ .



### Nhận xét

Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu  $OC$  và tia cuối  $OD$  sai khác nhau một bội nguyên của  $360^\circ$  nên có công thức tổng quát là:  $sd(OC, OD) = \alpha^\circ + k.360^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

Thường viết là  $(OC, OD) = \alpha^\circ + k.360^\circ$



### Hệ thức Chasles:

Với 3 tia  $Oa, Ob, Oc$  bất kì ta có:

$$(Oa, Ob) + (Ob, Oc) = (Oa, Oc) + k.360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

## 3. Đơn vị Radian.



### Đơn vị Radian:

- » Trên đường tròn tùy ý, cung có độ dài bằng bán kính được gọi là cung có số đo 1 rad.

### Quan hệ giữa độ & radian:

- »  $1^\circ = \frac{\pi}{180}$  rad và  $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$ .

### Chú ý:

Khi viết số đo của một góc (cung) theo đơn vị radian, ta không viết chữ rad sau số đó.

$$\boxed{180^\circ = \pi \rightarrow 60^\circ = \frac{\pi}{3}}; \boxed{180^\circ = \pi \rightarrow 45^\circ = \frac{\pi}{4}}$$

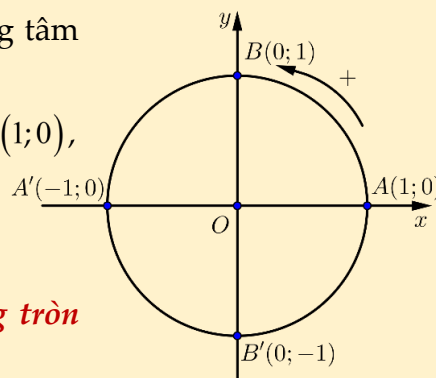


## 4. Đường tròn lượng giác



### Đường tròn lượng giác:

- » Trong mặt phẳng  $Oxy$ , vẽ đường tròn định hướng tâm  $O$ , bán kính  $R = 1$ .
- » Đường tròn này cắt hai trục tọa độ tại bốn điểm  $A(1;0)$ ,  $A'(-1;0)$ ,  $B(0;1)$ ,  $B'(0;-1)$ .
- » Ta lấy  $A(1;0)$  làm điểm gốc của đường tròn.
- » Đường tròn xác định như trên được gọi là **đường tròn lượng giác** (gốc  $A$ ).



## 5. Độ dài cung tròn.



- » Cung có số đo  $\alpha$  rad của đường tròn bán kính  $R$  có độ dài  $l = R\alpha$ .



## Các dạng bài tập

### Dạng 1. Mối liên hệ giữa độ và radian



#### Phương pháp

Dùng mối quan hệ giữa độ và radian:  $180^\circ = \pi \text{ rad}$

» Đổi cung  $a$  có số đo từ radian sang độ  $a \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$

» Đổi cung  $x^\circ$  có số đo từ độ ra radian  $x^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$



#### Ví dụ 1.1.

(1) Đổi số đo của các góc sau ra radian:  $72^\circ, 600^\circ, -37^\circ 45' 30''$ .

(2) Đổi số đo của các góc sau ra độ:  $\frac{5\pi}{18}, \frac{3\pi}{5}, -4$ .

#### Lời giải

(1) Đổi số đo của các góc sau ra radian:  $72^\circ, 600^\circ, -37^\circ 45' 30''$ .

$$\text{Vì } 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad nên } 72^\circ = 72 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5}, 600^\circ = 600 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{10\pi}{3},$$

$$-37^\circ 45' 30'' = -37^\circ - \left(\frac{45}{60}\right)^\circ - \left(\frac{30}{60 \cdot 60}\right)^\circ = \left(\frac{4531}{120}\right)^\circ = \frac{4531}{120} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,6587$$

(2) Đổi số đo của các góc sau ra độ:  $\frac{5\pi}{18}, \frac{3\pi}{5}, -4$ .

$$\text{Vì } 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \text{ nên } \frac{5\pi}{18} = \left(\frac{5\pi}{18} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 50^\circ, \frac{3\pi}{5} = \left(\frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 108^\circ,$$

$$-4 = -\left(4 \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = -\left(\frac{720}{\pi}\right)^\circ \approx -2260^\circ 48'.$$



#### Ví dụ 1.2.

Đổi số đo của góc  $45^\circ 32'$  sang đơn vị radian với độ chính xác đến hàng phần nghìn?

#### Lời giải

$$\text{Trước tiên ta đổi } 45^\circ 32' = \left(45 + \frac{32}{60}\right)^\circ.$$

$$\text{Áp dụng công thức, ta được } \alpha = \frac{\left(45 + \frac{32}{60}\right) \cdot \pi}{180} \approx 0,795$$



**Ví dụ 1.3.**

Đổi số đo radian sang số đo độ

(1)  $\pi(rad)$

(2)  $\frac{\pi}{3}(rad)$

(3)  $\frac{\pi}{10}(rad)$

(4)  $\frac{22\pi}{3}(rad)$

(5)  $-\frac{5\pi}{9}(rad)$

(6)  $-\frac{12\pi}{5}(rad)$

**Lời giải**

(1)  $\pi(rad) = \left(\frac{\pi \cdot 180}{\pi}\right)^\circ = 180^\circ$

(2)  $\frac{\pi}{3}(rad) = \left(\frac{\frac{\pi}{3} \cdot 180}{\pi}\right)^\circ = 60^\circ$

(3)  $\frac{\pi}{10}(rad) = \left(\frac{\frac{\pi}{10} \cdot 180}{\pi}\right)^\circ = 18^\circ$

(4)  $\frac{22\pi}{3}(rad) = \left(\frac{\frac{22\pi}{3} \cdot 180}{\pi}\right)^\circ = 1320^\circ$

(5)  $-\frac{5\pi}{9}(rad) = \left(\frac{-\frac{5\pi}{9} \cdot 180}{\pi}\right)^\circ = -100^\circ$

(6)  $-\frac{12\pi}{5}(rad) = \left(\frac{-\frac{12\pi}{5} \cdot 180}{\pi}\right)^\circ = -432^\circ$



**Ví dụ 1.4.**

Đổi số đo độ sang số đo radian:

(1)  $170^\circ$

(2)  $1000^\circ$

(3)  $3100^\circ$

(4)  $-90^\circ$

(5)  $-240^\circ$

(6)  $-125^\circ$

**Lời giải**

(1)  $170^\circ = \frac{\pi \cdot 170}{180} rad = \frac{17\pi}{18}(rad)$

(2)  $1000^\circ = \frac{\pi \cdot 1000}{180} rad = \frac{50\pi}{9}(rad)$

(3)  $3100^\circ = \frac{\pi \cdot 3100}{180} rad = \frac{155\pi}{9}(rad)$

(4)  $-90^\circ = \frac{\pi(-90)}{180} rad = -\frac{\pi}{2}(rad)$

(5)  $-240^\circ = \frac{\pi(-240)}{180} rad = -\frac{4\pi}{3}(rad)$

(6)  $-125^\circ = \frac{\pi(-125)}{180} rad = -\frac{25\pi}{36}(rad)$





➤ **Dạng 2. Độ dài cung lượng giác**



**Phương pháp**

Cung tròn bán kính  $R$  có số đo  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ), có số đo độ  $a^\circ$  ( $0^\circ \leq a \leq 360^\circ$ ) và có độ dài  $l$  thì:

$$l = R\alpha = \frac{\pi a}{180} \cdot R \text{ do đó } \frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180}$$

► **Đặc biệt:**  $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ, 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$



**Ví dụ 2.1.**

Một đường tròn có bán kính 36 m. Độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo là

(1)  $\frac{3\pi}{4}$

(2)  $51^\circ$

(3)  $\frac{1}{3}$

➤ **Lời giải**

Theo công thức tính độ dài cung tròn ta có  $l = R\alpha = \frac{\pi a}{180} \cdot R$  nên

(1)  $51^\circ$

Ta có  $l = R\alpha = 36 \cdot \frac{3\pi}{4} = 27\pi \approx 84,8\text{m}$ .

(2)  $51^\circ$

Ta có  $l = \frac{\pi a}{180} \cdot R = \frac{\pi \cdot 51}{180} \cdot 36 = \frac{51\pi}{5} \approx 32,04\text{m}$ .

(3)  $\frac{1}{3}$

Ta có  $l = R\alpha = 36 \cdot \frac{1}{3} = 12\text{m}$ .



**Ví dụ 2.2.**

Một hải lí là độ dài cung tròn xích đạo có số đo  $\left(\frac{1}{60}\right)^\circ = 1'$ . Biết độ dài xích đạo là 40.000km, hỏi một hải lí dài bao nhiêu km?

➤ **Lời giải**

Một hải lí dài  $\frac{40000}{360} \cdot \frac{1}{60} \approx 1,852\text{km}$



**Ví dụ 2.3.**

Cho hình vuông  $A_0A_1A_2A_3$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$  (các đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo của các cung lượng giác  $\widehat{A_0A_i}, \widehat{A_iA_j} (i, j = 0, 1, 2, 3, i \neq j)$

**Lời giải**

Ta có  $\widehat{A_0OA_0} = 0$  nên số  $\widehat{A_0A_0} = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

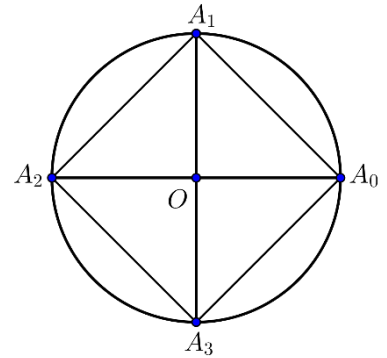
$\widehat{A_0OA_1} = \frac{\pi}{2}$  nên số  $\widehat{A_0A_1} = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\widehat{A_0OA_2} = \pi$  nên số  $\widehat{A_0A_2} = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\widehat{A_0OA_3} = \frac{3\pi}{2}$  nên số  $\widehat{A_0A_3} = 2\pi - \frac{\pi}{2} + k2\pi = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Như vậy số  $\widehat{A_0A_i} = \frac{i\pi}{2} + k2\pi, i = 0, 1, 2, 3, k \in \mathbb{Z}$

Theo hệ thức salơ ta có số  $\widehat{A_iA_j} = \widehat{A_0A_j} - \widehat{A_0A_i} + k2\pi = (j-i)\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$





### Dạng 3. Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác



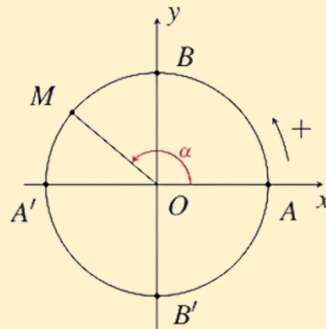
#### Phương pháp

Để biểu diễn góc lượng giác có số đo  $a$  trên đường tròn lượng giác ta cần thực hiện các bước sau:

- » **Bước 1:** Vẽ đường tròn lượng giác. Chọn gốc  $A(1;0)$  làm điểm đầu.
- » **Bước 2:** Chọn điểm cuối  $M$  trên đường tròn lượng giác sao cho  $(OA, OM) = \alpha$ . Điểm cuối  $M$  chính là điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo  $a$ .

#### \*\* Kiến thức cần lưu ý:

- ✓ Đường tròn lượng giác là đường tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính bằng 1, được định hướng với:
  - » Chiều quay dương (ngược chiều quay của kim đồng hồ),
  - » Chiều quay âm (cùng chiều quay của kim đồng hồ).
  - » Lấy điểm  $A(1;0)$  làm điểm gốc của đường tròn.



Các điểm  $B(0;1), A(1;0), B'(0;-1)$  nằm trên đường tròn lượng giác.

- ✓ Nếu  $|a| > 2\pi$  (hoặc  $|a| > 360^\circ$ ) ta phân tích  $\alpha = \beta + k2\pi$  hoặc  $\alpha = \beta + k360^\circ$  với  $-\pi < \beta < \pi$ . Khi đó, điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo  $\alpha$  sẽ trùng với điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo là  $\beta$ .
- ✓  $a > 0$  thì góc  $a$  quay theo chiều dương,  $a < 0$  thì góc  $a$  quay theo chiều âm.



#### Ví dụ 3.1.

Xác định điểm  $M$  trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng

(1)  $45^\circ$

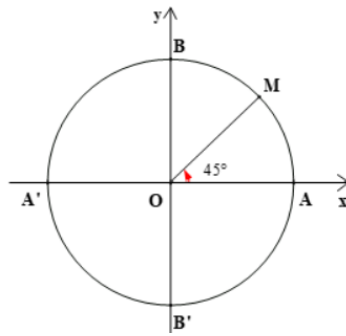
(2)  $-\frac{9\pi}{4}$

#### ↳ Lời giải

(1)  $-\frac{9\pi}{4}$

Ta có  $(OA, OM) = 45^\circ$  là góc lượng giác có tia đầu là tia  $OA$ , tia cuối là tia  $OM$  và quay theo chiều dương (ngược chiều quay của kim đồng hồ) một góc  $45^\circ$ .

Điểm  $M$  trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng  $45^\circ$  được xác định như hình dưới đây:



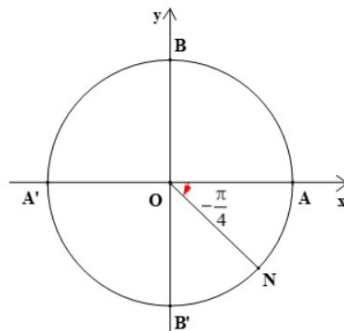
Vậy điểm  $M$  là điểm chính giữa của cung nhỏ  $\widehat{AB}$

(2)  $-\frac{9\pi}{4}$

Vì  $(OA, ON) = -\frac{9\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + (-1) \cdot 2\pi$ , do vậy điểm  $N$  trùng với điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo bằng  $-\frac{\pi}{4}$ .

Khi đó, góc  $(OA, ON)$  là góc lượng giác có tia đầu là tia  $OA$ , tia cuối là tia  $ON$  và quay theo chiều âm (cùng chiều quay của kim đồng hồ) một góc  $\frac{\pi}{4}$ .

Điểm  $N$  trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng  $-\frac{9\pi}{4}$  được biểu diễn như hình dưới đây:



Vậy điểm  $N$  là điểm chính giữa của cung nhỏ  $\widehat{B'A}$ .



**Ví dụ 3.2.**

Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác có số đo:

(1)  $\frac{9\pi}{4}$

(2)  $-765^\circ$

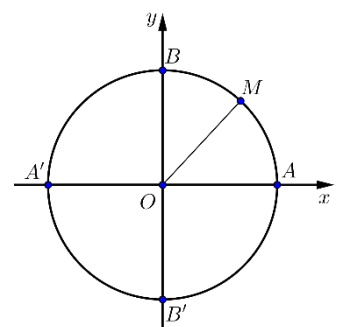
(3)  $x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

**Lời giải**

(1)  $-\frac{9\pi}{4}$

Ta có  $\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2.2\pi$ .

Do đó điểm biểu diễn cung lượng giác  $\frac{9\pi}{4}$  trùng với điểm biểu diễn cung lượng giác  $\frac{\pi}{4}$ .





Vậy điểm cuối của cung  $\frac{9\pi}{4}$  là điểm chính giữa  $M$  của cung nhỏ  $\widehat{AB}$ .

(2)  $x = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

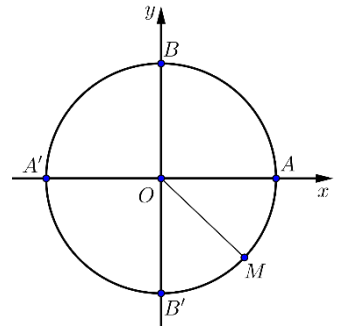
Ta có  $-765^\circ = -45^\circ - 2.360^\circ$ .

Do đó điểm biểu diễn cung lượng giác  $-765^\circ$  trùng với điểm biểu diễn cung lượng giác  $-45^\circ$ .

Lại có  $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$ .

Ta chia đường tròn thành 8 phần bằng nhau.

Khi đó điểm  $M$  biểu diễn góc có số đo  $-765^\circ$ .



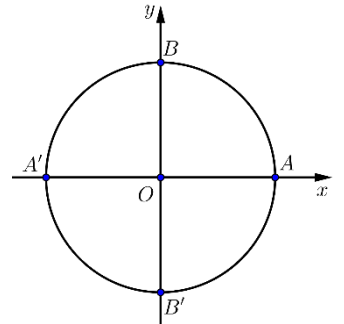
(3)  $x = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

Ta có  $x = k\pi = \frac{k2\pi}{2}$ . Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác

có số đo  $k\pi$ .

Với  $k = 0; x = 0$ , được biểu diễn bởi điểm  $A$ .

Với  $k = 1; x = \pi$ , được biểu diễn bởi điểm  $A'$ .



**Ví dụ 3.3.**

Cho cung lượng giác có số đo  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$  với  $k$  là số nguyên tùy ý. Có bao nhiêu giá trị  $k$  thỏa mãn  $x \in [2\pi; 5\pi]$ ?

**Lời giải**

Giải hệ bất phương trình 
$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} + k\pi > 2\pi \\ \frac{\pi}{4} + k\pi < 5\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > \frac{7}{4} \\ k < \frac{19}{4} \end{cases}.$$

Từ đó để  $x \in [2\pi; 5\pi]$  thì  $\frac{7}{4} < k < \frac{19}{4}$ . Vì  $k$  là số nguyên nên có 3 giá trị của  $k$  là 2, 3, 4 thỏa mãn yêu cầu bài toán.



**Ví dụ 3.4.**

Cho cung lượng giác có số đo  $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{4}$  với  $k$  là số nguyên tùy ý. Có bao nhiêu giá trị của  $k$  thỏa mãn  $x \in \left(-\frac{3\pi}{5}; 4\pi\right]$ ?

**Lời giải**

Giải hệ bất phương trình 
$$\begin{cases} -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{4} > -\frac{3\pi}{5} \\ -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{4} \leq 4\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -\frac{16}{15} \\ k \leq \frac{52}{3} \end{cases}.$$



Từ đó, để  $x \in \left(-\frac{3\pi}{5}; 4\pi\right]$  thì  $-\frac{16}{15} < k \leq \frac{52}{3}$ . Vì  $k$  là số nguyên nên có 19 giá trị của  $k(-1, 0, 1, \dots, 16, 17)$  thỏa mãn ycbt.



## Chương 01

### Bài 1.

# GÓC LƯỢNG GIÁC



## Luyện tập

### A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Góc có số đo  $\frac{\pi}{24}$  đổi sang độ bằng

A.  $7^\circ$ .

B.  $7^\circ 30'$ .

C.  $8^\circ$ .

D.  $8^\circ 30'$ .

» Lời giải

**Chọn B**

$$\text{Ta có: } \frac{\pi}{24} = \frac{180^\circ}{24} = 7^\circ 30'.$$

» Câu 2. Một đường tròn có đường kính là 50(cm). Độ dài của cung tròn trên đường tròn có số đo là  $\frac{\pi}{4}$  bằng (làm tròn đến hàng đơn vị):

A. 40(cm).

B. 39(cm).

C. 19(cm).

D. 20(cm).

» Lời giải

**Chọn D**

$$\text{Độ dài của cung tròn } l = \alpha.R = \frac{\pi}{4}.25 = \frac{25}{4}\pi \approx 20(\text{cm}).$$

» Câu 3. Số đo theo đơn vị radian của góc  $315^\circ$  là

A.  $\frac{7\pi}{2}$ .

B.  $\frac{7\pi}{4}$ .

C.  $\frac{2\pi}{7}$ .

D.  $\frac{4\pi}{7}$ .

» Lời giải

**Chọn B**

$$\text{Ta có } 315^\circ = \frac{315}{180}.\pi = \frac{7\pi}{4}(\text{radian}).$$

» Câu 4. Cung tròn có số đo là  $\frac{5\pi}{4}$ . Hãy chọn số đo độ của cung tròn đó trong các cung tròn sau đây.

A.  $5^\circ$ .

B.  $15^\circ$ .

C.  $172^\circ$ .

D.  $225^\circ$ .

» Lời giải

**Chọn D**

$$\text{Ta có: } a^\circ = \frac{\alpha}{\pi}.180^\circ = \frac{5\pi}{4}.180^\circ = 225^\circ.$$

» Câu 5. Cung tròn có số đo là  $\pi$ . Hãy chọn số đo độ của cung tròn đó trong các cung tròn sau đây.

A.  $30^\circ$ .

B.  $45^\circ$ .

C.  $90^\circ$ .

D.  $180^\circ$ .

» Lời giải



**Chọn D**

Ta có:  $a^\circ = \frac{\alpha}{\pi} \cdot 180^\circ = 180^\circ$ .

» **Câu 6.** Góc có số đo  $\frac{2\pi}{5}$  đổi sang độ là:

- A.  $135^\circ$ .                      B.  $72^\circ$ .                      C.  $270^\circ$ .                      D.  $240^\circ$ .

» *Lời giải*

**Chọn B**

Ta có:  $\frac{2\pi}{5} = \frac{2 \cdot 180^\circ}{5} = 72^\circ$ .

» **Câu 7.** Góc có số đo  $108^\circ$  đổi ra radian là:

- A.  $\frac{3\pi}{5}$ .                      B.  $\frac{\pi}{10}$ .                      C.  $\frac{3\pi}{2}$ .                      D.  $\frac{\pi}{4}$ .

» *Lời giải*

**Chọn A**

Ta có:  $108^\circ = \frac{108^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{3\pi}{5}$ .

» **Câu 8.** Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là:

- A.  $60^\circ$ .                      B.  $30^\circ$ .                      C.  $40^\circ$ .                      D.  $50^\circ$ .

» *Lời giải*

**Chọn D**

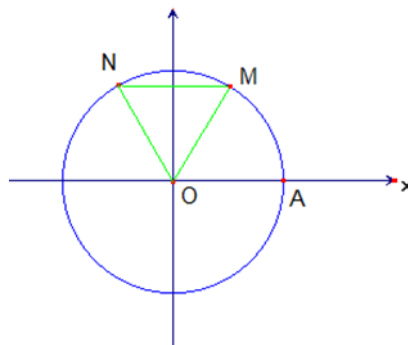
+ 1 bánh răng tương ứng với  $\frac{360^\circ}{72} = 5^\circ \Rightarrow 10$  bánh răng là  $50^\circ$ .

» **Câu 9.** Trên đường tròn với điểm gốc là  $A$ . Điểm  $M$  thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác  $AM$  có số đo  $60^\circ$ . Gọi  $N$  là điểm đối xứng với điểm  $M$  qua trục  $Oy$ , số đo cung  $AN$  là

- A.  $-120^\circ$  hoặc  $240^\circ$ .                      B.  $120^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .  
C.  $120^\circ$ .                      D.  $-240^\circ$ .

» *Lời giải*

**Chọn C**



Ta có:  $\widehat{AON} = 60^\circ, \widehat{MON} = 60^\circ$  nên  $\widehat{AOM} = 120^\circ$ . Khi đó số đo cung  $AN$  bằng  $120^\circ$ .

» **Câu 10.** Trên đường tròn bán kính  $r = 15$ , độ dài của cung có số đo  $50^\circ$  là:

- A.  $l = 15 \cdot \frac{180}{\pi}$ .                      B.  $l = \frac{15\pi}{180}$ .                      C.  $l = 15 \cdot \frac{180}{\pi} \cdot 50$ .                      D.  $l = 750$ .

» *Lời giải*

**Chọn C**





$$l = \frac{\pi \cdot r \cdot n^0}{180^0} = \frac{\pi 15.50}{180}$$

» **Câu 11.** Trên đường tròn bán kính  $r = 5$ , độ dài của cung đo  $\frac{\pi}{8}$  là:

- A.  $l = \frac{\pi}{8}$ .                      B.  $l = \frac{3\pi}{8}$ .                      C.  $l = \frac{5\pi}{8}$ .                      D.  $l = \frac{2\pi}{3}$ .

» *Lời giải*

**Chọn C**

Độ dài cung AB có số đo cung AB bằng  $n$  độ:  $l = r \cdot n = 5 \cdot \frac{\pi}{8}$ .

» **Câu 12.** Số đo của cung tròn có độ dài 75(cm) trên đường tròn có đường kính 30(cm) (lấy  $\pi \approx 3,14$  và làm tròn đến phút) có dạng  $a^0b'$  ( $a, b \in \mathbb{Z}$ ). Giá trị của biểu thức  $P = 2a - b$  bằng:

- A. 533.                      B. 535.                      C. 267.                      D. 266.

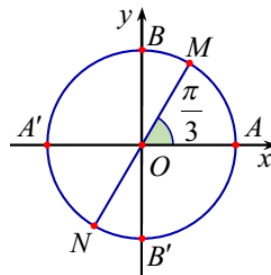
» *Lời giải*

**Chọn B**

Độ dài của cung tròn  $l = \frac{\alpha}{180} \cdot \pi \cdot R \Rightarrow \alpha = \frac{l \cdot 180}{\pi \cdot R} = \frac{75 \cdot 180}{3,14 \cdot 15} \approx 286^037'$ .

Vậy  $P = 2a - b = 2 \cdot 286 - 37 = 535$ .

» **Câu 13.** Trên hình vẽ hai điểm  $M, N$  biểu diễn các cung có số đo là:



- A.  $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ .                      B.  $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ .                      C.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ .                      D.  $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$ .

» *Lời giải*

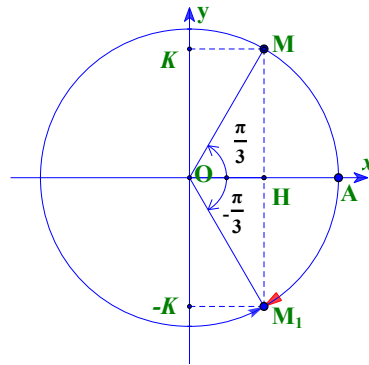
**Chọn C**

» **Câu 14.** Trên đường tròn lượng giác gốc A, cho điểm M xác định bởi số  $\widehat{AM} = \frac{\pi}{3}$ . Gọi  $M_1$  là điểm đối xứng của M qua trục  $Ox$ . Tìm số đo của cung lượng giác  $\widehat{AM_1}$ .

- A. số  $\widehat{AM_1} = \frac{-5\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$                       B. số  $\widehat{AM_1} = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$   
C. số  $\widehat{AM_1} = \frac{-\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$                       D. số  $\widehat{AM_1} = \frac{-\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

» *Lời giải*

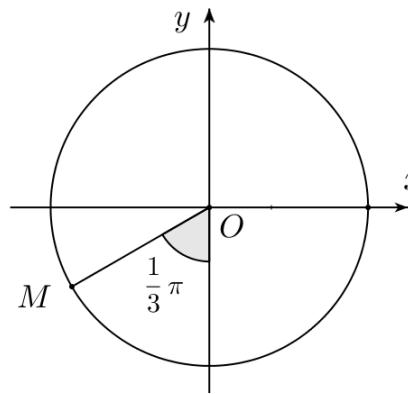
**Chọn C**



Vì  $M_1$  là điểm đối xứng của  $M$  qua trục  $Ox$  nên có 1 góc lượng giác  $(OA, OM_1) = -\frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow \text{sđ } \widehat{AM_1} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

» **Câu 15.** Điểm  $M$  trong hình vẽ sau là điểm biểu diễn của góc  $\alpha$ .



Số đo của  $\alpha$  là

**A.**  $\alpha = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**B.**  $\alpha = -\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**C.**  $\alpha = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**D.**  $\alpha = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

» **Lời giải**

**Chọn D**

Số đo của  $\alpha$  là  $\alpha = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

» **Câu 16.** Khi biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác, khẳng định nào dưới đây **sai**?

**A.** Điểm biểu diễn cung  $\alpha$  và cung  $\pi - \alpha$  đối xứng nhau qua trục tung.

**B.** Điểm biểu diễn cung  $\alpha$  và cung  $-\alpha$  đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

**C.** Mỗi cung lượng giác được biểu diễn bởi một điểm duy nhất.

**D.** Cung  $\alpha$  và cung  $\alpha + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$  có cùng điểm biểu diễn.

» **Lời giải**

**Chọn B**

Khẳng định B sai vì điểm biểu diễn cung  $\alpha$  và cung  $-\alpha$  đối xứng nhau qua trục hoành.

» **Câu 17.** Một đồng hồ treo tường, kim giờ dài  $10,57\text{cm}$  và kim phút dài  $13,34\text{cm}$ . Trong 30 phút mũi kim giờ vạch lên cung tròn có độ dài là

**A.**  $2,78\text{cm}.$

**B.**  $2,77\text{cm}.$

**C.**  $2,76\text{cm}.$

**D.**  $2,8\text{cm}.$



» *Lời giải*

**Chọn B**

6 giờ thì kim giờ vạch lên 1 cung có số đo  $\pi$  nên 30 phút kim giờ vạch lên 1 cung có số đo là  $\frac{1}{12}\pi$ , suy ra độ dài cung tròn mà nó vạch lên là  $l = R\alpha = 10,57 \times \frac{3,14}{12} \approx 2,77$

» **Câu 18.** Trong 20 giây bánh xe của xe gắn máy quay được 60 vòng. Tính độ dài quãng đường xe gắn máy đã đi được trong vòng 3 phút, biết rằng bán kính bánh xe gắn máy bằng  $6,5\text{cm}$  (lấy  $\pi = 3,1416$ )

- A.  $22043\text{cm}$ .      B.  $22055\text{cm}$ .      C.  $22042\text{cm}$ .      D.  $22054\text{cm}$ .

» *Lời giải*

**Chọn D**

3 phút xe đi được  $\frac{3 \times 60}{20} \times 60 = 540$  vòng.

Độ dài 1 vòng bằng chu vi bánh xe là  $2\pi R = 2 \times 3,1416 \times 6,5 = 40,8408$ .

Vậy quãng đường xe đi được là  $540 \times 40,8408 = 22054,032\text{cm}$

» **Câu 19.** Một bánh xe đạp quay được 25 vòng trong 10 giây. Tính độ dài quãng đường mà người đi xe thực hiện được trong 2,35 phút, biết rằng bán kính bánh xe bằng  $340\text{mm}$ . (Tính theo đơn vị mét, kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

- A.  $314,5(m)$ .      B.  $753,04(m)$ .      C.  $514,8(m)$ .      D.  $437,8(m)$ .

» *Lời giải*

**Chọn B**

Sau 2,35 phút (= 141 giây), số vòng mà bánh xe thực hiện được là:

$\frac{141,25}{10} = 352,5$  vòng. Bán kính bánh xe:  $R = 340\text{mm} = 0,34\text{m}$ .

Quãng đường mà người đi xe đạp thực hiện được sau 2,35 phút là:

$352,5 \cdot 2\pi R = 352,5 \cdot 2\pi \cdot 0,34 = \frac{2397}{10}\pi \approx 753,04(m)$ .

» **Câu 20.** Từ một vị trí ban đầu trong không gian, vệ tinh X chuyển động theo quỹ đạo là một đường tròn quanh Trái Đất và luôn cách tâm Trái Đất một khoảng bằng  $9200\text{km}$ . Sau 2 giờ thì vệ tinh X hoàn thành hết một vòng di chuyển. Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1 giờ là

- A.  $28902,65(km)$ .      B.  $29802,65(km)$ .      C.  $32102,65(km)$ .      D.  $28905(km)$ .

» *Lời giải*

**Chọn A**

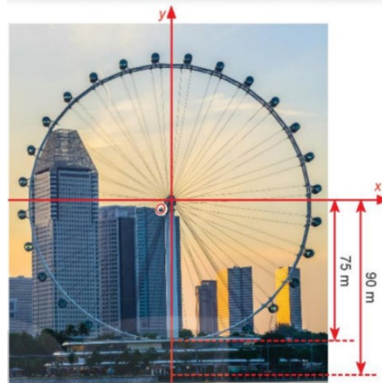
Một vòng di chuyển của X chính là chu vi đường tròn:

$C = 2\pi R = 2\pi \cdot 9200 = 18400\pi(km)$ .

Sau 1 giờ, vệ tinh di chuyển nửa đường tròn với quãng đường là:

$\frac{1}{2}C = 9200\pi \approx 28902,65(km)$ .

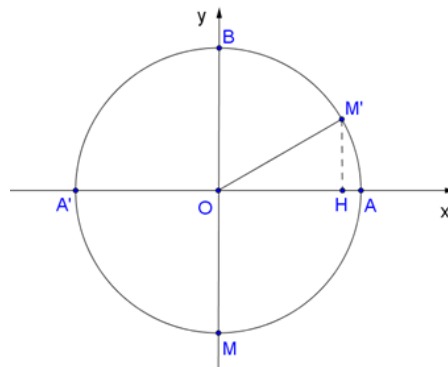
» **Câu 21.** Một chiếc đu quay có bán kính  $75\text{m}$ , tâm của vòng quay ở độ cao  $90\text{m}$ , thời gian thực hiện mỗi vòng quay của đu quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin tại vị trí thấp nhất của vòng quay, thì sau 20 phút quay, người đó ở độ cao bao nhiêu mét?



- A. 127,5(m).      B. 154,3(m).      C. 87,7(m).      D. 157,5.

🔗 *Lời giải*

**Chọn A**



Do tính đối xứng, dù đi quay chuyển động theo chiều kim đồng hồ hay ngược chiều kim đồng hồ, ta đều thấy rằng độ cao của người đó là như nhau sau cùng một khoảng thời gian.

Ở đây ta xét đi quay chuyển động theo chiều kim đồng hồ.

Gắn đi quay có bán kính 75m, tâm của vòng quay ở độ cao 90m vào hệ trục tọa độ  $Oxy$  ta được hình bên:

Sau 20 phút quay cabin đi được một góc là  $\frac{20}{30} \cdot 360^\circ = 240^\circ$  tức là đến vị trí điểm  $M'$ .

Khi đó góc  $\widehat{M'OH} = 30^\circ$  và  $M'H = 30^\circ \cdot OM' = 37,5$  (m).

Vậy sau 20 phút quay, người đó ở độ cao  $37,5 + 90 = 127,5$ (m).

**B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai**

» **Câu 22.** Đổi số đo của các góc sang radian. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$ rad		
(b)	$\left(\frac{15}{\pi}\right)^\circ = \frac{1}{12}$ rad		
(c)	$132^\circ = \frac{11\pi}{15}$ rad		
(d)	$-495^\circ = -\frac{13\pi}{4}$ rad		

🔗 *Lời giải*



$$(a) 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$30^\circ = \frac{30\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

$$(b) \left(\frac{15}{\pi}\right)^\circ = \frac{1}{12} \text{ rad}$$

$$\left(\frac{15}{\pi}\right)^\circ = \frac{\frac{15}{\pi} \pi}{180} \text{ rad} = \frac{1}{12} \text{ rad}.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

$$(c) 132^\circ = \frac{11\pi}{15} \text{ rad}$$

$$132^\circ = \frac{132\pi}{180} \text{ rad} = \frac{11\pi}{15} \text{ rad}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

$$(d) -495^\circ = -\frac{13\pi}{4} \text{ rad}$$

$$-495^\circ = -\frac{495\pi}{180} \text{ rad} = -\frac{11\pi}{4} \text{ rad}.$$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 23.** Đổi số đo của các góc sang độ. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\frac{3\pi}{4} \text{ rad} = 135^\circ$		
(b)	$-\frac{\pi}{360} \text{ rad} = -0,5^\circ$		
(c)	$\frac{31\pi}{2} \text{ rad} = 27^\circ$		
(d)	$-4 \text{ rad} \approx -229,18^\circ$		

» **Lời giải**

$$(a) \frac{3\pi}{4} \text{ rad} = 135^\circ;$$

$$\frac{3\pi}{4} \text{ rad} = \left(\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 135^\circ$$

» **Chọn ĐÚNG.**

$$(b) -\frac{\pi}{360} \text{ rad} = -0,5^\circ;$$

$$-\frac{\pi}{360} \text{ rad} = \left(-\frac{\pi}{360} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = -0,5^\circ.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

$$(c) \frac{31\pi}{2} \text{ rad} = 27^\circ;$$



$$\frac{31\pi}{2} \text{ rad} = \left( \frac{31\pi}{2} \cdot \frac{180}{\pi} \right)^\circ = 2790^\circ.$$

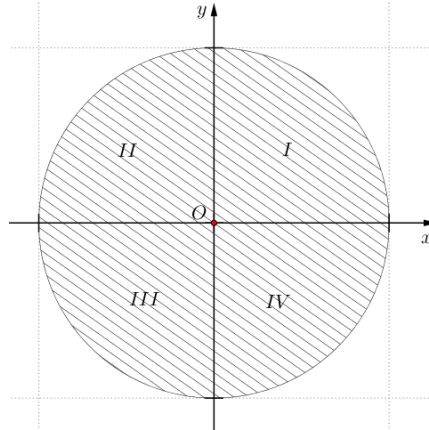
» **Chọn SAI.**

(d)  $-4\text{rad} \approx -229,18^\circ$ .

$$-4\text{rad} = \left( -4 \cdot \frac{180}{\pi} \right)^\circ = \left( -\frac{720}{\pi} \right)^\circ \approx -229,18^\circ.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 24.** Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác. Khi đó:

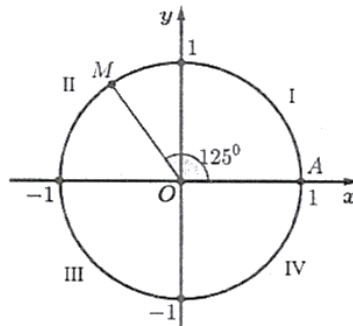


	<b>Mệnh đề</b>	<b>Đúng</b>	<b>Sai</b>
(a)	$125^\circ$ là điểm $M$ thuộc góc phần tư thứ II		
(b)	$405^\circ$ là điểm $N$ thuộc góc phần tư thứ III		
(c)	$\frac{19\pi}{3}$ là điểm $P$ thuộc góc phần tư thứ II		
(d)	$-\frac{13\pi}{6}$ là điểm $Q$ thuộc góc phần tư thứ IV		

» **Lời giải**

(a)  $125^\circ$  là điểm  $M$  thuộc góc phần tư thứ II

Điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo  $125^\circ$  là điểm  $M$  thuộc góc phần tư thứ II của đường tròn lượng giác thỏa mãn  $\widehat{AOM} = 125^\circ$  (Hình 1).

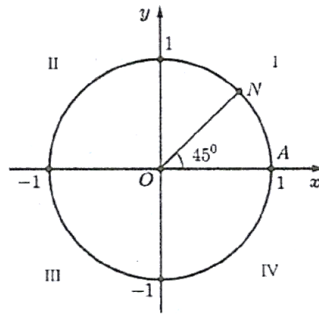


**Hình 1**

» **Chọn ĐÚNG.**

(b)  $405^\circ$  là điểm  $N$  thuộc góc phần tư thứ III

Ta có:  $405^\circ = 45^\circ + 360^\circ$ . Vì vậy điểm biểu diễn của góc lượng giác  $405^\circ$  là điểm  $N$  thuộc góc phần tư thứ I của đường tròn lượng giác và thỏa mãn  $\widehat{AON} = 45^\circ$  (Hình 2).



Hình 2

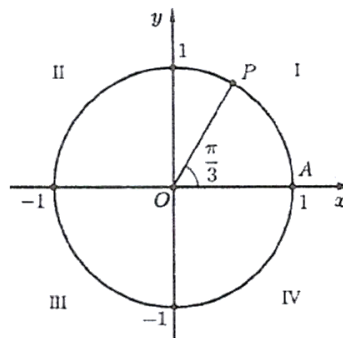
» Chọn SAI.

(c)  $\frac{19\pi}{3}$  là điểm  $P$  thuộc góc phần tư thứ II

$$\text{Ta có: } \frac{19\pi}{3} = \frac{18\pi + \pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 3.2\pi.$$

Vì vậy điểm biểu diễn của góc lượng giác  $\frac{19\pi}{3}$  là điểm  $P$  thuộc góc phần tư thứ I của

đường tròn lượng giác và thoả mãn  $\widehat{AOP} = \frac{\pi}{3}$  (Hình 3).



Hình 3

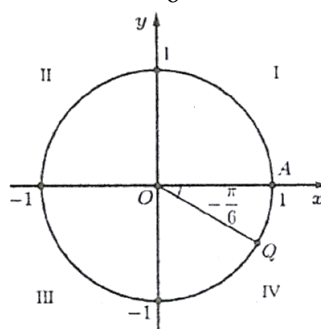
» Chọn SAI.

(d)  $-\frac{13\pi}{6}$  là điểm  $Q$  thuộc góc phần tư thứ IV

$$\text{Ta có: } -\frac{13\pi}{6} = \frac{-12\pi - \pi}{6} = -\frac{\pi}{6} - 2\pi.$$

Vì vậy điểm biểu diễn của góc lượng giác  $-\frac{13\pi}{6}$  là điểm  $Q$  thuộc góc phần tư thứ IV của

đường tròn lượng giác và thoả mãn  $\widehat{AOQ} = \frac{\pi}{6}$  (Hình 4).



Hình 4

» Chọn ĐÚNG.



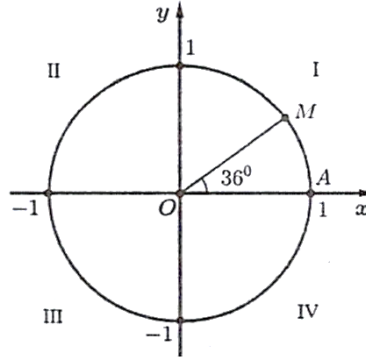
» Câu 25. Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$36^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ là điểm $M$ thuộc góc phần tư thứ II		
(b)	$-60^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ là các điểm $M_1, M_2$ thuộc góc phần tư thứ II và IV		
(c)	$-\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ là $M$ thuộc góc phần tư thứ III		
(d)	$-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ là bốn điểm $M, N, P, Q$ thuộc góc phần tư thứ I, II, III, IV		

» Lời giải

(a)  $36^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$  là điểm  $M$  thuộc góc phần tư thứ II

Xét góc lượng giác  $k360^\circ$ , dù  $k$  là số chẵn hay số lẻ thì góc này cũng có điểm biểu diễn là điểm  $A$  (điểm gốc trên đường tròn lượng giác).



Vì vậy, góc lượng giác  $36^\circ + k360^\circ$  có điểm biểu diễn là điểm  $M$  thuộc góc phần tư thứ I của đường tròn lượng giác và  $\widehat{AOM} = 36^\circ$ .

» Chọn SAI.

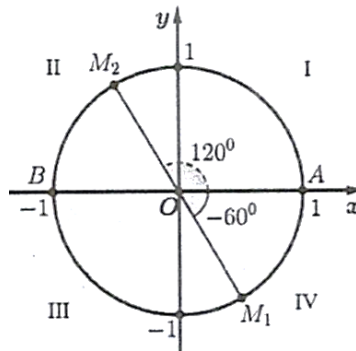
(b)  $-60^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$  là các điểm  $M_1, M_2$  thuộc góc phần tư thứ II và IV

Xét góc lượng giác  $k180^\circ$ .

Nếu  $k$  chẵn thì góc này có điểm biểu diễn là  $A(1;0)$ ,

Nếu  $k$  lẻ thì góc này có điểm biểu diễn là điểm  $B(-1;0)$ .

Vì vậy,  $-60^\circ + k180^\circ$  có các điểm biểu diễn là  $M_1$  và  $M_2$  như hình vẽ bên.



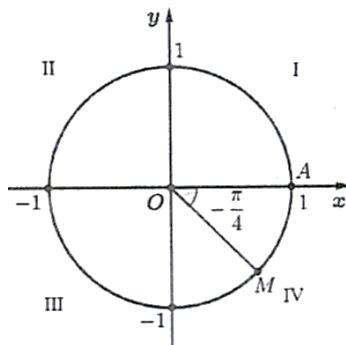
» Chọn ĐÚNG.

(c)  $-\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$  là  $M$  thuộc góc phần tư thứ III





Ta biết góc lượng giác  $k2\pi$  luôn có điểm biểu diễn là  $A(1;0)$ , vì vậy góc lượng giác  $-\frac{\pi}{4} + k2\pi$  có điểm biểu diễn là  $M$  thuộc góc phần tư thứ IV và thoả mãn  $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{4}$ .



» **Chọn ĐÚNG.**

(d)  $-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  là bốn điểm  $M, N, P, Q$  thuộc góc phần tư thứ I, II, III, IV

Xét góc lượng giác  $k\frac{\pi}{2}$ .

Khi  $k=0$  thì  $k\frac{\pi}{2}=0$ , góc này có điểm biểu diễn là điểm  $A(1;0)$ .

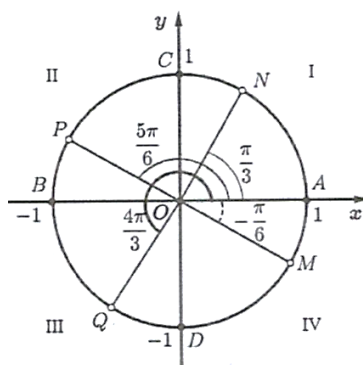
Khi  $k=1$  thì  $k\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ , góc này có điểm biểu diễn là điểm  $C(0;1)$ .

Khi  $k=2$  thì  $k\frac{\pi}{2}=\pi$ , góc này có điểm biểu diễn là điểm  $B(-1;0)$ .

Khi  $k=3$  thì  $k\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$ , góc này có điểm biểu diễn là điểm  $D(0;-1)$ .

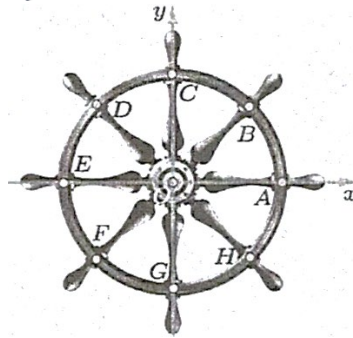
Nếu  $k=4,5,6,\dots$  thì ta thấy rằng các điểm biểu diễn có được vẫn là sự lặp lại của  $A, B, C, D$ .

Vì vậy điểm biểu diễn của  $-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$  là bốn điểm  $M, N, P, Q$  trên đường tròn lượng giác (xem hình vẽ trên).



» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 26.** Trong hình vẽ bên, ta xem hình ảnh đường tròn trên một bánh lái tàu thủy tương ứng với một đường tròn lượng giác.



	<b>Mệnh đề</b>	<b>Đúng</b>	<b>Sai</b>
<b>(a)</b>	Công thức tổng quát biểu diễn góc lượng giác $(OA, OB)$ theo đơn vị radian: $(OA, OB) = \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z});$		
<b>(b)</b>	Công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với bốn điểm biểu diễn là $A, C, E, G$ theo đơn vị radian là $k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$		
<b>(c)</b>	Công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với hai điểm biểu diễn là $A, E$ theo đơn vị độ là: $k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$		
<b>(d)</b>	Công thức tổng quát biểu diễn góc lượng giác $(OA, OC) + (OC, OH)$ theo đơn vị radian: $\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$		

» **Lời giải**

**(a)** Công thức tổng quát biểu diễn góc lượng giác  $(OA, OB)$  theo đơn vị radian:

$$(OA, OB) = \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z});$$

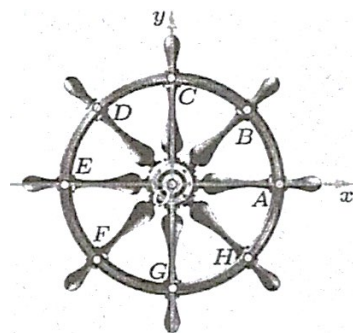
Ta có:  $(OA, OB) = \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z});$

» **Chọn ĐÚNG.**

**(b)** Công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với bốn điểm biểu diễn là  $A, C, E, G$  theo đơn vị radian là  $k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$

Ta thấy  $A, C, E, G$  lần lượt biểu diễn cho các góc lượng giác  $0rad, \frac{\pi}{2}rad, \pi rad, \frac{3\pi}{2}rad, 2\pi rad, \frac{5\pi}{2}rad, \dots$  Tất cả các góc này theo thứ tự chênh lệch nhau  $\frac{\pi}{2}$  rad.

Vì vậy công thức duy nhất biểu diễn cho các góc lượng giác ấy là  $k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .





» **Chọn SAI.**

(c) Công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với hai điểm biểu diễn là  $A, E$  theo đơn vị độ là:  $k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$

Ta thấy hai điểm  $A, E$  lần lượt biểu diễn cho các góc lượng giác  $0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, 540^\circ, \dots$

Tất cả các góc này theo thứ tự chênh lệch nhau  $180^\circ$ .

Vì vậy công thức duy nhất biểu diễn cho các góc lượng giác ấy là  $k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Công thức tổng quát biểu diễn góc lượng giác  $(OA, OC) + (OC, OH)$  theo đơn vị radian:

$$\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Theo hệ thức Sa-lơ, ta có:

$$(OA, OB) + (OB, OC) = (OA, OC) = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$(OA, OC) + (OC, OH) = (OA, OH) = -\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 27.** Đường kính của một bánh xe máy là 60 (cm). Trong mỗi ý ở mỗi câu, hãy chọn đúng hay sai

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Độ dài cung $40^\circ$ của một bánh xe gần bằng 20,94(cm), kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.		
(b)	Mỗi bánh xe phải lăn một vòng thì người đi xe đi được quãng đường 94,2(cm), kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 1.		
(c)	Để người đi xe đi được quãng đường 2(km) thì mỗi bánh xe phải lăn 1000 vòng		
(d)	Nếu xe chạy với vận tốc 50(km/h) thì trong 5 giây bánh xe quay được gần 36,9 vòng.		

» **Lời giải**

(a) Độ dài cung  $40^\circ$  của một bánh xe gần bằng 20,9(cm), kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

$$\text{Độ dài cung tròn có số đo } \alpha (\text{rad}) \text{ là } l = \alpha \cdot R = \frac{\pi \cdot 40}{180} \cdot R = \frac{\pi \cdot 40}{180} \cdot 30 \simeq 20,94(\text{cm})$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Mỗi bánh xe phải lăn một vòng thì người đi xe đi được quãng đường 94,2(cm), kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 1.

Mỗi bánh xe phải lăn một vòng thì người đi xe đi được quãng đường 94,2(cm)

Ta có  $R = 30$

Chu vi bánh xe là:  $l = \alpha \cdot R = 2\pi R = 60 \cdot \pi = 188,5(\text{cm})$ .

» **Chọn SAI.**

(c) Để người đi xe đi được quãng đường 2(km) thì mỗi bánh xe phải lăn 1000 vòng

Để người đi xe đi được quãng đường 2(km) thì mỗi bánh xe phải lăn 1000 vòng



Đổi:  $2(\text{km}) = 200000(\text{cm})$ .

Số vòng bánh xe cần lăn để đi được quãng đường dài  $200000(\text{cm})$  là  $\frac{200000}{188,5} \simeq 1061$  (vòng).

» **Chọn SAI.**

(d) Nếu xe chạy với vận tốc  $50(\text{km/h})$  thì trong 5 giây bánh xe quay được gần 36,9 vòng.

Nếu xe chạy với vận tốc  $50(\text{km/h})$  thì trong 5 giây bánh xe quay được gần 36,9 vòng.

Trong một phút bánh xe quay được:  $\left[ \frac{50 \cdot 1000}{3600} : (0,6 \cdot \pi) \right] \cdot 5 \simeq 36,9$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 28.** Trên đường tròn lượng giác tâm  $O$  và hệ trục tọa độ  $Oxy$  cho điểm  $M$  sao cho

$$\widehat{AOM} = \frac{\pi}{5}.$$

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số đo của góc lượng giác có tia đầu là $OA$ tia cuối là $OM$ bằng $\frac{\pi}{5} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .		
(b)	Góc lượng giác có số đo $\frac{11\pi}{5}$ có cùng tia đầu và tia cuối với góc lượng giác $(OA, OM)$ .		
(c)	Trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ ta được 6 điểm.		
(d)	Khi biểu diễn góc $\alpha = \frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ lên đường tròn lượng giác ta được tập hợp điểm là một đa giác đều thì diện tích của đa giác đều đó bằng 4.		

» **Lời giải**

(a) Số đo của góc lượng giác có tia đầu là  $OA$  tia cuối là  $OM$  bằng  $\frac{\pi}{5} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

Số đo của góc lượng giác có tia đầu là  $OA$  tia cuối là  $OM$  bằng  $\frac{\pi}{5} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

» **Chọn SAI.**

(b) Góc lượng giác có số đo  $\frac{11\pi}{5}$  có cùng tia đầu và tia cuối với góc lượng giác  $(OA, OM)$ .

Ta có  $\frac{11\pi}{5} = \frac{\pi}{5} + 2\pi \Rightarrow$  Góc lượng giác có số đo  $\frac{11\pi}{5}$  có cùng tia đầu và tia cuối với góc lượng giác có số đo  $(OA, OM) = \frac{\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo  $\frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$  ta được 6 điểm.

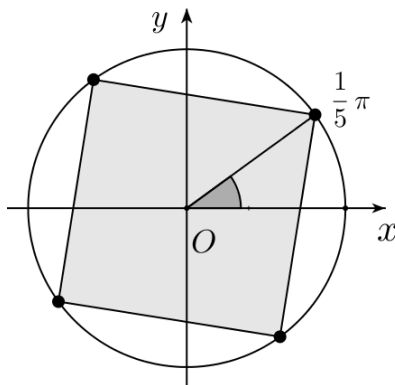


Ta có  $\frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{3} = \frac{\pi}{5} + \frac{k2\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$  nên khi biểu diễn trên đường tròn lượng giác ta được 6 điểm.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Khi biểu diễn góc  $\alpha = \frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  lên đường tròn lượng giác ta được tập hợp điểm là một đa giác đều thì diện tích của đa giác đều đó bằng 4.

Ta có tập hợp điểm biểu diễn của  $\alpha$  là hình vuông có đường chéo bằng 2.



Diện tích của đa giác biểu diễn là  $S = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2$  (đvdt).

» **Chọn SAI.**

» **Câu 29.** Từ một vị trí ban đầu trong không gian, vệ tinh X chuyển động theo quỹ đạo là một đường tròn quanh Trái Đất và luôn cách tâm Trái Đất một khoảng bằng 9200 km. Sau 2 giờ thì vệ tinh X hoàn thành hết một vòng di chuyển.

	<b>Mệnh đề</b>	<b>Đúng</b>	<b>Sai</b>
(a)	Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1 giờ là: $\approx 28902,65(km)$ , kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.		
(b)	Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1,5 giờ là: $\approx 43353,98(km)$ , kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.		
(c)	Sau khoảng 5,3 giờ thì X di chuyển được quãng đường 240000 (km)		
(d)	Giả sử vệ tinh di chuyển theo chiều dương của đường tròn, sau 4,5 giờ thì vệ tinh vẽ nên một góc $\frac{9\pi}{2}$ rad?		

» **Lời giải**

(a) Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1 giờ là:  $\approx 28902,65(km)$ , kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

Một vòng di chuyển của X chính là chu vi đường tròn:

$$C = 2\pi R = 2\pi \cdot 9200 = 18400\pi(km).$$

Sau 1 giờ, vệ tinh di chuyển nửa đường tròn với quãng đường là:

$$\frac{1}{2}C = 9200\pi \approx 28902,65(km).$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1,5 giờ là:  $\approx 43353,98(km)$ , kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.



Sau 1,5 giờ, vệ tinh di chuyển được  $\frac{1,5 \cdot 1}{2}$  đường tròn (hay  $\frac{3}{4}$  đường tròn), quãng đường là:  $\frac{3}{4}C = \frac{3}{4} \cdot 18400\pi = 13800\pi \approx 43353,98(km)$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Sau khoảng 5,3 giờ thì X di chuyển được quãng đường 240000 (km)

Số giờ để vệ tinh X thực hiện quãng đường 240000 km là:  $\frac{240000}{9200\pi} \approx 8,3$  (giờ).

» **Chọn SAI.**

(d) Giả sử vệ tinh di chuyển theo chiều dương của đường tròn, sau 4,5 giờ thì vệ tinh vẽ nên một góc  $\frac{9\pi}{2}$  rad?

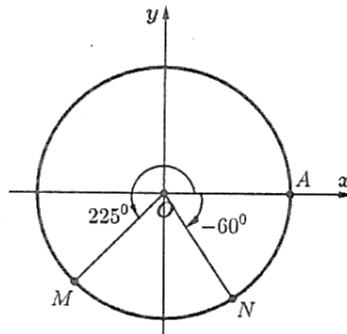
Sau 4,5 giờ thì số vòng tròn mà vệ tinh X di chuyển được là:  $\frac{4,5}{2} = \frac{9}{4}$  (vòng).

Số đo góc lượng giác thu được là:  $\frac{9}{4} \cdot 2\pi = \frac{9\pi}{2} (rad)$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

### C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 30.** Từ hình vẽ đường tròn lượng giác, công thức số đo tổng quát của góc lượng giác  $(OA, OM)$ ;  $(OA, ON)$  có dạng lần lượt là  $n^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$ ;  $m^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$  với  $n, m$  là các số nguyên. Tính giá trị  $S = \frac{1}{4}m^2 - n$



» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 675**

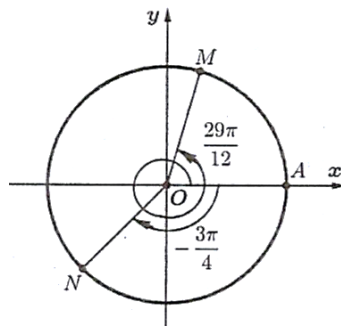
Ta có:  $(OA, OM) = 225^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow n = 225$ ;

$(OA, ON) = -60^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow m = -60$ .

Vậy  $S = \frac{1}{4}(-60)^2 - 225 = 675$

» **Câu 31.** Từ hình vẽ đường tròn lượng giác, công thức số đo tổng quát của góc lượng giác  $(OA, OM)$ ;  $(OA, ON)$  có dạng lần lượt là  $\frac{n}{m}\pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ ;  $-\frac{p}{q}\pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$  với

$m, n, p, q$  là các số nguyên và  $\frac{n}{m}; \frac{p}{q}$  là phân số tối giản. Tính giá trị  $T = (m+p) - (n+q)$



» Lời giải

✓ Trả lời: 6

Ta có:  $\frac{29\pi}{12} = \frac{5\pi + 24\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} + 2\pi$ , vì vậy  $(OA, OM) = \frac{5\pi}{12} + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )  $\Rightarrow \begin{cases} n = 5 \\ m = 12 \end{cases}$ .

$(OA, ON) = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )  $\Rightarrow \begin{cases} p = 3 \\ q = 4 \end{cases}$ .

Vậy  $T = (m + p) - (n + q) = (12 + 3) - (5 + 4) = 6$

» Câu 32. Một bánh xe có đường kính kể cả lốp xe là  $55\text{ cm}$ . Nếu xe chạy với tốc độ  $50\text{ km/h}$  thì trong một giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng? (Kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

» Lời giải

✓ Trả lời: 8,04

Tốc độ xe là:  $50\text{ km/h} = \frac{50 \cdot 100000}{3600}\text{ cm/s} = \frac{12500}{9}\text{ cm/s}$ .

Mỗi vòng bánh xe có chiều dài:  $2\pi R = 2\pi \cdot \frac{55}{2} = 55\pi(\text{cm})$ .

Vậy mỗi giây thì bánh xe lăn được số vòng là  $\frac{12500}{9} : (55\pi) \approx 8,04$  (vòng).

» Câu 33. Một bánh xe đạp quay được 25 vòng trong 10 giây. Tính độ dài quãng đường mà người đi xe thực hiện được trong 2,35 phút, biết rằng bán kính bánh xe bằng  $340\text{ mm}$ . (Tính theo đơn vị mét, kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị).

» Lời giải

✓ Trả lời: 753

Sau 2,35 phút (141 giây), số vòng mà bánh xe thực hiện được là:  $\frac{141 \cdot 25}{10} = 352,5$  vòng.

Bán kính bánh xe:  $R = 340\text{ mm} = 0,34\text{ m}$ .

Quãng đường mà người đi xe đạp thực hiện được sau 2,35 phút là:

$352,5 \cdot 2\pi R = 352,5 \cdot 2\pi \cdot 0,34 = \frac{2397}{10}\pi \approx 753(\text{m})$ .

» Câu 34. Một cái đồng hồ treo tường có đường kính bằng  $60\text{ cm}$ , ta xem vành ngoài chiếc đồng hồ là một đường tròn với các điểm  $A, B, C$  lần lượt tương ứng với vị trí các số  $2, 9, 4$ . Tính tổng độ dài các cung nhỏ  $AB$  và  $AC$  (kết quả tính theo đơn vị centimet và làm tròn đến hàng phần trăm).



✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 109,96**

Bán kính đường tròn là  $R = \frac{60}{2} = 30 \text{ cm}$ .

Ta có:  $\widehat{AOB} = 150^\circ = \frac{150\pi}{180} \text{ rad} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$ ; suy ra độ dài cung nhỏ  $AB$  là

$$l_{\widehat{AB}} = R \cdot \widehat{AOB} = 30 \cdot \frac{5\pi}{6} = 25\pi.$$

Ta có:  $\widehat{AOC} = 60^\circ = \frac{60\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$ ; suy ra độ dài cung nhỏ  $AC$  là

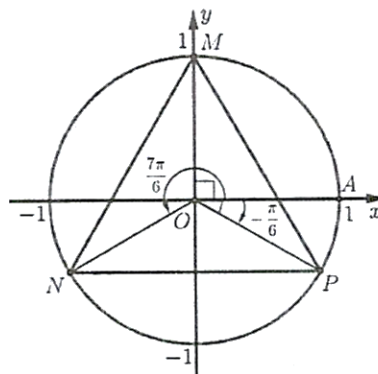
$$l_{\widehat{AC}} = R \cdot \widehat{AOC} = 30 \cdot \frac{\pi}{3} = 10\pi$$

Khi đó  $l_{\widehat{AB}} + l_{\widehat{AC}} = 25\pi + 10\pi = 35\pi \approx 109,96$

» **Câu 35.** Gọi  $M, N, P$  là các điểm trên đường tròn lượng giác sao cho số đo các góc lượng giác  $(OA, OM), (OA, ON), (OA, OP)$  lần lượt bằng  $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$  và  $MN = NP = 2$ . Tính diện tích tam giác  $MNP$ . Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 3,46**



Theo hệ thức Sa-lơ, ta có:

$$(OA, OM) + (OM, ON) = (OA, ON) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + (OM, ON) = \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow (OM, ON) = \frac{2\pi}{3}.$$

Ta có  $\widehat{MON} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{MPN} = 60^\circ$  (1) (số đo góc nội tiếp bằng nửa số đo góc ở tâm chắn cùng một cung).

$$\text{Ta có: } (OA, OP) = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}.$$





Theo hệ thức Sa-lơ:

$$(OA, ON) + (ON, OP) = (OA, OP) \Leftrightarrow \frac{7\pi}{6} + (ON, OP) = \frac{11\pi}{6} \Leftrightarrow (ON, OP) = \frac{2\pi}{3}.$$

Ta có  $\widehat{NOP} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{NMP} = 60^\circ$  (2) (số đo góc nội tiếp bằng nửa số đo góc ở tâm chắn cùng một cung).

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow \Delta MNP$  là tam giác đều.

$$\text{Vậy } S_{MNP} = MN \cdot NP \cdot \sin(\widehat{MNP}) = 2 \cdot 2 \cdot \sin(60^\circ) = 2\sqrt{3} \approx 3,46$$



Chương 01

Bài 2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

A

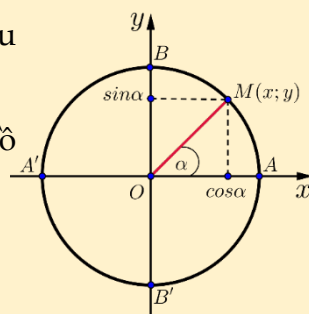
Lý thuyết

1. Giá trị lượng giác của một góc lượng giác

Định nghĩa:

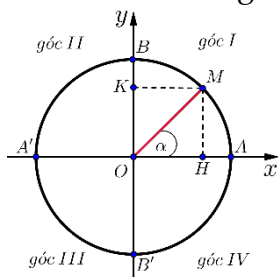
Trên đường tròn lượng giác, gọi  $M(x_M; y_M)$  là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo  $\alpha$ . Khi đó:

- Qui ước chọn chiều **ngược** với chiều quay của kim đồng hồ làm **chiều dương**.
- $y_M$  điểm  $M$  gọi là sin của  $\alpha$ . Ký hiệu là  $\sin \alpha = y_M$
- $x_M$  điểm  $M$  gọi là cosin của  $\alpha$ . Ký hiệu là  $\cos \alpha = x_M$
- Nếu  $\cos \alpha = x_M \neq 0$ ,  $\frac{y_M}{x_M} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  gọi là tang của  $\alpha$ . Ký hiệu  $\tan \alpha = \frac{y_M}{x_M} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ .
- Nếu  $\sin \alpha = y_M \neq 0$ ,  $\frac{x_M}{y_M} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$  gọi là cotang của  $\alpha$ . Ký hiệu  $\cot \alpha = \frac{x_M}{y_M} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ .



Chú ý

- (1) Các giá trị:
  1.  $\sin \alpha, \cos \alpha$  xác định  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .
  2.  $\tan \alpha$  xác định  $\forall \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).
  3.  $\cot \alpha$  xác định  $\forall \alpha \neq k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).
- (2) Với mọi góc lượng giác  $\alpha$ , ta có
  1.  $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha, \forall k \in \mathbb{Z}$ ;
  2.  $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha, \forall k \in \mathbb{Z}$ ;
  3.  $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$ ;
  4.  $\cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha, \alpha \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$ .
- (3) Dấu của các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$ :



		Góc phần tư			
		I	II	III	IV
Giá trị lượng giác	$\cos \alpha$	+	-	-	+
	$\sin \alpha$	+	+	-	-
	$\tan \alpha$	+	-	+	-
	$\cot \alpha$	+	-	+	-



## 2. Hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác của một góc lượng giác



$$(1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(2) \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(3) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(4) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

## 3. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc đối nhau

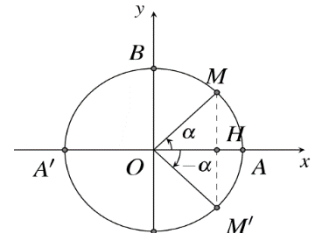
$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

Cos – đối



## 4. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

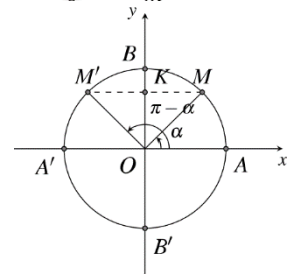
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

Sin – bù



## 5. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc phụ nhau

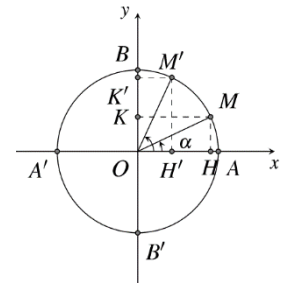
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

Phụ – chéo



## 6. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc hơn kém

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

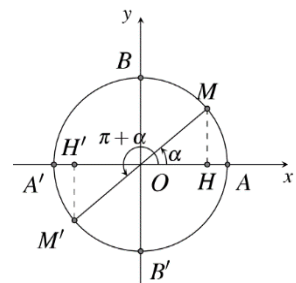
$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$





► Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt:

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot \alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



## Các dạng bài tập

### Dạng 1. Tính giá trị lượng giác của 1 góc lượng giác



#### Phương pháp

▶ Áp dụng hệ thức cơ bản:

$$(1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(2) \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(4) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(3) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(5) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$(6) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

- ▶ Đồng thời từ dữ kiện  $a < \alpha < b$  ( $a < b$ ) thì xác định cụ thể dấu của  $\sin \alpha$  và/hoặc  $\cos \alpha$ .
- ▶ Từ đó tính được chính xác các giá trị lượng giác còn lại.



#### Ví dụ 1.1.

Cho  $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$  ( $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ ). Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

#### ✎ Lời giải

Vì  $-\frac{\pi}{2} < x < 0 \Rightarrow \sin x < 0$

Ta có  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5} \xrightarrow{\sin x < 0} \sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ .

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{2}; \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{-\frac{1}{\sqrt{5}}} = -2$$



#### Ví dụ 1.2.

Cho  $\sin x = \frac{3}{5}$  ( $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ). Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

#### ✎ Lời giải

Vì  $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$

Ta có  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \xrightarrow{\cos x < 0} \cos x = -\frac{4}{5}$ .



$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}; \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$



**Ví dụ 1.3.**

Cho  $\tan x = \frac{3}{4}$  ( $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$ ). Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

*✎ Lời giải*

$$\text{Vì } -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x < 0$$

$$\tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25} \xrightarrow{\cos x < 0} \cos x = -\frac{4}{5}.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin x = \tan x \cdot \cos x = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5}$$



**Ví dụ 1.4.**

Cho  $\cot x = \frac{3}{4}$  ( $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ ). Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

*✎ Lời giải*

$$\text{Vì } \pi < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin x < 0$$

$$\tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\cot x} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{16}{25}$$

$$\text{Vậy } \sin x = -\frac{4}{5}.$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \cos x = \cot x \cdot \sin x = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5}$$



**Dạng 2. Tính giá trị lượng giác liên quan góc đặc biệt**



**Phương pháp**

- ▶ Áp dụng các hệ thức cơ bản.
- ▶ Áp dụng mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác.

**(1) Cos – đối:**

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

**(2) Sin – bù:**

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

**(4) Phụ – chéo**

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

**(3) Hơn kém  $\frac{\pi}{2}$**

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

**(5) Hơn kém  $\pi$**



**Ví dụ 2.1.**

Tính giá trị của biểu thức:

**(1)**  $S = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$

**(2)**  $K = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ$

**(3)**  $M = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \dots + \cos^2 170^\circ + \cos^2 180^\circ$

**Lời giải**

**(1)**  $S = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$

Ta có  $S = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ = 3 - 1^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot 1^2 = -\frac{1}{2}$ .

**(2)**  $K = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ$

$$K = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ$$

$$= \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \cos^2 30^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 10^\circ$$



$$= \sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ + \sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ$$

$$= 4$$

(3)  $M = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \dots + \cos^2 170^\circ + \cos^2 180^\circ$

Áp dụng công thức  $\cos \alpha = \cos(180^\circ - \alpha)$ ,  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$  ta có:

$$M = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \dots + \cos^2 170^\circ + \cos^2 180^\circ$$

$$= \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \dots + \cos^2 80^\circ + \cos^2 90^\circ + \cos^2 80^\circ + \dots + \cos^2 20^\circ + \cos^2 10^\circ + \cos^2 90^\circ$$

$$= 2(\cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \dots + \cos^2 80^\circ + \cos^2 90^\circ)$$

$$= 2(\sin^2 80^\circ + \dots + \sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ + \dots + \cos^2 80^\circ + \cos^2 90^\circ) = 8$$



### Ví dụ 2.2.

Chứng minh

$$D = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(13\pi + \alpha) - 3\sin(\alpha - 5\pi) = 3\sin \alpha$$

*Lời giải*

Ta có  $D = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(13\pi + \alpha) - 3\sin(\alpha - 5\pi)$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\pi + \alpha) + 3\sin(\pi - \alpha) = \cos \alpha - \cos \alpha + 3\sin \alpha = 3\sin \alpha. \text{ (ĐPCM)}$$



### Ví dụ 2.3.

Trên đường tròn lượng giác, xác định điểm M biểu diễn góc lượng giác có số đo  $\frac{5\pi}{6}$ .

Cho biết, khi quét góc lượng giác từ  $(-1012\pi; 1012\pi)$  có bao nhiêu cặp góc đối có giá trị  $|\sin|$  bằng  $\sin \frac{5\pi}{6}$ ?

*Lời giải*

Ta có:  $|\sin \alpha| = \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{2}$

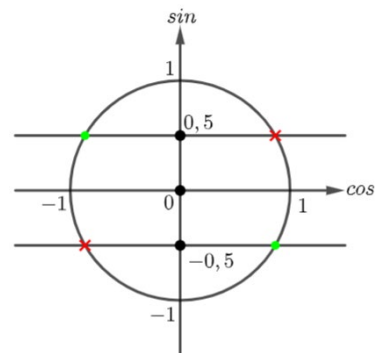
Sử dụng vòng tròn lượng giác để giải quyết bài toán này.

Xét thấy,  $\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha) \Rightarrow |\sin(\alpha)| = |\sin(\pi - \alpha)| = \frac{1}{2}$ .

Do đó, với mỗi một đoạn  $[-\pi; \pi]$  thì có hai cặp số đối nhau như trên vòng tròn lượng giác.

Ta mở rộng  $[-\pi; \pi]$  thành  $[-\pi - \pi; \pi + \pi]$  thì sẽ có  $2 \times 2 = 4$  cặp.

Tương tự như vậy, trong  $(-1012\pi; 1012\pi)$  có  $1012 \times 2 = 2024$  cặp.







**Dạng 3. Rút gọn biểu thức lượng giác**



**Phương pháp**

▶ Áp dụng hệ thức cơ bản:

(1)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

(2)  $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

(4)  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(3)  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(5)  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

(6)  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

▶ Áp dụng các hệ thức cơ bản.

▶ Áp dụng mối quan hệ: Cos – đối; Sin – bù; Phụ – chéo; Hơn kém  $\frac{\pi}{2} / \pi$ .



**Ví dụ 3.1.**

Rút gọn biểu thức

(1)  $A = (1 - \sin^2 x) \cdot \cot^2 x + (1 - \cot^2 x)$

(2)  $M = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$

*Lời giải*

(1)  $A = (1 - \sin^2 x) \cdot \cot^2 x + (1 - \cot^2 x)$

$$A = (1 - \sin^2 x) \cdot \cot^2 x + (1 - \cot^2 x) = \cot^2 x - \cos^2 x + 1 - \cot^2 x = \sin^2 x.$$

(2)  $M = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$

$$M = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x + 1 - 2 \sin x \cos x = 2.$$



**Ví dụ 3.2.**

Rút gọn biểu thức

(1)  $C = 2(\cos^4 x + \sin^4 x + \cos^2 x \sin^2 x)^2 - (\cos^8 x + \sin^8 x)$

(2)  $E = \frac{(\sin x - \cos x)^2 - 1}{\tan x - \sin x \cdot \cos x}$

(3)  $F = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

*Lời giải*

(1)  $C = 2(\cos^4 x + \sin^4 x + \cos^2 x \sin^2 x)^2 - (\cos^8 x + \sin^8 x)$

Ta có :

$$\cos^8 x + \sin^8 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2 \cos^2 x \sin^2 x = 1 - 2 \cos^2 x \sin^2 x$$

$$= (\cos^4 x + \sin^4 x)^2 - 2 \cos^4 x \sin^4 x = 1 - 4 \cos^2 x \sin^2 x + 2 \cos^4 x \sin^4 x$$

$$= (1 - 2 \cos^2 x \sin^2 x)^2 - 2 \cos^4 x \sin^4 x = 1 - 4 \cos^2 x \sin^2 x + 2 \cos^4 x \sin^4 x.$$



$$\text{Suy ra : } C = 2(1 - \cos^2 x \sin^2 x)^2 - (1 - 4\cos^2 x \sin^2 x + 2\cos^4 x \sin^4 x) .$$

$$C = 2(1 - 2\cos^2 x \sin^2 x + \cos^4 x \sin^4 x) - (1 - 4\cos^2 x \sin^2 x + 2\cos^4 x \sin^4 x) = 1 .$$

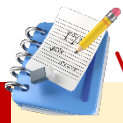
$$(2) E = \frac{(\sin x - \cos x)^2 - 1}{\tan x - \sin x \cdot \cos x}$$

$$\text{Ta có: } E = \frac{(\sin x - \cos x)^2 - 1}{\tan x - \sin x \cdot \cos x} = \frac{-2\cos x \cdot \sin x}{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x \cdot \cos x} = \frac{-2\cos x \cdot \sin x \cos x}{\sin x(1 - \cos^2 x)} = \frac{-2\cos^2 x}{\sin^2 x} = -2\cot^2 x$$

$$(3) F = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\text{Ta có: } \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha .$$

$$\text{Suy ra: } F = 1 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 .$$



### Ví dụ 3.3.

Cho  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Tính

$$\sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}}$$

» *Lời giải*

$$\text{Đặt } A = \sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}}$$

$$\text{Khi đó } A^2 = \left( \sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}} \right)^2 = \frac{4}{\cos^2 \alpha}$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \cos \alpha > 0 \text{ do đó } A = \frac{2}{\cos \alpha}$$



**Dạng 4. Giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất**



**Phương pháp**

▶ Áp dụng hệ thức cơ bản:

(1)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

(2)  $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

(4)  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(3)  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(5)  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

(6)  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

▶ Áp dụng các hệ thức cơ bản.

▶ Áp dụng mối quan hệ: Cos - đối; Sin - bù; Phụ - chéo; Hơn kém  $\frac{\pi}{2} / \pi$ .

▶ Với mọi góc lượng giác  $\alpha$ , ta có:  $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$  và  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

1.  $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha, \forall k \in \mathbb{Z};$

2.  $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha, \forall k \in \mathbb{Z};$



**Ví dụ 4.1.**

Tìm giá trị lớn nhất - nhỏ nhất của:

(1)  $A = \cos(2x) + 3$

(2)  $D = 1 - \sin 2x$

**Lời giải**

(1)  $A = \cos(2x) + 3$

Ta có:  $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq \cos 2x + 3 \leq 3$

GTLN của  $A$  là 3, GTNN của  $A$  là 2.

(2)  $D = 1 - \sin 2x$

Ta có:  $-1 \leq -\sin 2x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - \sin 2x \leq 2$

GTLN của  $V$  là 2, GTNN của  $V$  là 1.



**Ví dụ 4.2.**

Tìm giá trị lớn nhất - nhỏ nhất của:

(1)  $Z = \sqrt{2 \cos x + 3} - 4$

(2)  $V = \sqrt{2 + \cos 2x}$

**Lời giải**

(1)  $Z = \sqrt{2 \cos x + 3} - 4$

♦ Điều kiện xác định:  $2 \cos x + 3 > 0 \Leftrightarrow \cos x > \frac{-3}{2} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ .

♦ Ta có:  $-1 \leq \cos x \leq 1$

$\Leftrightarrow -2 \leq 2 \cos x \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2 \cos x + 3 \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{2 \cos x + 3} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow -3 \leq \sqrt{2 \cos x + 3} - 4 \leq \sqrt{5} - 4$

♦ GTLN của  $Z$  là  $\sqrt{5} - 4$ , GTNN của  $Z$  là  $-3$ .

(2)  $V = \sqrt{2 + \cos 2x}$



- ♦ Ta có:  $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 + \cos 2x \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{2 + \cos 2x} \leq \sqrt{3}$
- ♦ GTLN của V là  $\sqrt{3}$ , GTNN của V là 1.



### Ví dụ 4.3.

Tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất của:

(1)  $M = 7 \cos^2 x - 2 \sin^2 x$

(2)  $Q = \sin^6 x + \cos^6 x$

✎ *Lời giải*

(1)  $M = 7 \cos^2 x - 2 \sin^2 x$

$$M = 7(1 - \sin^2 x) - 2 \sin^2 x = 7 - 9 \sin^2 x.$$

Ta có:  $0 \leq \sin^2 x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 0 \geq -9 \sin^2 x \geq -9, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 7 \geq 7 - 2 \sin^2 x \geq -2, \forall x \in \mathbb{R}.$

Nên giá trị lớn nhất là 7 và giá trị nhỏ nhất là -2.

(2)  $Q = \sin^6 x + \cos^6 x$

$$\text{Ta có } Q = \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x.$$

$$\text{Vì } 0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq -\frac{3}{4} \sin^2 2x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \leq 1.$$

Nên giá trị lớn nhất là 1 và giá trị nhỏ nhất là  $\frac{1}{4}$ .



### Ví dụ 4.4.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \cot^4 a + \cot^4 b + 2 \tan^2 a \cdot \tan^2 b + 2$

✎ *Lời giải*

$$P = (\cot^2 a - \cot^2 b)^2 + 2 \cot^2 a \cdot \cot^2 b + 2 \tan^2 a \cdot \tan^2 b + 2$$

$$= (\cot^2 a - \cot^2 b)^2 + 2(\cot^2 a \cdot \cot^2 b + \tan^2 a \cdot \tan^2 b - 2) + 6$$

$$= (\cot^2 a - \cot^2 b)^2 + 2(\cot^2 a \cdot \cot^2 b + \tan^2 a \cdot \tan^2 b - 2 \cot a \cdot \cot b \cdot \tan a \cdot \tan b) + 6$$

$$= (\cot^2 a - \cot^2 b)^2 + 2(\cot a \cdot \cot b - \tan a \cdot \tan b)^2 + 6 \geq 6$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} \cot^2 a = \cot^2 b \\ \cot a \cdot \cot b = \tan a \cdot \tan b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot^2 a = 1 \\ \cot^2 b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = b = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$



## Chương 01

# Bài 2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC



### Luyện tập

#### A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho  $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ . Kết quả đúng là

A.  $\sin a > 0, \cos a > 0$ .

B.  $\sin a < 0, \cos a < 0$ .

C.  $\sin a > 0, \cos a < 0$ .

D.  $\sin a < 0, \cos a > 0$ .

» Lời giải

**Chọn C**

Vì  $\frac{\pi}{2} < a < \pi \Rightarrow \sin a > 0, \cos a < 0$ .

» Câu 2. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A.  $\sin(180^\circ - a) = -\cos a$ .

B.  $\sin(180^\circ - a) = -\sin a$ .

C.  $\sin(180^\circ - a) = \sin a$ .

D.  $\sin(180^\circ - a) = \cos a$ .

» Lời giải

**Chọn C**

Theo công thức.

» Câu 3. Chọn đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau

A.  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ .

B.  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ .

C.  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$ .

D.  $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cot x$ .

» Lời giải

**Chọn D**

» Câu 4. Cho biết  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ . Tính  $\cot \alpha$

A.  $\cot \alpha = 2$ .

B.  $\cot \alpha = \frac{1}{4}$ .

C.  $\cot \alpha = \frac{1}{2}$ .

D.  $\cot \alpha = \sqrt{2}$ .

» Lời giải

**Chọn A**

Ta có:  $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ .

» Câu 5. Cho  $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $\sin a < 0$ .

B.  $\tan a > 0$ .

C.  $\cot a > 0$ .

D.  $\cos a < 0$ .



» *Lời giải*

**Chọn D**

» **Câu 6.** Biết  $\tan \alpha = 2$  và  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ . Tính  $\sin \alpha$ .

**A.**  $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

**B.**  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

**C.**  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

**D.**  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

» *Lời giải*

**Chọn A**

Vì  $\tan \alpha = 2 \Rightarrow \sin \alpha = 2 \cos \alpha$ .

Ta có  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow 5 \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

Do  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ .

» **Câu 7.** Biết  $\tan \alpha = -3$ . Tính  $\tan\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right)$ .

**A.**  $-\frac{1}{3}$ .

**B.**  $\frac{1}{3}$ .

**C.** 3.

**D.** -3.

» *Lời giải*

**Chọn B**

$$\tan\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right) = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2} - 3\pi\right) = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cot \alpha = -\frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{3}.$$

» **Câu 8.** Trong các công thức sau, công thức nào sai?

**A.**  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .

**B.**  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$ .

**C.**  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$ .

**D.**  $\tan \alpha + \cot \alpha = 1 \left(\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right)$ .

» *Lời giải*

**Chọn D**

**D sai vì:**  $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \left(\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right)$ .

» **Câu 9.** Cho  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Giá trị của  $\cos \alpha$  là:

**A.**  $\frac{4}{5}$ .

**B.**  $-\frac{4}{5}$ .

**C.**  $\pm \frac{4}{5}$ .

**D.**  $\frac{16}{25}$ .

» *Lời giải*

**Chọn B**

Ta có:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{4}{5} \\ \cos \alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$ .

Vì  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$ .



» **Câu 10.** Cho  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$  với  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Tính  $\sin \alpha$ .

- A.  $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ .      B.  $\sin \alpha = -\frac{1}{5}$ .      C.  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ .      D.  $\sin \alpha = \pm \frac{3}{5}$ .

» *Lời giải*

**Chọn C**

$$\text{Ta có: } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{3}{5}.$$

$$\text{Do } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \sin \alpha > 0. \text{ Suy ra, } \sin \alpha = \frac{3}{5}.$$

» **Câu 11.** Rút gọn biểu thức  $P = \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$ .

- A.  $-\frac{3}{2}\cos 2a$ .      B.  $\frac{1}{2}\cos 2a$ .      C.  $-\frac{2}{3}\cos 2a$ .      D.  $-\frac{1}{2}\cos 2a$ .

» *Lời giải*

**Chọn D**

$$\text{Ta có } P = \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 2a\right) = -\frac{1}{2}\cos 2a.$$

» **Câu 12.** Giá trị biểu thức  $P = \sin^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{9\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6} \cot \frac{\pi}{6}$  bằng

- A. 2.      B. 4.      C. 3.      D. 1.

» *Lời giải*

**Chọn C**

$$\text{Ta có } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\sin \frac{9\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin^2 \frac{9\pi}{4} = \frac{1}{2}, \quad \tan \frac{\pi}{6} \cot \frac{\pi}{6} = 1.$$

$$\text{Suy ra } P = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 3.$$

» **Câu 13.** Cho  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Giá trị của  $\cos \alpha$  là:

- A.  $\frac{4}{5}$ .      B.  $-\frac{4}{5}$ .      C.  $\pm \frac{4}{5}$ .      D.  $\frac{16}{25}$ .

» *Lời giải*

**Chọn B**

$$\text{Ta có: } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{4}{5} \\ \cos \alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Vì } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}.$$

» **Câu 14.** Cho  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$  với  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Tính  $\sin \alpha$ .



- A.  $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ .      B.  $\sin \alpha = -\frac{1}{5}$ .      C.  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ .      D.  $\sin \alpha = \pm \frac{3}{5}$ .

» *Lời giải*

**Chọn C**

$$\text{Ta có: } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{3}{5}.$$

$$\text{Do } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \sin \alpha > 0. \text{ Suy ra, } \sin \alpha = \frac{3}{5}.$$

» **Câu 15.** Cho  $\tan \alpha = -\frac{4}{5}$  với  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ . Khi đó:

- A.  $\sin \alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}}$ .      B.  $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$ ,  $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$ .  
C.  $\sin \alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}$ ,  $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$ .      D.  $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}}$ .

» *Lời giải*

**Chọn C**

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{16}{25} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{41}{25} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{25}{41} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{5}{\sqrt{41}}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{25}{41} = \frac{16}{41} \rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{4}{\sqrt{41}}$$

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha > 0 \rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}} \\ \sin \alpha < 0 \rightarrow \sin \alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}} \end{cases}$$

» **Câu 16.** Trên nửa đường tròn đơn vị cho góc  $\alpha$  sao cho  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$  và  $\cos \alpha < 0$ . Tính  $\tan \alpha$ .

- A.  $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .      B.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .      C.  $-\frac{2}{5}$ .      D. 1.

» *Lời giải*

**Chọn A**

$$\text{Có } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha, \text{ mà } \sin \alpha = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Suy ra } \cos^2 \alpha = \frac{5}{9}, \text{ có } \cos \alpha < 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{Có } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

» **Câu 17.** Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Khi đó  $\cos \alpha$  có giá trị là.

- A.  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ .      B.  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .      C.  $\cos \alpha = \frac{8}{9}$ .      D.  $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

» *Lời giải*

**Chọn D**





Vì  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  nên  $\cos \alpha < 0$ .

$$\text{Ta có } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} (l) \\ \cos \alpha = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} (tm) \end{cases}$$

» **Câu 18.** Cho  $P = \frac{3 \sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x}$  với  $\tan x = 2$ . Giá trị của  $P$  bằng

- A.  $\frac{8}{9}$ .                      B.  $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{8}}{9}$ .                      D.  $\frac{5}{4}$ .

» *Lời giải*

**Chọn D**

$$\text{Ta có } P = \frac{3 \sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x} = \frac{3 \tan x - 1}{\tan x + 2} = \frac{3 \cdot 2 - 1}{2 + 2} = \frac{5}{4}.$$

» **Câu 19.** Cho  $\sin x = \frac{1}{2}$  và  $\cos x$  nhận giá trị âm, giá trị của biểu thức  $A = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$  bằng

- A.  $-2 - \sqrt{3}$ .                      B.  $2 + \sqrt{3}$ .                      C.  $-2 + \sqrt{3}$ .                      D.  $2 - \sqrt{3}$ .

» *Lời giải*

**Chọn A**

$$\text{Vì } \cos x \text{ nhận giá trị âm nên ta có } \cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Suy ra: } A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}.$$

» **Câu 20.** Biểu thức  $P = \frac{3}{\cos^4 x} - 2 \tan^4 x$  trên  $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$  đạt giá trị lớn nhất tại

- A.  $x = 0$ .                      B.  $x = \frac{\pi}{3}$ .                      C.  $x = \frac{\pi}{6}$ .                      D.  $x = \frac{\pi}{12}$ .

» *Lời giải*

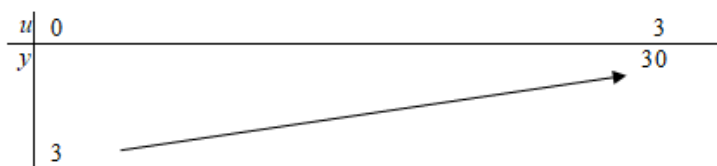
**Chọn B**

$$\text{Ta có } y = 3(1 + \tan^2 x)^2 - 2 \tan^4 x = \tan^4 x + 6 \tan^2 x + 3$$

$$\text{Đặt } \tan^2 x = u; u \in [0; 3] \text{ vì } x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$$

$$\text{Xét hàm số: } y = u^2 + 6u + 3 \text{ trên } [0; 3].$$

Ta có bảng biến thiên



$$\max_{[0;3]} f(u) = 30 \text{ và } \max_{\left[0; \frac{\pi}{3}\right]} y = 30 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}.$$



- » **Câu 21.** Một vật dao động điều hòa theo phương trình  $x = 1,25 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{12}\right)$  (cm) ( $t$  đo bằng giây). Tính quãng đường vật đi được sau thời gian  $t = 2,5$  s kể từ lúc bắt đầu dao động.  
**A.** 4,21(cm).      **B.** 3,21(cm).      **C.** 1,21(cm).      **D.** 2,21(cm).

» *Lời giải*

**Chọn C**

Ta có:  $x = 1,25 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{12}\right)$  (cm)

Với  $t = 2,5$  s  $\Rightarrow |x| = \left|1,25 \cdot \cos\left(5\pi - \frac{\pi}{12}\right)\right| \approx 1,21$  (cm).

Vậy quãng đường vật đi được gần bằng 1,21(cm).

- » **Câu 22.** Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu  $h$ (m) của con kênh tính theo thời gian  $t$  (giờ) trong một ngày được cho bởi công thức:

$h = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 3, 0 \leq t \leq 24$ . Hỏi tại thời nào trong ngày thì mực nước của con kênh cao nhất?

- A.** 10(h).      **B.** 12(h).      **C.** 14(h).      **D.** 15(h).

» *Lời giải*

**Chọn C**

Ta có  $h = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 3, 0 \leq t \leq 24$ .

Ta thấy  $h$  đạt giá trị lớn nhất khi  $\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4} = 2k\pi \Leftrightarrow t = -2 + 16k$

Do  $t > 0$  và  $0 \leq t \leq 24$  nên  $t = 14$

Vậy lúc 14h thì mực nước của con kênh cao nhất.

**B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai**

- » **Câu 23.** Cho  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Xét được dấu của các biểu thức sau. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A = \sin(\alpha + 90^\circ) > 0$		
(b)	$B = \cos(\alpha - 45^\circ) > 0$		
(c)	$C = \tan(270^\circ - \alpha) < 0$		
(d)	$D = \cos(2\alpha + 90^\circ) > 0$		

» *Lời giải*

(a)  $A = \sin(\alpha + 90^\circ) > 0$ ;

Ta có:  $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow 90^\circ < \alpha + 90^\circ < 180^\circ$

$\Rightarrow \sin(\alpha + 90^\circ) > 0$ .

» **Chọn ĐÚNG.**



(b)  $B = \cos(\alpha - 45^\circ) > 0;$

Ta có:  $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow -45^\circ < \alpha - 45^\circ < 45^\circ$   
 $\Rightarrow \cos(\alpha - 45^\circ) > 0.$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c)  $C = \tan(270^\circ - \alpha) < 0;$

Ta có:  $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow -90^\circ < -\alpha < 0^\circ$   
 $\Rightarrow 270^\circ + (-90^\circ) < 270^\circ + (-\alpha) < 270^\circ + 0^\circ$   
 $\Rightarrow 180^\circ < 270^\circ - \alpha < 270^\circ \Rightarrow \tan(270^\circ - \alpha) > 0$

» **Chọn SAI.**

(d)  $D = \cos(2\alpha + 90^\circ) > 0.$

Ta có:  $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow 90^\circ < 2\alpha + 90^\circ < 270^\circ$   
 $\Rightarrow \cos(2\alpha + 270^\circ) < 0$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 24.** Cho  $\tan x = -2$ . Tính được các biểu thức  $A_1 = \frac{5 \cot x + 4 \tan x}{5 \cot x - 4 \tan x}$ ,  $A_2 = \frac{2 \sin x + \cos x}{\cos x - 3 \sin x}$ , khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cot x = -\frac{1}{2}$		
(b)	Vì $\tan x = -2$ nên $\cos x = 0$		
(c)	$A_1 = -\frac{21}{11}$		
(d)	$A_2 = \frac{3}{7}$		

» **Lời giải**

(a)  $\cot x = -\frac{1}{2}$

Ta có:  $\tan x = -2 \Rightarrow \cot x = -\frac{1}{2}$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Vì  $\tan x = -2$  nên  $\cos x = 0$

Vì  $\tan x = -2$  nên  $\cos x \neq 0$ .

» **Chọn SAI.**

(c)  $A_1 = -\frac{21}{11}$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{-\frac{5}{2} + 4 \cdot (-2)}{-\frac{5}{2} - 4 \cdot (-2)} = -\frac{21}{11}.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d)  $A_2 = \frac{3}{7}$



Chia tử và mẫu của biểu thức  $A_2$  cho  $\cos x$ , ta được:

$$A_2 = \frac{\frac{2 \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\cos x} - \frac{3 \sin x}{\cos x}} = \frac{2 \tan x + 1}{1 - 3 \tan x} = \frac{2(-2) + 1}{1 - 3(-2)} = -\frac{3}{7}$$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 25.** Cho  $\cot x = 2$ . Tính được các biểu thức  $B_1 = \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{3 \sin x - 2 \cos x}$ ,  $B_2 = \frac{2}{\cos^2 x - \sin x \cos x}$ , khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Vì $\cot x = 2$ nên $\sin x \neq 0$ .		
(b)	$B_1 = -8$		
(c)	$B_2 = -5$		
(d)	$B_1 + B_2 = -13$		

» **Lời giải**

(a) Vì  $\cot x = 2$  nên  $\sin x \neq 0$ .

Vì  $\cot x = 2$  nên  $\sin x \neq 0$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

(b)  $B_1 = -8$

Chia cả tử và mẫu của biểu thức  $B_1$  cho  $\sin x$ , ta được:

$$B_1 = \frac{2 \frac{\sin x}{\sin x} + 3 \frac{\cos x}{\sin x}}{3 \frac{\sin x}{\sin x} - 2 \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{2 + 3 \cot x}{3 - 2 \cot x} = \frac{2 + 3 \cdot 2}{3 - 2 \cdot 2} = -8$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c)  $B_2 = -5$

Chia cả tử và mẫu của biểu thức  $B_2$  cho  $\sin^2 x$ , ta được:

$$B_2 = \frac{\frac{2}{\sin^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x}} = \frac{2(1 + \cot^2 x)}{\cot^2 x - \cot x} = \frac{2(1 + 2^2)}{2^2 - 2} = 5$$

» **Chọn SAI.**

(d)  $B_1 + B_2 = -13$

$$B_1 + B_2 = -8 + 5 = -3$$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 26.** Từ một vị trí ban đầu trong không gian, vệ tinh X chuyển động theo quỹ đạo là một đường tròn quanh Trái Đất và luôn cách tâm Trái Đất một khoảng bằng 9200 km. Sau 2 giờ thì vệ tinh X hoàn thành hết một vòng di chuyển.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1 giờ là: $\approx 28902,65(km)$ .		
(b)	Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1,5 giờ là: $\approx 43353,98(km)$		



(c)	Sau khoảng 5,3 giờ thì X di chuyển được quãng đường 240000 km		
(d)	Giả sử vệ tinh di chuyển theo chiều dương của đường tròn, sau 4,5 giờ thì vệ tinh vẽ nên một góc $\frac{9\pi}{2}$ rad		

» **Lời giải**

(a) Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1 giờ là:  $\approx 28902,65(km)$ .

Một vòng di chuyển của X chính là chu vi đường tròn:

$$C = 2\pi R = 2\pi \cdot 9200 = 18400\pi(km).$$

Sau 1 giờ, vệ tinh di chuyển nửa đường tròn với quãng đường là:

$$\frac{1}{2}C = 9200\pi \approx 28902,65(km).$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1,5 giờ là:  $\approx 43353,98(km)$

Sau 1,5 giờ, vệ tinh di chuyển được  $\frac{1,5 \cdot 1}{2}$  đường tròn (hay  $\frac{3}{4}$  đường tròn), quãng đường

$$\text{là: } \frac{3}{4}C = \frac{3}{4} \cdot 18400\pi = 13800\pi \approx 43353,98(km).$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Sau khoảng 5,3 giờ thì X di chuyển được quãng đường 240000 km

Số giờ để vệ tinh X thực hiện quãng đường 240000 km là:  $\frac{240000}{9200\pi} \approx 8,3$  (giờ).

» **Chọn SAI.**

(d) Giả sử vệ tinh di chuyển theo chiều dương của đường tròn, sau 4,5 giờ thì vệ tinh vẽ nên một góc  $\frac{9\pi}{2}$  rad

Sau 4,5 giờ thì số vòng tròn mà vệ tinh X di chuyển được là:  $\frac{4,5}{2} = \frac{9}{4}$  (vòng).

Số đo góc lượng giác thu được là:  $\frac{9}{4} \cdot 2\pi = \frac{9\pi}{2}(rad)$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 27.** Cho  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Xét đúng dấu của các biểu thức sau. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A = \cos(\alpha + \pi) < 0$		
(b)	$B = \tan(\alpha - \pi) > 0$		
(c)	$C = \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) < 0$		
(d)	$D = \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right) < 0$		

» **Lời giải**

(a)  $A = \cos(\alpha + \pi) < 0$ ;

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi < \alpha + \pi < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos(\alpha + \pi) < 0.$$



» **Chọn ĐÚNG.**

(b)  $B = \tan(\alpha - \pi) > 0;$

Vì  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\pi < \alpha - \pi < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan(\alpha - \pi) > 0.$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c)  $C = \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) < 0;$

Vì  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{5} < \alpha + \frac{2\pi}{5} < \frac{9\pi}{10} \Rightarrow \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) > 0.$

» **Chọn SAI.**

(d)  $D = \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right) < 0.$

Vì  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{3\pi}{8} < \alpha - \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{8} \Rightarrow \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right) > 0.$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 28.** Tính được các giá trị lượng giác còn lại của góc  $x$ , biết:  $\tan x = \frac{1}{3}$  với  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ , khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos x < 0$		
(b)	$\cos x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$		
(c)	$\sin x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$		
(d)	$\sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{10}}{5}$		

» **Lời giải**

(a)  $\cos x < 0$

Vì  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  nên  $\cos x < 0.$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b)  $\cos x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

Ta có:  $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{9}{10} \Rightarrow \cos x = -\frac{3\sqrt{10}}{10};$

» **Chọn SAI.**

(c)  $\sin x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

$\sin x = \cos x \tan x = -\frac{3\sqrt{10}}{10} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d)  $\sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{10}}{5}$



$$\sin x + \cos x = -\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 29.** Tính được các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$ , biết:  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}, -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos^2 \alpha = \frac{9}{16}$		
(b)	$\cos \alpha = -\frac{3}{4}$		
(c)	$\cot \alpha = -\frac{3}{\sqrt{7}}$		
(d)	$\tan \alpha + \cot \alpha = -\frac{16\sqrt{7}}{23}$		

» **Lời giải**

(a)  $\cos^2 \alpha = \frac{9}{16}$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}, -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{16}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b)  $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$

$$\text{Vì } -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha > 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{4}$$

» **Chọn SAI.**

(c)  $\cot \alpha = -\frac{3}{\sqrt{7}}$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\sqrt{7}}{3}; \cot \alpha = -\frac{3}{\sqrt{7}}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d)  $\tan \alpha + \cot \alpha = -\frac{16\sqrt{7}}{23}$

$$\tan \alpha + \cot \alpha = -\frac{16\sqrt{7}}{21}$$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 30.** Tính được các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$ , biết:  $\tan \alpha = 2, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cot \alpha = \frac{1}{2}$		



(b)	$\cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$		
(c)	$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$		
(d)	$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$		

🔍 *Lời giải*

(a)  $\cot \alpha = \frac{1}{2}$

$$\tan \alpha = 2 \left( 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$$

Ta có:  $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{2}$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b)  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5},$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c)  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

Vì  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  nên  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

» **Chọn SAI.**

(d)  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 31.** Tính được các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$ , biết:  $\sin \alpha = \frac{2}{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos \alpha < 0$		
(b)	$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$		
(c)	$\tan \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$		
(d)	$\cot \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$		

🔍 *Lời giải*

(a)  $\cos \alpha < 0$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha < 0$$





» **Chọn ĐÚNG.**

$$(b) \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3},$$

» **Chọn SAI.**

$$(c) \tan \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

$$(d) \cot \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{-\frac{2}{\sqrt{5}}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 32.** Tính được các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$ , biết:  $\cos \alpha = -\frac{3}{4}, -\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\sin \alpha < 0$		
(b)	$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$		
(c)	$\tan \alpha = \frac{-\sqrt{7}}{3}$		
(d)	$\cot \alpha = -\frac{3}{\sqrt{7}}$		

» **Lời giải**

$$(a) \sin \alpha < 0$$

$$-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi \Rightarrow \sin \alpha > 0$$

» **Chọn SAI.**

$$(b) \sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4};$$

» **Chọn SAI.**

$$(c) \tan \alpha = \frac{-\sqrt{7}}{3}$$



$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{-\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d)  $\cot \alpha = -\frac{3}{\sqrt{7}}$ .

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{7}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{7}}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 33.** Tính được các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$ , biết:  $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{9}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cot \alpha = \frac{9}{2\sqrt{10}}$		
(b)	$\cos \alpha = -\frac{9}{11}$		
(c)	$\begin{cases} \cos \alpha < 0 \\ \sin \alpha < 0 \end{cases}$		
(d)	$\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{10}}{11}$		

» *Lời giải*

(a)  $\cot \alpha = \frac{9}{2\sqrt{10}}$

$$\cot \alpha = \frac{9}{2\sqrt{10}}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b)  $\cos \alpha = -\frac{9}{11}$

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{\tan^2 \alpha + 1}} = -\sqrt{\frac{1}{\frac{40}{81} + 1}} = -\frac{9}{11}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c)  $\begin{cases} \cos \alpha < 0 \\ \sin \alpha < 0 \end{cases}$

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha < 0 \\ \sin \alpha < 0 \end{cases}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d)  $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{10}}{11}$



$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{81}{121}} = \frac{2\sqrt{10}}{11}$$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 34.** Tính được các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$ , biết:  $\cot \alpha = \sqrt{2} + 1, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\begin{cases} \cos \alpha > 0 \\ \sin \alpha > 0 \end{cases}$		
(b)	$\tan \alpha = \sqrt{2} + 1$		
(c)	$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$		
(d)	$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$		

» **Lời giải**

$$(a) \begin{cases} \cos \alpha > 0 \\ \sin \alpha > 0 \end{cases}$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha > 0 \\ \sin \alpha > 0 \end{cases};$$

» **Chọn ĐÚNG.**

$$(b) \tan \alpha = \sqrt{2} + 1$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1;$$

» **Chọn SAI.**

$$(c) \sin \alpha = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cot^2 \alpha + 1}} = \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

$$(d) \cos \alpha = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

### C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 35.** Cho  $\cos x = \frac{1}{2}$ . Tính giá trị biểu thức  $P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x$ .

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 3,25**



Ta có:  $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ .

Khi đó:  $P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x = 3 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$ .

» **Câu 36.** Biểu thức sau:  $T = 2 \sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) + 3 \cos(19\pi - x) = k \cos x$ . Khi đó  $k = ?$

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: -1**

Ta có:  $T = 2 \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) + 3 \cos(18\pi + \pi - x)$   
 $= 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 3 \cos(\pi - x) = 2 \cos x - 3 \cos x = -\cos x$

» **Câu 37.** Biểu thức sau:  $S = \frac{\sin\left(\frac{15\pi}{2} - x\right) - 2 \cos(x - \pi)}{\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)} = k \cot x$ . Khi đó  $k = ?$

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1**

Ta có:  $S = \frac{\sin\left(7\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - 2 \cos(\pi - x)}{\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - x\right)}$   
 $= \frac{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) + 2 \cos x}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2 \cos x}{\sin x} = \frac{-\cos x + 2 \cos x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

» **Câu 38.** Cho tam giác  $ABC$ , khi đó biểu thức  $\frac{\sin^3 \frac{\widehat{B}}{2}}{\cos\left(\frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2}\right)} + \frac{\cos^3 \frac{\widehat{B}}{2}}{\sin\left(\frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2}\right)} - \frac{\cos(\widehat{A} + \widehat{C})}{\sin B} \tan \widehat{B}$  bằng?

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2**

Vì  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$  nên  $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{B}$ .

VT =  $\frac{\sin^3 \frac{\widehat{B}}{2}}{\cos\left(\frac{180^\circ - \widehat{B}}{2}\right)} + \frac{\cos^3 \frac{\widehat{B}}{2}}{\sin\left(\frac{180^\circ - \widehat{B}}{2}\right)} - \frac{\cos(180^\circ - \widehat{B})}{\sin \widehat{B}} \cdot \tan \widehat{B}$



$$= \frac{\sin^3 \frac{\widehat{B}}{2}}{\sin \frac{\widehat{B}}{2}} + \frac{\cos^3 \frac{\widehat{B}}{2}}{\cos \frac{\widehat{B}}{2}} - \frac{-\cos \widehat{B}}{\sin \widehat{B}} \cdot \tan \widehat{B} = \sin^2 \frac{\widehat{B}}{2} + \cos^2 \frac{\widehat{B}}{2} + \cot \widehat{B} \cdot \tan \widehat{B} = 1 + 1 = 2 = VP$$

» **Câu 39.** Biểu thức  $A = \tan\left(\frac{17\pi}{2} - x\right) + 2 \cot(5\pi + x) = k \cot x$ , khi đó:  $k = ?$

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 3**

$$A = \tan\left(8\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) + 2 \cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2 \cot x = \cot x + 2 \cot x = 3 \cot x$$

» **Câu 40.** Biểu thức  $B = \frac{2 \sin(x - 4\pi) + \cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} = k \tan x$ , khi đó:  $k = ?$

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: -3**

$$B = \frac{2 \sin x + \cos\left(x - \frac{\pi}{2} - 2\pi\right)}{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{2 \sin x + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{-\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{2 \sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{-\cos x}$$

$$= \frac{2 \sin x + \sin x}{-\cos x} = -3 \tan x.$$

» **Câu 41.** Cho  $\cot \alpha = \frac{1}{3}$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$ .

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 13**

Vì  $\cot \alpha = \frac{1}{3}$  nên  $\sin \alpha \neq 0$ . Chia cả tử và mẫu của biểu thức  $A$  cho  $\sin \alpha$ , ta có:

$$A = \frac{3 + 4 \cot \alpha}{2 - 5 \cot \alpha} = \frac{3 + 4 \cdot \frac{1}{3}}{2 - 5 \cdot \frac{1}{3}} = 13.$$

» **Câu 42.** Cho  $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ . Tính giá trị của biểu thức  $B = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$ . Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2,13**

$$\text{Ta có: } \cos \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{16}{9} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{7}{9}.$$



$$\text{Khi đó: } B = \frac{\tan \alpha + \frac{3}{\tan \alpha}}{\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha + 3}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\frac{7}{9} + 3}{\frac{7}{9} + 1} = \frac{17}{8} \approx 2,13.$$

» **Câu 43.** Cho  $\tan \alpha = \sqrt{2}$ . Tính giá trị của biểu thức  $C = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$ . Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,09**

Vì  $\tan \alpha = \sqrt{2}$  nên  $\cos \alpha \neq 0$ . Chia cả tử và mẫu của biểu thức  $C$  cho  $\cos^3 \alpha$ , ta được:

$$\begin{aligned} C &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \alpha}}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\tan \alpha (1 + \tan^2 \alpha) - (1 + \tan^2 \alpha)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha (1 + \tan^2 \alpha)} \\ &= \frac{(1 + \tan^2 \alpha)(\tan \alpha - 1)}{3 \tan^3 \alpha + 2 \tan \alpha + 3} = \frac{(1 + 2)(\sqrt{2} - 1)}{3 \cdot 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3} = \frac{3(\sqrt{2} - 1)}{8\sqrt{2} + 3} \end{aligned}$$

» **Câu 44.** Biết  $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$ . Tính giá trị của  $\sin^4 a + \cos^4 a$ .

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,5**

Ta có:

$$\sin a + \cos a = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2 = (\sin a + \cos a)^2 = \sin^2 a + 2 \sin a \cos a + \cos^2 a = 1 + 2 \sin a \cos a \Rightarrow \sin a \cos a = \frac{1}{2}$$

$$\text{Khi đó: } \sin^4 a + \cos^4 a = (\sin^2 a + \cos^2 a)^2 - 2 \sin^2 a \cos^2 a = 1 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

» **Câu 45.** Đơn giản các biểu thức sau (giả sử mỗi biểu thức sau luôn có nghĩa):

$$C = \frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} - \cot^2 x \cot^2 y.$$

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: -1**

$$\begin{aligned} C &= \frac{\cos^2 x - \sin^2 y - \cos^2 x \cos^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} = \frac{\cos^2 x (1 - \cos^2 y) - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} \\ &= \frac{\cos^2 x \sin^2 y - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} = \frac{\sin^2 y (\cos^2 x - 1)}{\sin^2 x \sin^2 y} = \frac{-\sin^2 x}{\sin^2 x} = -1 \end{aligned}$$

» **Câu 46.** Trong tam giác  $ABC$  ta có:  $\cos \widehat{A} + \cos(\widehat{B} + \widehat{C}) + \tan \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} = k \cot \frac{\widehat{C}}{2}$ . Khi đó:  $k = ?$

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1**

$$\text{Vì } \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \text{ nên } \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} \text{ và } \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{C}}{2}.$$



Do đó:

$$\begin{aligned} \cos \widehat{A} + \cos(\widehat{B} + \widehat{C}) + \tan \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} &= \cos \widehat{A} + \cos(180^\circ - \widehat{A}) + \tan \frac{180^\circ - \widehat{C}}{2} \\ &= \cos \widehat{A} - \cos \widehat{A} + \tan \left(90^\circ - \frac{\widehat{C}}{2}\right) = \cot \frac{\widehat{C}}{2} \end{aligned}$$

» **Câu 47.** Cho biểu thức  $f(x) = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$  tính  $f(1)$

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1**

Ta có:  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$ ,  $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$ .

Suy ra:  $f(x) = 3(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x) - 2(1 - 3\sin^2 x \cos^2 x) = 1$ .

Vậy biểu thức  $f(x)$  không phụ thuộc vào  $x$  nên  $f(1) = 1$

» **Câu 48.** Cho biểu thức  $g(x) = \frac{-2\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cot x}$  với  $x \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2}, x \neq \pi$ . Tính  $g\left(\frac{2024\pi}{2023}\right)$

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: -2**

$$g(x) = -2 - \frac{\cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\frac{\cos x}{\sin x}} = -2 - \frac{\cos^2 x}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} + \sin^2 x = -2 - \sin^2 x + \sin^2 x = -2.$$

Vậy biểu thức  $g(x)$  không phụ thuộc vào  $x$  nên  $g\left(\frac{2024\pi}{2023}\right) = -2$

» **Câu 49.** Cho hai góc nhọn  $a$  và  $b$ . Biết  $\cos a = \frac{1}{3}$  và  $\cos b = \frac{1}{4}$ . Tính giá trị của:

$P = (\cos a \cdot \cos b)^2 - (\sin a \cdot \sin b)^2$ . Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: -0,83**

Ta có:

$$P = (\cos a \cos b)^2 - (\sin a \sin b)^2 = (\cos a \cos b)^2 - (1 - \cos^2 a)(1 - \cos^2 b) = \left(\frac{1}{12}\right)^2 - \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} = -\frac{119}{144}$$

» **Câu 50.** Cho  $\tan x = -\frac{4}{3}$  và  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ . Tính giá trị của biểu thức  $M = \frac{\sin^2 x - \cos x}{\sin x - \cos^2 x}$ . Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2,82**

$$\text{Ta có: } \tan x = -\frac{4}{3} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{3}{5}.$$

$$\text{Vì } \frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x = -\frac{3}{5} \Rightarrow \sin x = \tan x \cdot \cos x = \frac{4}{5} \Rightarrow M = \frac{\sin^2 x - \cos x}{\sin x - \cos^2 x} = \frac{31}{11}.$$



» **Câu 51.** Cho  $3\cos\alpha - \sin\alpha = 1, 0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Tính giá trị của  $\tan\alpha$ . Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

» *Lời giải*

✓ **Trả lời: 1,33**

$$\text{Ta có } 3\cos\alpha - \sin\alpha = 1 \Leftrightarrow 3\cos\alpha = \sin\alpha + 1 \rightarrow 9\cos^2\alpha = (\sin\alpha + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 9\cos^2\alpha = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha + 1 \Leftrightarrow 9(1 - \sin^2\alpha) = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha + 1$$

$$\Leftrightarrow 10\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = -1 \\ \sin\alpha = \frac{4}{5} \end{cases}$$

-  $\sin\alpha = -1$ : không thỏa mãn vì  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

$$\text{- } \sin\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5} \rightarrow \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{3}$$

» **Câu 52.** Cho biểu thức  $A = \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4\tan^2 x} - \frac{1}{4\sin^2 x \cos^2 x}$  khi  $x = \frac{2024\pi}{2023}$  thì  $A$  bằng bao nhiêu?

» *Lời giải*

✓ **Trả lời: -1**

Ta có:

$$A = \frac{\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)^2}{4\tan^2 x} - \frac{1}{4\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)^2}{4\sin^2 x \cos^2 x} - \frac{1}{4\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$A = \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x + 1)(\cos^2 x - \sin^2 x - 1)}{4\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{2\cos^2 x \cdot (-2\sin^2 x)}{4\sin^2 x \cos^2 x} = -1$$

» **Câu 53.** Cho biểu thức  $B = \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(10\pi + x) \right]^2 + \left[ \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(8\pi - x) \right]^2$  khi  $x = \frac{2024\pi}{2023}$  thì  $B$  bằng bao nhiêu?

» *Lời giải*

✓ **Trả lời: 2**

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \\ \sin(10\pi + x) = \sin x \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x \\ \cos(8\pi - x) = \cos x \end{cases}$$

$$\text{Thay vào } B = \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(10\pi + x) \right]^2 + \left[ \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(8\pi - x) \right]^2$$

$$\text{Ta có: } B = (\cos x + \sin x)^2 + (-\sin x + \cos x)^2 = 2$$

» **Câu 54.** Tính  $S = \sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ + \sin^2 85^\circ$ .





*Lời giải*

✓ *Trả lời: 8,5*

Ta có

$$\sin^2 5^\circ + \sin^2 85^\circ = \cos^2 85^\circ + \sin^2 85^\circ = 1.$$

$$\sin^2 10^\circ + \sin^2 80^\circ = \cos^2 80^\circ + \sin^2 80^\circ = 1.$$

...

$$\sin^2 40^\circ + \sin^2 45^\circ = \cos^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ = 1.$$

Tổng số có 8 cặp dư ra  $\sin^2 45^\circ$  nên  $S = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$ .



## Chương 01

### Bài 3.

# CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A

## Lý thuyết

### 1. Công thức cộng



$$(1) \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$(2) \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$(3) \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$(4) \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$(5) \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$(6) \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

### 2. Công thức nhân đôi

Cho  $a = b$  trong các công thức cộng, ta được:



*Công thức nhân đôi:*

$$(1) \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$(2) \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$(3) \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

*Công thức hạ bậc:*

$$(4) \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$(5) \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$(6) \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

### 3. Công thức biến đổi tích thành tổng



$$(1) \cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$(2) \sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$(3) \sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$



#### 4. Công thức biến đổi tổng thành tích

Từ công thức biến đổi tích thành tổng, đặt  $u = a - b$ ,  $v = a + b$  ta có



$$(1) \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$(2) \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$(3) \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$(4) \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$



## Các dạng bài tập

### Dạng 1. Công thức cộng



#### Phương pháp

$$(1) \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$(2) \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$(3) \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$(4) \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$(5) \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$(6) \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$



#### Ví dụ 1.1.

Rút gọn các biểu thức:

$$(1) A = \frac{\sqrt{2} \cos a - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}{-\sqrt{2} \sin a + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}$$

$$(2) B = (\tan a - \tan b) \cot(a-b) - \tan a \tan b$$

✎ *Lời giải*

$$(1) A = \frac{\sqrt{2} \cos a - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}{-\sqrt{2} \sin a + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}$$

$$\text{Ta có } A = \frac{\sqrt{2} \cos a - 2 \left( \cos \frac{\pi}{4} \cos a - \sin \frac{\pi}{4} \sin a \right)}{-\sqrt{2} \sin a + 2 \left( \sin \frac{\pi}{4} \cos a + \cos \frac{\pi}{4} \sin a \right)} = \frac{\sqrt{2} \sin a}{\sqrt{2} \cos a} = \tan a.$$

$$(2) B = (\tan a - \tan b) \cot(a-b) - \tan a \tan b$$

$$\text{Ta có } B = \tan(a-b)(1 + \tan a \tan b) \cot(a-b) - \tan a \tan b = 1.$$



#### Ví dụ 1.2.

Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$(1) A = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ biết } \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ và } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$(2) B = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b) \text{ biết } \cos a = \frac{1}{3} \text{ và } \cos b = \frac{1}{4}$$

✎ *Lời giải*

$$(1) A = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ biết } A = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ và } \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



Ta có  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ .

Mà  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  nên  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ .

Do đó:  $A = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}-3}{6}$ .

(2)  $B = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$  biết  $\cos a = \frac{1}{3}$  và  $\cos b = \frac{1}{4}$

Ta có:

$$B = (\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b) \cdot (\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b)$$

$$= \cos^2 a \cdot \cos^2 b - \sin^2 a \cdot \sin^2 b$$

$$= \cos^2 a \cdot \cos^2 b - (1 - \cos^2 a) \cdot (1 - \cos^2 b) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{16} - \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) = -\frac{119}{144}$$



### Ví dụ 1.3.

Với

(1)  $a - b = \frac{\pi}{4}$ , chứng minh rằng  $\frac{1 + \tan b}{1 + \tan a} = \tan a$

(2)  $a + b = \frac{\pi}{4}$ , chứng minh rằng  $(1 + \tan a)(1 + \tan b) = 2$

### » Lời giải

(1)  $a - b = \frac{\pi}{4}$ , chứng minh rằng  $\frac{1 + \tan b}{1 + \tan a} = \tan a$

Ta có:  $a - b = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{4} + b$

Do đó:  $\tan a = \tan\left(\frac{\pi}{4} + b\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan b}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan b} = \frac{1 + \tan b}{1 - \tan b}$

(2)  $a + b = \frac{\pi}{4}$ , chứng minh rằng  $(1 + \tan a)(1 + \tan b) = 2$

Ta có:  $(1 + \tan a)(1 + \tan b)$

$$= (1 + \tan a) \left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - a\right)\right) = (1 + \tan a) \left(1 + \frac{1 - \tan a}{1 + \tan a}\right) = (1 + \tan a) \cdot \frac{2}{1 + \tan a} = 2$$



## ➤ Dạng 2. Công thức nhân đôi



### Phương pháp

#### Công thức nhân đôi:

$$(1) \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$(2) \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$(3) \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

#### Công thức hạ bậc:

$$(4) \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$(5) \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$(6) \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$



### Ví dụ 2.1.

Rút gọn các biểu thức sau

$$(1) A = \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$$

$$(2) B = \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x$$

#### ✎ Lời giải

$$(1) A = \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$$

$$A = \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$$

$$\Rightarrow A \cos 10^\circ = \sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \frac{1}{4} \sin 40^\circ \cos 40^\circ = \frac{1}{8} \sin 80^\circ = \frac{1}{8} \cos 10^\circ.$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{8}.$$

$$(2) B = \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x$$

$$B = \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \cos x \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x.$$



### Ví dụ 2.2.

Tính các giá trị lượng giác của các góc  $2a$  biết

$$(1) \cos a = \frac{5}{13}, 0 < a < \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \sin a = \frac{1}{4}, 0 < a < \frac{\pi}{2}$$

#### ✎ Lời giải

$$(1) \cos a = \frac{5}{13}, 0 < a < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Ta có } \sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{13^2}} = \frac{12}{13} \text{ do } 0 < a < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin a > 0$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} = \frac{120}{169}.$$



$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 2 \left( \frac{5}{13} \right)^2 - 1 = -\frac{119}{72}.$$

$$\tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{120}{169} : \left( -\frac{119}{169} \right) = -\frac{120}{119}.$$

(2)  $\sin a = \frac{1}{4}, 0 < a < \frac{\pi}{2}$

Ta có  $\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \sqrt{1 - \left( \frac{1}{4} \right)^2} = \sqrt{\frac{17}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4}$  do  $0 < a < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin a > 0$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{17}}{4} = \frac{\sqrt{17}}{8}.$$

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 2 \left( \frac{\sqrt{17}}{4} \right)^2 - 1 = \frac{9}{8}.$$

$$\tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{\sqrt{17}}{8} : \left( \frac{9}{8} \right) = \frac{\sqrt{17}}{9}.$$



**Ví dụ 2.3.**

Cho  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ , với  $\alpha \in \left( \frac{\pi}{2}; \pi \right)$ . Tính giá trị của  $E = \sin 2\alpha + \tan 2\alpha$ .

*🔗 Lời giải*

Ta có  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{16}{25}$ .

Do  $\alpha \in \left( \frac{\pi}{2}; \pi \right)$  nên  $\cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$ .

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left( -\frac{4}{5} \right) = -\frac{24}{25}.$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{-4} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \left( -\frac{3}{4} \right)}{1 - \left( \frac{9}{16} \right)} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = -\frac{24}{7}.$$

Vậy  $E = \sin 2\alpha + \tan 2\alpha = -\frac{24}{25} - \frac{24}{7} = -\frac{74}{25}$



**Ví dụ 2.4.**

Chứng minh biểu thức  $P = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x$  không phụ thuộc giá trị của  $x$

*🔗 Lời giải*

$$P = \frac{2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{2 \sin x (\sin x + \cos x)}{2 \cos x (\sin x + \cos x)} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1.$$

Vậy giá trị của biểu thức  $P$  không phụ thuộc vào giá trị của biến  $x$ .



**Dạng 3. Công thức biến đổi tích thành tổng**



**Phương pháp**

$$(1) \cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$(2) \sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$(3) \sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$



**Ví dụ 3.1.**

Biến mỗi biểu thức sau thành dạng tổng

$$(1) A = \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$$

$$(2) B = \sin x \sin 2x \sin 3x$$

$$(3) C = 8 \cos x \sin 2x \sin 3x$$

$$(4) D = \cos x \cos(x - 60^\circ) \cos(x + 60^\circ)$$

**Lời giải**

$$(1) A = 2 \sin(a+b) \sin(a-b)$$

$$A = 2 \sin(a+b) \sin(a-b) = \cos 2b - \cos 2a$$

$$(2) B = \sin x \sin 2x \sin 3x$$

$$\begin{aligned} B &= \sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{2} \sin 3x (\cos x - \cos 3x) = \frac{1}{2} \sin 3x \cos x - \frac{1}{2} \sin 3x \cos 3x \\ &= \frac{1}{4} (\sin 4x + \sin 2x) - \frac{1}{4} \sin 6x = \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 6x \end{aligned}$$

$$(3) C = 8 \cos x \sin 2x \sin 3x$$

$$\begin{aligned} C &= 8 \cos x \sin 2x \sin 3x = 4 \cos x (\cos x - \cos 5x) = 4 \cos^2 x - 4 \cos x \cos 5x \\ &= 4 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} - 2 \cos 6x - 2 \cos 4x = 2 + 2 \cos 2x - 2 \cos 6x - 2 \cos 4x \end{aligned}$$

$$(4) D = \cos x \cos(x - 60^\circ) \cos(x + 60^\circ)$$

$$\begin{aligned} D &= \cos x \cos(x - 60^\circ) \cos(x + 60^\circ) = \frac{1}{2} \cos x (\cos 2x + \cos 120^\circ) \\ &= \frac{1}{2} \cos x \cos 2x - \frac{1}{4} \cos x = \frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x - \frac{1}{4} \cos x = \frac{1}{4} \cos 3x. \end{aligned}$$



**Ví dụ 3.2.**

Chứng minh rằng  $4 \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cos 3x$ , với  $x \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } 4 \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$





$$\begin{aligned}
 &= 4 \cos x \cdot \frac{1}{2} \left[ \cos(-2x) + \cos \frac{2\pi}{3} \right] \\
 &= 2 \cos x \cos 2x - \cos x = \cos 3x + \cos(-x) - \cos x = \cos 3x, \forall x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Vậy  $4 \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cos 3x$ , với  $x \in \mathbb{R}$ .



**Ví dụ 3.3.**

Chứng minh  $S = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$  không phụ thuộc giá trị của  $x$

*🔗 Lời giải*

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } S &= \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \\
 &= \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right)}{2} + \frac{1 + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right)}{2} \\
 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) \right] \\
 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \frac{4\pi}{3} \cos 2x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cos 2x = \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

Vậy  $S = \frac{3}{2}$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  (không phụ thuộc vào biến số  $x$ ).



**Dạng 4. Công thức biến đổi tổng thành tích**



**Phương pháp**

$$(1) \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$(2) \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$(3) \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$(4) \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$



**Ví dụ 4.1.**

Biến đổi mỗi biểu thức dưới đây thành một tích:

$$(1) \sin x + \sin 2x + \sin 3x$$

$$(2) \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$$

$$(3) \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$$

$$(4) \frac{\cos x + \cos y}{\cos x - \cos y}$$

**Lời giải**

$$(1) \sin x + \sin 2x + \sin 3x$$

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \sin 3x &= (\sin 3x + \sin x) + \sin 2x \\ &= 2 \sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x = \sin 2x (2 \cos x + 1) \end{aligned}$$

$$(2) \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$$

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x &= (\sin 7x + \sin x) + (\sin 5x + \sin 3x) \\ &= 2 \sin 4x \cdot \cos 3x + 2 \sin 4x \cos x = 2 \sin 4x \cdot (\cos 3x + \cos x) \\ &= 4 \sin 4x \cdot \cos 2x \cdot \cos x \end{aligned}$$

$$(3) \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$$

$$\begin{aligned} \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x &= (\cos 3x + \cos x) + (\cos 4x + \cos 2x) \\ &= 2 \cos 2x \cdot \cos x + 2 \cos 3x \cdot \cos x = 2 \cos x (\cos 2x + \cos 3x) \\ &= 4 \cos x \cdot \cos \frac{5x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$(4) \frac{\cos x + \cos y}{\cos x - \cos y}$$

$$\frac{\cos x + \cos y}{\cos x - \cos y} = \frac{2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}}{-2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}} = -\cot \frac{x+y}{2} \cdot \cot \frac{x-y}{2}$$



**Ví dụ 4.2.**

Chứng minh

$$(1) \cos 5x \cos 3x + \sin 7x \sin x = \cos 2x \cos 4x$$

$$(2) \sin 5x - 2 \sin x (\cos 2x + \cos 4x) = \sin x$$

$$(3) \cos 5x \cos x + \sin 3x \sin x = \cos 2x \cos 4x$$

$$(4) 2(\sin a \cos 2a - \sin 2a \cos 3a) + \sin 5a = \sin 3a$$

*Lời giải*

$$(1) \cos 5x \cos 3x + \sin 7x \sin x = \cos 2x \cos 4x$$

Ta có:  $\cos 5x \cos 3x + \sin 7x \sin x$

$$= \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 8x) + \frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 8x) = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x) = \cos 4x \cos 2x.$$

$$(2) \sin 5x - 2 \sin x (\cos 2x + \cos 4x) = \sin x$$

Ta có:  $\sin 5x - 2 \sin x (\cos 2x + \cos 4x)$

$$= \sin 5x - 2 \sin x \cos 2x - 2 \sin x \cos 4x$$

$$= \sin 5x - [\sin(-x) + \sin 3x] - [\sin(-3x) + \sin 5x] = \sin x.$$

$$(3) \cos 5x \cos x + \sin 3x \sin x = \cos 2x \cos 4x$$

Ta có:  $\cos 5x \cos x + \sin 3x \sin x$

$$= \frac{1}{2}[\cos 4x + \cos 6x] + \frac{1}{2}[\cos 2x - \cos 4x] = \frac{1}{2}[\cos 6x + \cos 2x] = \cos 2x \cos 4x.$$

$$(4) 2(\sin a \cos 2a - \sin 2a \cos 3a) + \sin 5a = \sin 3a$$

Ta có:  $2(\sin a \cos 2a - \sin 2a \cos 3a) + \sin 5a$

$$= 2 \sin a \cos 2a - 2 \sin 2a \cos 3a + \sin 5a = \sin(-a) + \sin 3a - [\sin(-a) + \sin 5a] + \sin 5a = \sin 3a.$$



Chương 01

Bài 3.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC



Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

- » Câu 1. Rút gọn biểu thức  $M = \cos 2x \cdot \cos x + \sin 2x \cdot \sin x$  ta được kết quả là:  
**A.**  $M = \cos x$ .      **B.**  $M = \cos 3x$ .      **C.**  $M = \sin x$ .      **D.**  $M = \sin 3x$ .

» Lời giải

**Chọn A**

Ta có:  $M = \cos 2x \cdot \cos x + \sin 2x \cdot \sin x = \cos(2x - x) = \cos x$ .

- » Câu 2. Rút gọn biểu thức  $\cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) - \cos x$  ta được kết quả là  
**A.** 0.      **B.**  $-\cos x$       **C.**  $-2\cos x$       **D.**  $\sin x - \cos x$ .

» Lời giải

**Chọn C**

$$\begin{aligned} & \cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) - \cos x \\ &= \cos 120^\circ \cos x + \sin 120^\circ \sin x + \cos 120^\circ \cos x - \sin 120^\circ \sin x - \cos x \\ &= \cos 120^\circ \cos x + \cos 120^\circ \cos x - \cos x \\ &= 2 \cos 120^\circ \cos x - \cos x = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cos x - \cos x = -2 \cos x \end{aligned}$$

- » Câu 3. Biết  $\sin a = \frac{5}{13}$ ,  $\cos b = \frac{3}{5}$ ,  $\left(\frac{\pi}{2} < a < \pi; 0 < b < \frac{\pi}{2}\right)$ . Kết quả của biểu thức  $\sin(a+b)$  bằng:  
**A.** 0.      **B.**  $\frac{63}{65}$       **C.**  $\frac{56}{65}$       **D.**  $\frac{-33}{65}$ .

» Lời giải

**Chọn D**

$$+ \text{Ta có: } \begin{cases} \frac{\pi}{2} < a < \pi \\ \sin a = \frac{5}{13} \end{cases} \Rightarrow \cos a = -\frac{12}{13}.$$

$$\begin{cases} 0 < b < \frac{\pi}{2} \\ \cos b = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \sin b = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Khi đó } \sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b = \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} + \left(-\frac{12}{13}\right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{-33}{65}.$$

- » Câu 4. Trong các công thức sau, công thức nào **sai** ?  
**A.**  $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a$ .      **B.**  $\cos 6a = 1 - 2 \sin^2 3a$ .  
**C.**  $\cos 6a = 1 - 6 \sin^2 a$ .      **D.**  $\cos 6a = 2 \cos^2 3a - 1$ .



» *Lời giải*

**Chọn C**

Ta có  $\cos 6a = \cos(2 \cdot 3a) = \cos^2 3a - \sin^2 3a = 2 \cos^2 3a - 1 = 1 - 2 \sin^2 3a$  nên đáp án C sai.

» **Câu 5.** Đẳng thức nào **không đúng** với mọi  $x$ ?

A.  $\cos^2 3x = \frac{1 + \cos 6x}{2}$ .

B.  $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ .

C.  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ .

D.  $\sin^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$ .

» *Lời giải*

**Chọn D**

Ta có  $\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2}$ .

» **Câu 6.** Nếu  $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$  thì  $\sin 2x$  bằng

A.  $\frac{3}{4}$ .

B.  $\frac{3}{8}$ .

C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

D.  $-\frac{3}{4}$ .

» *Lời giải*

**Chọn D**

Do  $\sin x + \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} = (\sin x + \cos x)^2 = (\sin x)^2 + (\cos x)^2 + 2 \sin x \cdot \cos x$

$\Rightarrow \frac{1}{4} = 1 + \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = -\frac{3}{4}$ .

» **Câu 7.** Biết rằng  $\frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} + \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{\cos(ax)}{b - \sin(ax)}$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Tính giá trị của biểu thức

$P = a + b$ .

A.  $P = 4$ .

B.  $P = 1$ .

C.  $P = 2$ .

D.  $P = 3$ .

» *Lời giải*

**Chọn D**

Ta có:  $\frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} + \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{1}{\cos 2x} + \tan 2x$

$= \frac{1}{\cos 2x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = \frac{(1 + \sin 2x) \cos 2x}{\cos^2 2x} = \frac{(1 + \sin 2x) \cos 2x}{1 - \sin^2 2x}$

$= \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$ . Vậy  $a = 2, b = 1$ . Suy ra  $P = a + b = 3$ .

» **Câu 8.** Biết  $\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{2}$ . Tính  $\sin(\alpha + \pi) - 2 \cos(\alpha - \pi)$ .

A.  $\frac{3}{\sqrt{2}}$ .

B.  $-\frac{3}{\sqrt{2}}$ .

C.  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

D.  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

» *Lời giải*

**Chọn B**

Ta có  $\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha + 2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$ .



$$\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\alpha + 2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha.$$

Suy ra  $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \sin \alpha = \cos \alpha + \sqrt{2}.$

Vì  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow 2 \cos^2 \alpha + 2\sqrt{2} \cos \alpha + 2 = 1$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 \alpha + 2\sqrt{2} \cos \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Do đó  $\sin(\alpha + \pi) - 2 \cos(\alpha - \pi) = -\sin \alpha + 2 \cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{2}}.$

» **Câu 9.** Biết tam giác  $ABC$  có các góc thỏa mãn  $\sin A + \sin B + \sin C = a \cos \frac{A}{b} \cos \frac{B}{b} \cos \frac{C}{b}$  với  $a, b$  nguyên. Tính  $a + b$ .

**A.**  $a + b = 6.$

**B.**  $a + b = 4.$

**C.**  $a + b = 2.$

**D.**  $a + b = 8.$

» **Lời giải**

**Chọn A**

$$\begin{aligned} VT &= \sin A + (\sin B + \sin C) = \sin A + 2 \sin \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} \\ &= 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} + 2 \sin \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} \\ &= 2 \sin \frac{B+C}{2} \cdot \left( \cos \frac{B+C}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right) \quad (\text{vì } A+B+C = \pi \text{ nên } \frac{A}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2}) \\ &= 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}. \text{ Suy ra } a = 4; b = 2. \text{ Vậy } a + b = 4 + 2 = 6. \end{aligned}$$

» **Câu 10.** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sqrt{2 \sin x + 2}.$

**A.**  $-1.$

**B.**  $1.$

**C.**  $2.$

**D.**  $0.$

» **Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2 \sin x + 2 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq y \leq 2.$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2 đạt được khi  $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

Giá trị nhỏ nhất bằng 0 đạt được khi  $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$

» **Câu 11.** Cho tam giác  $ABC$ . Giá trị của biểu thức  $P = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C$  bằng

**A.**  $1.$

**B.**  $3.$

**C.**  $2.$

**D.**  $0.$

» **Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:

$$\begin{aligned} +) \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C &= \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C \\ &= 2 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} - \cos^2 C = 2 - \cos(A+B) \cos(A-B) - \cos^2 C \\ &= 2 - \cos(\pi - C) \cos(A-B) - \cos^2 C = 2 + \cos C \cos(A-B) - \cos^2 C \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} +) 2 \cos A \cos B \cos C &= (\cos(A+B) + \cos(A-B)) \cos C = (-\cos C + \cos(A-B)) \cos C \\ &= -\cos^2 C + \cos(A-B) \cos C \\ \Rightarrow A &= 2 + \cos C \cos(A-B) - \cos^2 C + \cos^2 C - \cos C \cos(A-B) = 2. \end{aligned}$$

» **Câu 12.** Cho biểu thức  $S = \sin x + \sin(x+a) + \sin(x+2a) + \sin(x+3a) + \sin(x+4a)$ . Nếu  $0 < a < \pi$  thì  $S$  không phụ thuộc vào  $x$  khi  $a$  nhận giá trị nào?

**A.**  $a = \frac{2\pi}{5}$ .

**B.**  $a = \frac{2\pi}{5}$  hoặc  $a = \frac{4\pi}{5}$ .

**C.**  $a = -\frac{2\pi}{5}$  hoặc  $a = \frac{4\pi}{5}$ .

**D.**  $a = \frac{4\pi}{5}$ .

» **Lời giải**

**Chọn B**

Nhân 2 vế của  $S$  với  $\sin \frac{a}{2} \neq 0$  ta được

$$\sin \frac{a}{2} \cdot S = \sin \frac{a}{2} \sin x + \sin \frac{a}{2} \sin(x+a) + \sin \frac{a}{2} \sin(x+2a) + \sin \frac{a}{2} \sin(x+3a) + \sin \frac{a}{2} \sin(x+4a)$$

Ta có:

$$+ \sin \frac{a}{2} \sin x = \frac{1}{2} \left[ \cos \left( \frac{a}{2} - x \right) - \cos \left( \frac{a}{2} + x \right) \right]$$

$$+ \sin \frac{a}{2} \sin(x+a) = \frac{1}{2} \left[ \cos \left( \frac{a}{2} + x \right) - \cos \left( \frac{3a}{2} + x \right) \right]$$

$$+ \sin \frac{a}{2} \sin(x+2a) = \frac{1}{2} \left[ \cos \left( \frac{3a}{2} + x \right) - \cos \left( \frac{5a}{2} + x \right) \right]$$

$$+ \sin \frac{a}{2} \sin(x+3a) = \frac{1}{2} \left[ \cos \left( \frac{5a}{2} + x \right) - \cos \left( \frac{7a}{2} + x \right) \right]$$

$$+ \sin \frac{a}{2} \sin(x+4a) = \frac{1}{2} \left[ \cos \left( \frac{7a}{2} + x \right) - \cos \left( \frac{9a}{2} + x \right) \right]$$

$$\Rightarrow \sin \frac{a}{2} S = \frac{1}{2} \left[ \cos \left( \frac{a}{2} - x \right) - \cos \left( \frac{9a}{2} + x \right) \right] = \sin \frac{5a}{2} \sin(x+2a)$$

$$\Rightarrow S = \frac{\sin \frac{5a}{2} \sin(x+2a)}{\sin \frac{a}{2}}.$$

Để  $S$  không phụ thuộc vào  $x$  thì  $\sin \frac{5a}{2} = 0$ .

Do  $0 < a < \pi$  nên  $a = \frac{2\pi}{5}$  hoặc  $a = \frac{4\pi}{5}$ .

**B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai**

» **Câu 13.** Cho biết  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$  và các biểu thức  $A = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \sin(\pi + \alpha)$ ;

$B = \cos(\pi - \alpha) + \cot \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ . Khi đó



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A = \cos \alpha - \sin \alpha$		
(b)	$B = \cos \alpha + \tan \alpha$		
(c)	$A + B = \frac{27}{20}$		
(d)	$A - B = -\frac{29}{20}$		

» *Lời giải*

(a)  $A = \cos \alpha - \sin \alpha$ .

Ta có:  $A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(\pi + \alpha) = \cos \alpha - \sin \alpha = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = -\frac{7}{5}$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

(b)  $B = \cos \alpha + \tan \alpha$ .

Ta có:  $B = \cos(\pi - \alpha) + \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha + \tan \alpha = -\cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{5} + \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{20}$ .

» **Chọn SAI.**

(c)  $A + B = \frac{27}{20}$ .

Ta có  $A + B = -\frac{27}{20}$ .

» **Chọn SAI.**

(d)  $A - B = -\frac{29}{20}$ .

Ta có  $A - B = -\frac{29}{20}$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 14.** Cho  $0 < a < \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} < b < \pi$  và  $\tan a = 3; \tan b = -2$ .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\tan(a + \pi) = -3$		
(b)	$\tan(a + b) = -1$		
(c)	$\cot(a - b) = 1$		
(d)	$\sin(a - b) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$		

» *Lời giải*

(a)  $\tan(a + \pi) = -3$ .

$\tan(a + \pi) = \tan a = 3$ .

» **Chọn SAI.**

(b)  $\tan(a + b) = -1$ .





$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} = \frac{3 + (-2)}{1 - 3 \cdot (-2)} = \frac{1}{7}.$$

» **Chọn SAI.**

(c)  $\cot(a-b) = 1.$

$$\cot(a-b) = \frac{1}{\tan(a-b)} = \frac{1}{\frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}} = -1.$$

» **Chọn SAI.**

(d)  $\sin(a-b) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Ta có:  $0 < a < \frac{\pi}{2}$ ;  $\tan a = 3 \Rightarrow \cos a > 0$ ;

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \Rightarrow \cos a = \frac{\sqrt{10}}{10}; \sin a = \tan a \cdot \cos a = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

Ta có:  $\frac{\pi}{2} < b < \pi$ ;  $\tan b = -2 \Rightarrow \cos b < 0$ ;

$$1 + \tan^2 b = \frac{1}{\cos^2 b} \Rightarrow \cos b = -\frac{\sqrt{5}}{5}; \sin b = \tan b \cdot \cos b = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Vậy } \sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b = \frac{3\sqrt{10}}{10} \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) - \frac{\sqrt{10}}{10} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 15.** Cho  $\sin x = -\frac{4}{5}$  và  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ .

	<b>Mệnh đề</b>	<b>Đúng</b>	<b>Sai</b>
(a)	$\cos 2x = -\frac{\sqrt{7}}{5}$		
(b)	$\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$		
(c)	$\tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$		
(d)	$C = \frac{2 \sin 2x - \cos 2x}{\tan 2x + \cos 2x} = \frac{-287}{551}.$		

» **Lời giải**

(a)  $\cos 2x = -\frac{\sqrt{7}}{5}.$

$$\text{Có } \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - \frac{32}{25} = -\frac{7}{25}.$$

» **Chọn SAI.**

(b)  $\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$

$$\text{Có } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}. \text{ Do } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \text{ nên } \cos x > 0 \Rightarrow \cos x = \frac{3}{5}.$$



Ta cũng có  $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} = \frac{1}{5}$  mà  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} < \frac{x}{2} < \pi \Rightarrow \sin \frac{x}{2} > 0$  nên chọn

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c)  $\tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2}.$

Theo trên ta có  $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \Rightarrow \cos \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{-2\sqrt{5}}{5}.$

$$\text{Vậy } \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

» **Chọn SAI.**

(d)  $C = \frac{2 \sin 2x - \cos 2x}{\tan 2x + \cos 2x} = \frac{-287}{551}.$

$$\text{Có } C = \frac{2 \sin 2x - \cos 2x}{\tan 2x + \cos 2x} = \frac{4 \sin x \cdot \cos x - (2 \cos^2 x - 1)}{\frac{2 \sin x \cdot \cos x}{2 \cos^2 x - 1} + (2 \cos^2 x - 1)} = \frac{-287}{551}.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 16.** Biết  $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A = \cos 2\alpha = \frac{3}{5}$		
(b)	$B = (1 + 3 \sin^2 \alpha)(1 - 4 \cos^2 \alpha) = \frac{17}{25}$		
(c)	$C = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{7}{25}$		
(d)	$D = \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{-7\sqrt{2}}{10}$		

» **Lời giải**

(a)  $A = \cos 2\alpha = \frac{3}{5}$

$$\text{Ta có } \cos^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}.$$

$$\text{Vì } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \pi < 2\alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos 2\alpha < 0 \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{-3}{5}$$

» **Chọn SAI.**

(b)  $B = (1 + 3 \sin^2 \alpha)(1 - 4 \cos^2 \alpha) = \frac{17}{25}$

$$\text{Ta có } B = \left( 1 + 3 \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right) \left( 1 - 4 \cdot \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right) = \left( \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cos 2\alpha \right) (-1 - 2 \cos 2\alpha).$$



Thay  $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$  vào  $P$ , ta được  $P = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)\right) \left(-1 - 2 \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)\right) = \frac{17}{25}$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

(c)  $C = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{7}{25}$

Áp dụng  $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$ .

Ta có  $C = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha = \frac{17}{25}$ .

» **Chọn SAI.**

(d)  $D = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-7\sqrt{2}}{10}$

Ta có  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x \cos \frac{\pi}{4} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{4} = \left(\frac{-4}{5}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{-3}{5}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-7\sqrt{2}}{10}$

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 17.** Cho tam giác  $ABC$ .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C})$		
(b)	$\sin B + \sin(A + C) = 0$		
(c)	$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$		
(d)	$\Delta ABC$ cân khi $\sin A \cdot \sin C = \cos A \cdot \cos C$		

» **Lời giải**

(a)  $\widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C})$ .

Đúng vì:  $A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow A = 180^\circ - (B + C)$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b)  $\sin B + \sin(A + C) = 0$ .

$A + B + C = 180^\circ$

$\Leftrightarrow B = 180^\circ - (A + C) \Leftrightarrow \sin B = \sin(180^\circ - (A + C)) = \sin(A + C)$

Suy ra:  $\sin B - \sin(A + C) = 0$ .

» **Chọn SAI.**

(c)  $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

$(\sin A + \sin B) + \sin C = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$  (1)

Do  $\frac{A+B}{2} = \frac{180^\circ - C}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$  nên  $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$  (2)

Tương tự:  $\sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2}$  (3)

Từ (1),(2) và (3)  $\Rightarrow (\sin A + \sin B) + \sin C$



$$= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$= 2 \cos \frac{C}{2} \cdot \left( \cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) = 2 \cos \frac{A}{2} \cdot 2 \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d)  $\Delta ABC$  cân khi  $\sin A \cdot \sin C = \cos A \cdot \cos C$

$$\sin A \cdot \sin C = \cos A \cdot \cos C \Leftrightarrow \cos A \cdot \cos C - \sin A \cdot \sin C = 0 \Leftrightarrow \cos(A+C) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\cos B = 0 \Leftrightarrow \cos B = 0 \Leftrightarrow B = 90^\circ.$$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 18.** Biết  $\tan x = -\frac{1}{2}$  và  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cot x = -2$		
(b)	$\cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$		
(c)	$\sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$		
(d)	$M = \frac{2 \sin^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x - 4 \cos^2 x}{5 \cos^2 x - \sin^2 x} = -\frac{8}{19}$		

» **Lời giải**

(a)  $\cot x = -2$ .

Vì  $\tan x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cot x = -2$  nên mệnh đề ĐÚNG

» **Chọn ĐÚNG.**

(b)  $\cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

Có  $\tan x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{4}{5}$ .

Mà  $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Rightarrow \cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ . Mệnh đề b) SAI.

» **Chọn SAI.**

(c)  $\sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

$\sin x = \tan x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$  nên mệnh đề ĐÚNG.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d)  $M = \frac{2 \sin^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x - 4 \cos^2 x}{5 \cos^2 x - \sin^2 x} = -\frac{8}{19}$



Chia cả tử và mẫu của  $M$  cho  $\cos^2 x$  ta có

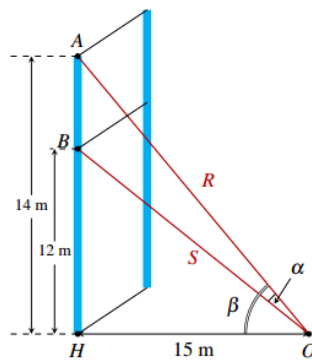
$$M = \frac{2 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3 \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} - 4}{5 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 4}{5 - \frac{1}{4}} = -\frac{20}{19} \text{ nên mệnh đề SAI.}$$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 19.** Trong vật lý, phương trình tổng quát của một vật giao động điều hòa được cho bởi công thức  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$  trong đó  $t$  là thời điểm (tính bằng giây),  $x(t)$  là li độ của vật tại thời điểm  $t$ ,  $A$  là biên độ dao động ( $A > 0$ ). (Dùng cho ba ý a, b, c).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Nếu một vật giao động theo phương trình $x(t) = 5 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ thì li độ của vật ở thời điểm ban đầu là $5\sqrt{2}$ .		
(b)	Một vật giao động điều hòa theo phương trình $x(t) = 10 \sin(50\pi t) \cdot \cos(50\pi t)$ thì biên độ của giao động là 5.		
(c)	Cho hai dao động điều hòa cùng phương có phương trình lần lượt là $x_1 = 5 \cos(100\pi t + \pi)$ (cm) và $x_2 = 5 \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ (cm). Khi đó phương trình dao động tổng hợp của hai dao động trên là $x = 5\sqrt{2} \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ (cm).		
(d)	Một sợi cáp $R$ được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14m. Một sợi cáp $S$ khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15m (Hình vẽ bên dưới). Gọi $\alpha$ là góc giữa hai sợi cáp trên khi đó $\tan \alpha = \frac{10}{131}$ .		

» **Lời giải**



(a) Nếu một vật giao động theo phương trình  $x(t) = 5 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$  thì li độ của vật ở thời điểm ban đầu là  $5\sqrt{2}$ .



Ta có:  $x(t) = 5 \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$  thì li độ của vật ở thời điểm ban đầu (ứng với  $t = 0$ ) là

$$x = 5 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

» **Chọn SAI.**

(b) Một vật giao động điều hòa theo phương trình  $x(t) = 10 \sin(50\pi t) \cdot \cos(50\pi t)$  thì biên độ của giao động là 5.

$$\text{Ta có: } x(t) = 10 \sin(50\pi t) \cdot \cos(50\pi t) = 5 \cdot \sin(100\pi t) = 5 \cdot \cos\left(100\pi t + \frac{3\pi}{2}\right).$$

Khi đó biên độ của giao động là 5.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Cho hai dao động điều hòa cùng phương có phương trình lần lượt là  $x_1 = 5 \cos(100\pi t + \pi)$  (cm) và

$x_2 = 5 \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$  (cm). Khi đó phương trình dao động tổng hợp của hai dao động trên là

$$x = 5\sqrt{2} \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ (cm)}.$$

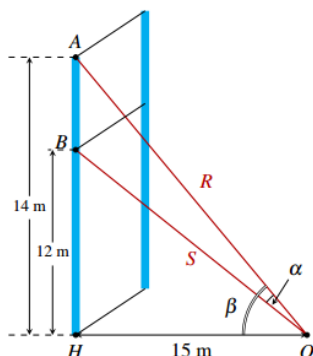
Ta có:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = 5 \cos(100\pi t + \pi) + 5 \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = 5 \left[ \cos(100\pi t + \pi) + \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &= 5 \cdot 2 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{3\pi}{4} = -5\sqrt{2} \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = 5\sqrt{2} \cos\left(100\pi t - \frac{3\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

» **Chọn SAI.**

(d) Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14 m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12 m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m (Hình vẽ bên dưới). Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai sợi cáp trên khi đó  $\tan \alpha = \frac{10}{131}$ .

$$\text{Ta có } \tan \beta = \frac{AH}{HO} = \frac{14}{15}; \quad \tan \beta_1 = \frac{BH}{HO} = \frac{12}{15}.$$



$$\text{Khi đó } \tan \alpha = \tan(\beta - \beta_1) = \frac{\tan \beta - \tan \beta_1}{1 + \tan \beta \tan \beta_1} = \frac{10}{131}.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

**C. Câu hỏi – Trả lời ngắn**



» **Câu 20.** Cho biểu thức  $P = \cos 5x \cdot \cos 3x - \cos(5x + 90^\circ) \cdot \cos(-3x - 90^\circ)$ . Sau khi đơn giản hóa, ta được biểu thức  $P = \cos(ax)$ . Giá trị của  $a$  bằng

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 8**

Biến đổi biểu thức  $P$ , ta có:

$$\begin{aligned} P &= \cos 5x \cdot \cos 3x - \cos(5x + 90^\circ) \cdot \cos(-3x - 90^\circ) \\ &= \cos 5x \cdot \cos 3x + \sin 5x \cdot \cos(3x + 90^\circ) = \cos 5x \cdot \cos 3x - \sin 5x \cdot \sin 3x = \cos(5x + 3x) = \cos(8x) \\ &\Rightarrow a = 8. \end{aligned}$$

» **Câu 21.** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ . Khi đó giá trị biểu thức  $P = \cos^2 2x + \cos^2 x$  bằng  $\frac{a}{b}$ . Tính  $a + b$ . Biết rằng phân số  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản.

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1754**

Biến đổi biểu thức  $P$  rồi thay giá trị  $\sin \alpha = \frac{1}{5}$  vào  $P$ , ta được:

$$\begin{aligned} P &= \cos^2 2x + \cos^2 x \\ &= (1 - 2\sin^2 \alpha)^2 + (1 - \sin^2 \alpha) = \left(1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2\right) = \frac{1129}{625} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = 1129 \\ b = 625 \end{cases} \Rightarrow a + b = 1754 \end{aligned}$$

» **Câu 22.** Tính giá trị biểu thức:  $A = \frac{\cos 10x - \cos 9x - \cos 8x + \cos 7x}{\sin 10x - \sin 9x - \sin 8x + \sin 7x}$  với  $x = \frac{\pi}{34}$  (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,71**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{(\cos 10x + \cos 7x) - (\cos 9x + \cos 8x)}{(\sin 10x + \sin 7x) - (\sin 9x + \sin 8x)} \\ &= \frac{2 \cos \frac{17x}{2} \cos \frac{3x}{2} - 2 \cos \frac{17x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{17x}{2} \cos \frac{3x}{2} - 2 \sin \frac{17x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \cos \frac{17x}{2} \left( \cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)}{2 \sin \frac{17x}{2} \left( \cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)} = \cot \frac{17x}{2}. \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức  $A$  tại  $x = \frac{\pi}{34}$  bằng  $\cot \frac{17 \cdot \frac{\pi}{34}}{2} = \cot \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$

» **Câu 23.** Cho  $\tan a = 2$  và  $a \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Tính  $A = 2\sqrt{2} \sin \frac{a}{2} \sin \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$  (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1,45**



$$\text{Ta có } \frac{1}{\cos^2 a} = \tan^2 a + 1 \Leftrightarrow \cos^2 a = \frac{1}{\tan^2 a + 1} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos a = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Mà } a \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ nên } \cos a = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ và } \sin a = \tan a \cdot \cos a = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Mặt khác } A = 2\sqrt{2} \sin \frac{a}{2} \sin \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow A = 2\sqrt{2} \sin \frac{a}{2} \left(\sin \frac{a}{2} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{a}{2}\right) \Leftrightarrow A = 2\sqrt{2} \sin \frac{a}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{a}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow A = 2 \sin \frac{a}{2} \left(\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2}\right) \Leftrightarrow A = 2 \sin^2 \frac{a}{2} + 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \Leftrightarrow A = 2 \left(\frac{1 - \cos a}{2}\right) + \sin a$$

$$\Leftrightarrow A = \sin a - \cos a + 1 \Leftrightarrow A = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + 1 \Leftrightarrow A = \frac{5 + \sqrt{5}}{5} \approx 1,45.$$

» **Câu 24.** Cho  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Giá trị gần đúng của biểu thức  $E = \frac{2 \tan \alpha - \cot \alpha}{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}$  là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng trăm)?

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,04**

$$\text{Vì } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha < 0 \text{ nên } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2 \tan \alpha - \cot \alpha}{\tan \alpha + 3 \cot \alpha} = \frac{2}{57} \approx 0,04.$$

» **Câu 25.** Cho biểu thức lượng giác sau (giả sử các biểu thức đều có nghĩa):

$A = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$ . Khi đó giá trị của  $10A$  bằng bao nhiêu?

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0**

$$\text{Ta có } \cos(5\pi - x) = \cos(\pi - x + 2.2\pi) = \cos(\pi - x) = -\cos x.$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x.$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x.$$

$$\cot(3\pi - x) = \cot(-x) = -\cot x.$$

$$\text{Suy ra } A = -\cos x - (-\cos x) + \cot x + (-\cot x) = 0 \Rightarrow 10A = 0.$$

» **Câu 26.** Đơn giản biểu thức  $P = \left(\frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cos \alpha}\right) \sin^2 \alpha$ .

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2**

$$\text{Ta có } \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cos \alpha}$$





$$= \frac{1 - \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} + \frac{1}{1 - \cos \alpha} = \frac{1}{1 + \cos \alpha} + \frac{1}{1 - \cos \alpha} = \frac{2}{\sin^2 \alpha}.$$

$$P = \left[ \frac{1 - \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} + \frac{1}{1 - \cos \alpha} \right] \sin^2 \alpha = \frac{2}{\sin^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha = 2$$

» **Câu 27.** Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị của tham số  $m$  sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = |\cos^4 x - \cos 2x + m|$  bằng 3. Tính tổng các phần tử của tập  $S$ .

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: -1**

$$\text{Ta có } y = |\cos^4 x - \cos 2x + m| = |\cos^4 x - (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) + m| = |\sin^4 x + m|$$

$$\text{Đặt } t = \sin^4 x, t \in [0; 1].$$

$$\text{Suy ra } y = |t + m|, t \in [0; 1].$$

Xét hàm số  $f(t) = t + m$  trên đoạn  $[0; 1]$ .

$$\max_{t \in [0; 1]} f(t) = f(1) = m + 1, \min_{t \in [0; 1]} f(t) = f(0) = m.$$

**Trường hợp 1:** Xét  $m \geq 0$  ta có  $\min_{t \in [0; 1]} y = m \Leftrightarrow m = 3$  (TM).

**Trường hợp 2:** Xét  $m \leq -1$ . ta có  $\min_{t \in [0; 1]} y = -m - 1 \Rightarrow -m - 1 = 3 \Leftrightarrow m = -4$  (TM).

**Trường hợp 3:** Xét  $-1 < m < 0$  ta có  $\min_{t \in [0; 1]} y = 0 \Rightarrow 0 = 3$  (vô lý)

$$\text{Vậy } S = \{-4; 3\} \Rightarrow -4 + 3 = -1.$$

» **Câu 28.** Cho tam giác  $ABC$  có độ dài ba cạnh  $BC = a, AC = b, AB = c$  thỏa mãn  $a + c = 4b$ . Tính giá trị biểu thức  $P = \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}$ .

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,6**

Áp dụng định lý sin, ta có:  $a + c = 4b$

$$\Leftrightarrow 2R \sin A + 2R \sin C = 8R \sin B \Leftrightarrow \sin A + \sin C = 4 \sin B$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = 8 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{A-C}{2} = 4 \sin \frac{B}{2} \text{ vì } \sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2} \neq 0, \frac{\widehat{B}}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{A-C}{2} = 4 \cos \frac{A+C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = 4 \left( \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow 5 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = 3 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Vậy  $P = 0,6$ .



» **Câu 29.** Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hòa cho bởi công thức  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ , trong đó  $t$  là thời điểm (tính bằng giây),  $x(t)$  là li độ của vật tại thời điểm  $t$ ,  $A$  là biên độ dao động ( $A > 0$ ) và  $\varphi \in [-\pi; \pi]$  là pha ban đầu của dao động. Xét

hai dao động điều hòa có phương trình:  $x_1(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$  (cm),

$x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)$  (cm). Tìm pha ban đầu của dao động tổng hợp này. Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: -0,26**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2.2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right) \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right). \end{aligned}$$

Vậy pha ban đầu bằng  $-\frac{\pi}{12} \approx -0,26$ .



## Chương 01

### Bài 4.

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A

## Lý thuyết

### 1. Định nghĩa hàm số lượng giác



Định nghĩa:

- **Hàm số sin** là quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực  $x$  với số thực  $\sin x$ , ký hiệu  $y = \sin x$ .
- **Hàm số cos** là quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực  $x$  với số thực  $\cos x$ , ký hiệu  $y = \cos x$ .
- **Hàm số tan** là hàm số được xác định bởi công thức:

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ với } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \text{ ký hiệu } y = \tan x.$$

- **Hàm số cotan** là hàm số được xác định bởi công thức:

$$y = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ với } x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \text{ ký hiệu } y = \cot x.$$

### Như vậy

- (1) Tập xác định của hàm số  $y = \sin x$  và  $y = \cos x$  là  $\mathbb{R}$
- (2) Tập xác định của hàm số  $y = \tan x$  là  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \right\}$
- (3) Tập xác định của hàm số  $y = \cot x$  là  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\}$

### 2. Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn



Hàm số chẵn - hàm số lẻ:

Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là

- **Hàm số chẵn** nếu  $\forall x \in D$  ta có  $-x \in D$  và  $f(-x) = f(x)$ .
- **Hàm số lẻ** nếu  $\forall x \in D$  ta có  $-x \in D$  và  $f(-x) = -f(x)$ .



**Hàm số tuần hoàn:**

Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số  $T \neq 0$  sao cho  $\forall x \in D$  ta có:

- (1)  $x + T \in D$  và  $x - T \in D$ .
- (2)  $f(x + T) = f(x)$ .

Số  $T$  dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là **chu kỳ** của hàm số tuần hoàn đó.

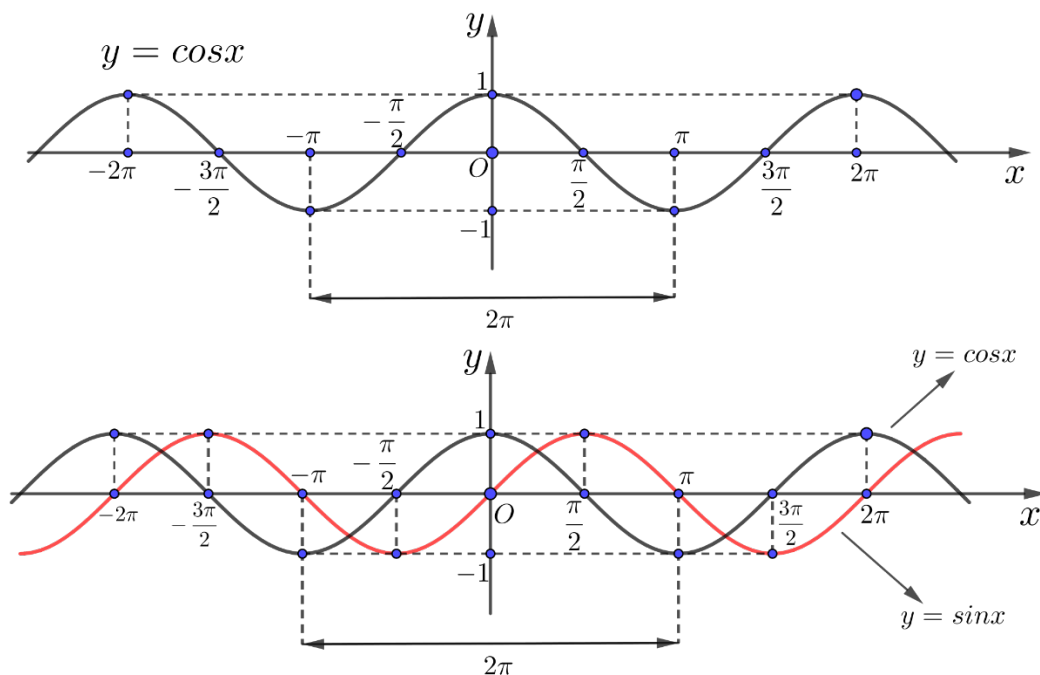


**Chú ý**

- (1) Hàm số  $y = \sin x$  và  $y = \cos x$  là các hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$ .
- (2) Hàm số  $y = \tan x$  và  $y = \cot x$  là các hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $\pi$ .

**3. Đồ thị & tính chất hàm số  $y = \sin x$  và  $y = \cos x$**

	Hàm số $y = \sin x$	Hàm số $y = \cos x$
1. Định nghĩa:	Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x$ với $\sin$ của góc lượng giác có số đo $x$ radian được gọi là hàm số $\sin$ . » Kí hiệu $y = \sin x$ .	Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x$ với $\cos$ của góc lượng giác có số đo $x$ radian được gọi là hàm số $\cos$ . » Kí hiệu $y = \cos x$ .
2. Tập xác định:	$D = \mathbb{R}$	$D = \mathbb{R}$
3. Tập giá trị:	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
4. Tính chất	Là hàm số lẻ.	Là hàm số chẵn.
5. Chu kỳ	Chu kỳ $2\pi$ .	Chu kỳ $2\pi$ .
6. Đơn điệu	Hàm số + Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi)$ . + Nghịch biến trên mỗi khoảng $(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi)$ .	Hàm số + Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ . + Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ .
7. Đồ thị		



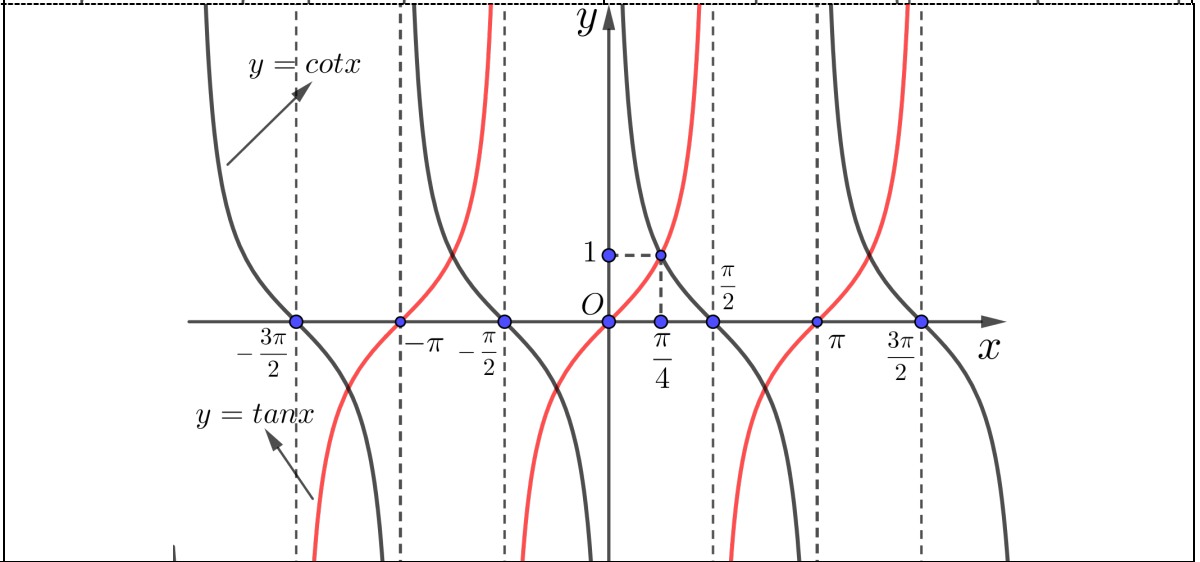
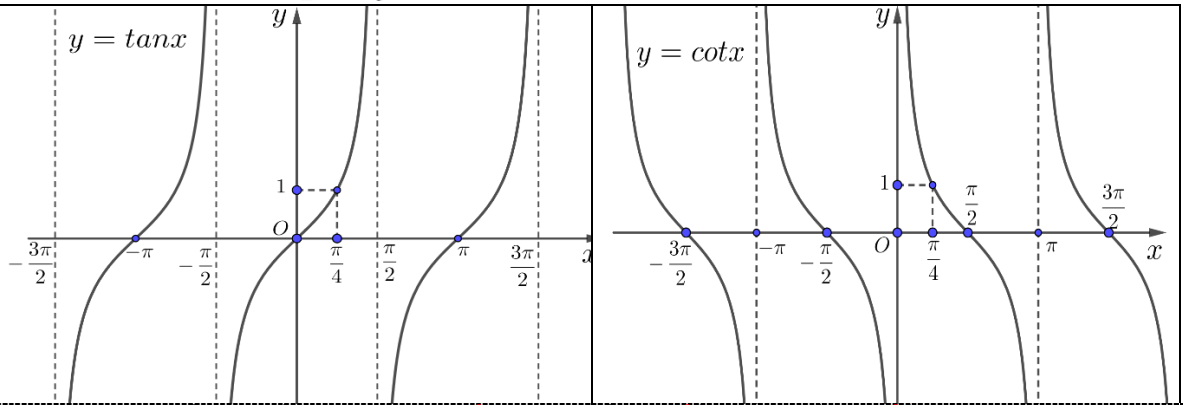
<b>8. Giá trị đặc biệt</b>	$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ .	$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$ .
	$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ .	$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ .
	$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ .	$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$ .

#### 4. Đồ thị & tính chất hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$

	Hàm số $y = \tan x$	Hàm số $y = \cot x$
<b>1. Định nghĩa:</b>	Hàm số tan là hàm số được xác định bởi công thức $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ ( $\cos x \neq 0$ ) » Kí hiệu $y = \tan x$ .	Hàm số cotan là hàm số được xác định bởi công thức $y = \frac{\cos x}{\sin x}$ ( $\sin x \neq 0$ ) » Kí hiệu $y = \cot x$ .
<b>2. Tập xác định:</b>	$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
<b>3. Tập giá trị:</b>	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
<b>4. Tính chất hàm</b>	Là hàm số lẻ.	Là hàm số lẻ.
<b>5. Chu kỳ</b>	Chu kì $\pi$ .	Chu kì $\pi$ .
<b>6. Đơn điệu</b>	Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left( \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{3\pi}{2} + k\pi \right)$ .	Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ .



7. Đồ thị





## Các dạng bài tập

### Dạng 1. Tập xác định



#### Phương pháp

Tập xác định hàm số lượng giác cơ bản:

- » Hàm số  $y = \sin x; y = \cos x$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$ .
- » Hàm số  $y = \tan x$  có tập xác định là  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .
- » Hàm số  $y = \cot x$  có tập xác định là  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

Ngoài ra còn có các dạng:

- »  $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  lưu ý  $Q(x) \neq 0$ .
- »  $y = f(x) = \sqrt[2n]{Q(x)}$  thì  $y = f(x)$  có nghĩa khi  $Q(x) \geq 0$ .
- »  $y = f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt[2n]{Q(x)}}$  lưu ý  $Q(x) > 0$ .



#### Ví dụ 1.1.

Tìm tập xác định của các hàm số sau:

- |                           |  |
|---------------------------|--|
| (1) $y = \sin 4x$         | (2) $y = \sin \frac{3x+1}{x^2-1}$      |
| (3) $y = \cos \sqrt{x+2}$ | (4) $y = \cos \frac{2025}{\sqrt{3-x}}$ |

#### ➤ Lời giải

(1)  $y = \sin 4x$

Hàm số xác định với mọi số thực  $x$  nên hàm số có tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

(2)  $y = \sin 4x$

Hàm số xác định khi  $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$ .

Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ .

(3)  $y = \sin \frac{3x+1}{x^2-1}$

Hàm số xác định khi  $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$ .

Tập xác định  $D = [-2; +\infty)$ .

(4)  $y = \cos \sqrt{x+2}$

Hàm số xác định khi  $3-x > 0 \Leftrightarrow x < 3$ .



Tập xác định  $D = (-\infty; 3)$ .



**Ví dụ 1.2.**

Tìm tập xác định của các hàm số sau:

(1)  $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

(2)  $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

*🔗 Lời giải*

(1)  $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Hàm số xác định khi  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Do đó hàm số có tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \right\}$ .

(2)  $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

Hàm số xác định khi  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Do đó hàm số có tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \right\}$ .



**Ví dụ 1.3.**

Tìm tập xác định của các hàm số sau:

(1)  $y = \sqrt{3 + 2 \cos x}$

(2)  $y = \frac{\tan 2x}{\sin x + 1} + \cot\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

(3)  $y = \frac{\tan 5x}{\sin 4x - \cos 3x}$

(4)  $y = \frac{\sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$

*🔗 Lời giải*

(1)  $y = \sqrt{3 + 2 \cos x}$

Hàm số xác định khi  $3 + 2 \cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -\frac{3}{2}$  (đúng  $\forall x \in \mathbb{R}$ ), vì  $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Suy ra tập xác định là  $D = \mathbb{R}$ .

(2)  $y = \frac{\tan 2x}{\sin x + 1} + \cot\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

Điều kiện:  $\begin{cases} \sin x \neq -1 \\ \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \end{cases}$

Vậy TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi, -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

(3)  $y = \frac{\tan 5x}{\sin 4x - \cos 3x}$





Ta có:  $\sin 4x - \cos 3x = \sin 4x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 2 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

Điều kiện: 
$$\begin{cases} \cos 5x \neq 0 \\ \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \\ \sin\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \end{cases}$$

Vậy TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}; \frac{\pi}{2} + k2\pi, -\frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \right\}$ .

(4)  $y = \frac{\sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$

$$y = \frac{\sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{\sin x}{-\cos 2x} = -\frac{\sin x}{\cos 2x}$$

Hàm số xác định  $\Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

Tập xác định của hàm số  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .



## ➤ Dạng 2. Tính chẵn - lẻ



### Phương pháp

- ▶ **Định nghĩa:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $D$
- » **Hàm số chẵn** nếu  $\forall x \in D$  ta có  $-x \in D$  và  $\forall x \in D$ .
  - » **Hàm số lẻ** nếu  $\forall x \in D$  ta có  $-x \in D$  và  $-f(x) \in D$ .
- ▶ Để xác định **tính chẵn lẻ** của hàm số ta thực hiện theo các bước sau:
- » **Bước 1:** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số, khi đó:
    - ♦ Nếu  $D$  là tập đối xứng (tức là  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ ), ta thực hiện tiếp **bước 2**.
    - ♦ Nếu  $D$  không là tập đối xứng (tức là  $\exists x \in D$  mà  $-x \notin D$ ), ta kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.
  - » **Bước 2:** Xác định  $f(-x)$ , khi đó:
    - ♦ Nếu  $f(-x) = f(x)$  kết luận hàm số là hàm chẵn.
    - ♦ Nếu  $f(-x) = -f(x)$  kết luận hàm số là hàm lẻ.
    - ♦ Ngoài ra kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.
- ▶ **Chú ý:**
- ① Với các hàm số lượng giác cơ bản, ta có:
    1. Hàm số  $y = \sin x$  là hàm số lẻ.
    2. Hàm số  $y = \cos x$  là hàm số chẵn
    3. Hàm số  $y = \tan x$  là hàm số lẻ.
    4. Hàm số  $y = \cot x$  là hàm số lẻ.

② Công thức liên quan đến việc xử lí dấu “ - ”

1. Công thức hai cung đối nhau:

$$\begin{cases} \sin(-x) = -\sin x \\ \cos(-x) = \cos x \\ \tan(-x) = -\tan x \\ \cot(-x) = -\cot x \end{cases}$$

2.  $|-x| = |x|$

3.  $(-x)^n = \begin{cases} x^n & \text{khi } n:2 \\ -x^n & \text{khi } n \neq 2 \end{cases}$



### Ví dụ 2.1.

Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

(1)  $y = 3 \cos x + \sin^2 x$

(2)  $y = \frac{1 + \sin^2 2x}{1 + \cos 3x}$

### ➤ Lời giải

(1)  $y = 3 \cos x + \sin^2 x$

Hàm số có tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

Lấy  $x \in \mathbb{R}$  ta có  $-x \in \mathbb{R}$  và  $y(-x) = 3 \cos(-x) + \sin^2(-x) = 3 \cos x + \sin^2 x = y(x)$ .

Do đó hàm số là hàm chẵn.



$$(2) y = \frac{1 + \sin^2 2x}{1 + \cos 3x}$$

Hàm số xác định khi  $\cos 3x \neq -1 \Leftrightarrow 3x \neq \pi + k2\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ .

$$\text{Tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}) \right\}.$$

Ta thấy nếu  $x \in D \Rightarrow \cos 3x \neq -1$  mà  $\cos(-3x) = \cos 3x \Rightarrow \cos(-3x) \neq -1 \Rightarrow -x \in D$

$$\text{Khi đó } y(-x) = \frac{1 + \sin^2(-2x)}{1 + \cos(-3x)} = \frac{1 + \sin^2 2x}{1 + \cos 3x} = y(x).$$

Do đó hàm số là hàm chẵn.



### Ví dụ 2.2.

Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

$$(1) y = 2x \sin x$$

$$(2) y = \cos x + \sin 2x.$$

$$(3) y = \frac{\cos 2x}{x}.$$

$$(4) y = \tan^7 2x \cdot \sin 5x.$$

### ✎ Lời giải

$$(1) y = 2x \sin x$$

Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$  là tập đối xứng do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$  (1).

$$\text{Đặt } y = f(x) = 2x \sin x.$$

$$\text{NX: } \forall x \in D, f(-x) = 2(-x) \sin(-x) = 2x \sin x = f(x) \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) ta kết luận hàm số đã cho là hàm số chẵn.

$$(2) y = \cos x + \sin 2x.$$

Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$  là tập đối xứng do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

$$\text{Đặt } y = f(x) = \cos x + \sin 2x.$$

$$\text{Xét } x = \frac{\pi}{3} \in D \Rightarrow -x = -\frac{\pi}{3} \in D.$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}; f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ta thấy  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) \neq f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$  nên hàm số đã cho không là hàm số chẵn

Và  $-f\left(\frac{\pi}{3}\right) \neq f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$  nên hàm số đã cho không là hàm số lẻ.

$$(3) y = \frac{\cos 2x}{x}.$$

Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  là tập đối xứng do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

$$\text{Đặt } y = f(x) = \frac{\cos 2x}{x}.$$



$$\text{Ta có } \forall x \in D: f(-x) = \frac{\cos(-2x)}{-x} = -\frac{\cos(2x)}{x} = -f(x).$$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

$$(4) \quad y = \tan^7 2x \cdot \sin 5x.$$

Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$  là tập đối xứng do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

$$\text{Đặt } y = f(x) = \tan^7 2x \cdot \sin 5x.$$

$$\text{Ta có } \forall x \in D: f(-x) = \tan^7(-2x) \sin(-5x) = \tan^7(2x) \sin(5x) = f(x).$$

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

### Chú ý

Đôi khi người ta còn phát biểu bài toán dưới dạng:

» Với câu (1)  $y = 2x \sin x$ :

*Chứng minh đồ thị hàm số  $y = 2x \sin x$  nhận trục tung làm trục đối xứng.*

» Với câu (3)  $y = \frac{\cos 2x}{x}$  .:

*Chứng minh đồ thị hàm số  $y = \frac{\cos 2x}{x}$  nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.*

» Đồ thị của hàm số lẻ nhận nhận **gốc tọa độ** làm **tâm đối xứng**.

» Đồ thị của hàm số chẵn nhận nhận **trục Oy** làm **trục đối xứng**.



### ➤ Dạng 3. Tính tuần hoàn



#### Phương pháp

► **Tính tuần hoàn** hàm số lượng giác cơ bản:

- (1) Hàm số  $y = \sin x$  và  $y = \cos x$  là các hàm số tuần hoàn với chu kì  $2\pi$ .
- (2) Hàm số  $y = \tan x$  và  $y = \cot x$  là các hàm số tuần hoàn với chu kì  $\pi$ .

► Các kết quả có thể áp dụng:

- (1) Hàm số  $y = A \cdot \sin(ax + b)$  ( $A, a \neq 0$ ) là một hàm số tuần hoàn với chu kì  $T = \frac{2\pi}{|a|}$
- (2) Hàm số  $y = A \cdot \cos(ax + b)$  ( $A, a \neq 0$ ) là một hàm số tuần hoàn với chu kì  $T = \frac{2\pi}{|a|}$
- (3) Hàm số  $y = A \cdot \tan(ax + b)$  ( $A, a \neq 0$ ) là một hàm số tuần hoàn với chu kì  $T = \frac{\pi}{|a|}$
- (4) Hàm số  $y = A \cdot \cot(ax + b)$  ( $A, a \neq 0$ ) là một hàm số tuần hoàn với chu kì  $T = \frac{\pi}{|a|}$
- (5) Nếu hàm số  $y = f(x)$  chỉ chứa các hàm số lượng giác có chu kì lần lượt là  $T_1, T_2, \dots, T_n$  thì hàm số  $f$  có chu kì  $T$  là bội chung nhỏ nhất của  $T_1, T_2, \dots, T_n$ .
- (6) Nếu hàm số  $y = f(x)$  tuần hoàn với chu kì  $T$  thì hàm số  $y = f(x) + c$  ( $c$  là hằng số) cũng là hàm số tuần hoàn với chu kì  $T$ .



#### Chú ý

**Một số dấu hiệu nhận biết hàm số  $y = f(x)$  không phải là hàm tuần hoàn**

Hàm số  $y = f(x)$  không phải là hàm tuần hoàn khi **một** trong các điều kiện sau bị vi phạm:

- (1) Tập xác định của hàm số là tập hữu hạn.
- (2) Tồn tại số  $a$  sao cho hàm số không xác định với  $x > a$  hoặc  $x < a$ .
- (3) Phương trình  $f(x) = k$  có nghiệm nhưng số nghiệm hữu hạn.
- (4) Phương trình  $f(x) = k$  có vô số nghiệm sắp thứ tự:

$$\dots < x_n < x_{n+1} < \dots \text{ mà } |x_n - x_{n+1}| \rightarrow 0 \text{ hay } \infty.$$



#### Ví dụ 3.1.

Tìm chu kì (nếu có) của các hàm số sau:

(1)  $y = 1 - \sin 5x$

(2)  $y = \cos^2 x - 1$

(3)  $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right)$

(4)  $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$

✎ **Lời giải**

(1)  $y = 1 - \sin 5x$



Hàm số  $y = 1 - \sin 5x$  tuần hoàn và có chu kỳ  $T_1 = \frac{2\pi}{5}$ .

(2)  $y = \cos^2 x - 1$

Hàm số  $y = \cos^2 x - 1 = \frac{\cos 2x - 1}{2}$  tuần hoàn và có chu kỳ  $T_2 = \pi$ .

(3)  $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right)$

Hàm số  $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4}{5}x\right)$  tuần hoàn và có chu kỳ  $T_2 = \frac{5\pi}{2}$ .

(4)  $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$

Hàm số  $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$  không tuần hoàn

Vì ta có hàm số  $y = \cos x$  có chu kỳ  $T_1 = 2\pi$  và hàm số  $y = \cos(\sqrt{3}x)$  có chu kỳ  $T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

nhưng không tồn tại bội số chung nhỏ nhất của  $T_1 = 2\pi$  và  $T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$



**Ví dụ 3.2.**

Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của hàm số sau:

(1)  $y = \cos^2 x - 1$

(2)  $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right)$

(3)  $y = \sin \frac{3x+1}{x^2-1}$

(4)  $y = \cos\sqrt{x+2}$

**Lời giải**

(1)  $y = \cos^2 x - 1$

Ta biến đổi:  $y = \cos^2 x - 1 = \frac{1 + \cos 2x}{2} - 1 = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2}$ .

**Áp dụng:** Hàm số  $y = A \cdot \cos(ax + b)$  ( $A, a \neq 0$ ) là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = \frac{2\pi}{|a|}$

Do đó  $f$  là hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ .

(2)  $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right)$

Ta biến đổi:  $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4}{5}x\right)$ .

**Áp dụng:** Hàm số  $y = A \cdot \sin(ax + b)$  ( $A, a \neq 0$ ) là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = \frac{2\pi}{|a|}$

Do đó  $f$  là hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = \frac{2\pi}{\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{5\pi}{2}$ .



(3)  $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}.x)$

Giả sử hàm số đã cho tuần hoàn  $\Rightarrow$  có số thực dương  $T$  thỏa :

$$f(x+T) = f(x) \Leftrightarrow \cos(x+T) + \cos\sqrt{3}(x+T) = \cos x + \cos\sqrt{3}x$$

$$x=0 \Rightarrow \cos T + \cos\sqrt{3}T = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos T = 1 \\ \cos\sqrt{3}T = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = 2n\pi \\ \sqrt{3}T = 2m\pi \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{m}{n} \text{ vô lí,}$$

Do  $m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{m}{n}$  là số hữu tỉ.

Vậy hàm số đã cho không tuần hoàn.



**Dạng 4. Giá trị lớn nhất - nhỏ nhất**



**Phương pháp**

► Ta có tập giá trị của hàm số  $y = \sin x; y = \cos x$  đều là  $[-1; 1]$ , tức là  $\begin{cases} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{cases}$ .

Từ đó ta có các hệ quả sau:

$$(1) \begin{cases} 0 \leq |\sin x| \leq 1 \\ 0 \leq |\cos x| \leq 1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \\ 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 0 \leq \sqrt{\sin x} \leq 1 \\ 0 \leq \sqrt{\cos x} \leq 1 \end{cases}$$

**Lưu ý:** Nếu  $a \leq P(x) \leq b$  thì  $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{P(x)} \geq \frac{1}{b}$ .



**Ví dụ 4.1.**

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

$$(1) y = 4 - 3 \sin 5x$$

$$(2) y = -2|\sin x|$$

$$(3) y = \sqrt{2} \sin 2x + \cos 2x + 1$$

$$(4) y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$$

**Lời giải**

$$(1) y = 4 - 3 \sin 5x$$

Hàm số có tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có } -1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq -3 \sin x \leq 3 \Leftrightarrow -3 + 4 \leq 4 - 3 \sin x \leq 3 + 4 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 7.$$

$$\text{Do đó: } \max y = 7 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\min y = 1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$(2) y = -2|\sin x|$$

Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có: } 0 \leq |\sin x| \leq 1 \Leftrightarrow 0 \geq -2|\sin x| \geq -2 \Leftrightarrow 3 \geq y \geq 1.$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là } 3 \Leftrightarrow |\sin x| = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Giá trị nhỏ nhất của hàm số là } 1 \Leftrightarrow |\sin x| = 1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$(3) y = \sqrt{2} \sin 2x + \cos 2x + 1$$

$$y = \sqrt{2} \sin 2x + \cos 2x + 1 = \sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin 2x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos 2x \right) + 1$$

$$\text{Đặt } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}; \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (\alpha \in (0; \pi))$$

$$\text{Ta có } y = \sqrt{3} (\cos \alpha \sin 2x + \sin \alpha \cos 2x) + 1 = \sqrt{3} \sin(2x + \alpha) + 1$$

Ta có:





$$-1 \leq \sin(2x + \alpha) \leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq \sqrt{3} \sin(2x + \alpha) \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} + 1 \leq \sqrt{3} \sin(2x + \alpha) + 1 \leq \sqrt{3} + 1$$

Do đó:  $\max y = 1 + \sqrt{3}$  đạt được khi  $\sin(2x + \alpha) = 1$

$\min y = 1 - \sqrt{3}$  đạt được khi  $\sin(2x + \alpha) = -1$ .

(4)  $y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

Hàm số  $y = \sin x$  đồng biến trên khoảng  $(-\pi; \pi)$  nên

$$\text{Với } x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \leq \sin x \leq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Do đó  $\max y = \frac{\sqrt{2}}{2}$  đạt được khi  $x = \frac{\pi}{4}$ ;  $\min y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  đạt được khi  $x = -\frac{\pi}{4}$ .



**Ví dụ 4.2.**

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

(1)  $y = -2\sin^2 x + 3\sin x - 1$

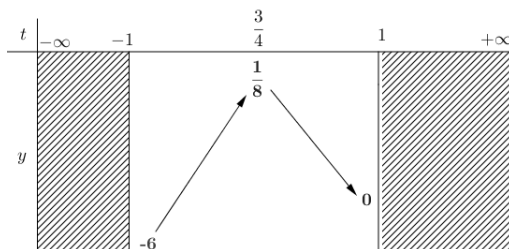
(2)  $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$

» *Lời giải*

(1)  $y = -2\sin^2 x + 3\sin x - 1$

Đặt  $\sin x = t$  ( $|t| \leq 1$ ), hàm số có dạng:  $y = -2t^2 + 3t - 1$ .

Xét hàm số  $y = -2t^2 + 3t - 1$  trên  $[-1; 1]$ , hàm số có BBT như sau:



Nhìn vào BBT ta thấy:

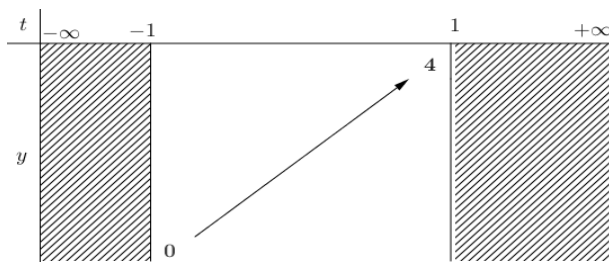
Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng  $-6 \Leftrightarrow t = -1$  tức là  $\sin x = -1$

Giá trị lớn nhất của hàm số bằng  $\frac{1}{8} \Leftrightarrow t = \frac{3}{4}$  tức là  $\sin x = \frac{3}{4}$

(2)  $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$

Hàm số được viết lại thành  $y = 1 - \sin^2 x + 2\sin x + 2 = -\sin^2 x + 2\sin x + 3$

Đặt  $t = \sin x$  ( $|t| \leq 1$ ), xét hàm số  $y = -t^2 + 2t + 3$  trên  $[-1; 1]$  có BBT như sau:



Nhìn vào BBT ta thấy:

⊙ Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng  $0 \Leftrightarrow t = -1$  tức  $\sin x = -1$ .

⊙ Giá trị lớn nhất của hàm số bằng  $4 \Leftrightarrow t = 1$  tức là  $\sin x = 1$ .





## Chương 01

### Bài 4.

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC



## Luyện tập

### A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Tập xác định của hàm số  $y = \tan 2x$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

» Lời giải

**Chọn B**

Điều kiện xác định của hàm số  $y = \tan 2x$  là  $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .

Vậy tập xác định của hàm số  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

» Câu 2. Tập xác định của hàm số  $y = \sin x$  là

A.  $[-1; 1]$ .

B.  $(-1; 1)$ .

C.  $(0; +\infty)$ .

D.  $\mathbb{R}$ .

» Lời giải

**Chọn D**

» Câu 3. Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{\sin x}$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{0; \pi\}$ .

» Lời giải

**Chọn C**

Hàm số  $y = \frac{1}{\sin x}$  xác định khi và chỉ khi  $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

» Câu 4. Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{\sin 2x + 1}$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

» Lời giải

**Chọn C**



Điều kiện xác định của hàm số là  $\sin 2x \neq -1 \Leftrightarrow 2x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Vậy TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

» **Câu 5.** Hàm số  $y = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x}$  **không** xác định trong khoảng nào trong các khoảng sau đây?

**A.**  $\left( \frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{4} + k2\pi \right), k \in \mathbb{Z}$ .

**B.**  $\left( \frac{3\pi}{4} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi \right)$ .

**C.**  $\left( \pi + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi \right), k \in \mathbb{Z}$ .

**D.**  $\left( -\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi \right), k \in \mathbb{Z}$ .

» **Lời giải**

**Chọn D**

Hàm số xác định khi và chỉ khi  $\begin{cases} \tan x \neq -1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$ .

Ta chọn  $k = 0 \rightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{4} \\ x \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$  nhưng điểm  $-\frac{\pi}{4}$  thuộc khoảng  $\left( -\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi \right)$ .

Vậy hàm số không xác định trong khoảng  $\left( -\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi \right)$ .

» **Câu 6.** Tập xác định của hàm số  $y = \cot 2x - \tan x$  là:

**A.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

**B.**  $\mathbb{R} \setminus \{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$ .

**C.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

**D.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

» **Lời giải**

**Chọn D**

Hàm số xác định khi  $\begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\frac{\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .

» **Câu 7.** Chọn phát biểu **đúng**:

**A.** Các hàm số  $y = \sin x, y = \cos x, y = \cot x$  đều là hàm số chẵn.

**B.** Các hàm số  $y = \sin x, y = \cos x, y = \cot x$  đều là hàm số lẻ.

**C.** Các hàm số  $y = \sin x, y = \cot x, y = \tan x$  đều là hàm số chẵn.

**D.** Các hàm số  $y = \sin x, y = \cot x, y = \tan x$  đều là hàm số lẻ.

» **Lời giải**

**Chọn D**

Hàm số  $y = \cos x$  là hàm số chẵn, hàm số  $y = \sin x, y = \cot x, y = \tan x$  là các hàm số lẻ.

» **Câu 8.** Trong các hàm số sau đây, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua trục tung?



- A.  $y = \tan x$ .      B.  $y = \cos x$ .      C.  $y = \sin x$ .      D.  $y = \cot x$ .

☞ *Lời giải*

**Chọn B**

Hàm số có đồ thị đối xứng qua trục tung là hàm số chẵn.  
Vậy đáp án cần chọn là  $y = \cos x$ .

- » **Câu 9.** Trong các hàm số sau, hàm số nào tuần hoàn với chu kì  $2\pi$ ?

- A.  $y = \sin x$ .      B.  $y = \tan x$ .      C.  $y = \cot x$ .      D.  $y = \cos 2x$ .

☞ *Lời giải*

**Chọn A**

Hàm số  $y = \sin x$  tuần hoàn với chu kì  $2\pi$ .

Các hàm số lượng giác còn lại  $y = \tan x$ ,  $y = \cot x$ ,  $y = \cos 2x$  tuần hoàn với chu kì  $\pi$ .

Xét  $y = \cos 2x$ : ta có  $y(x + \pi) = \cos 2(x + \pi) = \cos(2x + 2\pi) = \cos 2x = y(x)$  nên  $y = \cos 2x$  tuần hoàn với chu kì  $\pi$ .

- » **Câu 10.** Chu kì tuần hoàn của hàm số  $\tan x + \sin^2 x$  là

- A.  $k2\pi$ .      B.  $2\pi$ .      C.  $\pi$ .      D.  $4\pi$ .

☞ *Lời giải*

**Chọn C**

Ta có:  $\tan x + \sin^2 x = \tan x + \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ .

+)  $\tan x$  có chu kì là  $\pi$ .

+)  $\cos 2x$  có chu kì là  $\pi$ .

Vậy hàm số đã cho có chu kì là  $\pi$ .

- » **Câu 11.** Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

- A.  $y = 2x + \cos x$ .      B.  $y = \cos 3x$ .      C.  $y = x^2 \sin(x + 3)$ .      D.  $y = \frac{\cos x}{x^3}$ .

☞ *Lời giải*

**Chọn D**

Xét hàm số  $y = f(x) = \frac{\cos x}{x^3}$ . Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  là tập đối xứng.

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{-x^3} = -\frac{\cos(x)}{x^3} = -f(x).$$

Do đó hàm số  $y = \frac{\cos x}{x^3}$  là hàm số lẻ.

- » **Câu 12.** Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

- A.  $y = \cot 4x$ .      B.  $y = \frac{\sin x + 1}{\cos x}$ .      C.  $y = \tan^2 x$ .      D.  $y = |\cot x|$ .

☞ *Lời giải*

**Chọn A**

Hàm số lẻ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

Ta kiểm tra được đáp án A là hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

Đáp án B là hàm số không chẵn, không lẻ. Đáp án C và D là các hàm số chẵn.

- » **Câu 13.** Cho hai hàm số  $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x}$  và  $g(x) = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x}$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A.  $f(x)$  lẻ và  $g(x)$  chẵn.

B.  $f(x)$  và  $g(x)$  chẵn.

C.  $f(x)$  chẵn,  $g(x)$  lẻ.

D.  $f(x)$  và  $g(x)$  lẻ.

» *Lời giải*

**Chọn B**

● Xét hàm số  $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x}$ .

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$ . Do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

Ta có  $f(-x) = \frac{\cos(-2x)}{1 + \sin^2(-3x)} = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x} = f(x) \longrightarrow f(x)$  là hàm số chẵn.

● Xét hàm số  $g(x) = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x}$ .

TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \right\}$ . Do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

Ta có  $g(-x) = \frac{|\sin(-2x)| - \cos(-3x)}{2 + \tan^2(-x)} = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x} = g(x) \longrightarrow g(x)$  là hàm số chẵn.

Vậy  $f(x)$  và  $g(x)$  chẵn.

» **Câu 14.** Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

A.  $y = \frac{1}{\sin^3 x}$ .

B.  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

C.  $y = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ .

D.  $y = \sqrt{\sin 2x}$ .

» *Lời giải*

**Chọn A**

Viết lại đáp án B là  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$ .

Viết lại đáp án C là  $y = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + \cos x$ .

Kiểm tra được đáp án A là hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

Ta kiểm tra được đáp án B và C là các hàm số không chẵn, không lẻ.

Xét đáp án D.

● Hàm số xác định  $\Leftrightarrow \sin 2x \geq 0 \Leftrightarrow 2x \in [k2\pi; \pi + k2\pi] \Leftrightarrow x \in \left[ k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right]$

$\longrightarrow D = \left[ k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right] \ (k \in \mathbb{Z})$ .

● Chọn  $x = \frac{\pi}{4} \in D$  nhưng  $-x = -\frac{\pi}{4} \notin D$ . Vậy  $y = \sqrt{\sin 2x}$  không chẵn, không lẻ.

» **Câu 15.** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) - 1$  lần lượt là:

A. 4; -2.

B. 2; -4.

C. 1; -1.

D. 3; -3.

» *Lời giải*

**Chọn B**

Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .



+)  $\forall x \in \mathbb{R}$  ta có:  $-1 \leq \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \leq 3 \Leftrightarrow -4 \leq 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) - 1 \leq 2$   
 $\Rightarrow -4 \leq y \leq 2$ .

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) - 1$  là 2 khi  $x = -\frac{\pi}{4}$ .

Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) - 1$  là -4 khi  $x = \frac{3\pi}{4}$ .

» **Câu 16.** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 6\cos 2x - 7$  trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right]$ . Tính  $M + m$ .

- A.** -14.                      **B.** 3.                      **C.** -11.                      **D.** -10.

» **Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:  $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} \leq 2x \leq \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \cos 2x \leq 1 \Leftrightarrow -10 \leq 6\cos 2x - 7 \leq -1$ .

Suy ra  $M = -1, m = -10$ . Vậy  $M + m = -11$ .

» **Câu 17.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 2\sin^2 x + 3\sin 2x - 4\cos^2 x$ .

- A.**  $\min y = -3\sqrt{2} - 1; \max y = 3\sqrt{2} + 1$ .                      **B.**  $\min y = -3\sqrt{2} - 2; \max y = 3\sqrt{2} - 1$ .  
**C.**  $\min y = -3\sqrt{2}; \max y = 3\sqrt{2} - 1$ .                      **D.**  $\min y = -3\sqrt{2} - 1; \max y = 3\sqrt{2} - 1$ .

» **Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:  $y = 1 - \cos 2x + 3\sin 2x - 2(1 + \cos 2x) = 3\sin 2x - 3\cos 2x - 1 = 3\sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$ .

$\Rightarrow -3\sqrt{2} - 1 \leq y \leq 3\sqrt{2} - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

Vậy  $\min y = -3\sqrt{2} - 1; \max y = 3\sqrt{2} - 1$ .

» **Câu 18.** Xét sự biến thiên của hàm số  $y = \tan 2x$  trên một chu kì tuần hoàn. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

- A.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$  và  $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ .  
**B.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$  và nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ .  
**C.** Hàm số đã cho luôn đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .  
**D.** Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$  và đồng biến trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

» **Lời giải**

**Chọn A**

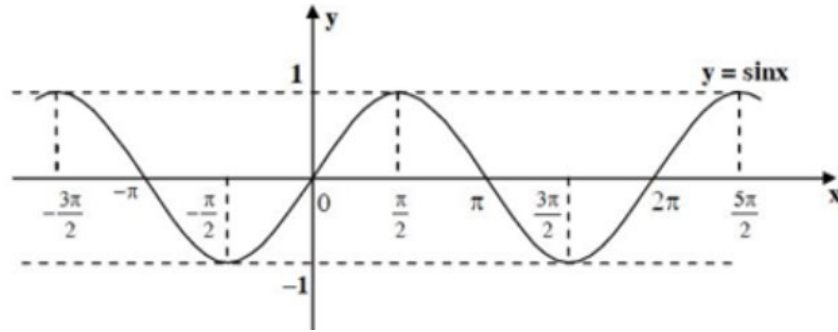
Tập xác định của hàm số đã cho là  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .



Hàm số  $y = \tan 2x$  tuần hoàn với chu kì  $\frac{\pi}{2}$ , dựa vào các phương án A; B; C; D thì ta sẽ xét tính đơn điệu của hàm số trên  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ .

Dựa theo kết quả khảo sát sự biến thiên của hàm số  $y = \tan x$ , có thể suy ra với hàm số  $y = \tan 2x$  đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$  và  $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

» **Câu 19.** Cho đồ thị hàm số lượng giác  $y = \sin x$  như hình vẽ dưới đây:



Hàm số  $y = |\sin x|$  có bao nhiêu lần đạt giá trị bằng 1 trong đoạn  $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ ?

**A.** 5

**B.** 1

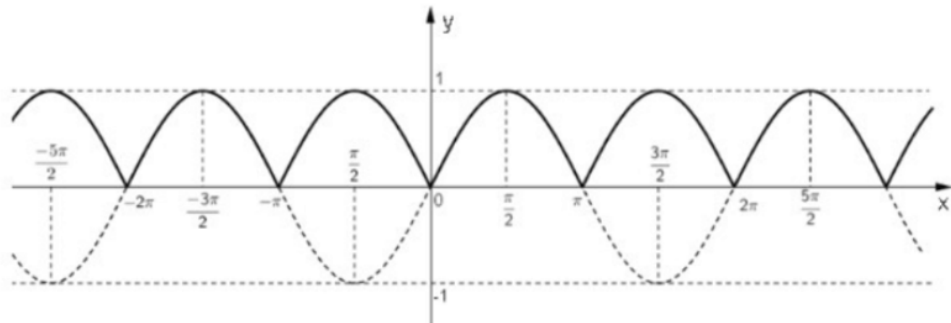
**C.** 3

**D.** 7

» *Lời giải*

**Chọn A**

Đồ thị hàm số  $y = |\sin x|$



Nhìn đồ thị ta thấy  $y = |\sin x|$  có 5 lần đạt giá trị bằng 1 trong đoạn  $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

» **Câu 20.** Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu tương ứng được gọi là huyết áp tâm thu và huyết áp tâm trương. Chỉ số huyết áp của chúng ta được tính bằng huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương. Giả sử huyết áp của người đó thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức:  $p(t) = 115 + 25\sin(160\pi t)$  trong đó  $p(t)$  là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimet thủy ngân) và thời gian  $t$  tính theo đơn vị phút. Khi đó, chỉ số huyết áp bằng

**A.**  $\frac{115}{90}$

**B.**  $\frac{150}{60}$

**C.**  $\frac{120}{80}$

**D.**  $\frac{140}{90}$

» *Lời giải*

**Chọn D**

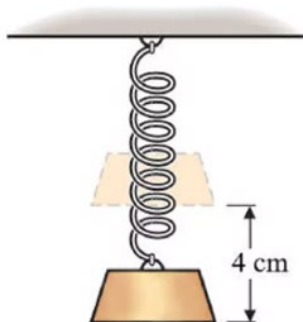




Ta có  $-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \forall x$  nên  $115 - 25.1 \leq p(t) = 115 + 25\sin(160\pi t) \leq 115 + 25.1$   
 $\Leftrightarrow 90 \leq p(t) \leq 140$

Vậy chỉ số huyết áp là  $\frac{140}{90}$

» **Câu 21.** Một con lắc lò xo sau khi được kéo xuống dưới vị trí cân bằng  $4\text{ cm}$  và thả ra thì nó dao động điều hòa với phương trình:  $y = -4 \cos 8t$  (cm) (tham khảo hình vẽ).



Biên độ  $A\text{ cm}$  và chu kỳ  $T$  của dao động là

- A.**  $A = 4\text{ cm}; T = \frac{\pi}{4}$ .    **B.**  $A = 4\text{ cm}; T = \frac{\pi}{2}$     **C.**  $A = 8\text{ cm}; T = \frac{\pi}{4}$     **D.**  $A = 4\text{ cm}; T = 2\pi$

» **Lời giải**

**Chọn A**

Biên độ của dao động là:  $A = |-4| = 4$  (cm).

Chu kỳ của dao động là:  $T = \frac{2\pi}{|8|} = \frac{\pi}{4}$ .

» **Câu 22.** Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu  $h$  (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm  $t$  (giờ) trong một ngày bởi công thức

$h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{7=8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12$ . Mực nước của kênh cao nhất khi:

- A.**  $t = 13$  (giờ).    **B.**  $t = 14$  (giờ).    **C.**  $t = 15$  (giờ).    **D.**  $t = 16$  (giờ).

» **Lời giải**

**Chọn B**

Mực nước của kênh cao nhất khi  $h$  lớn nhất

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4} = k2\pi$  với  $0 < t \leq 24$  và  $k \in \mathbb{Z}$ .

Lần lượt thay các đáp án, ta được đáp án B thỏa mãn.

Vì với  $t = 14$  thì  $\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4} = 2\pi$  (đúng với  $k = 1 \in \mathbb{Z}$ ).

» **Câu 23.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-10; 10]$  để hàm số

$y = \sqrt{\sin^2 x - 2 \sin x + m - 1}$  xác định trên  $\mathbb{R}$ .

- A.** 8.    **B.** 9.    **C.** 12.    **D.** 13.

» **Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số xác định trên  $\mathbb{R}$  khi chỉ khi:  $\sin^2 x - 2 \sin x + m - 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$



$$\Leftrightarrow m \geq -\sin^2 x + 2 \sin x + 1 = 2 - (\sin x - 1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow m \geq \max_{(-\infty; +\infty)} (-\sin^2 x + 2 \sin x + 1) = 2 \Leftrightarrow m \geq 2.$$

$$\text{Mà } m \in \mathbb{Z}; m \in [-10; 10] \Rightarrow m \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}.$$

» **Câu 24.** Số giờ có ánh sáng của một thành phố A trong ngày thứ  $t$  của năm 2021 được cho bởi một hàm số  $y = 4 \sin \left| \frac{\pi}{178}(t - 60) \right| + 10$ , với  $t \in \mathbb{Z}$  và  $0 < t \leq 365$ . Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất?

**A.** 28 tháng 5.      **B.** 29 tháng 5.      **C.** 30 tháng 5.      **D.** 31 tháng 5.

» *Lời giải*

**Chọn B**

$$\text{Vì } \sin \left| \frac{\pi}{178}(t - 60) \right| \leq 1 \Rightarrow y = 4 \sin \left| \frac{\pi}{178}(t - 60) \right| + 10 \leq 14.$$

Ngày có ánh nắng mặt trời chiếu nhiều nhất

$$\Leftrightarrow y = 14 \Leftrightarrow \sin \left| \frac{\pi}{178}(t - 60) \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{178}(t - 60) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 149 + 356k.$$

$$\text{Mà } 0 < t \leq 365 \Leftrightarrow 0 < 149 + 356k \leq 365 \Leftrightarrow -\frac{149}{356} < k \leq \frac{54}{89}.$$

Vì  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $k = 0$ .

Với  $k = 0 \Rightarrow t = 149$  tức rơi vào ngày 29 tháng 5

Vì ta đã biết tháng 1 và 3 có 31 ngày, tháng 4 có 30 ngày,

Riêng đối với năm 2021 thì không phải năm nhuận nên tháng 2 có 28 ngày hoặc dựa vào dữ kiện  $0 < t \leq 365$  thì ta biết năm này tháng 2 chỉ có 28 ngày).

**B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai**

» **Câu 25.** Cho hàm số  $y = 3 - \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right)$ , khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$		
(b)	Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2		
(c)	Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4		
(d)	Tập giá trị của hàm số là $T = [2; 4]$		

» *Lời giải*

$$y = 3 - \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

(a) Hàm số có tập xác định  $D = \mathbb{R}$

Ta có: hàm số có tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

$$-1 \leq \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \Leftrightarrow 1 \geq -\sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) \geq -1 \Leftrightarrow 4 \geq 3 - \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) \geq 2 \Leftrightarrow 4 \geq y \geq 2$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2.

» **Chọn ĐÚNG.**



(c) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Tập giá trị của hàm số là  $T = [2; 4]$

Do đó tập giá trị của hàm số là  $T = [2; 4]$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 26.** Cho hàm số  $f(x) = \tan 2x - 1$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Giá trị của hàm số tại $x = \frac{\pi}{8}$ bằng 0		
(b)	Giá trị của hàm số tại $x = \frac{\pi}{3}$ bằng $-\sqrt{3} - 1$		
(c)	Có ba giá trị $x$ thuộc $[0; \pi]$ khi hàm số đạt giá trị bằng $-2$ .		
(d)	Hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.		

» **Lời giải**

(a) Giá trị của hàm số tại  $x = \frac{\pi}{8}$  bằng 0

Ta có:

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \tan\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) - 1 = 1 - 1 = 0$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Giá trị của hàm số tại  $x = \frac{\pi}{3}$  bằng  $-\sqrt{3} - 1$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) - 1 = -\sqrt{3} - 1$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Có ba giá trị  $x$  thuộc  $[0; \pi]$  khi hàm số đạt giá trị bằng  $-2$ .

$$\text{Ta có: } f(x) = -2 \Leftrightarrow \tan 2x - 1 = -2 \Leftrightarrow \tan 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vì } x \in [0; \pi] \text{ nên } x \in \left\{\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right\} \text{ (khi đó } k=1; k=2).$$

» **Chọn SAI.**

(d) Hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

$$\text{Tập xác định hàm số là: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Với mọi  $x \in D$ , ta có:  $x \pm \frac{\pi}{2} \in D$  và

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \tan 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 = \tan(2x + \pi) - 1 = \tan 2x - 1 = f(x)$$

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.



» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 27.** Cho hàm số  $f(x) = |x| \sin x$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .		
(b)	$f(-\pi) = -f(\pi)$ .		
(c)	Đồ thị hàm số đã cho đối xứng qua gốc tọa độ $O(0;0)$ .		
(d)	$f(-x) = -f(x)$ .		

» **Lời giải**

(a) Tập xác định của hàm số:  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Tập xác định của hàm số:  $D = \mathbb{R}$ .

» **Chọn SAI.**

(b)  $f(-\pi) = -f(\pi)$ .

Ta có  $f(\pi) = \pi \sin \pi$ ;  $f(-\pi) = |-\pi| \sin(-\pi) = -\pi \sin(\pi) = -f(\pi)$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Đồ thị hàm số đã cho đối xứng qua gốc tọa độ  $O(0;0)$ .

Với mọi  $x \in D$ , ta có:  $-x \in D$  và  $f(-x) = |-x| \sin(-x) = -|x| \sin x = -f(x)$ .

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ

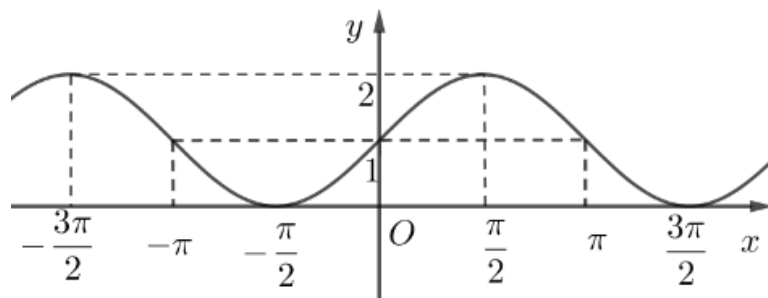
» **Chọn ĐÚNG.**

(d)  $f(-x) = -f(x)$ .

Ta có  $f(-x) = -f(x)$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 28.** Hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như sau



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số có tập xác định $D = \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ .		
(b)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\pi; 0)$ .		
(c)	Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ .		
(d)	Tập giá trị của hàm số là $[0; 2]$ .		

» **Lời giải**

(a) Hàm số có tập xác định  $D = \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ .



Hàm số có dạng  $f(x) = \sin x + 1 \Rightarrow$  hàm số có tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

» **Chọn SAI.**

(b) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\pi; 0)$ .

Dựa vào đồ thị ta có hàm số đồng biến trên  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

» **Chọn SAI.**

(c) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ .

Dựa vào đồ thị ta có hàm số nghịch biến trên khoảng  $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Tập giá trị của hàm số là  $[0; 2]$ .

Tập giá trị của hàm số là  $[0; 2]$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 29.** Cho hàm số  $f(x) = |\tan x| + |x^3 - 3x|$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .		
(b)	Hàm số đã cho là hàm số chẵn.		
(c)	$f(-\pi) = -f(\pi)$		
(d)	Đồ thị hàm số đã cho đối xứng qua gốc tọa độ $O(0;0)$		

» **Lời giải**

(a) Tập xác định của hàm số:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Tập xác định của hàm số:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Hàm số đã cho là hàm số chẵn.

$\forall x \in D$ , ta có:  $-x \in D$  và  $f(-x) = |\tan(-x)| + |(-x)^3 - 3(-x)| = |\tan x| + |x^3 - 3x| = f(x)$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c)  $f(-\pi) = -f(\pi)$

Do đó  $f(-\pi) \neq -f(\pi)$ .

» **Chọn SAI.**

(d) Đồ thị hàm số đã cho đối xứng qua gốc tọa độ  $O(0;0)$

Do hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Nên hàm số không đối xứng qua gốc tọa độ.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 30.** Cho hàm số  $f(x) = 2 \cos x + 1$  và  $g(x) = \sin x + \tan x$ . Khi đó:



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tập xác định hàm số $f(x): D = \mathbb{R}$ .		
(b)	Hàm số $f(x)$ là hàm tuần hoàn.		
(c)	Tập xác định hàm số $g(x): D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .		
(d)	Hàm số $g(x)$ là hàm không tuần hoàn.		

» *Lời giải*

(a) Tập xác định hàm số  $f(x): D = \mathbb{R}$ .

Tập xác định hàm số:  $D = \mathbb{R}$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Hàm số  $f(x)$  là hàm tuần hoàn.

Với mọi  $x \in D$  thì  $x \pm 2\pi \in D$  và  $f(x + 2\pi) = 2 \cos(x + 2\pi) + 1 = 2 \cos x + 1 = f(x)$ .

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Tập xác định hàm số  $g(x): D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Tập xác định hàm số:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

» **Chọn SAI.**

(d) Hàm số  $g(x)$  là hàm không tuần hoàn.

Với mọi  $x \in D$  thì  $x \pm 2\pi \in D$  và  $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) + \tan(x + 2\pi) = \sin x + \tan x = f(x)$ .

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 31.** Cho hàm số  $f(x) = \tan x$  và  $g(x) = \cot^2 x - \frac{\sin 2x}{2}$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tập xác định hàm số $f(x): D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .		
(b)	Hàm số $f(x)$ là hàm không tuần hoàn.		
(c)	Tập xác định hàm số $g(x): D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .		
(d)	Hàm số $g(x)$ là hàm tuần hoàn.		

» *Lời giải*

(a) Tập xác định hàm số  $f(x): D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Tập xác định hàm số:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Hàm số  $f(x)$  là hàm không tuần hoàn.

Với mọi  $x \in D$  thì  $x \pm \pi \in D$  và  $f(x + \pi) = \tan(x + \pi) = \tan x = f(x)$ .



Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

» **Chọn SAI.**

(c) Tập xác định hàm số  $g(x)$ :  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ .

Tập xác định hàm số:  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Hàm số  $g(x)$  là hàm tuần hoàn.

Với mọi  $x \in D$  thì  $x \pm \pi \in D$  và

$$f(x + \pi) = \cot^2(x + \pi) - \frac{\sin 2(x + \pi)}{2} = \cot^2 x - \frac{\sin 2x}{2} = f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 32.** Cho hàm số  $f(x) = 2 + 3 \cos x$  và  $g(x) = \sin x + \cos x$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ bằng 5		
(b)	Hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = \pi + k2\pi$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )		
(c)	Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ bằng $-\sqrt{2}$		
(d)	Hàm số $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )		

» **Lời giải**

(a) Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x)$  bằng 5

Với mọi  $x \in \mathbb{R}$ , ta có:  $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 \cos x \leq 3 \Rightarrow -1 \leq 2 + 3 \cos x \leq 5$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Hàm số  $f(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $x = \pi + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 5, khi đó  $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1, khi đó  $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Giá trị lớn nhất của hàm số  $g(x)$  bằng  $-\sqrt{2}$

Ta có:  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

» **Chọn SAI.**

(d) Hàm số  $g(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Với mọi  $x \in \mathbb{R}$ , ta có:  $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$ .

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng  $\sqrt{2}$ , khi đó  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )  $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).



Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng  $-\sqrt{2}$ , khi đó  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 33.** Cho các hàm số sau:  $f(x) = \sqrt{5 - 3\sin^2 x}$ ;  $g(x) = \tan x - x \cos x$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tập xác định hàm số $f(x)$ là: $D = \mathbb{R}$ .		
(b)	Hàm số $f(x)$ đã cho là hàm số lẻ.		
(c)	Tập xác định hàm số $g(x)$ là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .		
(d)	Hàm số $g(x)$ đã cho là hàm số lẻ.		

» **Lời giải**

(a) Tập xác định hàm số  $f(x)$  là:  $D = \mathbb{R}$ .

Tập xác định hàm số là:  $D = \mathbb{R}$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Hàm số  $f(x)$  đã cho là hàm số lẻ.

$$\text{Với mọi } x \in D \text{ thì } -x \in D \text{ và } f(-x) = \sqrt{5 - 3\sin^2(-x)} = \sqrt{5 - 3\sin^2 x} = f(x)$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

» **Chọn SAI.**

(c) Tập xác định hàm số  $g(x)$  là:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

$$\text{Tập xác định hàm số là: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Hàm số  $g(x)$  đã cho là hàm số lẻ.

$$\text{Với mọi } x \in D \text{ thì } -x \in D \text{ và } f(-x) = \tan(-x) - (-x)\cos(-x) = -\tan x + x \cos x = -f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 34.** Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu  $h$  (mét) của mực nước trong kênh tính theo thời gian  $t$  (giờ) được cho bởi công thức  $h(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + 14$ .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Công thức tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$ .		
(b)	Chiều sâu của mực nước thấp nhất là 11m.		
(c)	Chiều sâu của mực nước cao nhất là 14m.		
(d)	Thời gian để mực nước cao nhất là $t = 9$ .		

» **Lời giải**

(a) Công thức tuần hoàn với chu kỳ  $T = 2\pi$ .





Công thức có dạng  $y = \cos(ax + b)$  tuần hoàn với chu kì  $T = \frac{2\pi}{|a|}$  nên chu kì cần tìm là

$$T = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{6}\right|} = 12.$$

» **Chọn SAI.**

(b) Chiều sâu của mực nước thấp nhất là 11m.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \forall t: -1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 &\Leftrightarrow -3 \leq 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \leq 3 \Leftrightarrow 11 \leq 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + 14 \leq 17 \\ &\Leftrightarrow 11 \leq h \leq 17. \text{ Vậy chiều sâu của mực nước thấp nhất là 11m.} \end{aligned}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Chiều sâu của mực nước cao nhất là 14m.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \forall t: -1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 &\Leftrightarrow -3 \leq 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \leq 3 \Leftrightarrow 11 \leq 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + 14 \leq 17 \\ &\Leftrightarrow 11 \leq h \leq 17. \text{ Chiều sâu của mực nước cao nhất là 17m.} \end{aligned}$$

» **Chọn SAI.**

(d) Thời gian để mực nước cao nhất là  $t = 9$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \forall t: -1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 &\Leftrightarrow -3 \leq 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \leq 3 \Leftrightarrow 11 \leq 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + 14 \leq 17 \\ &\Leftrightarrow 11 \leq h \leq 17. \text{ Chiều sâu của mực nước cao nhất là 17m.} \end{aligned}$$

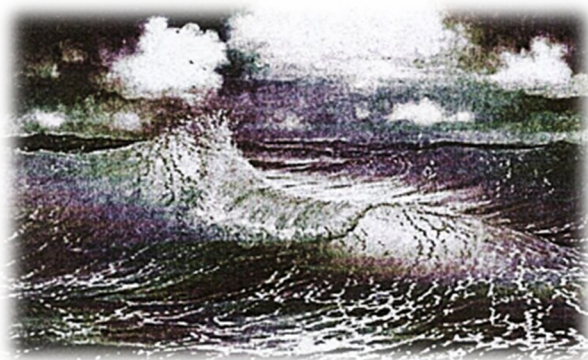
$$\text{Max } h = 17 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow t = -3 + 12k, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì thời gian không âm và  $k \in \mathbb{Z}$  nên ta chọn  $t = 1$ .

Vậy thời gian ngắn nhất  $t = -3 + 12 = 9$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 35.** Chiều cao so với mực nước biển trung bình tại thời điểm  $t$  (giây) của mỗi con sóng được cho bởi hàm số  $h(t) = 75 \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)$ , trong đó  $h(t)$  được tính bằng centimét.



(Tất cả kết quả được làm tròn đến hàng phần mười)

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Chiều cao của sóng tại các thời điểm 5 giây bằng 69,3 (cm)		
(b)	Chiều cao của sóng tại các thời điểm 20 giây bằng 75 (cm)		



(c)	Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 6 giây	
(d)	Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 18 giây	

» **Lời giải**

(a) Chiều cao của sóng tại các thời điểm 5 giây bằng 69,3 (cm)

$$\text{Khi } t = 5, \text{ ta có: } h(5) = 75 \sin\left(\frac{\pi \cdot 5}{8}\right) \approx 69,3 \text{ (cm)}.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Chiều cao của sóng tại các thời điểm 20 giây bằng 75 (cm)

$$\text{Khi } t = 20, \text{ ta có: } h(20) = 75 \sin\left(\frac{\pi \cdot 20}{8}\right) = 75 \text{ (cm)}.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc  $t = 0$  giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 6 giây

$$\text{Ta có: } \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 1 \Rightarrow 75 \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 75 \text{ hay } h(t) \leq 75.$$

$$\text{Giá trị lớn nhất của } h(t) \text{ là } 75, \text{ khi đó } \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi t}{8} = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow t = 4 + 16k (k \in \mathbb{Z}). \text{ Vì } t \in [0; 30] \Rightarrow t \in \{4; 20\} \text{ (ứng với } k \text{ bằng } 0 \text{ và } 1).$$

» **Chọn SAI.**

(d) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc  $t = 0$  giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 18 giây

Vậy tại các thời điểm 4 giây hoặc 20 giây (trong 30 giây đầu tiên) thì con sóng đạt chiều cao cực đại (là 75 cm).

» **Chọn SAI.**

### C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 36.** Tập giá trị của hàm số:  $y = 5 + 4 \sin 2x \cos 2x$  có dạng  $[a; b]$  với  $a; b$  là các số nguyên.

$$\text{Tính giá trị } S = a^2 - 2ab$$

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: -33**

$$y = 5 + 4 \sin 2x \cos 2x.$$

Hàm số có tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có } y = 5 + 4 \sin 2x \cos 2x = 5 + 2 \sin 4x.$$

$$\text{Do } -1 \leq \sin 4x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin 4x \leq 2 \Leftrightarrow 3 \leq 5 + 2 \sin 4x \leq 7 \Leftrightarrow 3 \leq y \leq 7.$$

$$\text{Vậy giá trị của hàm số là } T = [3; 7] \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 7 \end{cases} \Rightarrow S = -33.$$

» **Câu 37.** Tập giá trị của hàm số:  $y = \sin^6 x + \cos^6 x$  có dạng  $\left[\frac{a}{b}; 1\right]$  với  $a; b$  là các số nguyên,  $\frac{a}{b}$  là

phân số tối giản. Tính giá trị  $S = a + ab^2$

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 17**



$$y = \sin^6 x + \cos^6 x$$

Hàm số có tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có:

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x.$$

$$\text{Do } 0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \geq -\frac{3}{4} \sin^2 2x \geq -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 \geq 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 \geq y \geq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy giá trị của hàm số là } T = \left[ \frac{1}{4}; 1 \right] \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow S = 17.$$

» **Câu 38.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  trong đoạn  $[0; 10]$  để hàm số

$$y = \sqrt{m - 2 \sin x} \text{ xác định trên } \mathbb{R}.$$

» *Lời giải*

✓ **Trả lời: 9**

Hàm số xác định  $\Leftrightarrow m - 2 \sin x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq 2 \sin x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq 2$ .

Vậy  $m \geq 2$ .

Khi đó trong đoạn  $[0; 10]$  có 9 giá trị thỏa mãn.

» **Câu 39.** Số giờ có ánh sáng của thành phố  $T$  ở vĩ độ  $40^\circ$  bắc trong ngày thứ  $t$  của một năm không nhận được cho bởi hàm số  $d(t) = 3 \cdot \sin \left[ \frac{\pi}{182}(t - 80) \right] + 12$  với  $t \in \mathbb{Z}$  và  $0 < t \leq 365$ .

Bạn An muốn đi tham quan thành phố  $T$  nhưng lại không thích ánh sáng mặt trời, vậy bạn An nên chọn đi vào ngày nào trong năm để thành phố  $T$  có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

» *Lời giải*

✓ **Trả lời: 353**

$$\text{Do } \sin \left[ \frac{\pi}{182}(t - 80) \right] \geq -1 \Rightarrow 3 \cdot \sin \left[ \frac{\pi}{182}(t - 80) \right] \geq -3$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \sin \left[ \frac{\pi}{182}(t - 80) \right] + 12 \geq 9 \Rightarrow d(t) \geq 9.$$

Vậy thành phố  $T$  có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất khi và chỉ khi:

$$\sin \left[ \frac{\pi}{182}(t - 80) \right] = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t - 80) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow t - 80 = 182 \left( -\frac{1}{2} + 2k \right) \Leftrightarrow t = 364k - 11, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Mặt khác: } 0 \leq 364k - 11 \leq 365 \Leftrightarrow \frac{11}{364} \leq k \leq \frac{376}{364} \Leftrightarrow k = 1 (\text{do } k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow t = 364 - 11 = 353$$

Vậy thành phố  $T$  có ít giờ ánh sáng Mặt Trời nhất là 9 giờ khi  $t = 353$ , tức là vào ngày thứ 353 trong năm.

» **Câu 40.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  trong đoạn  $[-10; 10]$  để hàm số

$$y = \frac{\sin x - 1}{\cos x + m} \text{ có tập xác định } \mathbb{R}.$$

» *Lời giải*



✓ **Trả lời: 18**

Điều kiện xác định:  $\cos x + m \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq -m$

Hàm số xác định trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -m < -1 \\ -m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$ .

Khi đó trong đoạn  $[-10; 10]$  có  $9+9=18$  giá trị thỏa mãn.

» **Câu 41.** Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số:  $y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$ .

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: -2**

$$y = f(x) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1.$$

TXD:  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có:  $-1 \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -2 \leq 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3 \leq 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f_{\text{Max}}(x) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$f_{\text{Min}}(x) = -3 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Khi đó tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng  $-2$

» **Câu 42.** Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số:  $y = \sqrt{1 + \sin x} - 3$ . Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: -4,59**

$$y = f(x) = \sqrt{1 + \sin x} - 3.$$

Do  $\sin x \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$  nên tập xác định của hàm số là  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có:  $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 + \sin x \leq 2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3 \leq \sqrt{1 + \sin x} - 3 \leq \sqrt{2} - 3, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3 \leq f(x) \leq \sqrt{2} - 3, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f_{\text{Min}}(x) = -3 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$f_{\text{Max}}(x) = \sqrt{2} - 3 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Khi đó tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng

$$-3 + \sqrt{2} - 3 = -6 + \sqrt{2} \approx -4,59$$

» **Câu 43.** Hàm số  $y = 1 - 3\sqrt{1 - \cos^2 x}$  đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm  $x = \frac{a}{b}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , với  $a; b$  là các số nguyên,  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính giá trị  $S = a + ab^2$

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 5**



Ta có:  $\cos^2 x \geq 0 \Rightarrow -\cos^2 x \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x \leq 1$   
 $\Rightarrow \sqrt{1 - \cos^2 x} \leq 1 \Leftrightarrow -3\sqrt{1 - \cos^2 x} \geq -3 \Leftrightarrow 1 - 3\sqrt{1 - \cos^2 x} \geq -2 \Leftrightarrow y \geq -2.$

(Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow 1 - \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$ )

Vậy tại  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  thì  $y$  đạt giá trị nhỏ nhất bằng  $-2.$

Khi đó  $a = 1; b = 2 \Rightarrow S = 1 + 2^2 = 5$

» **Câu 44.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \sqrt{\frac{m-1}{m}} - 2 \cos 4x$  xác định trên  $\mathbb{R}.$

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2**

Để hàm số  $y = \sqrt{\frac{m-1}{m}} - 2 \cos 4x$  xác định trên  $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{m-1}{m} - 2 \cos 4x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{m-1}{2m} \geq \cos 4x \geq 1 \Leftrightarrow \frac{m-1}{2m} \geq 1 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0.$

» **Câu 45.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [-2024; 2024]$  để hàm số  $y = \sqrt{\sin^2 x - 2 \sin x + 1} - m$  xác định trên  $\mathbb{R}?$

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2025**

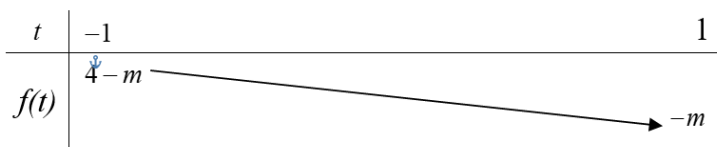
Hàm số xác định trên  $\mathbb{R}$  khi và chỉ khi  $\sin^2 x - 2 \sin x + 1 - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

Đặt  $t = \sin x \Rightarrow t \in [-1; 1]$

Lúc này ta đi tìm điều kiện của  $m$  để  $f(t) = t^2 - 2t + 1 - m \geq 0, \forall t \in [-1; 1]$  (1)

Ta có (1)  $\Leftrightarrow \min_{[-1; 1]} f(t) \geq 0$  (2)

Xét  $f(t) = t^2 - 2t + 1 - m, t \in [-1; 1]$ , ta có bảng biến thiên



Do đó (2)  $\Leftrightarrow -m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0.$

Vì  $m \in [-2024; 2024]$  và  $m \in \mathbb{Z}$  nên  $m \in \{-2024; -2023; \dots; 0\}$  nên có 2025 giá trị của tham số  $m.$

» **Câu 46.** Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + 3.$  Tính  $M + m.$

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 6**



Ta có  $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + 3 = 2 \left( \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) + 3 = 2 \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) + 3$

Do  $\forall x: -1 \leq \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2 \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) + 3 \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 5$ .

Vậy  $m = \min_{\mathbb{R}} y = 1$  khi  $x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$  và  $M = \max_{\mathbb{R}} y = 5$  khi  $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$  nên  $M + m = 6$ .

» **Câu 47.** Trong các hàm số  $y = \sin 2x, y = \tan|x|, y = \tan x + \cot x, y = 2 \sin x + 3$  có bao nhiêu hàm số lẻ?

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2**

» Xét hàm số  $y = \sin 2x$

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$ . Suy ra  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

Ta có:  $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x)$ .

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

» Xét hàm số  $y = \tan|x|$

TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . Suy ra  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

Ta có:  $f(-x) = \tan|-x| = \tan|x| = f(x)$ .

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

» Xét hàm số  $y = \tan x + \cot x$

TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . Suy ra  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có:  $f(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -\tan x - \cot x = -(\tan x + \cot x) = -f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

» Xét hàm số  $y = 2 \sin x + 3$

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$ . Suy ra  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có:  $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 3 = 1$ ;  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3 = 5$

Nhận thấy  $\begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

Do đó hàm số không chẵn không lẻ.

» **Câu 48.** Tìm chu kì tuần hoàn của hàm số  $f(x) = \tan 2x$  (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1,57**

Ta có:  $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x), \forall x \in D$ .



Giả sử có số thực dương  $T < \frac{\pi}{2}$  thỏa

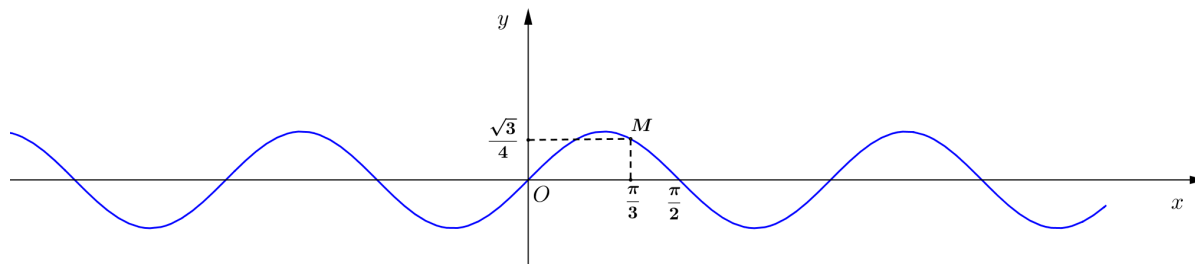
$$f(x+T) = f(x) \Leftrightarrow \tan(2x+2T) = \tan 2x, \forall x \in D \quad (**)$$

Cho  $x=0 \Rightarrow VT(**) = \tan 2T \neq 0; \quad VP(**) = 0$

$\Rightarrow (**)$  không xảy ra với mọi  $x \in D$ . Vậy hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ

$$T_0 = \frac{\pi}{2} \approx 1,57.$$

» **Câu 49.** Cho hàm số  $y = k \sin(tx)$  với  $k, t \in \mathbb{R}$  có đồ thị như hình vẽ. Hàm số có tập giá trị là  $[a, b]$ . Tính  $T = 2a + 6b$ .



✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2**

Vì hàm số đi qua các điểm  $O(0,0), M\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right), A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  nên ta tìm được hàm số đã cho

$$\text{là } y = \frac{1}{2} \sin(2x).$$

$$\text{Vì } \forall x: -1 \leq \sin(2x) \leq 1 \text{ nên } -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin(2x) \leq \frac{1}{2}.$$

Suy ra tập giá trị của hàm số là  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ .

$$\text{Vậy } T = 2 \cdot \frac{-1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

» **Câu 50.** Số giờ có ánh sáng của một thành phố  $A$  trong ngày thứ  $t$  của năm 2024 được cho bởi một hàm số  $y = 4 \sin\left[\frac{\pi}{178}(t-60)\right] + 10$ , với  $t \in \mathbb{Z}$  và  $0 < t \leq 365$ . Vào ngày nào trong tháng 5 năm 2024 thì thành phố  $A$  có số giờ ánh sáng mặt trời chiếu nhiều nhất?

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 28**

$$\text{Vì } \sin\left[\frac{\pi}{178}(t-60)\right] \leq 1 \Leftrightarrow 4 \sin\left[\frac{\pi}{178}(t-60)\right] \leq 4 \Leftrightarrow 4 \sin\left[\frac{\pi}{178}(t-60)\right] + 10 \leq 14 \Leftrightarrow y \leq 14.$$

Ngày có ánh nắng mặt trời chiếu nhiều nhất khi  $y = 14$

$$\Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{178}(t-60)\right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{178}(t-60) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow t-60 = 89 + 356k \Leftrightarrow t = 149 + 356k$$

$$\text{Mà } 0 < t \leq 365 \Leftrightarrow 0 < 149 + 356k \leq 365$$



$$\Leftrightarrow -149 < 356k \leq 216 \Leftrightarrow \frac{-149}{356} < k \leq \frac{54}{89}$$

Vì  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $k = 0$ .

Với  $k = 0$  thì  $t = 149$ .

Năm 2024 là năm nhuận nên tháng 1, tháng 3 và tháng 5 có 31 ngày, tháng 2 có 29 ngày, tháng 4 có 30 ngày.

Vậy ngày thứ 149 trong năm 2024 rơi vào ngày 28 tháng 5.

----- Hết -----





## Chương 01

### Bài 5.

# PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A

## Lý thuyết

### 1. Khái niệm phương trình tương đương



Định nghĩa:

- Hai phương trình được gọi là tương đương khi chúng có cùng tập nghiệm.
- Nếu phương trình  $f(x)=0$  tương đương với phương trình  $g(x)=0$  thì ta viết:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0$$

### Chú ý

- » Để giải phương trình, ta biến đổi phương trình đó thành một phương trình tương đương đơn giản hơn. Các phép biến đổi như vậy được gọi là các phép biến đổi tương đương.
- » Ta có một số phép biến đổi tương đương thường sử dụng sau:
  - (1) **Cộng** hoặc **trừ** hai vế của phương trình với cùng 1 số hoặc cùng 1 biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình.
  - (2) **Nhân** hoặc **chia** hai vế của phương trình với cùng 1 số khác 0 hoặc cùng 1 biểu thức luôn có giá trị khác 0 mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình.
- » Để chỉ sự tương đương của các phương trình, người ta dùng kí hiệu " $\Leftrightarrow$ "

### 2. Phương trình $\sin x = a$



Xét phương trình  $\sin x = a$  (1)

- Nếu  $|a| > 1$  thì phương trình (1) vô nghiệm.
- Nếu  $|a| \leq 1$  thì phương trình (1) có nghiệm 
$$\begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$



**Chú ý**

»  $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

» Trường hợp đặc biệt:

(1)  $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

(2)  $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(3)  $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

» Phương trình  $\sin x = \sin \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k.360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k.360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

### 3. Phương trình $\cos x = a$



Xét phương trình  $\cos x = a$  (1)

• Nếu  $|a| > 1$  thì phương trình (1) vô nghiệm.

• Nếu  $|a| \leq 1$  thì phương trình (1) có nghiệm  $\begin{cases} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

**Chú ý**

»  $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

» Trường hợp đặc biệt:

(1)  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(2)  $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

(3)  $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

» Phương trình  $\cos x = \cos \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k.360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k.360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

### 4. Phương trình $\tan x = a$ & $\cot x = a$



Phương trình	$\tan x = a$	$\cot x = a$
Điều kiện	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$	$x \neq k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$
Nghiệm	$x = \arctan(a) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = \operatorname{arccot}(a) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



**Chú ý**

$$\gg \tan u = \tan v \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ (hay } v \neq \frac{\pi}{2} + k\pi) \\ u = v + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\gg \cot u = \cot v \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq k\pi \text{ (hay } v \neq k\pi) \\ u = v + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

» Trường hợp đặc biệt:

$$(1) \quad \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(4) \quad \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(5) \quad \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(3) \quad \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(6) \quad \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\gg \text{Phương trình } \tan x = \tan \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k.180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$\gg \text{Phương trình } \cot x = \cot \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k.180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$



## Các dạng bài tập

### Dạng 1. Phương trình $\sin x = a$



#### Phương pháp

Xét phương trình  $\sin x = a$  (1)

» Nếu  $|a| > 1$  thì phương trình (1) vô nghiệm.

» Nếu  $|a| \leq 1$  thì phương trình (1) có nghiệm  $\begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

#### Chú ý:

»  $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

» Trường hợp đặc biệt:

(1)  $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

(2)  $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(3)  $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

» Phương trình  $\sin x = \sin \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k.360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k.360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$



#### Ví dụ 1.1.

Giải các phương trình sau

(1)  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)  $\sin(x - 60^\circ)$

(3)  $\sin 3x = -\frac{4}{3}$

(4)  $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(5)  $2\sin(3x+1) = 1$

(6)  $\sin\left[\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 0$

#### Lời giải

(1)  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

(2)  $\sin(x - 60^\circ)$



$$\sin(x - 60^\circ) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x - 60^\circ) = \sin 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 60^\circ = 30^\circ + k360^\circ \\ x - 60^\circ = 150^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + k360^\circ \\ x = 210^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$(3) \sin 3x = -\frac{4}{3}$$

Ta có  $\sin 3x \in [-1; 1] \Rightarrow \sin 3x = -\frac{4}{3}$  vô nghiệm.

$$(4) \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{x}{2} = \pi + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4\pi}{3} + k4\pi \\ x = 2\pi + k4\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$(5) 2 \sin(3x+1) = 1$$

$$2 \sin(3x+1) = 1 \Leftrightarrow \sin(3x+1) = \frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x+1 = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} - 1 + k2\pi \\ 3x = \frac{5\pi}{6} - 1 + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} - \frac{1}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$(6) \sin\left[\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 0$$

$$\sin\left[\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì  $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \in [-1; 1]$  và  $k \in \mathbb{Z}$  nên ta có  $k = 0$ .

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$



➤ **Dạng 2. Phương trình  $\cos x = a$**



**Phương pháp**

Xét phương trình  $\cos x = a$  (1)

» Nếu  $|a| > 1$  thì phương trình (1) vô nghiệm.

» Nếu  $|a| \leq 1$  thì phương trình (1) có nghiệm  $\begin{cases} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

**Chú ý:**

»  $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$

» Trường hợp đặc biệt:

(1)  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(2)  $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

(3)  $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

» Phương trình  $\cos x = \cos \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k.360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k.360^\circ \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$



**Ví dụ 2.1.**

Giải các phương trình sau

(1)  $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2)  $\cos(x - 2) = \frac{2}{5}$

(3)  $\cos(2x + 50^\circ) = \frac{1}{2}$

(4)  $2 \cos x = -1$

(5)  $2024 \cdot \cos(x + 30^\circ) = 2025$

(6)  $\cos(\cos(x + 2)) = 1$

✎ **Lời giải**

(1)  $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ta có  $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{3\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{6} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{-7\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

(2)  $\cos(x - 2) = \frac{2}{5}$

Ta có  $\cos(x - 2) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x - 2 = \pm \arccos\left(\frac{2}{5}\right) + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \arccos\left(\frac{2}{5}\right) + 2 + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .



$$(3) \cos(2x + 50^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có } \cos(2x + 50^\circ) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x + 50^\circ) = \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 50^\circ = 60^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x + 50^\circ = -60^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5^\circ + k \cdot 180^\circ \\ x = -55^\circ + k \cdot 180^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$(4) 2 \cos x = -1$$

$$\text{Ta có } 2 \cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$(5) 2024 \cdot \cos(x + 30^\circ) = 2025$$

$$\text{Ta có } 2024 \cdot \cos(x + 30^\circ) = 2025 \Leftrightarrow \cos(x + 30^\circ) = \frac{2025}{2024} > 1 \text{ (vô nghiệm).}$$

$$(6) \cos(\cos(x + 2)) = 1$$

$$\text{Ta có } \cos[\cos(x + 2)] = 1 \Leftrightarrow \cos(x + 2) = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vì: } -1 \leq \cos(x + 2) \leq 1 \text{ nên } k = 0.$$

$$\text{Khi đó: } \cos(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = \frac{\pi}{2} + m\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - 2 + m\pi, (m \in \mathbb{Z}).$$



**Dạng 3. Phương trình  $\tan x = a$  và  $\cot x = a$**



**Phương pháp**

Xét phương trình  $\cos x = a$  (1)

Phương trình	$\tan x = a$	$\cot x = a$
Điều kiện	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$	$x \neq k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$
Nghiệm	$x = \arctan(a) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = \operatorname{arccot}(a) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**Chú ý:**

»  $\tan u = \tan v \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ (hay } v \neq \frac{\pi}{2} + k\pi) \\ u = v + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

»  $\cot u = \cot v \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq k\pi \text{ (hay } v \neq k\pi) \\ u = v + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

» Trường hợp đặc biệt:

(1)  $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(4)  $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(2)  $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(5)  $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(3)  $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(6)  $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

» Phương trình  $\tan x = \tan \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k.180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

» Phương trình  $\cot x = \cot \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k.180^\circ, k \in \mathbb{Z}$



**Ví dụ 3.1.**

Giải các phương trình sau

(1)  $\tan 2x = \tan \frac{2\pi}{7}$

(2)  $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{3}$

(3)  $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

(4)  $\cot\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

(5)  $\left(\cot \frac{x}{2} - 1\right)\left(\cot \frac{x}{2} + 1\right) = 0$

(6)  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2 \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

**Lời giải**

(1)  $\tan 2x = \tan \frac{2\pi}{7}$

Ta có  $\tan 2x = \tan \frac{2\pi}{7} \Leftrightarrow 2x = \frac{2\pi}{7} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{7} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

(2)  $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{3}$





Ta có  $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan \frac{x}{2} = \tan \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

(3)  $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ta có  $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan(3x - 30^\circ) = \tan(-30^\circ)$

$\Leftrightarrow 3x - 30^\circ = -30^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = k60^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

(4)  $\cot\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

Ta có  $\cot\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cot \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 4x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ .

(5)  $\left(\cot \frac{x}{2} - 1\right)\left(\cot \frac{x}{2} + 1\right) = 0$

Điều kiện:  $\sin \frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \neq l\pi \Leftrightarrow x \neq l2\pi, l \in \mathbb{Z}$ .

Ta có  $\left(\cot \frac{x}{2} - 1\right)\left(\cot \frac{x}{2} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cot \frac{x}{2} = 1 \\ \cot \frac{x}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} (TM)$

(6)  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2 \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

Ta có

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2 \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \cot x - 2 \cot x = 1 \Leftrightarrow \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm  $S = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .



➤ **Dạng 4. Phương trình có nghiệm thuộc khoảng - đoạn**



**Phương pháp**

**Phương pháp tìm nghiệm trong khoảng, đoạn**  $(a; b)$  hoặc  $[a; b]$  hoặc  $[a; b)$  hoặc  $(a; b]$ :

- » **Bước 1:** Giải phương trình (đưa về phương trình cơ bản).
- » **Bước 2:** Ứng với mỗi nghiệm thuộc khoảng đoạn, tìm điều kiện của các số nguyên  $k$  thỏa mãn.

**Ví dụ:** Ở bước 1 ta tìm được họ nghiệm 
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

Với  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ :  $a < -\frac{\pi}{4} + k\pi < b \longrightarrow k = ?$

Với  $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi$ :  $a < \frac{3\pi}{2} + k\pi < b \longrightarrow k = ?$

- » **Bước 3:** Kết luận nghiệm.



**Ví dụ 4.1.**

Giải phương trình lượng giác  $\cos x = 0$  trên khoảng  $(0; 2\pi)$ .

➤ **Lời giải**

Ta có:  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

Do  $x \in (0; 2\pi)$  nên  $\Leftrightarrow k \in \{0; 1\}$ . Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\}$



**Ví dụ 4.2.**

Tìm nghiệm của phương trình  $2 \sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3}$  trên khoảng  $(-180^\circ; 180^\circ)$ .

➤ **Lời giải**

$2 \sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sin(x + 40^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 40^\circ = 60^\circ + k360^\circ \\ x + 40^\circ = 120^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20^\circ + k360^\circ \\ x = 80^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

Theo đề bài:

$-180^\circ < 20^\circ + k360^\circ < 180^\circ \Leftrightarrow -\frac{5}{9} < k < \frac{4}{9} \Rightarrow k = 0$ .

$-180^\circ < 80^\circ + k360^\circ < 180^\circ \Leftrightarrow -\frac{13}{18} < k < \frac{5}{18} \Rightarrow k = 0$ .

Vậy phương trình có hai nghiệm  $x = 20^\circ$  và  $x = 80^\circ$ .



**Ví dụ 4.3.**

Giải phương trình lượng giác  $\tan x = -1$  trên khoảng  $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right)$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Do  $x \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right)$  nên  $0 \leq -\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq k < \frac{7}{4} \Leftrightarrow k = 1$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$ .



**Ví dụ 4.4.**

Giải phương trình lượng giác  $\cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$  trên khoảng  $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Do  $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$  nên  $\frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{7}{12} \leq k < \frac{55}{12} \Leftrightarrow k \in \{1; 2; 3; 4\}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{\frac{17\pi}{24}; \frac{29\pi}{24}; \frac{41\pi}{24}; \frac{53\pi}{24}\right\}$ .



**Ví dụ 4.5.**

Tìm nghiệm của phương trình  $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$  trên đoạn  $[2\pi; 4\pi]$

**Lời giải**

Điều kiện:  $\cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + 2l\pi (l \in \mathbb{Z})$

Khi đó  $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$

Kết hợp điều kiện ta được: 
$$\begin{cases} x = m2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + m\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + m\pi \end{cases} (m \in \mathbb{Z}).$$

Vì  $x \in [2\pi; 4\pi]$  nên  $x \in \left\{2\pi; \frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}; \frac{10\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}\right\}$ .



**Dạng 5. Bài toán thực tế liên quan phương trình lượng giác**



**Phương pháp**

- » **Bước 1:** Đọc và hiểu nội dung bài toán thực tế đã cho.
- » **Bước 2:** Phân tích bài toán để nhận diện bài toán thuộc nội dung kiến thức liên quan đến hàm số lượng giác, phương trình lượng giác nào.
- » **Bước 3:** Dùng kiến thức đã học, giải bài toán và kết luận nghiệm.



**Ví dụ 5.1.**

Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ  $t$  của năm 2017 được cho bởi một hàm số  $y = 4 \sin \left[ \frac{\pi}{178}(t-60) \right] + 10$  với  $t \in \mathbb{Z}$  và  $0 < t \leq 365$ . Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

**Lời giải**

$$\text{Vì } -1 \leq \sin \left[ \frac{\pi}{178}(t-60) \right] \leq 1 \longrightarrow y = 4 \sin \left[ \frac{\pi}{178}(t-60) \right] + 10 \leq 14.$$

$$\text{Ngày có ánh sáng mặt trời nhiều nhất} \Leftrightarrow y = 14 \Leftrightarrow \sin \left[ \frac{\pi}{178}(t-60) \right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{178}(t-60) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 149 + 356k.$$

$$\text{Do } 0 < t \leq 365 \longrightarrow 0 < 149 + 356k \leq 365 \Leftrightarrow -\frac{149}{356} < k \leq \frac{54}{89} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0.$$

Với  $k = 0 \longrightarrow t = 149$  rơi vào ngày 29 tháng 5 (vì ta đã biết tháng 1 và 3 có 31 ngày, tháng 4 có 30 ngày, riêng đối với năm 2017 thì không phải năm nhuận nên tháng 2 có 28 ngày hoặc dựa vào dữ kiện  $0 < t \leq 365$  thì ta biết năm này tháng 2 chỉ có 28 ngày).



**Ví dụ 5.2.**

Chiều cao  $h(m)$  của một cabin trên vòng quay vào thời điểm  $t$  giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức  $h(t) = 30 + 20 \sin \left( \frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3} \right)$ . Sau 2 phút kể từ khi bắt đầu chuyển động, Cabin đạt độ cao tối đa bao nhiêu lần?

**Lời giải**

$$\text{Do } \sin \left( \frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1 \text{ nên } h(t) = 30 + 20 \sin \left( \frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3} \right) \leq 30 + 20 = 50(m).$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \sin \left( \frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3} \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{25}{6} + 50k \text{ (giây).}$$

Với  $0 \leq t \leq 120$ , ta có  $0 \leq \frac{25}{6} + 50k \leq 120 \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq k \leq \frac{139}{60}$ , do  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2\}$ . Vậy Cabin đạt độ cao tối đa 3 lần trong khoảng thời gian 2 phút từ khi bắt đầu chuyển động.



Chương 01

Bài 5.

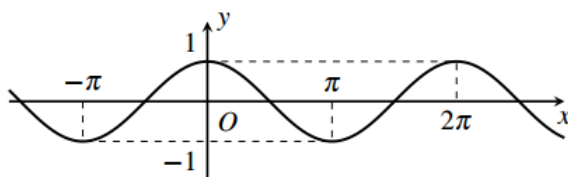
PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC



Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho hàm số  $y = \cos x$  có đồ thị như hình vẽ.



Nghiệm của phương trình  $\cos x = -1$  trong khoảng  $(0; 2\pi)$  là:

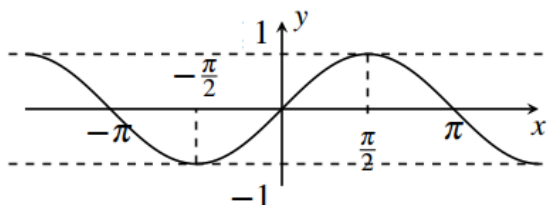
- A.  $x = 0$ .                      B.  $x = \pi$ .                      C.  $x = 2\pi$ .                      D.  $x = \frac{\pi}{2}$ .

» Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta dễ thấy phương trình  $\cos x = -1$  có một nghiệm trong khoảng  $(0; 2\pi)$  là  $x = \pi$ .

» Câu 2. Cho hàm số  $y = \sin x$  có đồ thị như hình vẽ.



Nghiệm của phương trình  $\sin x = 1$  trong khoảng  $(0; \pi)$  là:

- A.  $x = 0$ .                      B.  $x = \pi$ .                      C.  $x = -\frac{\pi}{2}$ .                      D.  $x = \frac{\pi}{2}$ .

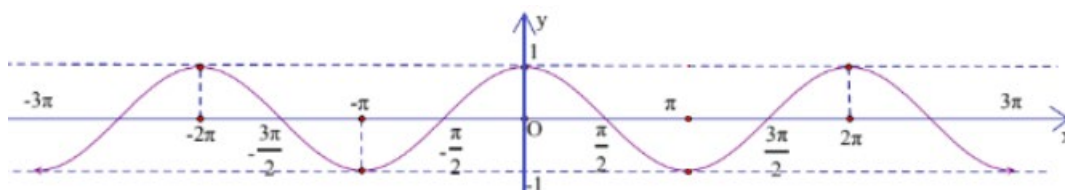
» Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta dễ thấy phương trình  $\sin x = 1$  có một nghiệm trong khoảng  $(0; \pi)$  là

$$x = \frac{\pi}{2}.$$

» Câu 3. Cho hàm số  $y = \cos x$  có đồ thị như hình vẽ.



Tập nghiệm của phương trình  $\cos x = 1$  là?



A.  $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

B.  $x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

C.  $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

D.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

» *Lời giải*

**Chọn C**

Ta thấy đường thẳng  $y = 1$  cắt đồ thị  $y = \cos x$  tại các điểm có hoành độ  $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .  
Nên tập nghiệm của phương trình  $\cos x = 1$  là  $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

» **Câu 4.** Phương trình  $\cos x = 0$  có nghiệm là:

A.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

B.  $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

C.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

D.  $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

» *Lời giải*

**Chọn A**

Theo công thức nghiệm đặc biệt thì  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

» **Câu 5.** Phương trình  $2 \cdot \sin x - 1 = 0$  có tập nghiệm là

A.  $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

B.  $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

C.  $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

D.  $S = \left\{ \frac{1}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

» *Lời giải*

**Chọn A**

Ta có:  $2 \cdot \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

» **Câu 6.** Phương trình  $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$  có tất cả các nghiệm là:

A.  $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

B.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

C.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

D.  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

» *Lời giải*

**Chọn C**

Phương trình  $\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

» **Câu 7.** Tất cả các nghiệm của phương trình  $\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$  là

A.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

B.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .



C.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

D. 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

» *Lời giải*

**Chọn B**

Áp dụng công thức:  $\sin x = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + k2\pi \\ x = \pi - a + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

» **Câu 8.** Nghiệm của phương trình  $\cos x = \frac{1}{2}$  là

A.  $x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi.$       B.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi.$       C.  $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi.$       D.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi.$

» *Lời giải*

**Chọn B**

Ta có  $\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

» **Câu 9.** Phương trình  $\cos 2\pi x = \frac{2025}{2024}$  có bao nhiêu nghiệm trong  $(-\pi; \pi)$

A. 1.      B. 0.      C. 2.      D. 5.

» *Lời giải*

**Chọn B**

Ta có  $\frac{2025}{2024} > 1$  nên phương trình  $\cos 2\pi x = \frac{2025}{2024}$  vô nghiệm.

» **Câu 10.** Nghiệm của phương trình  $2\cos(x - 15^\circ) - 1 = 0$  là

A.  $\begin{cases} x = 75^\circ + k360^\circ \\ x = 135^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$       B.  $\begin{cases} x = 60^\circ + k360^\circ \\ x = -60^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

C.  $\begin{cases} x = 45^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$       D.  $\begin{cases} x = 75^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

» *Lời giải*

**Chọn D**

$2\cos(x - 15^\circ) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x - 15^\circ) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x - 15^\circ) = \cos 60^\circ$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 15^\circ = 60^\circ + k360^\circ \\ x - 15^\circ = -60^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 75^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

» **Câu 11.** Giải phương trình  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

A.  $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$       B.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

C.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$       D.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$



» *Lời giải*

**Chọn C**

Ta có:  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

» **Câu 12.** Nghiệm của phương trình  $\cos x = \cos \frac{\pi}{12}$  là

**A.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{11\pi}{12} + l2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$ .

**B.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + l2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$ .

**C.**  $x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

**D.**  $x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

» *Lời giải*

Ta có  $\cos x = \cos \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + l2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$ .

» **Câu 13.** Phương trình  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$  có nghiệm là

**A.**  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .      **B.**  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .      **C.**  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .      **D.**  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

» *Lời giải*

Ta có  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

» **Câu 14.** Giải phương trình  $\cos x = 1$ .

**A.**  $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

**B.**  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**C.**  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**D.**  $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

» *Lời giải*

**Chọn D**

Ta có  $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

» **Câu 15.** Phương trình  $2\sin x - \sqrt{3} = 0$  có tập nghiệm là:

**A.**  $\left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**B.**  $\left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**C.**  $\left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**D.**  $\left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

» *Lời giải*

**Chọn D**

$2\sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$ .





Vậy tập nghiệm của phương trình là:  $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

- » **Câu 16.** Tổng các nghiệm của phương trình  $2 \sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3}$  trên khoảng  $(-180^\circ; 180^\circ)$  là  
**A.**  $20^\circ$ .                      **B.**  $100^\circ$ .                      **C.**  $80^\circ$ .                      **D.**  $120^\circ$ .

» *Lời giải*

**Chọn B**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 2 \sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3} &\Leftrightarrow \sin(x + 40^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 40^\circ = 60^\circ + k360^\circ \\ x + 40^\circ = 120^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20^\circ + k360^\circ \\ x = 80^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Theo đề bài:

$$-180^\circ < 20^\circ + k360^\circ < 180^\circ \Leftrightarrow -\frac{5}{9} < k < \frac{4}{9} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = 20^\circ.$$

$$-180^\circ < 80^\circ + k360^\circ < 180^\circ \Leftrightarrow -\frac{13}{18} < k < \frac{5}{18} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = 80^\circ.$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là  $20^\circ + 80^\circ = 100^\circ$ .

- » **Câu 17.** Tìm tổng các nghiệm của phương trình  $\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  trên  $[0; \pi]$ .

- A.**  $\frac{47\pi}{18}$ .                      **B.**  $\frac{4\pi}{18}$ .                      **C.**  $\frac{45\pi}{18}$ .                      **D.**  $\frac{7\pi}{18}$ .

» *Lời giải*

**Chọn A**

Ta có:

$$\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - \frac{\pi}{6} = 2x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 5x - \frac{\pi}{6} = -2x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì  $x \in [0; \pi]$  nên ta có:

$$\text{+) Với } x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \Rightarrow 0 \leq -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \leq \pi \Leftrightarrow \frac{1}{12} \leq k \leq \frac{19}{12}, \text{ do } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 1 \text{ nên } x = \frac{11\pi}{18}.$$

$$\text{+) Với } x = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \leq \pi \Leftrightarrow \frac{-1}{4} \leq k \leq \frac{13}{4}, \text{ do } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3\} \text{ nên}$$

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{14}; \frac{5\pi}{14}; \frac{9\pi}{14}; \frac{13\pi}{14} \right\}.$$

$$\text{Tổng tất cả các nghiệm là: } \frac{11\pi}{18} + \frac{\pi}{14} + \frac{5\pi}{14} + \frac{9\pi}{14} + \frac{13\pi}{14} = \frac{47\pi}{18}.$$

- » **Câu 18.** Số nghiệm phương trình  $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$  thuộc đoạn  $[2\pi; 4\pi]$  là

- A.** 7.                      **B.** 6.                      **C.** 4.                      **D.** 5.

» *Lời giải*

**Chọn B**

Điều kiện:  $\cos x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi$ .



Ta có  $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0 \Rightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ .

So với điều kiện nghiệm của phương trình là  $x = \frac{k\pi}{3}$  với  $k \in \mathbb{Z}, k \neq 3(2l+1)$

Vì  $2\pi \leq x \leq 4\pi \Leftrightarrow 2\pi \leq \frac{k\pi}{3} \leq 4\pi \Leftrightarrow 6 \leq k \leq 12$  nên ta chọn  $k \in \{6, 7, 8, 10, 11, 12\}$ .

» **Câu 19.** Với những giá trị nào của  $x$  thì giá trị của các hàm số  $y = \sin 3x$  và  $y = \sin x$  bằng nhau?

**A.**  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

**B.**  $x = k\frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$ .

**C.**  $x = k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .

**D.**  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

» **Lời giải**

**Chọn D**

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$\sin 3x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + k2\pi \\ 3x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

» **Câu 20.** Số nghiệm của phương trình  $\sin x = 0$  trên đoạn  $[0; \pi]$  là

**A.** 1.

**B.** 2.

**C.** 0.

**D.** 5.

» **Lời giải**

**Chọn B**

Ta có  $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

$x \in [0; \pi] \Leftrightarrow 0 \leq k\pi \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 1$  mà  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $k = 0; k = 1$ . Suy ra  $x = 0; x = \pi$ .

Vậy phương trình  $\sin x = 0$  có 2 nghiệm trên đoạn  $[0; \pi]$ .

» **Câu 21.** Nghiệm của phương trình  $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 1 = 0$  là

**A.**  $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**B.**  $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**C.**  $x = -\frac{7\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**D.**  $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

» **Lời giải**

**Chọn D**

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} - k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Với  $k \in \mathbb{Z}, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$  cũng là nghiệm của phương trình.

» **Câu 22.** Tập nghiệm của phương trình  $\cos 3x + \sin \frac{2\pi}{3} = 0$  là

**A.**  $\left\{ \pm \frac{5\pi}{16} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**B.**  $\left\{ \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .



C.  $\left\{ \pm \frac{5\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

D.  $\left\{ \pm \frac{5\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

☞ *Lời giải*

**Chọn A**

Phương trình  $\cos 3x + \sin \frac{2\pi}{3} = 0, (1)$  có tập xác định  $D = \mathbb{R}$

$$(1) \Leftrightarrow \cos 3x = -\sin \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \cos 3x = \cos \frac{5\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pm \frac{5\pi}{6} + k.2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

» **Câu 23.** Trong các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm?

A.  $\cos x = 3$ .

B.  $\sin 2x = -2$ .

C.  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$ .

D.  $\cos(2x-1) = \frac{\sqrt{7}}{2}$ .

☞ *Lời giải*

**Chọn C**

Phương trình lượng giác cơ bản dạng  $\sin u = \alpha, \cos u = a$  có nghiệm khi và chỉ khi  $|a| \leq 1$

» **Câu 24.** Phương trình nào sau đây có nghiệm?

A.  $\sin 2021x - 2 = 0$ .

B.  $\cos(2x + 2021) = 3$ .

C.  $\sin^2 x + 1 = 0$ .

D.  $\cos(2x + 2021) = -1$ .

☞ *Lời giải*

**Chọn D**

Phương trình  $\sin x = a$  và  $\cos x = a$  có nghiệm khi và chỉ khi  $|a| \leq 1$ .

Đối chiếu các đáp án ta thấy chỉ có đáp án D là phương trình có nghiệm.

» **Câu 25.** Phương trình  $2\sin x + \sqrt{3} = 0$  có tổng nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất bằng

A.  $\frac{4\pi}{3}$ .

B.  $2\pi$ .

C.  $\frac{\pi}{3}$ .

D.  $\pi$ .

☞ *Lời giải*

**Chọn D**

$$* \text{ Ta có: } 2\sin x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

\* Xét  $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$  ta được nghiệm dương nhỏ nhất là  $x_1 = \frac{5\pi}{3}$  và nghiệm âm lớn

nhất là  $x_2 = -\frac{\pi}{3}$ .



\* Xét  $x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$  ta được nghiệm dương nhỏ nhất là  $x_3 = \frac{4\pi}{3}$  và nghiệm âm lớn nhất là  $x_4 = -\frac{2\pi}{3}$ .

\* So sánh  $x_1$  và  $x_3$  ta suy ra nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình đã cho là  $x_3 = \frac{4\pi}{3}$ .

So sánh  $x_2$  và  $x_4$  ta suy ra nghiệm âm lớn nhất của phương trình đã cho là  $x_2 = -\frac{\pi}{3}$ .

\* Ta có  $x_2 + x_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \pi$ .

» **Câu 26.** Nghiệm của phương trình  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$  là

**A.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$$

**B.** 
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

**C.** 
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$$

**D.** 
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

» **Lời giải**

**Chọn C**

Biến đổi và giải phương trình như sau:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

» **Câu 27.** Tập nghiệm của phương trình  $\sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0$  là?

**A.**  $x = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**B.**  $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**C.**  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**D.**  $x = -\frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

» **Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:  $\sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sin x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .

Hay  $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .



- » **Câu 28.** Cho phương trình  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Số nghiệm của phương trình trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$  là?  
**A.** 2.                      **B.** 3.                      **C.** 4.                      **D.** 1.

» *Lời giải*

**Chọn A**

Ta có:  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Để tìm được số nghiệm của phương trình, ta có thể sử dụng phương pháp đại số hoặc phương pháp sử dụng vòng tròn lượng giác như sau:

**PP1:** Phương pháp đại số. (tham số  $k \in \mathbb{Z}$ )

Với nghiệm  $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \leq k \leq \frac{3}{8}$

$\Rightarrow k = 0$  tương ứng  $x = \frac{\pi}{4}$  là nghiệm duy nhất thuộc đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ .

Với nghiệm  $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{5}{8} \leq k \leq \frac{1}{8}$

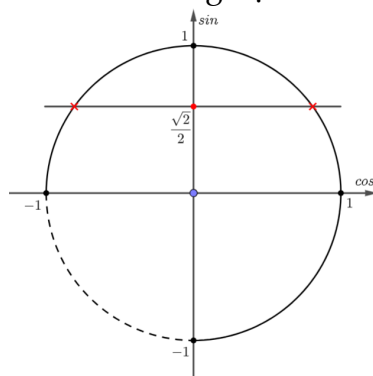
$\Rightarrow k = 0$  tương ứng  $x = \frac{3\pi}{4}$  là nghiệm duy nhất thuộc đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ .

Vậy phương trình  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  có hai nghiệm thuộc đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ .

**PP2:** Sử dụng vòng tròn lượng giác.

Trên trục sin, ta xác định  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Từ vị trí đó, kẻ đường thẳng vuông góc với trục sin.

Khi đó, hai giao điểm được tạo thành là hai nghiệm cơ bản của phương trình.



Quan sát thấy rằng, trong đoạn từ  $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$  chỉ có hai giao điểm tương ứng với hai nghiệm.

- » **Câu 29.** Phương trình  $3 \cos^2 x + 7 \cos x - 10 = 0$  có nghiệm là?

**A.**  $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$       **B.**  $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$       **C.**  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$       **D.**  $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

» *Lời giải*

**Chọn D**



Ta có:  $3\cos^2 x + 7\cos x - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -\frac{10}{3} \end{cases}$

Với  $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .

Với  $\cos x = -\frac{10}{3} \rightarrow$  Loại vì tập giá trị của  $\cos x$  là  $[-1; 1]$ .

» Câu 30. Phương trình  $\cos(2x + 30^\circ) + \sin x = 0$  có nghiệm là

A.  $\begin{cases} x = 60^\circ + k180^\circ \\ x = 40^\circ + k120^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

B.  $\begin{cases} x = 60^\circ + k360^\circ \\ x = -40^\circ + k120^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

C.  $\begin{cases} x = 30^\circ + k360^\circ \\ x = 15^\circ + k180^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

D.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

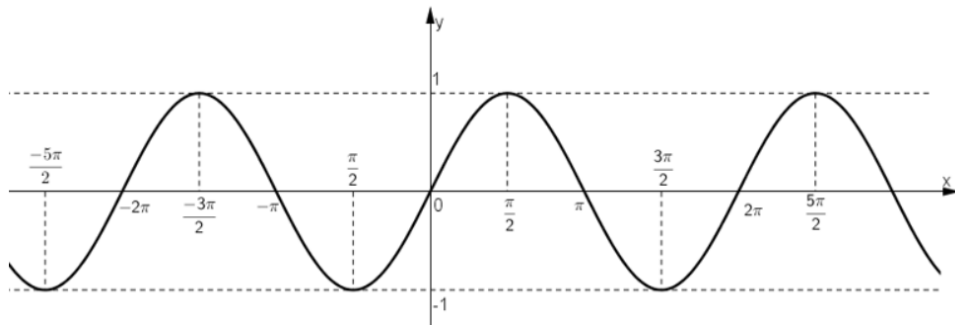
» Lời giải

**Chọn B**

$$\cos(2x + 30^\circ) + \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos(2x + 30^\circ) = -\sin x \Leftrightarrow \cos(2x + 30^\circ) = \sin(-x)$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x + 30^\circ) = \cos(x + 90^\circ) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60^\circ + k360^\circ \\ x = -40^\circ + k120^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

» Câu 31. Cho hàm số  $y = \sin x$  có đồ thị như hình vẽ.



Hãy tìm tập tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình  $|\sin x| = m$  có nghiệm?

A.  $-1 \leq m \leq 1$ .

B.  $-1 \leq m \leq 0$ .

C.  $-1 < m < 0$ .

D.  $0 \leq m \leq 1$ .

» Lời giải

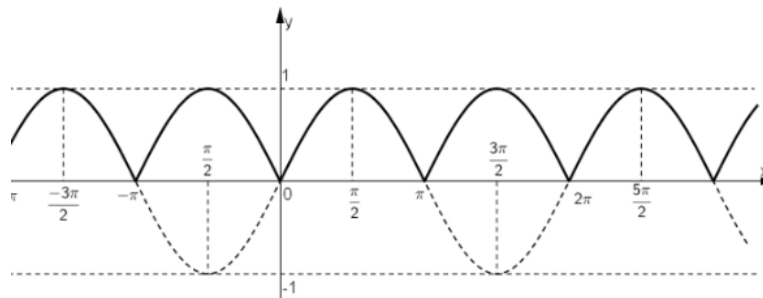
**Chọn D**

Đồ thị hàm số  $y = |\sin x|$  được suy ra từ đồ thị  $y = \sin x$  bằng:

+ Giữ nguyên phần đồ thị bên trên trục  $Ox$ .

+ Lấy đối xứng phần bên dưới qua trục  $Ox$ .

Ta được đồ thị như hình vẽ.



Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình  $|\sin x| = m$  có nghiệm khi  $0 \leq m \leq 1$ .



» Câu 32. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình

$$\sin x \cdot \sin \frac{\pi}{3} + \cos 2x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin 2x \cdot \cos \frac{\pi}{4}.$$

A. 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

B. 
$$\begin{cases} x = -\frac{7\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

C. 
$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

D. 
$$\begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{36} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

» *Lời giải*

**Chọn A**

♦ Phương trình:  $\sin x \cdot \sin \frac{\pi}{3} + \cos 2x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin 2x \cdot \cos \frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \cos 2x \cdot \sin \frac{\pi}{4} - \sin 2x \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = -x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ 3x = -\frac{7\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = \frac{\pi}{12} + k2\pi, x = -\frac{7\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ .

» Câu 33. Phương trình  $\sin 5x - \sin x = 0$  có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn  $[-2018\pi; 2018\pi]$ ?

A. 20179.

B. 20181.

C. 16144.

D. 16145.

» *Lời giải*

**Chọn B**

Ta có  $\sin 5x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin 5x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Vì  $x \in [-2018\pi; 2018\pi]$  nên

+ Với  $x = \frac{k\pi}{2}$  ta có  $-2018\pi \leq \frac{k\pi}{2} \leq 2018\pi \Leftrightarrow -4036 \leq k \leq 4036$ . Suy ra có 8073 nghiệm.

+ Với  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$  ta có  $-2018\pi \leq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \leq 2018\pi \Leftrightarrow -\frac{12109}{2} \leq k \leq \frac{12107}{2}$ . Suy ra có 12108 nghiệm.

Vậy có  $8073 + 12108 = 20181$  nghiệm thuộc đoạn  $[-2018\pi; 2018\pi]$ .



» **Câu 34.** Nghiệm của phương trình  $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$  là

**A.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{7} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

**B.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

**C.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{7} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

**D.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

» **Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x) \Leftrightarrow \sin 8x - \sqrt{3} \cos 8x = \sqrt{3} \sin 6x + \cos 6x$

$$\Leftrightarrow \sin\left(8x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(6x + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - \frac{\pi}{3} = 6x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 8x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} - 6x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{7} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

» **Câu 35.** Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ  $40^\circ$  bắc trong ngày thứ  $t$  của một năm không nhuận được cho bởi hàm số  $d(t) = 3 \sin\left[\frac{\pi}{180}(t-80)\right] + 12$  với  $t \in \mathbb{Z}$  và  $0 < t \leq 365$ . Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

**A.** 170.

**B.** 171.

**C.** 172.

**D.** 173.

» **Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $d(t) = 3 \sin\left[\frac{\pi}{180}(t-80)\right] + 12 \leq 3.1 + 12 = 15$ .

Vậy thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất khi

$$\sin\left[\frac{\pi}{180}(t-80)\right] = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{180}(t-80) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 170 + 360k (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì  $0 < t \leq 365$  nên  $0 < 170 + 360k \leq 365 \Leftrightarrow -\frac{17}{36} < k \leq \frac{39}{72} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow t = 170$ .

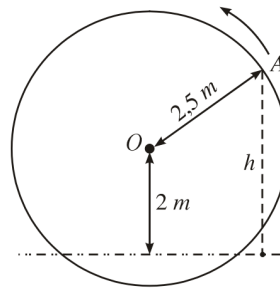
Vậy vào ngày thứ 170 trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất.

» **Câu 36.** Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5m; trục của nó đặt cách mặt nước 2m (hình vẽ). Khi guồng quay đều, khoảng cách  $h$  (mét) từ một chiếc gầu gắn tại điểm A của guồng đến mặt nước được tính theo công thức  $h = |y|$  trong đó

$$y = 2 + 2,5 \sin\left[2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right]$$

với  $x$  là thời gian quay của guồng ( $x \geq 0$ ), tính bằng phút (quy ước  $y > 0$  khi gầu ở bên trên mặt nước và  $y < 0$  khi gầu ở dưới nước). Chiếc gầu cách mặt nước 2m lần đầu tiên khi nào?





A. 4 phút.

B.  $\frac{1}{4}$  phút.

C. 2 phút.

D.  $\frac{1}{2}$  phút.

» *Lời giải*

**Chọn B**

Ta có  $h = 2 \Leftrightarrow |y| = 2 \Leftrightarrow y = \pm 2$ . Thấy khi gầu dưới mặt nước thì khoảng cách từ gầu đến mặt nước lớn nhất là 0,5m.

$$\Rightarrow y = 2 \Leftrightarrow 2 + 2,5 \sin \left[ 2\pi \left( x - \frac{1}{4} \right) \right] = 2 \Leftrightarrow \sin \left[ 2\pi \left( x - \frac{1}{4} \right) \right] = 0 \Leftrightarrow 2\pi \left( x - \frac{1}{4} \right) = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}$$

Mà  $x \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{k}{2} \geq 0 \Leftrightarrow k \geq -\frac{1}{2}$ . Do  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . Vậy thời điểm gầu cách mặt

nước 2m lần đầu tiên đạt được khi  $k = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$  phút.

» **Câu 37.** Guồng nước (hay còn gọi là con nước) không chỉ là công cụ phục vụ sản xuất nông nghiệp, mà đã trở thành hình ảnh quen thuộc của bản làng và là một nét văn hóa đặc trưng của đồng bào dân tộc miền núi phía Bắc.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 3,5m; trục của nó đặt cách mặt nước 3m. Khi guồng quay đều, khoảng cách  $h(m)$  từ một ống đựng nước gắn tại một điểm của guồng đến mặt nước được tính theo công thức  $h = |y|$ , trong đó  $y = 3,5 \sin \left( 2\pi x - \frac{\pi}{2} \right) + 3$ , với  $x$  (phút) là thời gian quay của guồng ( $x \geq 0$ ). Hãy chỉ ra giá trị của  $x$  nhỏ nhất để ống đựng nước cách mặt nước 3m.

A.  $\frac{1}{4}$ .

B.  $\frac{5}{4}$ .

C.  $\frac{1}{8}$ .

D.  $\frac{7}{8}$ .

» *Lời giải*

**Chọn A**

Để ống đựng nước cách mặt nước 3m, ta có phương trình:



$$\left| 3,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 \right| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 = 3 \\ 3,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ 3,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{6}{3,5} < -1 \text{ (VN)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2\pi x - \frac{\pi}{2} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{2k+1}{4}; k \in \mathbb{Z}$$

Vì  $x \geq 0$  nên một số giá trị của  $x$  là:  $\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}; \frac{7}{4}; \dots$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $x$  theo yêu cầu bài toán là  $\frac{1}{4}$

### B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» **Câu 38.** Cho phương trình  $\sin x = a$  (1).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Nếu $a > 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm.		
(b)	Nếu $a = 1$ thì phương trình (1) có nghiệm $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .		
(c)	Nếu $-1 \leq a \leq 1$ thì phương trình (1) có nghiệm $\begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ với $a = \sin \alpha$ .		
(d)	Phương trình (1) có hai điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.		

» **Lời giải**

(a) Nếu  $a > 1$  thì phương trình (1) vô nghiệm.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Nếu  $a = 1$  thì phương trình (1) có nghiệm  $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

Nếu  $a = 1 \Rightarrow \sin \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

» **Chọn SAI.**

(c) Nếu  $-1 \leq a \leq 1$  thì phương trình (1) có nghiệm  $\begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$  với  $a = \sin \alpha$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Phương trình (1) có hai điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 39.** Cho phương trình lượng giác  $2 \sin x - \sqrt{2} = 0$ . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình tương đương với phương trình $\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$ .		
(b)	Phương trình có nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .		
(c)	Phương trình có nghiệm âm lớn nhất là $\frac{\pi}{4}$ .		



(d) Số nghiệm của phương trình trong khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  là hai nghiệm.

» **Lời giải**

(a) Phương trình tương đương với phương trình  $\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$ .

$$2 \sin x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{4}.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Phương trình có nghiệm là  $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

$$2 \sin x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất là  $\frac{\pi}{4}$ .

Do  $x$  là nghiệm âm lớn nhất nên

**Trường hợp 1:**  $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{1}{8} \Rightarrow k = -1 \Rightarrow x = -\frac{7\pi}{4}$ .

**Trường hợp 2:**  $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{3}{8} \Rightarrow k = -1 \Rightarrow x = -\frac{5\pi}{4}$

Trong hai nghiệm  $-\frac{7\pi}{4}$  và  $-\frac{5\pi}{4}$  thì nghiệm âm lớn nhất là  $-\frac{5\pi}{4}$ .

Phương trình có nghiệm âm lớn nhất là  $-\frac{5\pi}{4}$ .

» **Chọn SAI.**

(d) Số nghiệm của phương trình trong khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  là hai nghiệm.

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

+)  $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ : Ta có  $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + k2\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{8} < k < \frac{1}{8}$ .

Mà  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $k = 0$ :  $x = \frac{\pi}{4}$

+)  $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$ : Ta có  $-\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4} + k2\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{8} < k < -\frac{1}{8}$ .

Mà  $k \in \mathbb{Z}$  nên không có giá trị nào của  $k$  thỏa mãn.

Vậy số nghiệm của phương trình trong khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  là một nghiệm.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 40.** Cho phương trình lượng giác  $\sin 2x = -\frac{1}{2}$  (\*). Khi đó:



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình (*) tương đương $\sin 2x = \sin \frac{\pi}{6}$		
(b)	Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có 3 nghiệm		
(c)	Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; \pi)$ bằng $\frac{3\pi}{2}$		
(d)	Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{11\pi}{12}$		

» Lời giải

(a) Phương trình (\*) tương đương  $\sin 2x = \sin \frac{\pi}{6}$

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin \frac{-\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

» Chọn SAI.

(b) Trong khoảng  $(0; \pi)$  phương trình có 3 nghiệm

$$0 < x < \pi \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{-\pi}{12} + k\pi < \pi \\ 0 < \frac{7\pi}{12} + k\pi < \pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11\pi}{12} \\ x = \frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

» Chọn SAI.

(c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng  $(0; \pi)$  bằng  $\frac{3\pi}{2}$

$$\text{Với } x = \frac{11\pi}{12}; x = \frac{7\pi}{12} \Rightarrow \frac{11\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = \frac{18\pi}{12} = \frac{3\pi}{2}$$

» Chọn ĐÚNG.

(d) Trong khoảng  $(0; \pi)$  phương trình có nghiệm lớn nhất bằng  $\frac{11\pi}{12}$

$$\text{Với } x = \frac{11\pi}{12}; x = \frac{7\pi}{12} \Rightarrow \text{nghiệm } x = \frac{11\pi}{12} \text{ là nghiệm lớn nhất trong khoảng } (0; \pi)$$

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 41. Cho phương trình lượng giác  $2 \cos x = \sqrt{3}$ , khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình có nghiệm $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$		
(b)	Trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ phương trình có 4 nghiệm		
(c)	Tổng các nghiệm của phương trình trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ bằng $\frac{25\pi}{6}$		
(d)	Trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{13\pi}{6}$		



» Lời giải

(a) Phương trình có nghiệm  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

Ta có:  $2 \cos x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

» Chọn SAI.

(b) Trong đoạn  $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  phương trình có 4 nghiệm

Vì  $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  nên  $x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\}$ .

» Chọn SAI.

(c) Tổng các nghiệm của phương trình trong đoạn  $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  bằng  $\frac{25\pi}{6}$

Với  $x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\} \Rightarrow \frac{\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} + \frac{13\pi}{6} = \frac{25\pi}{6}$ .

» Chọn ĐÚNG.

(d) Trong đoạn  $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  phương trình có nghiệm lớn nhất bằng  $\frac{13\pi}{6}$

Với  $x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\} \Rightarrow$  nghiệm lớn nhất là  $x = \frac{13\pi}{6}$

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 42. Cho phương trình  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$  (\*), vậy:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$		
(b)	Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có 2 nghiệm		
(c)	Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có 2 nghiệm âm		
(d)	Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; \pi)$ bằng $\frac{7\pi}{6}$		

» Lời giải

(a) Phương trình có nghiệm  $\begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$

» Chọn ĐÚNG.

Ta có:  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$



(b) Trong khoảng  $(0; \pi)$  phương trình có 2 nghiệm

» **Chọn ĐÚNG.**

$$\text{Vì } 0 < x < \pi \Leftrightarrow 0 < \pi + k2\pi < \pi \Leftrightarrow -\pi < k2\pi < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} < k < 0$$

$$\text{Vì } 0 < x < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} < k\frac{2\pi}{3} < \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{5}{4}$$

$$\text{Do } k \in \mathbb{Z} \text{ nên } k \in \{0; 1\} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$$

(c) Trong khoảng  $(0; \pi)$  phương trình có 2 nghiệm âm.

Trong khoảng  $(0; \pi)$  phương trình không tồn tại nghiệm âm.

» **Chọn SAI.**

(d) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng  $(0; \pi)$  bằng  $\frac{7\pi}{6}$

$$\text{Với } x \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\} \Rightarrow \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \pi$$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 43.** Cho phương trình lượng giác  $3 - \sqrt{3} \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ , khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .		
(b)	Khi $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$ thì phương trình có ba nghiệm		
(c)	Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{3}$		
(d)	Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(\frac{-\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right)$ bằng $\frac{\pi}{6}$		

» **Lời giải**

(a) Phương trình có nghiệm  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Phương trình tương đương với: } \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

» **Chọn SAI.**

(b) Khi  $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$  thì phương trình có ba nghiệm

$$\text{Vì } -\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{-7\pi}{12} < \frac{k\pi}{2} < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{-7}{6} < k < \frac{2}{3}$$

$$\text{Do } k \in \mathbb{Z} \text{ nên } k \in \{-1; 0\}.$$

» **Chọn SAI.**

(c) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng  $-\frac{\pi}{3}$



Với  $k = -1$  thì  $x = \frac{-\pi}{6}$ , với  $k = 0$  thì  $x = \frac{\pi}{3}$ .

» **Chọn SAI.**

(d) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng  $\left(\frac{-\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right)$  bằng  $\frac{\pi}{6}$

Vậy  $\frac{-\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 44.** Cho hai đồ thị hàm số  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  và  $y = \sin x$ , khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$		
(b)	Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$		
(c)	Khi $x \in [0; 2\pi]$ thì hai đồ thị hàm số cắt nhau tại ba điểm		
(d)	Khi $x \in [0; 2\pi]$ thì tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là: $\left(\frac{5\pi}{8}; \sin \frac{5\pi}{8}\right), \left(\frac{7\pi}{8}; \sin \frac{7\pi}{8}\right)$ .		

» **Lời giải**

(a) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là  $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = x + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - x + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Khi  $x \in [0; 2\pi]$  thì hai đồ thị hàm số cắt nhau tại ba điểm

$$\text{Vì } x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x \in \left\{\frac{3\pi}{8}; \frac{11\pi}{8}\right\}.$$

» **Chọn SAI.**

(d) Khi  $x \in [0; 2\pi]$  thì tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là:  $\left(\frac{5\pi}{8}; \sin \frac{5\pi}{8}\right), \left(\frac{7\pi}{8}; \sin \frac{7\pi}{8}\right)$ .

$$\text{Với } x = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow y = \sin \frac{3\pi}{8} \approx 0,92 \quad \text{với } x = \frac{11\pi}{8} \Rightarrow y = \sin \frac{11\pi}{8} \approx -0,92.$$



Vậy tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là:  $\left(\frac{3\pi}{8}; \sin \frac{3\pi}{8}\right), \left(\frac{11\pi}{8}; \sin \frac{11\pi}{8}\right)$ .

» **Chọn SAI.**

» **Câu 45.** Cho phương trình lượng giác  $2\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{3} = 0$ .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình tương đương $\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ .		
(b)	Phương trình có nghiệm là: $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .		
(c)	Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{4}$ .		
(d)	Số nghiệm của phương trình trong khoảng $(-\pi; \pi)$ là hai nghiệm.		

» **Lời giải**

(a) Phương trình tương đương  $\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ .

$$\text{Ta có } 2\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{12} = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{17\pi}{12} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

» **Chọn SAI.**

(b) Phương trình có nghiệm là:  $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm là: } x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{17\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

» **Chọn SAI.**

(c) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng  $-\frac{\pi}{4}$ .

$$+ \text{ Với } x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ có nghiệm âm lớn nhất là } x = -\frac{\pi}{4}$$

$$+ \text{ Với } x = \frac{17\pi}{12} + k2\pi \text{ có nghiệm âm lớn nhất là } x = -\frac{7\pi}{12}$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng } -\frac{\pi}{4}.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Số nghiệm của phương trình trong khoảng  $(-\pi; \pi)$  là hai nghiệm.

$$+ \text{ Với } x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ có } -\pi < -\frac{\pi}{4} + k2\pi < \pi \Leftrightarrow -\frac{3}{8} < k < \frac{5}{8} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4}.$$





+ Với  $x = \frac{17\pi}{12} + k2\pi$  có  $-\pi < \frac{17\pi}{12} + k2\pi < \pi \Leftrightarrow -\frac{29}{24} < k < -\frac{5}{24} \Rightarrow k = -1 \Rightarrow x = -\frac{7\pi}{12}$ .

Số nghiệm của phương trình trong khoảng  $(-\pi; \pi)$  là hai nghiệm.

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 46.** Cho phương trình  $(2 \cos x - 1)(\sin 2x - m) = 0$  (1).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$x = \frac{7\pi}{3}$ là một nghiệm của phương trình (1).		
(b)	Khi $m = 2$ thì phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + l2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$		
(c)	Khi $m = 1$ thì tập nghiệm của phương trình (1) có tất cả 4 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.		
(d)	Chỉ tìm được một giá trị của $m$ để phương trình (1) có đúng hai nghiệm thuộc $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ .		

» **Lời giải**

Ta có  $(2 \cos x - 1)(\sin 2x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin 2x = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ \sin 2x = m \end{cases}$

(a)  $x = \frac{7\pi}{3}$  là một nghiệm của phương trình (1).

Thay  $x = \frac{7\pi}{3}$  phương trình (1) ta thấy thỏa mãn nên  $x = \frac{7\pi}{3}$  là một nghiệm của phương trình (1).

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Khi  $m = 2$  thì phương trình (1)  $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + l2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$

Khi  $m = 2$  thì phương trình (1)  $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$



» **Chọn SAI.**

(c) Khi  $m=1$  thì tập nghiệm của phương trình (1) có tất cả 4 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.

$$\text{Khi } m=1 \text{ phương trình (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ \sin 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + l\pi \end{cases}$$

Do đó tập nghiệm của phương trình (1) có tất cả 4 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Chỉ tìm được một giá trị của  $m$  để phương trình (1) có đúng hai nghiệm thuộc  $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ .

Do phương trình (2) có một nghiệm  $x = \frac{\pi}{3}$  thuộc  $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ .

Do đó để phương trình (1) có đúng hai nghiệm thuộc  $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$  thì phương trình

$\sin 2x = m$  có 1 nghiệm thuộc  $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$  khác  $\frac{\pi}{3}$  (\*)

Ta có  $x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow 2x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$  hay  $2x \in [0; 2\pi]$

Từ (\*) suy ra  $m=1$  hoặc  $m=-1$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 47.** Hằng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu  $h(m)$  của mực nước trong kênh tại thời điểm  $t(h)$  ( $0 \leq t \leq 24$ ) được cho bởi công thức  $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$ .

	<b>Mệnh đề</b>	<b>Đúng</b>	<b>Sai</b>
(a)	Độ sâu của mực nước trong kênh nhỏ nhất bằng $9m$ .		
(b)	Độ sâu của mực nước trong kênh lớn nhất bằng $15m$ .		
(c)	Trong 1 ngày có đúng 3 thời điểm mà độ sâu của mực nước trong kênh đạt giá trị lớn nhất.		
(d)	Độ sâu của mực nước trong kênh tại thời điểm $12(h)$ bằng $13m$ .		

» **Lời giải**

(a) Độ sâu của mực nước trong kênh nhỏ nhất bằng  $9m$ .

Độ sâu của mực nước trong kênh nhỏ nhất khi  $\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3} = (2k+1)\pi$

Thử ta thấy tồn tại  $t = 4, \dots$  thỏa mãn. Khi đó độ sâu là  $9m$ .

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Độ sâu của mực nước trong kênh lớn nhất bằng  $15m$ .

Độ sâu của mực nước trong kênh nhỏ nhất khi



$$\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t = 22 \end{cases}$$

Khi đó độ sâu là 15m.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Trong 1 ngày có đúng 3 thời điểm mà độ sâu của mực nước trong kênh đạt giá trị lớn nhất.

Độ sâu của mực nước trong kênh nhỏ nhất khi

$$\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t = 22 \end{cases}$$

Vậy có hai thời điểm thỏa mãn độ sâu lớn nhất.

» **Chọn SAI.**

(d) Độ sâu của mực nước trong kênh tại thời điểm 12(h) bằng 13m.

Thay  $t = 12(h) \Rightarrow h = 13,5m$ .

» **Chọn SAI.**

### C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 48.** Họ nghiệm phương trình lượng giác:  $\cos(x + 30^\circ) + 1 = 0$  có dạng  $x = a^\circ + k \cdot b^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), với  $a; b$  là các số nguyên. Tính giá trị  $S = b - a$

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 210**

Ta có:  $\cos(x + 30^\circ) + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x + 30^\circ) = -1$

$\Leftrightarrow x + 30^\circ = 180^\circ + k360^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )  $\Leftrightarrow x = 150^\circ + k360^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = 150^\circ + k360^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )  $\Rightarrow \begin{cases} a = 150 \\ b = 360 \end{cases} \Rightarrow S = 210$ .

» **Câu 49.** Phương trình lượng giác:  $\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$  có họ nghiệm dạng  $x = \frac{\pi}{a} + k \frac{\pi}{b}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), với  $a; b$  là các số nguyên. Tính giá trị  $T = a(a + b)$

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 48**

Ta có:  $\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )  $\Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow T = 6(6 + 2) = 48$

» **Câu 50.** Họ nghiệm phương trình lượng giác:  $\sqrt{3} \tan \frac{\pi x}{2} = 3$  có dạng  $x = a^\circ + k \cdot b^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), với  $m; n$  là các số nguyên và  $\frac{m}{n}$  là phân số tối giản. Tính giá trị  $P = m^n$

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 8**

Ta có:  $\sqrt{3} \tan \frac{\pi x}{2} = 3 \Leftrightarrow \tan \frac{\pi x}{2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan \frac{\pi x}{2} = \tan \frac{\pi}{3}$



$$\Leftrightarrow \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} + 2k \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=3 \end{cases} \Rightarrow P = 2^3 = 8$$

» **Câu 51.** Phương trình  $2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2 = 0$  có bao nhiêu nghiệm trên khoảng  $(0; 2\pi)$

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1**

Ta có:  $2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Do  $x \in (0; 2\pi)$  nên  $0 < -\frac{\pi}{3} + k2\pi < 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{6} < k < \frac{7}{6} \Leftrightarrow k = 1$ .

Vậy phương trình có một nghiệm  $x = \frac{5\pi}{3}$ .

» **Câu 52.** Cho phương trình  $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$ . Tìm số nghiệm thuộc khoảng  $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}\right)$  của phương trình.

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 5**

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = -\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{15} + k\frac{4\pi}{5} \\ x = -\frac{5\pi}{9} + k\frac{4\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

+ Với  $x = \frac{\pi}{15} + k\frac{4\pi}{5}$ , ta có:  $\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{15} + k\frac{4\pi}{5} < \frac{8\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < k < \frac{13}{4}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k \in \{1; 2; 3\}$ .

Trường hợp này có 3 nghiệm thỏa mãn là:  $x = \frac{13\pi}{15}, x = \frac{5\pi}{3}, x = \frac{37\pi}{15}$ .

+ Với  $x = -\frac{5\pi}{9} + k\frac{4\pi}{3}$ , tương tự ta có 2 nghiệm thỏa mãn là:  $x = \frac{7\pi}{9}, x = \frac{19\pi}{9}$ .

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm phân biệt thỏa mãn đề bài.

» **Câu 53.** Cho phương trình  $\cos x = \sin 3x$ . Tính tổng các nghiệm thuộc khoảng  $(0; 2\pi)$  của phương trình (làm tròn đến hàng phần chục).

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 15,7**

$$\cos x = \sin 3x \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - 3x + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + 3x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

+ Với  $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ , ta có:  $0 < \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{15}{4}$ , vì  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $k \in \{0; 1; 2; 3\}$ .

Khi đó, các nghiệm thỏa mãn là:  $x = \frac{\pi}{8}, x = \frac{5\pi}{8}, x = \frac{9\pi}{8}, x = \frac{13\pi}{8}$ .

+ Với  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ , tương tự ta có các nghiệm thỏa mãn là:  $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}$ .

Vậy tổng các nghiệm thuộc khoảng  $(0; 2\pi)$  của phương trình đã cho là:



$$\frac{\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} + \frac{9\pi}{8} + \frac{13\pi}{8} + \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = 5\pi \approx 15,7.$$

» **Câu 54.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\cos x = m$  có nghiệm?

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 3**

$$\cos x = m \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1. \text{ Mà } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1\}$$

» **Câu 55.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\sin x - m = 1$  có nghiệm.

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 3**

$$\text{Ta có: } \sin x - m = 1 \Leftrightarrow \sin x = m + 1.$$

$$\text{Điều kiện để phương trình có nghiệm là: } -1 \leq m + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0.$$

Vậy  $-2 \leq m \leq 0$  thỏa mãn đề bài. Có 3 giá trị nguyên của tham số  $m$

» **Câu 56.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $3\sin^2 x + \sin 2x - m \cos^2 x = 0$  có nghiệm.

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1**

$$3\sin^2 x + \sin 2x - m \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow (m-1) \cos x = 3m+2.$$

Trường hợp 1:  $m = 1, \cos x = 2$  (loại).

$$\text{Trường hợp 2: } m \neq 1, \cos x = \frac{3m+2}{m-1}.$$

$$\left| \frac{3m+2}{m-1} \right| \leq 1 \Leftrightarrow (3m-2)^2 - (m-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{2} \leq m \leq \frac{-1}{4}. \text{ Có 1 giá trị nguyên.}$$

» **Câu 57.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  trong đoạn  $[-10; 10]$   $m \tan x + 2 = m$  có nghiệm.

✎ **Lời giải**

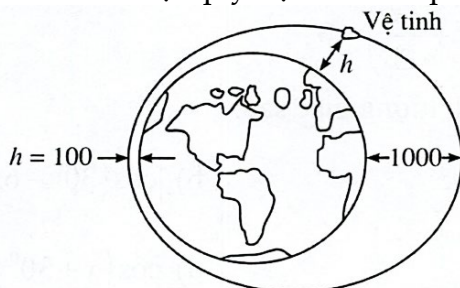
✓ **Trả lời: 20**

$$m \tan x + 2 = m \Leftrightarrow \tan x = \frac{m-2}{m}$$

Điều kiện có nghiệm:  $m \neq 0$ .

Khi đó trong đoạn  $[-10; 10]$  có 20 giá trị nguyên của tham số  $m$

» **Câu 58.** Một vệ tinh bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo hình Elip (như hình vẽ):



Độ cao  $h$  (tính bằng kilômet) của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi công thức  $h = 550 + 450 \cdot \cos \frac{\pi}{50} t$ . Trong đó  $t$  là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo. Người ta cần thực hiện một thí nghiệm khoa học khi vệ tinh cách mặt đất



250 km. Trong khoảng 60 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, hãy tìm thời điểm  $t$  để có thể thực hiện thí nghiệm đó? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 1)

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 36,6**

Ta có phương trình:  $550 + 450 \cdot \cos \frac{\pi}{50} t = 250 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{50} t = -\frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{50} t \approx 2,3 + k2\pi \\ \frac{\pi}{50} t \approx -2,3 + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 36,61 + k100 \\ t \approx -36,61 + k100 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy trong khoảng 60 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, tại thời điểm  $t \approx 36,6$  (phút) thì ta có thể thực hiện thí nghiệm đó.

» **Câu 59.** Mùa xuân ở Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) thường có trò chơi đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động qua lại vị trí cân bằng. Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách  $h$  (mét) được tính từ vị trí chân người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn bởi hệ thức  $h = |d|$  với  $d = 3 \cos \left[ \frac{\pi}{3}(2t-1) \right]$  ( $t \geq 0$  và được tính bằng giây), trong đó ta quy ước  $d > 0$  khi vị trí cân bằng ở về phía sau lưng người chơi đu và  $d < 0$  trong trường hợp ngược lại.



Hỏi trong 3 giây đầu tiên, có tất cả bao nhiêu lần người chơi đu ở cách vị trí cân bằng 1 mét?

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 4**

Người chơi cách vị trí cân bằng 1 mét khi  $3 \cos \left[ \frac{\pi}{3}(2t-1) \right] = \pm 1$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \left[ \frac{\pi}{3}(2t-1) \right] = \frac{8}{9} \Leftrightarrow 1 - \cos \left[ \frac{2\pi}{3}(2t-1) \right] = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \cos \left[ \frac{2\pi}{3}(2t-1) \right] = -\frac{7}{9}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{3}(2t-1) = \alpha + k2\pi \\ \frac{2\pi}{3}(2t-1) = -\alpha + k2\pi \end{cases} \left( \text{với } k \in \mathbb{Z} \text{ và } \cos \alpha = -\frac{7}{9} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3\alpha}{4\pi} + \frac{1}{2} + \frac{3k}{2} \\ t = -\frac{3\alpha}{4\pi} + \frac{1}{2} + \frac{3k}{2} \end{cases}$$

Trong 3 giây đầu tiên ứng với  $0 \leq t \leq 3$ :

+) Với  $t = \frac{3\alpha}{4\pi} + \frac{1}{2} + \frac{3k}{2}$  thì  $0 \leq \frac{3\alpha}{4\pi} + \frac{1}{2} + \frac{3k}{2} \leq 3 \Rightarrow -0,73 \leq k \leq 1,27 \Rightarrow k \in \{0; 1\}$ .

+) Với  $t = -\frac{3\alpha}{4\pi} + \frac{1}{2} + \frac{3k}{2}$  thì  $0 \leq -\frac{3\alpha}{4\pi} + \frac{1}{2} + \frac{3k}{2} \leq 3 \Rightarrow 0,06 \leq k \leq 2,06 \Rightarrow k \in \{1; 2\}$ .

Vậy trong 3 giây đầu tiên, có 4 lần người chơi ở cách vị trí cân bằng 1 mét.



» **Câu 60.** Trong môn cầu lông, khi phát cầu, người chơi cần đánh cầu qua lưới sang phía sân đối phương và không được để cho cầu rơi ngoài biên.

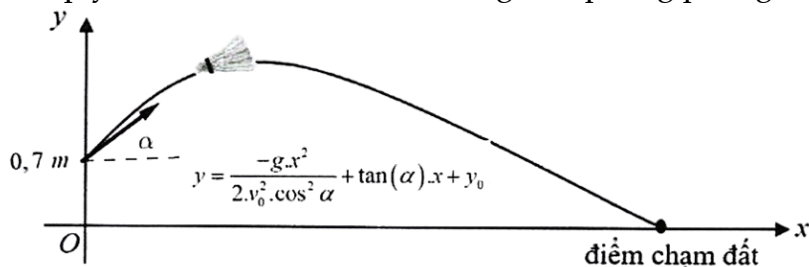
Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , chọn điểm có tọa độ  $(O; y_0)$  là điểm xuất phát thì phương trình quỹ đạo của cầu lông khi rời khỏi mặt vợt là:

$$y = \frac{-g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + x \cdot \tan(\alpha) + y_0$$

Trong đó:

- »  $g$  là gia tốc trọng trường (thường được chọn là  $9,8 m/s^2$ );
- »  $\alpha$  là góc phát cầu (so với phương ngang của mặt đất);
- »  $v_0$  là vận tốc ban đầu của cầu;
- »  $y_0$  là khoảng cách từ vị trí phát cầu đến mặt đất.

Đây là một hàm số bậc hai nên quỹ đạo chuyển động của cầu lông là một parabol. Một người chơi cầu lông đang đứng khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa) là  $6,68 m$ . Quan sát hình bên dưới, hỏi người chơi đã phát cầu góc khoảng bao nhiêu độ so với mặt đất? Biết cầu rời mặt vợt ở độ cao  $0,7 m$  so với mặt đất; vận tốc xuất phát của cầu là  $8 m/s$ ; người chơi không phát cầu quá  $50^\circ$  và bỏ qua sức cản của gió và xem quỹ đạo của cầu luôn nằm trong mặt phẳng phẳng đứng).



» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 30**

Với  $g = 9,8 m/s^2$ , vận tốc ban đầu  $v_0 = 8 m/s$ , phương trình quỹ đạo của cầu:

$$y = \frac{-g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + \tan(\alpha) \cdot x + y_0$$

Khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa) là  $6,68 m$ ; nghĩa là  $x = 6,68 m$ .

$$\text{Ta có } \frac{-9,8 \cdot (6,68)^2}{128 \cdot \cos^2 \alpha} + \tan(\alpha) \cdot (6,68) + 0,7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-9,8 \cdot (6,68)^2}{128} (1 + \tan^2 \alpha) + \tan(\alpha) \cdot (6,68) + 0,7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan \alpha \approx 1,378 \\ \tan \alpha \approx 0,576 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \approx 54,04^\circ \\ \alpha \approx 29,97^\circ \end{cases}$$

Vậy người chơi đã phát cầu một góc gần  $54^\circ$  hoặc gần  $30^\circ$  so với mặt đất.

----- Hết -----