

LỜI GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 THÀNH PHỐ HÀ NỘI 2024

Võ Quốc Bá Cẩn – Nguyễn Lê Phước – Nguyễn Tiên Dũng – Trần Đức Hiếu
Trần Quang Độ – Phan Quang Linh – Phạm Duy Nguyễn Lâm

1. Đề thi

Bài 1 (5.0 điểm).

- a) Giải phương trình

$$7x + 3 = (2x + 3)\sqrt{x + 3}.$$

- b) Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 0$ và $x + 2y + 3z = 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + z^2.$$

Bài 2 (5.0 điểm).

- a) Cho ba số nguyên a, b, c thỏa mãn $a + b + c$ và $ab + bc + ca$ đều chia hết cho 8. Chứng minh rằng abc chia hết cho 64.
- b) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y lớn hơn 1 sao cho $(x + y)(y + 1) - 1$ chia hết cho $x^2 + xy + 1$.

Bài 3 (2.0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{3c + ab + abc} + \frac{bc}{3a + bc + abc} + \frac{ca}{3b + ca + abc} \geq \frac{3}{5}.$$

Bài 4 (6.0 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , có H là trực tâm. Gọi O' là điểm đối xứng với điểm O qua đường thẳng BC . Đường thẳng đi qua điểm H vuông góc với đường thẳng HO' cắt các đường thẳng AB và AC theo thứ tự tại M, N . Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN .

- a) Chứng minh rằng O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC .
- b) Chứng minh rằng ba điểm A, H, I thẳng hàng.
- c) Gọi P là giao điểm thứ hai của đường thẳng AH và đường tròn (O) ; Q là giao điểm của hai đường thẳng OP và BC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai R . Chứng minh rằng đường thẳng QR song song với đường thẳng OI .

Bài 5 (2.0 điểm).

- a) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn

$$a^4 + 6a^2 + 2^b = c^2.$$

- b) Xét số nguyên $n > 100$ thỏa mãn tồn tại tập hợp S gồm n số thực dương sao cho với mỗi phần tử x của tập S đều tồn tại 100 phần tử khác x của tập S có tích bằng x . Hỏi, n nhỏ nhất bằng nhiêu?

2. Lời giải và bình luận các bài toán

Bài 1 (5.0 điểm).

a) Giải phương trình

$$7x + 3 = (2x + 3)\sqrt{x + 3}.$$

b) Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 0$ và $x + 2y + 3z = 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + z^2.$$

Lời giải. a) Điều kiện: $x \geq -3$. Từ phương trình, ta có $(7x + 3)^2 = (2x + 3)^2(x + 3)$, hay $(x - 1)(x - 6)(4x + 3) = 0$. Từ đó $x \in \{1, 6, -\frac{3}{4}\}$. Tuy nhiên, khi thử lại, chỉ có $x = 1$ và $x = 6$ thỏa mãn. Vậy, tập nghiệm của phương trình là $S = \{1, 6\}$.

b) Do $x + 2y + 3z = 0$ nên $x = -2y - 3z$. Mà $xy + yz + zx = 0$ nên $-(y + z)(2y + 3z) + yz = 0$, hay $2y^2 + 4yz + 3z^2 = 0$. Một cách tương đương, ta có $2(y + z)^2 + z^2 = 0$. Suy ra $y + z = z = 0$, tức $y = z = 0$. Từ đó $x = 0$. Vậy $P = x^2 + y^2 + z^2 = 0$. $\square$

Bài 2 (5.0 điểm).

a) Cho ba số nguyên a, b, c thỏa mãn $a + b + c$ và $ab + bc + ca$ đều chia hết cho 8. Chứng minh rằng abc chia hết cho 64.

b) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y lớn hơn 1 sao cho $(x + y)(y + 1) - 1$ chia hết cho $x^2 + xy + 1$.

Lời giải. a) Trong ba số a, b, c có hai số cùng tính chẵn lẻ. Không mất tính tổng quát, giả sử là a và b , suy ra $a + b$ chia hết cho 2. Mà $a + b + c$ chia hết cho 8 nên c chẵn. Từ đó $c(a + b)$ chia hết cho 4. Mà $ab + bc + ca$ chia hết cho 8 nên ab chia hết cho 4. Kết hợp với a, b cùng tính chẵn lẻ, ta suy ra a, b cùng chẵn.

Đặt $a = 2x, b = 2y, c = 2z$ với x, y, z nguyên. Từ giả thiết, ta suy ra $x + y + z$ chia hết cho 4 và $xy + yz + zx$ chia hết cho 2. Chứng minh tương tự như trên, ta có x, y, z cùng chẵn. Suy ra a, b, c cùng chia hết cho 4. Từ đó abc chia hết cho 64. Ta có điều phải chứng minh.

b) Giả sử tồn tại hai số nguyên x, y lớn hơn 1 sao cho $(x + y)(y + 1) - 1$ chia hết cho $x^2 + xy + 1$. Khi đó $(x + y)(y + 1) - 1 + (x^2 + xy + 1) = (x + y)(x + y + 1)$ chia hết cho $x^2 + xy + 1$. Mà $x + y$ và $x^2 + xy + 1$ nguyên tố cùng nhau nên $x + y + 1$ chia hết cho $x^2 + xy + 1$, mâu thuẫn vì $x^2 + xy + 1 > x + y + 1 > 0$. Vậy, không tồn tại hai số nguyên x, y lớn hơn 1 sao cho $(x + y)(y + 1) - 1$ chia hết cho $x^2 + xy + 1$. $\square$

Bài 3 (2.0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{3c + ab + abc} + \frac{bc}{3a + bc + abc} + \frac{ca}{3b + ca + abc} \geq \frac{3}{5}.$$

Lời giải. Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}$ và $z = \frac{1}{c}$, khi đó từ giả thiết, ta có $xy + yz + zx = 3$. Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết được lại thành

$$\frac{x}{x + 3yz + 1} + \frac{y}{y + 3zx + 1} + \frac{z}{z + 3xy + 1} \geq \frac{3}{5}. \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} VT_{(1)} &= \frac{x^2}{x^2 + 3xyz + x} + \frac{y^2}{y^2 + 3xyz + y} + \frac{z^2}{z^2 + 3xyz + z} \\ &\geq \frac{(x + y + z)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 9xyz + x + y + z}. \end{aligned}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM, ta lại có

$$(x + y + z)(xy + yz + zx) \geq 3\sqrt[3]{xyz} \cdot 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 9xyz.$$

Suy ra $3xyz \leq x + y + z$. Ta cũng có $3 = xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$ nên $xyz \leq 1$, từ đó

$$9xyz = 6xyz + 3xyz \leq 6 + x + y + z = 2(xy + yz + zx) + x + y + z.$$

Kết hợp với bất đẳng thức trên, ta được

$$VT_{(1)} \geq \frac{(x + y + z)^2}{(x + y + z)^2 + 2(x + y + z)} = \frac{x + y + z}{x + y + z + 2}.$$

Lại có $(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx) = \frac{1}{2}[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] \geq 0$ nên $x + y + z \geq 3$.

Kết hợp với bất đẳng thức ở trên, ta được

$$VT_{(1)} \geq \frac{x + Y + z}{x + y + z + \frac{2}{3}(x + y + z)} = \frac{3}{5}.$$

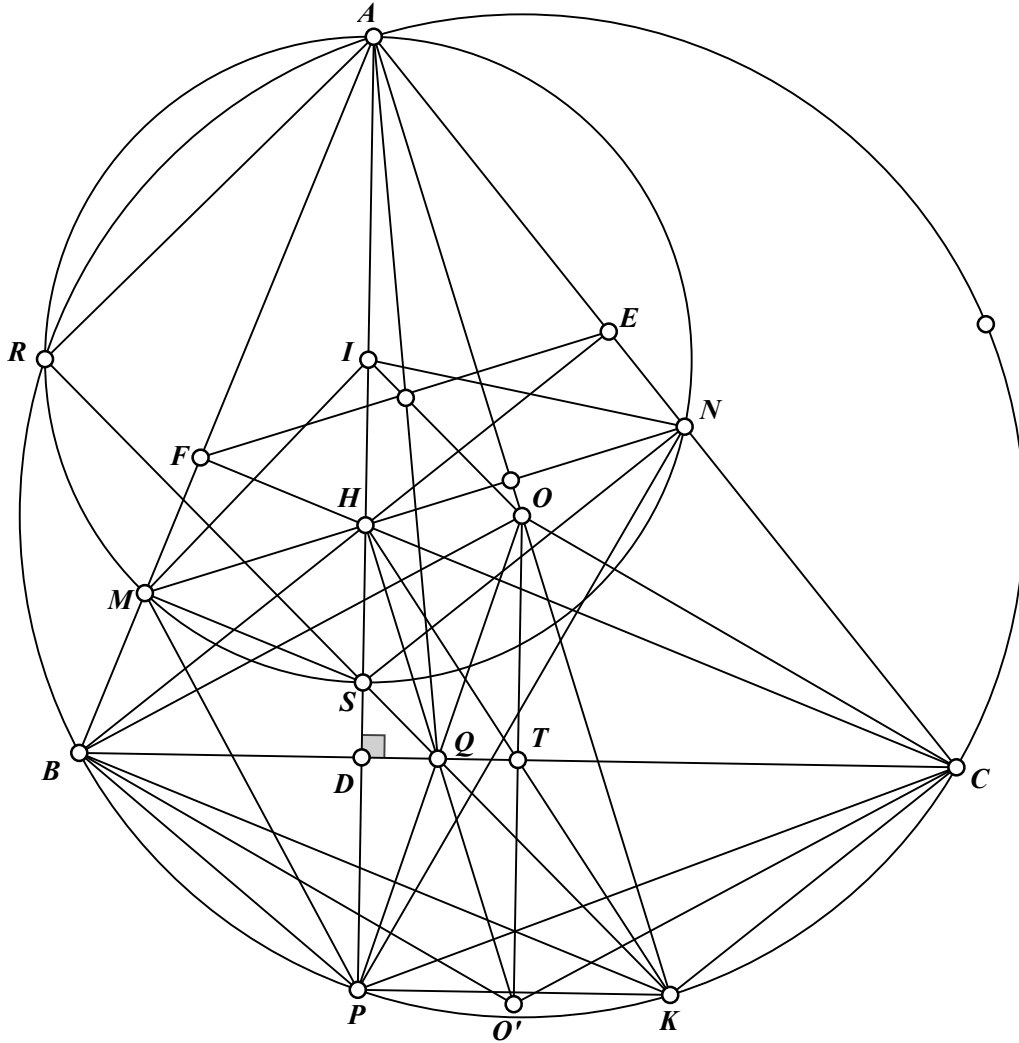
Ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Bài 4 (6.0 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , có H là trực tâm. Gọi O' là điểm đối xứng với điểm O qua đường thẳng BC . Đường thẳng đi qua điểm H vuông góc với đường thẳng HO' cắt các đường thẳng AB và AC theo thứ tự tại M, N . Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN .

- Chứng minh rằng O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC .
- Chứng minh rằng ba điểm A, H, I thẳng hàng.
- Gọi P là giao điểm thứ hai của đường thẳng AH và đường tròn (O) ; Q là giao điểm của hai đường thẳng OP và BC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai R . Chứng minh rằng đường thẳng QR song song với đường thẳng OI .

Lời giải. a) Kẻ đường kính AK của đường tròn (O) . Khi đó, ta có $\angle ABK = \angle ACK = 90^\circ$, nên $BK \parallel CH$ và $CK \parallel BH$. Từ đó, tứ giác $BHCK$ là hình bình hành, suy ra hai đoạn thẳng BC và HK có chung trung điểm T . Do điểm O' đối xứng với điểm O qua đường thẳng BC nên đường thẳng OO' vuông góc với đường thẳng BC , suy ra OO' là đường trung trực của đoạn thẳng BC . Mà BC là đường trung trực của đoạn thẳng OO' nên tứ giác $BOCO'$ là hình thoi. Suy ra $O'B = O'C = OB = OC = R$.

Lại có T là trung điểm của hai đoạn thẳng HK và OO' nên tứ giác $OHO'K$ là hình bình hành. Suy ra $O'H = OK = R$. Từ đây, ta có $O'B = O'C = O'H = R$, suy ra O' là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC .



b) Dễ dàng chứng minh được bổ đề sau: *Cho tam giác ABC nhọn, không cân, có đường cao AD, nội tiếp đường tròn (O). Khi đó $\angle AOC = 2\angle ABC$ và $\angle OAC = 90^\circ - \angle ABC = \angle BAD$.*

Trở lại bài toán: Do $AO \parallel HO'$ (vì $OK \parallel HO'$) và $MN \perp HO'$ nên $AO \perp MN$. Mà $IA = IM = IN$ nên theo bổ đề thì $\angle NAO = 90^\circ - \angle ANM = \angle IAM$.

Lại áp dụng bổ đề, ta có $\angle OAC = 90^\circ - \angle ABC = \angle BAD$. Suy ra $\angle ANM = \angle ABC$ và $\angle BAD = \angle IAM$. Do đó hai tia AI và AD trùng nhau, suy ra ba điểm A, I, H thẳng hàng.

c) Gọi AS là đường kính của đường tròn (I), khi đó $\angle AMS = \angle ANS = \angle ARS = 90^\circ$. Lại có $\angle ARK = 90^\circ$ nên ba điểm R, S, K thẳng hàng.

Ta có $\angle APK = 90^\circ$ nên $PK \parallel DT$. Mà T là trung điểm của đoạn thẳng HK nên D là trung điểm của đoạn thẳng HP. Suy ra $\angle QHP = \angle QPH = \angle OPA = \angle OAP$, từ đó $HQ \parallel AO$.

Ta có $\angle ABC = 90^\circ - \angle BCF = \angle CHD = \angle CPD$. Mà $\angle ABC = \angle ANM$ nên $\angle CPD = \angle ANM$, suy ra $\triangle ANH \sim \triangle APC$ (g-g). Từ đó $\triangle ANP \sim \triangle AHC$ (c-g-c), suy ra

$$\angle APN = \angle ACH = 90^\circ - \angle BAC = \angle INM \text{ (theo bổ đề trên).}$$

Từ đó $\triangle INH \sim \triangle IPN$ (g-g), suy ra $IH \cdot IP = IN^2 = IS \cdot IA$. Từ đó $\frac{IS}{IP} = \frac{IH}{IA} = \frac{IH+IA}{IP+IA} = \frac{AH}{AP}$, mà $HQ \parallel AO$ nên $\frac{AH}{AP} = \frac{OQ}{OP}$. Suy ra $\frac{IS}{IP} = \frac{OQ}{OP}$, từ đó $QS \parallel OI$. Mà $OI \parallel SK$ (theo tính chất đường trung bình) nên ba điểm S, Q, K thẳng hàng, mà ba điểm R, S, K thẳng hàng nên bốn điểm R, S, Q, K thẳng hàng. Suy ra $QR \parallel OI$. $\square$

Bài 5 (2.0 điểm).a) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn

$$a^4 + 6a^2 + 2^b = c^2.$$

b) Xét số nguyên $n > 100$ thỏa mãn tồn tại tập hợp S gồm n số thực dương sao cho với mỗi phần tử x của tập S đều tồn tại 100 phần tử khác x của tập S có tích bằng x . Hỏi, n nhỏ nhất bằng nhiêu?**Lời giải.** a) Đặt $a = 2^k t$ với k tự nhiên và t là số nguyên dương lẻ. Xét các trường hợp sau.**Trường hợp 1: b chẵn.** Nếu $k = 0$, thì a lẻ, suy ra $a^2 \equiv 1 \pmod{4}$. Lúc này $c^2 = a^4 + 6a^2 + 2^b$ chia 4 dư 3, mâu thuẫn vì số dư khi chia một số chính phương cho 4 phải là 0 hoặc 1. Do đó $k > 0$.Nếu $b > 2k + 1$, thì ta có $a^4 + 6a^2 + 2^b = 2^{4k} t^4 + 3 \cdot 2^{2k+1} t^2 + 2^b = 2^{2k+1} (2^{2k-1} t^4 + 3t^2 + 2^{b-2k-1})$ chia hết cho 2^{2k+1} nhưng không chia hết cho 2^{2k+2} . Do đó $a^4 + 6a^2 + 2^b$ không thể là số chính phương, mâu thuẫn. Như vậy, ta phải có $b \leq 2k + 1$. Mà b là số chẵn nên $b < 2k + 1$.Đặt $b = 2n$ với n nguyên dương và $n \leq k$. Từ giả thiết, ta có

$$A = \frac{c^2}{2^{2n}} = 2^{4k-2n} t^4 + 3 \cdot 2^{2k-2n+1} t^2 + 1$$

là số chính phương. Ta có $A > 2^{4k-2n} t^4 = (2^{2k-n} t^2)^2$. Lại có

$$A < 2^{4k-2n} t^4 + 3 \cdot 2^{2k-n+1} t^2 + 9 = (2^{2k-n} t^2 + 3)^2.$$

Mà A là số chính phương lẻ nên $A = (2^{2k-n} t^2 + 1)^2$, hay $3 \cdot 2^{2k-2n+1} t^2 = 2^{2k-n+1} t^2$. Nói cách khác, ta phải có $3 = 2^n$, mâu thuẫn.**Trường hợp 2: b lẻ.** Giả sử $k > 0$. Nếu $b > 2k + 1$ thì ta có

$$a^4 + 6a^2 + 2^b = 2^{4k} t^4 + 3 \cdot 2^{2k+1} t^2 + 2^b = 2^{2k+1} (2^{2k-1} t^4 + 3t^2 + 2^{b-2k-1})$$

chia hết cho 2^{2k+1} nhưng không chia hết cho 2^{2k+2} . Do đó $a^4 + 6a^2 + 2^b$ không thể là số chính phương, mâu thuẫn. Như vậy, ta phải có $b \leq 2k + 1$.Ngoài ra, nếu $b < 2k + 1$ thì ta có $a^4 + 6a^2 + 2^b = 2^b (2^{4k-b} t^4 + 3 \cdot 2^{2k+1-b} t^2 + 1)$ chia hết cho 2^b nhưng không chia hết cho 2^{b+1} . Do đó $a^4 + 6a^2 + 2^b$ không thể là số chính phương, mâu thuẫn. Vì thế $b = 2k + 1$. Lúc này, ta có

$$c^2 = 2^{4k} t^4 + 3 \cdot 2^{2k+1} t^2 + 2^{2k+1} = 2^{2k} (2^{2k} t^4 + 6t^2 + 2).$$

Suy ra $B = 2^{2k} t^4 + 6t^2 + 2$ là số chính phương. Ta có $B > 2^{2k} t^4 = (2^k t^2)^2$ và

$$B < 2^{2k} t^4 + 6 \cdot 2^k t^2 + 9 = (2^k t^2 + 3)^2.$$

Mà B là số chính phương chẵn nên $B = (2^k t^2 + 2)^2$, hay $3t^2 = 2^{k+1} t^2 + 1$. Suy ra 1 chia hết cho t^2 , tức $t = 1$. Từ đó, ta dễ dàng tìm được $k = 0$, mâu thuẫn.Từ mâu thuẫn trên, ta suy ra $k = 0$. Do đó

$$c^2 = t^4 + 6t^2 + 2^b. \quad (1)$$

Nếu $b \geq 3$ thì $t^4 + 6t^2 + 2^b$ chia 8 dư 7, mâu thuẫn vì một số chính phương chia 8 dư 0, 1 hoặc 4. Do đó $b = 1$. Thay vào (1), ta được

$$c^2 = t^4 + 6t^2 + 2. \quad (2)$$

Vì $t^4 + 6t^2 + 2 > t^4 + 2t^2 + 1 = (t^2 + 1)^2$ và $t^4 + 6t^2 + 2 < t^4 + 6t^2 + 9 = (t^2 + 3)^2$ nên $(t^2 + 1)^2 < c^2 < (t^2 + 3)^2$. Suy ra $c^2 = (t^2 + 2)^2$. Thay vào phương trình (2), ta được $t = 1$ (một cách tương ứng, ta có $a = 1$). Từ đó $c = 3$. Vậy, có duy nhất một bộ số (a, b, c) cần tìm là $(1, 1, 3)$.

b) Ta sẽ chứng minh $n = 104$ là giá trị nhỏ nhất thỏa mãn. Rõ ràng $n \geq 101$. Gọi $x_1 < \dots < x_n$ là n phần tử của tập hợp S . Đặt $P = x_1 x_2 \dots x_n$. Xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1: $n = 101$. Lúc này, ứng với mỗi x_i thì tích của 100 phần tử còn lại trong S phải bằng x_i . Suy ra $P = x_1^2 = x_2^2 = \dots = x_n^2$, vô lý.

Trường hợp 2: $n = 102$. Lúc này, giả sử $x_1 = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{100}}$ với $1 < i_1 < i_2 < \dots < i_{100}$, thì trong S còn một phần tử y nữa và $P = y \cdot x_1 \cdot x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{100}} = x_1^2 \cdot y \leq x_1^2 x_{102}$.

Lại giả sử $x_{102} = x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_{100}}$ với $j_1 < j_2 < \dots < j_{100} < 102$ thì $P = x_{102}^2 \cdot z$ với $z \in S$ nào đó. Suy ra $P \geq x_{102}^2 x_1$. Vậy $x_{102}^2 x_1 \leq x_1^2 x_{102}$ nên $x_{102} \leq x_1$, vô lý.

Trường hợp 3: $n = 103$. Lý luận tương tự như trên, ta cũng có $P = x_1^2 \cdot yz$ với $y < z$ và $y, z \in S$ nào đó nên $P \leq x_1^2 x_{102} x_{103}$; và $P = x_{103}^2 uv$ với $u < v$ và $u, v \in S$ nào đó, nên $P \geq x_{103}^2 x_1 x_2$. Suy ra $x_{103}^2 x_1 x_2 \leq x_1^2 x_{102} x_{103}$, hay $x_{103} x_2 \leq x_{102} x_1$, vô lý vì $x_{103} > x_{102} > 0$ và $x_2 > x_1 > 0$.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh $n = 104$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chọn

$$S = \{2^{-52}, 2^{-51}, \dots, 2^{-1}\} \cup \{2^1, 2^2, \dots, 2^{51}, 2^{52}\}.$$

Lúc đó, tích các phần tử của S là 1, và với mỗi $x \in S$ ta cần chỉ ra tồn tại $a < b < c \in S$ đều khác x sao cho $x^2 abc = 1$ thì lúc đó 100 phần tử còn lại của S sẽ có tích bằng x . Xét $x = 2^k$ với $k \geq 1$, trường hợp $k \leq -1$ được chứng minh tương tự.

- Nếu $k \geq 3$ thì chọn $a = 2^{-1}$, $b = 2^{1-k}$, $c = 2^{-k}$ thì $x^2 abc = 1$.
- Nếu $k = 2$ thì chọn $a = 2^{-4}$, $b = 2^1$, $c = 2^{-1}$ thỏa mãn.
- Nếu $k = 1$ thì chọn $a = 2^{-2}$, $b = 2^3$, $c = 2^{-3}$ thỏa mãn.

Vậy $n = 104$ thỏa mãn. Ta có điều phải chứng minh. □