

Câu 1 (6.0 điểm).

a) Giải phương trình $x^4 - 6x^2 - 20x - 24 = 0$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2 - (y+2)x^2 + y - 2 = 0 \\ (2-x)(3y-4x+4) = 2(2y+1)\sqrt{2y+1}. \end{cases}$$

Câu 2 (3.0 điểm).

a) Cho x, y, z là các số nguyên thỏa mãn đẳng thức $xy - yz - zx = 3$. Chứng minh $A = (x^2 - 2xz - 3)(y^2 - 2yz - 3)(-z^2 - 3)$ là một số chính phương.

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $3x^3 + 73xy + 2025 = 3y^3$

Câu 3 (2.0 điểm). Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 8 thỏa

mãn $\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{b+c-a} = \frac{5}{4}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{(4-a)^2}{(4-b)(4-c)} + \frac{(4-b)^2}{(4-c)(4-a)} + \frac{(4-c)^2}{(4-a)(4-b)}.$$

Câu 4 (7.0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có $AB < BC < CA$, nội tiếp đường tròn (O) .

Các đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . Tia AD cắt đường tròn (O) tại điểm G , tia GE cắt đường tròn (O) tại điểm I (G khác A và I khác G). Gọi J là giao điểm của BI và EF , K là giao điểm của OA và EF .

a) Chứng minh $HF \cdot CE \cdot BC = HC \cdot BF \cdot EF$.

b) Chứng minh $JE = JF$ và $HJ \parallel DK$.

c) Gọi P là điểm đối xứng với O qua đường thẳng CF , Q là điểm đối xứng với O qua đường thẳng BE và N là trung điểm của đoạn thẳng PQ . Chứng minh $NJ \perp EF$.

Câu 5 (2.0 điểm). Cho lục giác đều có cạnh bằng 6 cm. Hỏi có thể đặt vào trong lục giác đó 7 hình tròn có bán kính bằng 2 cm, sao cho bất kì hai hình tròn nào trong 7 hình tròn đó không có điểm chung?

Đáp án đề thi vào lớp 10 môn Toán chuyên Phan Bội Châu Nghệ An năm 2024

NGUYỄN NHẬT HUY – VÕ TRỌNG KHẢI

NGÀY 9 THÁNG 6 NĂM 2024

Câu 1

a) Giải phương trình $x^4 - 6x^2 - 20x - 24 = 0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 - (y+2)x^2 + y - 2 = 0, \\ (2-x)(3y-4x+4) = 2(2y+1)\sqrt{2y+1}. \end{cases}$

Lời giải.

a) Ta biến đổi phương trình như sau

$$\begin{aligned} x^4 - 6x^2 - 20x - 24 = 0 &\Leftrightarrow (x^2 - 2x - 6)(x^2 + 2x + 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 6 = 0 \text{ (Vì } x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 > 3 > 0) \\ &\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{7}, x = 1 + \sqrt{7}. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $x \in \{1 + \sqrt{7}, 1 - \sqrt{7}\}$.

b) Ta ký hiệu

$$\begin{cases} y^2 - (y+2)x^2 + y - 2 = 0, & (1) \\ (2-x)(3y-4x+4) = 2(2y+1)\sqrt{2y+1} & (2). \end{cases}$$

Ta biến đổi phương trình (1) như sau

$$\begin{aligned} y^2 - (y+2)x^2 + y - 2 = 0 &\Leftrightarrow (y+2)(y-1-x^2) \\ &\Leftrightarrow y \in \{-2, 1+x^2\} \\ &\Rightarrow y = 1+x^2 \left(\text{Vì } y \geq -\frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Thay $y = x^2 + 1$. Thay vào (2), ta có:

$$(2) \Leftrightarrow (2-x)(3x^2 - 4x + 7) = 2(2x^2 + 3)\sqrt{2x^2 + 3}(3)$$

Đặt $x-2=a, \sqrt{2x^2+3}=b \ (b \geq \sqrt{3})$. Ta biến đổi (3) như sau

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow (2-x)(x-2)^2 + 2x^2 + 3 = 2(2x^2 + 3)\sqrt{2x^2 + 3} \\ &\Leftrightarrow -a(a^2 + b^2) = 2b^3 \\ &\Leftrightarrow a^3 + ab^2 + 2b^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + 2b^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow a+b=0 \text{ (Vì } a^2 - ab + 2b^2 > b^2 > 0.) \\ &\Leftrightarrow x-2 + \sqrt{2x^2+3} = 0 \\ &\Rightarrow (x-2)^2 = 2x^2 + 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \{-2 - \sqrt{5}, \sqrt{5} - 2\} \\ &\Rightarrow (x, y) \in \{(-2 - \sqrt{5}, 10 + 4\sqrt{5}), (\sqrt{5} - 2, 10 - 4\sqrt{5})\}. \end{aligned}$$

Thử lại các nghiệm trên đều thỏa mãn.

Vậy tất cả cặp (x, y) thỏa mãn là $\{(-2 - \sqrt{5}, 10 + 4\sqrt{5}); (\sqrt{5} - 2, 10 - 4\sqrt{5})\}$.



Câu 2

- a) Cho x, y, z là các số nguyên thoả mãn đẳng thức $xy - yz - zx = 3$. Chứng minh $A = (x^2 - 2xz - 3)(y^2 - 2yz - 3)(-z^2 - 3)$ là một số chính phương.
- b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $3x^3 + 73xy + 2025 = 3y^3$.

Lời giải.

- a) Theo giả thiết, thay $3 = xy - yz - zx$ vào biểu thức, ta có biến đổi như sau

$$\begin{aligned} A &= (x^2 - 2xz - 3)(y^2 - 2yz - 3)(-z^2 - 3) \\ &= (x^2 - xz - xy + yz)(y^2 - yz - xy + zx)(-z^2 - xy + yz + zx) \\ &= (x - z)(x - y)(y - z)(y - x)(x - z)(z - y) \\ &= ((x - y)(y - z)(z - x))^2. \end{aligned}$$

Vì x, y, z là các số nguyên nên $(x - y)(y - z)(z - x)$ là số nguyên.

Do đó A là số chính phương. Bài toán được chứng minh.

- b) Giả sử tồn tại x, y nguyên thoả mãn bài toán.
Đặt $y = x + d$ ta biến đổi phương trình như sau

$$\begin{aligned} 3x^3 + 73xy + 2025 &= 3y^3 \Leftrightarrow 3(3d^2x + 3dx^2 + d^3) = 73x(x + d) + 2025 \\ &\Leftrightarrow x^2(9d - 73) + x(9d^2 - 73d) + 3d^3 - 2025 = 0. \end{aligned}$$

Xem như phương trình bậc 2 ẩn x , ta xét biệt thức Δ

$$\begin{aligned} \Delta &= (9d^2 - 73d)^2 - 4(9d - 73)(3d^3 - 2025) \\ &= (9d - 73)(d^2(9d - 73) - 4(3d^3 - 2025)) \\ &= (9d - 73)(-3d^3 - 73d^2 + 2025 \cdot 4) \\ &= (9d - 73)(9 - d)(3d^2 + 100d + 900). \end{aligned}$$

Vì $3d^2 + 100d + 900 = 3\left(d + \frac{50}{3}\right)^2 + \frac{200}{3} > 0$ mà $\Delta \geq 0$ ta được $\frac{73}{9} \leq d \leq 9$ suy ra $d = 9$.

Thay vào phương trình, ta được

$$8x^2 + 72x + 162 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{2} \notin \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình vô nghiệm nguyên.



Ý b) là bài số học hay, tuy nhiên vì số quá lớn nặng tính tính toán cũng như khi xét đồng dư sẽ phải chia quá nhiều trường hợp nên không phù hợp. Ta có bài toán tương tự sau ở trang 394 trong sách "**Một số chủ đề Số Học - Hướng tới kỳ thi HSG & Chuyên Toán**"

Tìm các số nguyên x, y thoả mãn $x^3 = 4y^3 + x^2y + y + 1$.



Câu 3 Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 8 thỏa mãn $\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{b+c-a} = \frac{5}{4}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{(4-a)^2}{(4-b)(4-c)} + \frac{(4-b)^2}{(4-c)(4-a)} + \frac{(4-c)^2}{(4-a)(4-b)}.$$

Lời giải. Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$ và $a + b + c = 8$ nên ta được $a, b, c < 4$. Đặt $x = 4 - a$, $y = 4 - b$, $z = 4 - c$ suy ra $x + y + z = 4$ và $4 > x, y, z > 0$ viết lại giả thiết thành

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{b+c-a} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{5}{2}.$$

Biến đổi biểu thức ta được

$$\begin{aligned} P &= \frac{(4-a)^2}{(4-b)(4-c)} + \frac{(4-b)^2}{(4-c)(4-a)} + \frac{(4-c)^2}{(4-a)(4-b)} \\ &= \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{xz} + \frac{z^2}{xy} \\ &= \frac{(x+y+z)^3 - 3(x+y+z)(xy+yz+zx) + 3xyz}{xyz} \\ &= \frac{64}{xyz} - 27. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwart

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} - \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &\geq \frac{4}{x+y} = \frac{4}{4-z} \Leftrightarrow (z-2)(5z-4) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4}{5} \leq z \leq 2. \end{aligned}$$

Tương tự, ta được

$$\frac{4}{5} \leq x, y, z \leq 2.$$

Khi đó, $(2-x)(2-y)(2-z) \geq 0$ và $(5x-4)(5y-4)(5z-4) \geq 0$ và $xy + yz + xz = \frac{5}{2}xyz$, ta được

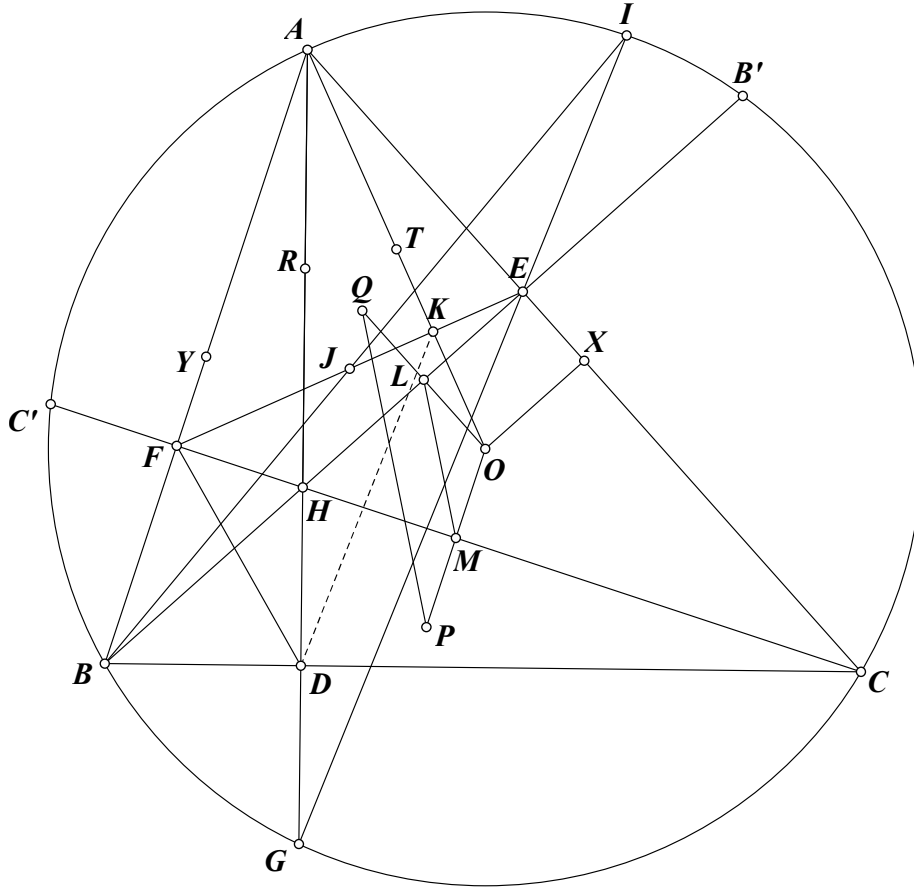
$$2 \leq xyz \leq \frac{256}{125}.$$

Khi đó ta được $\frac{17}{4} \leq P \leq 5$. Giá trị lớn nhất của $P = 5$ dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ hay $(a, b, c) = (3, 3, 2)$. ▽

! Ở bài toán này không những chúng ta có thể tìm được giá trị lớn nhất mà còn có thể tìm được giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{17}{4}$ thông qua cách làm này với dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $(x, y, z) = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \frac{8}{5}\right)$ hay $(a, b, c) = \left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}, \frac{12}{5}\right)$. ◀

Câu 4 Cho tam giác nhọn ABC có $AB < BC < CA$, nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . Tia AD cắt đường tròn (O) tại điểm G , tia GE cắt đường tròn (O) tại điểm I (G khác A và I khác G). Gọi J là giao điểm của BI và EF , K là giao điểm của OA và EF .

- Chứng minh $HF \cdot CE \cdot BC = HE \cdot BF \cdot EF$.
- Chứng minh $JE = JF$ và $HJ \parallel DK$.
- Gọi P là điểm đối xứng với O qua đường thẳng CF , Q là điểm đối xứng với O qua đường thẳng BE và N là trung điểm của đoạn thẳng PQ . Chứng minh $NJ \perp EF$.



Lời giải.

- Ta có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$, dẫn đến tứ giác $CEFB$ nội tiếp, suy ra

$$\widehat{HEF} = \widehat{HCB}, \widehat{FBH} = \widehat{ECH}.$$

Từ đây ta suy ra $\triangle HEF \sim \triangle HBC$ (g.g) dẫn đến $\frac{EF}{BC} = \frac{HF}{HB}$.

Ta có biến đổi sau

$$\begin{aligned} EF \cdot HB &= BC \cdot HF \Rightarrow EF \cdot HB = BC \cdot HF \\ &\Rightarrow HF \cdot BC \cdot CE = EF \cdot HB \cdot CE. \end{aligned}$$

Do đó để hoàn tất chứng minh, ta cần chỉ ra

$$EF \cdot HB \cdot CE = HC \cdot EF \cdot BF \Leftrightarrow HB \cdot CE = HC \cdot BF.$$

Ta cũng có $\triangle FHB \sim \triangle EHC$ (g.g) suy ra $\frac{HB}{BF} = \frac{HC}{CE}$ hay $HC \cdot BF = CE \cdot HB$.
 Bài toán được chứng minh.

- b) Gọi R là trung điểm AH , J' là trung điểm EF . Vì $\widehat{AFH} + \widehat{AEH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên tứ giác $AEHF$ nội tiếp, dẫn đến $\widehat{BAH} = \widehat{BEF}$ suy ra $\triangle BAH \sim \triangle BEF$ (g.g).
 Khi đó, ta được

$$\frac{BH}{HA} = \frac{BF}{FE} \Rightarrow \frac{BH}{HR} = \frac{BF}{FJ'},$$

mà $\widehat{BFJ'} = \widehat{BHR}$, nên $\triangle BFJ' \sim \triangle BHR$ (c.g.c) suy ra $\widehat{RBH} = \widehat{ABJ'}$. Ta có

$$HA \cdot HD = HB \cdot HE \Rightarrow 2HR \cdot HD = HB \cdot HE$$

$$\Rightarrow HR \cdot HG = HB \cdot HE \quad (\text{Vì } H, G \text{ đối xứng với nhau qua } BC).$$

Từ đây ta có $RBGE$ nội tiếp, dẫn đến

$$\widehat{ABJ'} = \widehat{RBH} = \widehat{HGE} = \widehat{AGI} = \widehat{ABI} = \widehat{ABJ},$$

do đó $J \equiv J'$, Hay J là trung điểm EF . Gọi T là trực tâm tam giác AEF . Ta có $HETF$ là hình bình hành, T thuộc AO . Ta cũng có $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (c.g.c). Từ đây suy ra

$$\frac{AH}{AD} = \frac{AT}{AK}.$$

Theo định lý Thales đảo, ta được $HT \parallel DK$ hay $HJ \parallel DK$. Bài toán được chứng minh.

- c) Gọi giao điểm của HB, HC với (O) lần lượt là B', C' . OP cắt CF tại M , OQ cắt BE tại L . Gọi X, Y lần lượt là trung điểm của AC, AB . Lúc này ta có

$$\begin{aligned} OY = FM = \frac{CH}{2} &\Rightarrow CM = CF - FM = CF - \frac{CH}{2} \\ &= FH + \frac{CH}{2} \\ &= \frac{C'H}{2} + \frac{CH}{2} \\ &= \frac{CC'}{2}. \end{aligned}$$

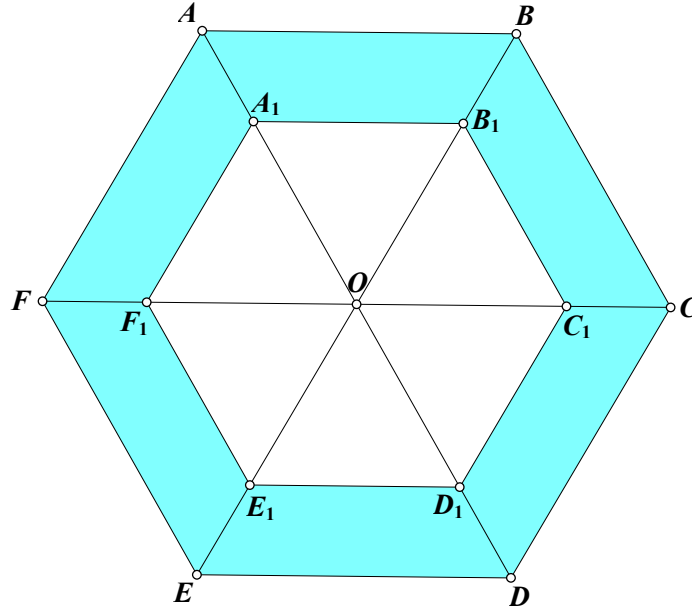
Vì vậy M là trung điểm CC' , tương tự L là trung điểm BB' . Lại có NL là đường trung bình ứng với đỉnh Q của tam giác QPO suy ra $NL = \frac{OP}{2} = MO$; $LEXO$ là hình chữ nhật suy ra $LE = OX$ và $LE \parallel OX, LN \parallel OM \Rightarrow \widehat{NLE} = \widehat{MOX}$.

Từ đây ta suy ra $\triangle NLE = \triangle MOX$ (c.g.c) suy ra $NE = MX = \frac{AC'}{2}$.

Tương tự thì $NF = \frac{AB'}{2}$. Mặt khác $\widehat{ABE} = \widehat{ACF}$ dẫn đến $AB' = AC'$, hay $NE = NF$ và ta rút ra được $NJ \perp EF$.

▽

Câu 5 Cho lục giác đều có cạnh bằng 6cm . Hỏi có thể đặt vào trong lục giác đó 7 hình tròn có bán kính bằng 2cm , sao cho bất kì hai hình tròn nào trong 7 hình tròn đó không có điểm trong chung ?



Lời giải. Ta chứng minh kết quả của bài toán là phủ định, thật vậy Xét hình lục giác đều $ABCDEF$, tâm O có cạnh bằng 6. Giả sử có thể đặt vào trong hình lục giác đó 7 hình tròn có bán kính bằng 2.

Lấy các điểm $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ trên OA, OB, OC, OD, OE, OF thỏa mãn:

$OA_1 = OB_1 = OC_1 = OD_1 = OE_1 = OF_1 = 3,9$. Gọi O_i là tâm của đường tròn thứ i . Ký hiệu S là vùng diện tích được tạo bởi các điểm $A, A_1, B, B_1, \dots, F, F_1$ (được tô bởi màu xanh lam).

Nhận xét. O_i không thuộc S với mọi $i = 1, 2, \dots, 7$.

Chứng minh. Giả sử có O_1 thuộc S , và O_1 thuộc miền ABB_1A_1 . Lúc này, ta có

$$d(O_1, AB) = d(A_1B_1, AB) < AA_1 \cdot \sin 60^\circ < 2.$$

(ký hiệu $d(AB, A_1B_1)$ là khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB, A_1B_1).

Dẫn đến $(O_1, 2)$ không nằm trọn vẹn trong lục giác $ABCDEF$ (vô lý).

Tại vì $(O_i, 2), (O_j, 2)$ không có điểm trong chung với mọi i, j nên ta có $O_iO_j \geq 4$ với mọi i, j .

Ta chia hình lục giác $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ thành 6 hình tam giác đều có cạnh bằng 3,9

$$OA_1B_1, \dots, OF_1A_1.$$

Theo nguyên lý đi-rích-lê, tồn tại O_i, O_j cùng thuộc 1 hình tam giác, giả sử là OA_1B_1 .

Lúc này, áp dụng định lý cosin cho tam giác OO_iO_j , ta có

$$O_iO_j^2 = OO_i^2 + OO_j^2 - 2 \cos \widehat{OO_iO_j} \cdot OO_i \cdot OO_j \leq OO_i^2 + OO_j^2 - OO_i \cdot OO_j. (1)$$

Để chỉ ra điều vô lý, ta đặt $OO_i = x, OO_j = y (x, y \leq 3,9)$. Lúc này

$$x^2 + y^2 - xy \leq 3,9x + 3,9y - xy = 3,9^2 - (x - 3,9)(y - 3,9) \leq 3,9^2.$$

Từ đây kết hợp với (1) và $O_iO_j \geq 4$. Ta suy ra $4^2 \leq 3,9^2$ (vô lý).

Ta có điều phải chứng minh. ▽