SỞ GD&ĐT HÀ TĨNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 4 trang, 50 câu)

KỲ THI THỬ TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM 2024

Bài thi: TOÁN

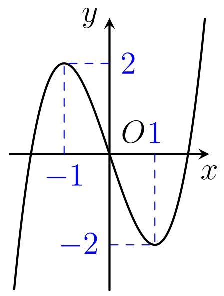
Thời gian làm bài 90 phút , không kể thời gian phát đề

Họ, tên thí sinh: ....

Số báo danh: ....

MÃ ĐỀ: 001

Câu 1. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Giá trị cực đại của hàm số đã cho là



A. $y = -2$. **B.** $y = 2$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = 1$.

Câu 2. Với a là số thực dương tùy ý, biểu thức $a^{\frac{5}{2}} : a^{\frac{1}{2}}$ bằng

A. $a^{\frac{5}{4}}$. **B.** a^2. **C.** a^5. **D.** a^3.

Câu 3. Diện tích đáy của khối lăng trụ có thể tích là V và chiều cao là h bằng:

A. $\dfrac{V}{h}$. **B.** Vh. **C.** $\dfrac{V}{3h}$. **D.** $\dfrac{3V}{h}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(-3; -1; 2)$ và có một véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (4; 3; -2)$ là

A. $-3x - y + 2z + 19 = 0$. **B.** $4x + 3y - 2z + 19 = 0$.

C. $4x + 3y - 2z - 19 = 0$. **D.** $-3x - y + 2z - 19 = 0$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P): $2x - y + 3z - 2 = 0$ cắt trục Ox tại điểm

A. $N(-2; 0; 0)$. **B.** $P\left(\dfrac{2}{3}; 0; 0\right)$. **C.** $M(1; 0; 0)$. **D.** $Q(2; 0; 0)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho có phương trình

A. $x = -\dfrac{1}{2}$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = -1$.

Câu 7. Nếu $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 3$ thì $\int\limits_0^2 3f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 9.

Câu 8. Cho các số phức $z_1 = 2 + 3i$ và $z_2 = 1 + i$. Môđun của số phức $z_1 + z_2$ bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** 5.

Câu 9. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a và diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$. Chiều cao của hình trụ là

A. $3a$. **B.** $3\pi a$. **C.** $6a$. **D.** $6\pi a$.

Câu 10. Tập nghiệm của bất phương trình $\log(x + 1) \geq 1$ là

A. $(0; +\infty)$. **B.** $[9; +\infty)$. **C.** $[0; +\infty)$. **D.** $(9; +\infty)$.

Câu 11. Với a là số thực dương tùy ý, $\log(100a)$ bằng

A. $2 - \log a$. **B.** $2 + a$. **C.** a. **D.** $2 + \log a$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = 1 + 4\sin 2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = x + 2\cos 2x + C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = x - 4\cos 2x + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = 8\cos 2x + C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = x - 2\cos 2x + C$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; 0)$. **B.** $(-\infty; 1)$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $(-\infty; +\infty)$.

Câu 14. Thể tích của khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h tương ứng là:

A. Bh. B. $\pi B^2 h$. C. $\frac{1}{3}Bh$. D. $\frac{1}{3}\pi B^2 h$.

Câu 15. Số phức liên hợp của số phức $-2+3i$ là

A. $-2-3i$. B. $2+3i$. C. $3-2i$. D. $2-3i$.

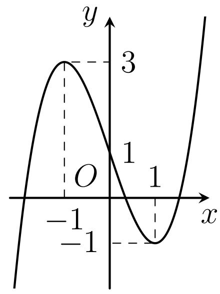
Câu 16. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\int x^3 \mathrm{d}x = x^4 + C$. B. $\int x^3 \mathrm{d}x = 3x^2 + C$. C. $\int x^3 \mathrm{d}x = \frac{x^3}{\ln 3} + C$. D. $\int x^3 \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + C$.

Câu 17. Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong hình bên

A. $y = -x^3 - 3x^2 - 1$. B. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

C. $y = x^3 - 3x - 1$. D. $y = x^3 - 3x + 1$.



Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu là

A. $I(-1;0;-1)$; $R = 4$. B. $I(1;0;1)$; $R = 2$.

C. $I(-1;0;-1)$; $R = 2$. D. $I(1;0;1)$; $R = 4$.

Câu 19. Cho hình nón có bán kính đáy và chiều cao đều bằng a. Độ dài đường sinh của hình nón bằng

A. $4a$. B. $a\sqrt{3}$. C. $2a$. D. $a\sqrt{2}$.

Câu 20. Biết $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x = -1$. Tích phân $\int\limits_3^5 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. B. 9. C. 2. D. -3.

Câu 21. Tập xác định của hàm số $f(x) = (-x^2 + 10x - 1)^{\sqrt{3}}$ chứa bao nhiêu số nguyên?

A. 11. B. 6. C. 5. D. 9.

Câu 22. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ và đồ thị hàm số $y = 3x$ là

A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(2;-3;-1)$ đến mặt phẳng (Oxy) là

A. $\sqrt{14}$. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{2}$, $SA = 1$ và vuông góc với mặt đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC bằng

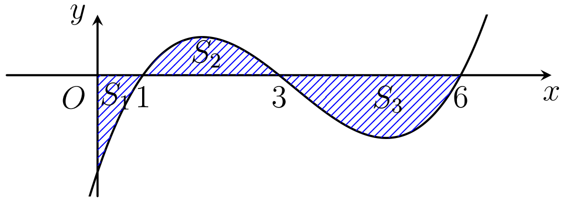
A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 1. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 25. Cho số phức z thỏa mãn phương trình $z + 2\overline{z} = 6 - 4i$. Tìm phần ảo của số phức z.

A. 4. B. 2. C. 6. D. -4.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng diện tích các miền gạch chéo như hình vẽ là $S_1 = 1; S_2 = 2$ và $S_3 = 4$. Tích phân $\int\limits_0^6 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -3. B. 3. C. 5. D. -1.



Câu 27. Một tổ có 10 học sinh, có bao nhiêu cách chọn ra một đội gồm 4 bạn trong tổ để đi tình nguyện bảo vệ môi trường?

A. 5040. B. 216. C. 210. D. 18.

Câu 28. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và công bội là $q = 2$. Giá trị của u_4 bằng

A. $\frac{1}{8}$. B. 16. C. 4. D. $\frac{1}{16}$.

Câu 29. Hàm số $y=x^3-3x$ có giá trị nhỏ nhất trên $[-1;3]$ bằng

A. 2. **B.** 18. **C.** -2. **D.** 0.

Câu 30. Tập nghiệm của bất phương trình $0,5^{x-2}>0,5^2$ là

A. $(-\infty;4]$. **B.** $(-\infty;4)$. **C.** $[4;+\infty)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;-1;3)$ và $M(-1;0;5)$. Phương trình mặt cầu tâm I và đi qua điểm M là

A. $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=3$. **B.** $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$.

C. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9$. **D.** $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=3$.

Câu 32. Số phức $z=\dfrac{2+i}{1-i}$ có điểm biểu diễn hình học trên mặt phẳng tọa độ là:

A. $(2;-1)$. **B.** $(2;1)$. **C.** $\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA=a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 90°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 60°.

Câu 34. Đạo hàm của hàm số $y=2024^x$ là

A. $y'=x2024^{x-1}$. **B.** $y'=\dfrac{x}{\ln 2024}$. **C.** $y'=\dfrac{2024^x}{\ln 2024}$. **D.** $y'=2024^x\ln 2024$.

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức, có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số $y=f(x-1)$ đạt cực tiểu tại

A. $x=1$. **B.** $x=-2$.

C. $x=0$. **D.** $x=-1$.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y		$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	

Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x-2),\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y+z-1=0$. Mặt phẳng đi qua A và song song với (P) có phương trình là

A. $2x-2y+z=0$. **B.** $2x+2y-z+1=0$.

C. $2x+2y+z=0$. **D.** $2x+2y+z+1=0$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ và điểm $A(0;1;-2)$. Từ A kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (C_1). Từ điểm M di động nằm ngoài (S) và nằm trong mặt phẳng chứa đường tròn (C_1) kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (C_2). Biết rằng nếu (C_1) và (C_2) có cùng bán kính thì M luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính r của đường tròn đó bằng

A. $r=3\sqrt{6}$. **B.** $r=\sqrt{10}$. **C.** $r=2\sqrt{6}$. **D.** $r=3\sqrt{2}$.

Câu 39. Cho hàm số $y=x^4+2(m-1)x^2+3$, khi đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều thì giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 40. Một nhóm học sinh gồm 7 bạn nam và 4 bạn nữ đứng ngẫu nhiên thành một hàng. Xác suất để có đúng 2 trong 4 bạn nữ đứng cạnh nhau là:

A. $\dfrac{27}{55}$. **B.** $\dfrac{2}{11}$. **C.** $\dfrac{28}{55}$. **D.** $\dfrac{6}{11}$.

Câu 41. Cho phương trình $\left[\log_2(x^2-x-2)+\log_{\frac{1}{2}}4\right](4^x-m)=0$ (1). Tìm số giá trị nguyên của tham số $m\in[1;100]$ để phương trình (1) có đúng ba nghiệm phân biệt.

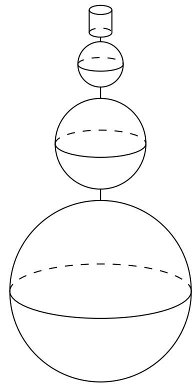
A. 82. **B.** 83. **C.** 84. **D.** 81.

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ và thỏa mãn $2f(2)=\int\limits_0^2 x\left(f'(x)-1\right)\mathrm{d}x$.

Tích phân $I=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** -2. **C.** -4. **D.** 2.

Câu 43. Một bông hoa tai bằng vàng có dạng xích nối như hình vẽ. Biết phía trên là hình trụ có thiết diện qua trục là một hình vuông cạnh 1cm. Phía dưới là 3 quả cầu nối tiếp nhau sao cho chiều cao hình trụ và đường kính của chúng theo thứ tự tạo thành cấp số nhân với công bội $q = 2$. (Giả sử phần dây nối có thể tích không đáng kể). Tính thể tích bông hoa tai?



A. $\dfrac{1171}{12}\pi$ (cm^3). **B.** $\dfrac{1168}{12}\pi$ (cm^3). **C.** $\dfrac{1213}{12}\pi$ (cm^3). **D.** $\dfrac{1169}{12}\pi$ (cm^3).

Câu 44. Cho các số phức $z_1; z_2$, $(z_2 \neq 1)$ thỏa mãn $|z_1| = 1$; $\dfrac{z_2+1}{z_2-1}$ là số thuần ảo và $z_1^2 z_2 - z_1 z_2^2 = \sqrt{2}$. Gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn hình học của các số phức z_1; z_2; $3z_1 + 2z_2$ trên mặt phẳng tọa độ. Tính diện tích của tam giác ABC.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 6. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 2.

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x \ln x} + 3x^2 \ln x$ và $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^3$. Tích phân $\displaystyle\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \dfrac{f(x)}{x^4} \mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Câu 46. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 2 - 4i| = 1$; $|z_2 + 2| = |z_2 + 2i|$, biết rằng $\dfrac{z_1 - z_2}{1 + 2i}$ là số thực. Gọi M, m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$. Khi đó $M + m$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(9; 10)$. **B.** $(8; 9)$. **C.** $(10; 11)$. **D.** $(7; 8)$.

Câu 47. Cho x, y là các số thực thỏa mãn

$$\log_5\left(x^2 + (y+1)^2\right) + \log_3\left(x^2 + y^2\right) \leq \log_3\left(x^2 - 56 + (y+8)^2\right) + \log_5(2y+1).$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + y$.

A. $4 + \sqrt{5}$. **B.** $4 + 2\sqrt{10}$. **C.** $2 + 2\sqrt{10}$. **D.** 4.

Câu 48. Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, với $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $g(x) = f(x) - \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và hàm số $h(x) = 6f(x) - 3x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 12x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = -2$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(0; 1)$.

A. $y = -3x + 1$. **B.** $y = 3x + 1$. **C.** $y = 5x + 1$. **D.** $y = -5x + 1$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(2;2;0)$, $D(0;2;0)$, $S(0;0;2)$. Gọi G là trọng tâm tam giác SAC, M là điểm thuộc miền trong của tứ giác $ABCD$ sao cho tia MG cắt mặt bên SAB của hình chóp tại N. Khi biểu thức $Q = \dfrac{MG}{NG} + \dfrac{NG}{MG}$ đạt giá trị nhỏ nhất thì điểm M chạy trên một đoạn thẳng, đường thẳng chứa đoạn thẳng đó đi qua điểm nào sau đây?

A. $\left(2; \dfrac{2}{3}; 0\right)$. **B.** $\left(1; \dfrac{2}{3}; 0\right)$. **C.** $\left(-1; \dfrac{2}{3}; 0\right)$. **D.** $\left(2; \dfrac{4}{3}; 0\right)$.

Câu 50. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $AC = 4a$ và $A'A = A'B = A'C$. Biết hai mặt phẳng $(A'AC)$ và $(DA'C')$ tạo với nhau một góc bằng $30°$, tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $6a^3\sqrt{3}$. **B.** $4a^3\sqrt{3}$. **C.** $12a^3\sqrt{3}$. **D.** $8a^3\sqrt{3}$.

—— HẾT ——

SỞ GD&ĐT HÀ TĨNH	KỲ THI THỬ TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM 2024
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	**Bài thi: TOÁN**
(*Đề thi có 4 trang, 50 câu*)	*Thời gian làm bài 90 phút, không kể thời gian phát đề*

Họ, tên thí sinh: ....

Số báo danh: ....

MÃ ĐỀ: 002

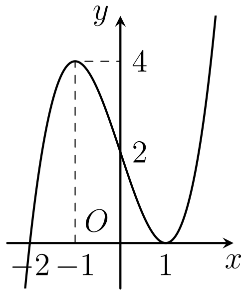
Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$ có tọa độ tâm là

A. $(1;-2;-1)$. **B.** $(1;-2;1)$. **C.** $(-1;-2;1)$. **D.** $(-1;2;1)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$. **B.** Hàm số đạt cực đại tại $x=4$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$. **D.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.



Câu 3. Từ tập $A=\{1;2;3;4;5\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 4 chữ số đôi một khác nhau?

A. A_5^4. **B.** $3\mathrm{A}_4^3$. **C.** $3\mathrm{C}_4^3$. **D.** C_5^4.

Câu 4. Cho $\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x=-2$. Tính $\int\limits_1^4 2f(x)\mathrm{d}x$.

A. 4. **B.** 6. **C.** -4. **D.** -6.

Câu 5. Cho a là số thực dương tùy ý và khác 1. Giá trị của $\log_a \sqrt[3]{a}$ bằng

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** -3. **D.** 3.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(-1;1)$. **B.** $(-\infty;1)$.

C. $(-\infty;-2)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Câu 7. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-2$, $u_2=4$. Công bội của cấp số nhân đó là

A. 2. **B.** -6. **C.** -2. **D.** 6.

Câu 8. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B=12$ và chiều cao $h=6$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. 72. **B.** 36. **C.** 18. **D.** 24.

Câu 9. Số phức $z=2-3i$ có số phức liên hợp là

A. $3+2i$. **B.** $-2-3i$. **C.** $-2+3i$. **D.** $2+3i$.

Câu 10. Nghiệm của phương trình $3^{x+1}=9$ là

A. $x=1$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=5$.

Câu 11. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào sau đây biểu diễn số phức $z=-1+2i$?

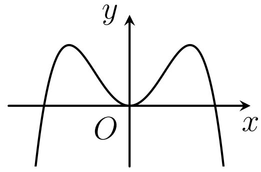
A. $M(1;-2)$. **B.** $P(-1;-2)$. **C.** $N(1;2)$. **D.** $Q(-1;2)$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $f(x)=0$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Câu 13. Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình vẽ.



A. $y=-x^4+2x^2$. **B.** $y=x^3-2x^2$.
C. $y=-x^3+2x^2$. **D.** $y=x^4-2x^2$.

Câu 14. Giá trị của $I=\int\limits_1^2 x\mathrm{d}x$ là:

A. 1. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** -1. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 15. Đường thẳng nào sau đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$?

A. $x=1$. **B.** $y=-1$. **C.** $x=-1$. **D.** $y=2$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=2\mathrm{e}^x-3$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^x-3x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{x-1}+C$.
C. $\int f(x)\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^x+3x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^x+C$.

Câu 17. Thể tích khối nón tròn xoay có đường kính đáy bằng 4 và chiều cao bằng 3 là:

A. 4π. **B.** 48π. **C.** 16π. **D.** 12π.

Câu 18. Số điểm cực trị của hàm số $y=x^4+3x^2-4$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+z-3=0$?

A. $\overrightarrow{n}_2=(2;1;1)$. **B.** $\overrightarrow{n}_3=(2;-1;1)$. **C.** $\overrightarrow{n}_4=(2;0;-3)$. **D.** $\overrightarrow{n}_1=(2;1;-1)$.

Câu 20. Tìm tập xác định của hàm số $y=\log_3(x-2)$.

A. $D=(2;+\infty)$. **B.** $D=[2;+\infty)$. **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **D.** $D=(3;+\infty)$.

Câu 21. Một tổ có 7 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 4 học sinh từ tổ đó. Xác suất để trong 4 học sinh được chọn luôn có học sinh nam là

A. $\dfrac{151}{165}$. **B.** $\dfrac{14}{165}$. **C.** $\dfrac{329}{330}$. **D.** $\dfrac{1}{330}$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA=1$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** 1.

Câu 23. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $z+2\overline{z}=6-4i$. Tìm phần ảo của số phức z.

A. 6. **B.** 2. **C.** -4. **D.** 4.

Câu 24. Cho hình trụ có thiết diện đi qua trục là một hình vuông có cạnh bằng $4a$. Diện tích xung quanh của hình trụ là

A. $S=24\pi a^2$. **B.** $S=16\pi a^2$. **C.** $S=8\pi a^2$. **D.** $S=4\pi a^2$.

Câu 25. Hàm số $y=x^3-3x$ có giá trị nhỏ nhất trên $[-1;3]$ bằng

A. 18. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 0.

Câu 26. Hàm số $f(x)=-x^3+3x^2+9x+5$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;3)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C, $SA=AC=a$ và $SA\perp(ABC)$. Tính khoảng cách từ C đến (SAB).

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** a.

Câu 28. Cho $\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính tích phân $K=\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $K=6$. **B.** $K=18$. **C.** $K=3$. **D.** $K=12$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB và SA. Số đo của góc giữa hai đường thẳng MN và CB bằng

A. 60°. **B.** 90°. **C.** 45°. **D.** 30°.

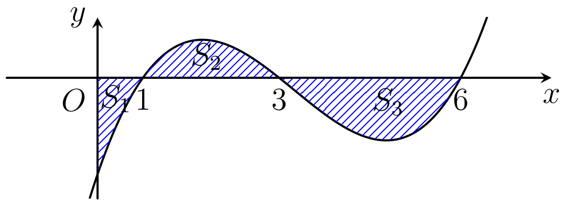
Câu 30. Với mọi số thực a dương, $a.\sqrt{a}$ bằng?

A. $a^{\frac{1}{2}}$. B. $a^{\frac{5}{2}}$. C. $a^{\frac{2}{3}}$. D. $a^{\frac{3}{2}}$.

Câu 31. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}} x > 2$ là

A. $\left(-\infty; \dfrac{1}{9}\right)$. B. $\left(0; \dfrac{1}{9}\right)$. C. $(9; +\infty)$. D. $\left(\dfrac{1}{9}; +\infty\right)$.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng diện tích các miền gạch chéo như hình vẽ là $S_1 = 2$; $S_2 = 3$ và $S_3 = 5$. Tích phân $\int\limits_0^6 f(x)\mathrm{d}x$ bằng



A. -4. B. -3. C. 5. D. 3.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 0)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x + 2y + z - 1 = 0$. Mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với (P) có phương trình là

A. $(Q)\colon 2x + 2y + z - 4 = 0$. B. $(Q)\colon 2x - 2y + z = 0$.

C. $(Q)\colon 2x + 2y - z + 1 = 0$. D. $(Q)\colon 2x + 2y + z = 0$.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức, có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số $y = f(x-1)$ đạt cực tiểu tại

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	

A. $x = -1$. B. $x = 0$.

C. $x = -2$. D. $x = 1$.

Câu 35. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\cos 2x + C$. B. $\int f(x)\mathrm{d}x = \cos 2x + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\cos 2x + C$. D. $\int f(x)\mathrm{d}x = -\cos 2x + C$.

Câu 36. Tập xác định của hàm số $f(x) = (-x^2 + 10x - 1)^{\sqrt{3}}$ chứa bao nhiêu số nguyên?

A. 9. B. 5. C. 6. D. 11.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)^3(x+3)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

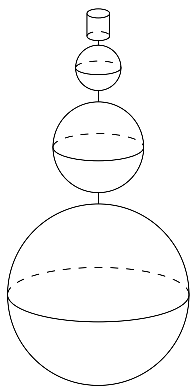
A. $(2; +\infty)$. B. $(-\infty; -3)$. C. $(-\infty; 2)$. D. $(-3; 2)$.

Câu 38. Một nhóm học sinh gồm 7 bạn nam và 4 bạn nữ đứng ngẫu nhiên thành một hàng. Xác suất để có đúng 2 trong 4 bạn nữ đứng cạnh nhau bằng

A. $\dfrac{2}{11}$. B. $\dfrac{27}{55}$. C. $\dfrac{28}{55}$. D. $\dfrac{6}{11}$.

Câu 39. Một bông hoa tai bằng vàng có dạng xích nối như hình vẽ. Biết phía trên là hình trụ có thiết diện qua trục là một hình vuông cạnh 1cm. Phía dưới là 3 quả cầu nối tiếp nhau sao cho chiều cao hình trụ và đường kính của chúng theo thứ tự tạo thành cấp số nhân với công bội $q = 2$. (Giả sử phần dây nối có thể tích không đáng kể). Tính thể tích bông hoa tai?

A. $\dfrac{1213}{12}\pi\ (\mathrm{cm}^3)$. B. $\dfrac{1169}{12}\pi\ (\mathrm{cm}^3)$. C. $\dfrac{1171}{12}\pi\ (\mathrm{cm}^3)$. D. $\dfrac{1168}{12}\pi\ (\mathrm{cm}^3)$.



Câu 40. Cho các số phức $z_1;\ , z_2,\ (z_2 \neq 1)$ thỏa mãn $|z_1| = 1$; $\dfrac{z_2 + 1}{z_2 - 1}$ là số thuần ảo và $z_1^2 z_2 - z_1 z_2^2 = \sqrt{2}$. Gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn hình học của các số phức z_1, z_2, $3z_1 + 2z_2$ trên mặt phẳng tọa độ. Tính diện tích của tam giác ABC.

A. 2. B. 6. C. $\dfrac{1}{2}$. D. $\dfrac{3}{2}$.

Câu 41. Cho phương trình $\left[\log_3(x^2-x-2)+\log_{\frac{1}{3}}4\right](4^x-m)=0$ (1). Tìm số giá trị nguyên của tham số $m\in[1;100]$ để phương trình (1) có đúng ba nghiệm phân biệt.

A. 84. **B.** 81. **C.** 83. **D.** 82.

Câu 42. Cho hàm số $y=x^4+2(m-1)x^2+3$. Khi đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều thì giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;0)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ và điểm $A(0;1;-2)$. Từ A kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (C_1). Từ điểm M di động nằm ngoài (S) và nằm trong mặt phẳng chứa đường tròn (C_1), kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (C_2). Biết rằng nếu (C_1) và (C_2) có cùng bán kính thì M luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính r của đường tròn đó bằng?

A. $r=3\sqrt{6}$. **B.** $r=2\sqrt{6}$. **C.** $r=3\sqrt{2}$. **D.** $r=\sqrt{10}$.

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $[0;2]$ và thỏa mãn $2f(2)=\int\limits_0^2 x(f'(x)-1)\,\mathrm{d}x$. Tích phân $I=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -4. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 45. Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ có $f'(x)=x^3+ax^2+bx+1$, với $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $g(x)=f(x)-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và hàm số $h(x)=6f(x)-3x^4-2x^3+9x^2-12x+1$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=-2$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(0;-1)$?

A. $y=-3x-1$. **B.** $y=3x-1$. **C.** $y=-5x-1$. **D.** $y=5x-1$.

Câu 46. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=2a$, $AC=4a$ và $A'A=A'B=A'C$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng $(A'AC)$ và $(DA'C')$ bằng 45°, tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $6a^3\sqrt{3}$. **B.** $4a^3\sqrt{3}$. **C.** $8a^3\sqrt{3}$. **D.** $12a^3$.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(2;2;0)$, $D(0;2;0)$, $S(0;0;2)$. Gọi G là trọng tâm tam giác SBD, M là điểm thuộc miền trong của tứ giác $ABCD$ sao cho tia MG cắt mặt bên SAB của hình chóp tại N. Khi biểu thức $Q=\frac{MG}{NG}+\frac{NG}{MG}$ đạt giá trị nhỏ nhất thì điểm M chạy trên một đoạn thẳng, đường thẳng chứa đoạn thẳng đó đi qua điểm nào sau đây?

A. $\left(1;\frac{2}{3};0\right)$. **B.** $(2;1;0)$. **C.** $\left(3;\frac{4}{3};0\right)$. **D.** $\left(1;\frac{5}{3};0\right)$.

Câu 48. Cho các số thực x, y thỏa mãn

$$\log_5\left(x^2+(y+1)^2\right)+\log_3\left(x^2+y^2\right)\le\log_3\left(x^2-56+(y+8)^2\right)+\log_5(2y+1).$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+y$.

A. $4+2\sqrt{10}$. **B.** 4. **C.** $2+2\sqrt{10}$. **D.** $4+\sqrt{5}$.

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{f(x)}{x\ln x}+3x^2\ln x$ và $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^3$. Tích phân $\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{f(x)}{x^4}dx$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 50. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-2-4i|=1$; $|z_2+2|=|z_2+2i|$, biết rằng $\frac{z_1-z_2}{1+2i}$ là số thực. Gọi M, m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$. Khi đó $M+m$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(9;10)$. **B.** $(10;11)$. **C.** $(7;8)$. **D.** $(8;9)$.

——— HẾT ———

SỞ GD&ĐT HÀ TĨNH
ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC

KỲ THI THỬ TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
NĂM 2024
Bài thi: TOÁN

Câu hỏi	Mã đề 001	Mã đề 002	Mã đề 003	Mã đề 004	Mã đề 005	Mã đề 006	Mã đề 007	Mã đề 008
1	B	D	B	A	B	C	C	B
2	B	C	C	C	B	C	D	A
3	A	B	B	A	B	B	D	B
4	B	C	A	A	D	B	D	A
5	C	B	A	C	A	A	C	A
6	C	C	D	C	A	C	D	D
7	D	C	B	C	A	D	A	B
8	D	A	D	C	C	C	D	D
9	A	D	D	D	B	A	C	B
10	B	A	A	D	D	A	A	B
11	D	D	A	A	B	B	C	A
12	D	A	B	D	B	A	A	B
13	C	A	A	B	C	C	B	A
14	C	D	B	D	C	A	B	A
15	A	C	B	C	C	C	B	A
16	D	A	A	A	D	D	A	A
17	D	A	C	B	C	C	C	C
18	C	D	A	B	A	A	A	A
19	D	B	C	C	C	D	C	B
20	D	A	C	B	D	B	B	D
21	D	C	C	B	A	C	C	C
22	C	C	B	B	D	D	D	A
23	B	D	C	C	D	C	D	B
24	D	B	C	D	D	A	B	D
25	A	C	D	C	B	C	D	B
26	A	A	B	A	D	D	B	A
27	C	B	B	A	B	D	B	B
28	B	C	B	C	B	B	B	B
29	C	B	C	D	B	B	A	B
30	B	D	C	B	B	C	A	B
31	C	B	B	A	B	A	B	B
32	D	A	C	C	A	A	C	B
33	C	A	B	D	B	D	C	D
34	D	D	B	B	D	A	D	C
35	A	A	B	A	B	D	C	B
36	D	A	C	D	B	A	B	B
37	C	D	D	C	A	C	B	D
38	C	C	A	B	B	C	D	A
39	D	C	A	A	B	B	B	D
40	C	A	D	B	A	C	A	C
41	B	C	C	C	C	B	A	A
42	B	A	A	B	C	B	A	C
43	A	B	A	B	A	B	D	D
44	D	B	C	D	C	D	C	D
45	A	D	C	A	A	A	D	D
46	B	D	B	D	C	A	C	D
47	B	C	B	A	B	B	B	B
48	C	A	C	D	A	D	D	D
49	D	A	C	B	B	C	C	B
50	C	D	A	D	D	A	B	B

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 36. $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = -S_1 + S_2 - S_3 = -3$

Câu 38. Không gian mẫu $n(\Omega) = 11!$

Gọi A là biến cố: "Xếp 7 nam và 4 nữ đứng thành một hàng mà có đúng 2 trong 4 nữ đứng cạnh nhau".

+) Xếp 7 nam vào 7 vị trí: có $7!$ cách. Khi đó 7 nam tạo thành 8 khoảng trống.

+) Chọn 2 trong 4 nữ đứng cạnh nhau và hoán vị 2 nữ này: có A_4^2 cách.

+) Coi 2 nữ còn lại và cặp nữ đứng cạnh nhau là 3 nữ, ta xếp vào 8 khoảng trống do 7 nam tạo thành: có A_8^3 cách.

$\Rightarrow n(A) = 7!.\mathrm{A}_4^2.A_8^3 \Rightarrow P(A) = \dfrac{28}{55}$.

Câu 40. $\cos\varphi = \dfrac{b^3+8a}{b^3-8a} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{8(m-1)^3+8}{8(m-1)^3-8} \Leftrightarrow m = 1-\sqrt[3]{3} \approx -0,44$

Câu 41. $2f(2) = \int_0^2 x\left(f'(x)-1\right)dx = \int_0^2 xd\left(f(x)-x\right) = x\left(f(x)-x\right)\Big|_0^2 - \int_0^2 \left(f(x)-x\right)dx$

$= 2f(2) - 4 - I + \int_0^2 xdx = 2f(2) - 4 - I + \dfrac{1}{2}x^2\Big|_0^2 = 2f(2) - 4 - I + 2$

$\Leftrightarrow I = -2$

Câu 42. Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -1 \end{array}\right.$

$\left[\log_2\left(x^2-x-2\right) + \log_{\frac{1}{2}} 4\right]\left(4^x - m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2\left(x^2-x-2\right) = \log_2 4 \\ m = 4^x \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-6=0 \\ m = 4^x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2; x=3 \\ m=4^x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2; x=3 \\ x=\log_4 m \end{array}\right.$

Phương trình có đúng ba nghiệm phân biệt khi $\left\{\begin{array}{l} \log_4 m \neq -2 \\ \log_4 m \neq 3 \\ \log_4 m > 2 \\ \log_4 m < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow 1\left\{\begin{array}{l} m \neq \dfrac{1}{16}; m \neq 64 \\ m > 16 \\ 0 < m < \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$

Do m nguyên và $m \in [1;100]$, nên $\left\{\begin{array}{l} 17 \le m \le 100 \\ m \neq 64 \end{array}\right.$, vậy có 83 giá trị của m.

Câu 43. Gọi $z_2 = x + iy$, khi đó

$$\frac{z_2+1}{z_2-1} = \frac{x+1+yi}{x-1+yi} = \frac{(x+1+yi)(x-1-yi)}{a}$$

$$= \frac{(x-1)(x+1)+y^2+\left(y(x-1)-(x+1)y\right)i}{a}$$

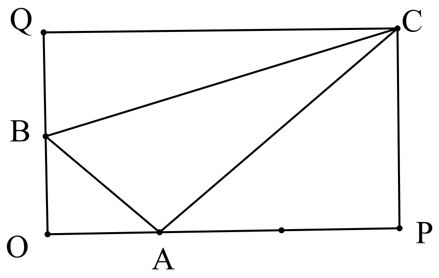
Số $\dfrac{z_2+1}{z_2-1}$ thuần ảo khi $\left\{\begin{array}{l} (x-1)(x+1)+y^2=0 \\ y(x-1)-(x+1)y \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ y \neq 0 \end{array}\right.$

Do đó biểu diễn của z_2 là đường tròn tâm O, bán kính bằng 1 trừ đi điểm $M(1;0)$; $N(-1;0)$

Mặt khác tập hợp điểm biểu diễn của z_1 là đường tròn tâm O, bán kính bằng 1, nên:

$z_1^2z_2 - z_1z_2^2 = \sqrt{2} \Leftrightarrow z_1z_2(z_1 - z_2) = \sqrt{2}$, khi đó $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$

Do $OA = OB = 1$, $AB = \sqrt{2}$, nên tam giác OAB vuông cân tại O.



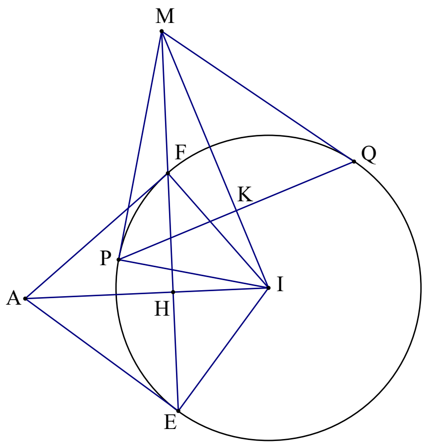
Điểm P là biểu diễn hình học của $3z_1$; Q là biểu diễn hình học của $2z_2$.

Dựng hình chữ nhật OPCQ thì điểm C là biểu diễn hình học của $3z_1 + 2z_2$.

Do đó: $S_{ABC} = 6 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 2 = 2$

Câu 44.

Mặt cầu có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R = 3$.



$IA = 3\sqrt{3}$, theo hệ thức lượng tròn tam giác vuông thì:

$IH.IA = IE^2 \Rightarrow IH = \frac{IE^2}{IA} = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Do $PQ = EF$ nên $IM = IA = 3\sqrt{3}$, khi đó

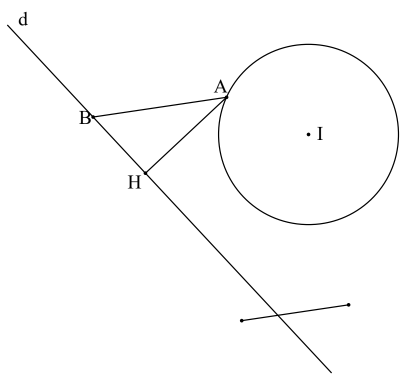
$MH^2 = MI^2 - IH^2 = 27 - 3 = 24 \Rightarrow MH = 2\sqrt{6}$

Do H cố định, nên M chạy trên đường tròn tâm H, bán kính $r = 2\sqrt{6}$.

Câu 45. + Biểu diễn hình học của z_1 là điểm A thì A thuộc đường tròn $I(2;4)$, bán kính $R = 1$.

+ Biểu diễn hình học z_2 là điểm B thì điểm B thuộc đường thẳng (d): $x - y = 0$, đường thẳng (d) có vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}(1;-1)$.

+ Theo giả thiết ta có $z_1 - z_2 = k(1+2i), k \in \mathbb{R}$, do đó: $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} = k\vec{u}$, với $\vec{u}(1;2)$.



Hay đường thẳng AB có phương cố định (song song với đường thẳng có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}(1;1)$ cố định.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d).

Đặt $\widehat{BAH} = \varphi$ thì $\cos\varphi = \left|\cos(\vec{n};\vec{v})\right|$. Ta có:

$\cos\varphi = \left|\cos(\vec{n};\vec{v})\right| = \frac{1}{\sqrt{10}}$, suy ra

$\frac{AH}{AB} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow AB = AH\sqrt{10}$. Do đó AB nhỏ nhất hay lớn nhất khi AH nhỏ nhất hay lớn nhất.

Hay: $\begin{cases} M = \sqrt{10}\left(R + d(I,(d))\right) = \sqrt{10}\left(1+\sqrt{2}\right) \\ m = \sqrt{10}\left(d(I,(d)) - R\right) = \sqrt{10}\left(\sqrt{2}-1\right) \end{cases}$.

Do đó $M + m = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5} \approx 8,94$

Câu 46. Điều kiện : $2y + 1 > 0$. Giả thiết được viết lại :

$\log_5\left(x^2 + (y+1)^2\right) - \log_5(2y+1) \le \log_3\left(x^2 + y^2 + 16y + 8\right) - \log_3\left(x^2 + y^2\right)$

$\Leftrightarrow \log_5 \dfrac{\left(x^2+(y+1)^2\right)}{2y+1} \le \log_3 \dfrac{\left(x^2+y^2+16y+8\right)}{x^2+y^2} \Leftrightarrow \log_5\left(\dfrac{x^2+y^2}{2y+1}+1\right) \le \log_3\left(1+\dfrac{8(2y+1)}{x^2+y^2}\right)$

$\Leftrightarrow \log_5\left(\dfrac{x^2+y^2}{2y+1}+1\right)-\log_3\left(1+\dfrac{8(2y+1)}{x^2+y^2}\right) \le 0$. Đặt $t=\dfrac{x^2+y^2}{2y+1}>0$, khi đó ta có:

$$f(t)=\log_5(t+1)-\log_3\left(1+\frac{8}{t}\right)\le 0,\ t>0$$

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{(t+1)\ln 5}-\dfrac{\frac{-8}{t^2}}{\left(1+\frac{8}{t}\right)\ln 3}=\dfrac{1}{(t+1)\ln 5}+\dfrac{8}{t^2\left(1+\frac{8}{t}\right)\ln 3}>0, \forall t>0$, hay hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$, mắt khác $f(4)=0$, khi đó :

$f(t)=\log_5(t+1)-\log_3\left(1+\dfrac{8}{t}\right)\le 0 \Leftrightarrow f(t)\le f(4) \Leftrightarrow t\le 4 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2}{2y+1}\le 4$

$\Leftrightarrow x^2+y^2\le 8y+4 \Leftrightarrow x^2+(y-4)^2\le 20$.

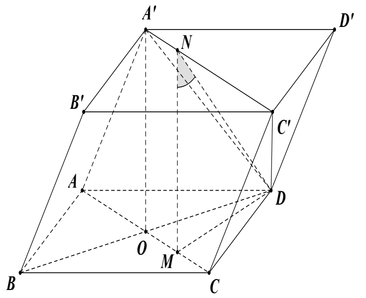
Khi đó xét biểu thức $x=-y+P$, thay vào bất phương trình ta được $(P-y)^2+(y-4)^2\le 20 \Leftrightarrow 2y^2-2(P+4)y+P^2-4\le 0$, bất phương trình phải có nghiệm nên $\Delta'=-P^2+8P+24\ge 0 \Leftrightarrow 4-2\sqrt{10}\le P\le 4+2\sqrt{10}$

Câu 47. Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$, vì $A'A=A'B=A'C$ nên $A'O\perp(ABCD)$.

Ta có $(A'AC)\cap(DA'C')=A'C'$ (1)

Gọi M là trung điểm OC. Vì $OD=OC=CD=2a$ nên ΔDOC đều.

Suy ra $DM\perp AC$, mà $DM\perp A'O$ nên $DM\perp(A'ACC')$ $\Rightarrow DM\perp A'C'$.



Kẻ $MN \,//\, A'O$ ($N\in A'C'$) thì

$MN\perp(ABCD)\Rightarrow MN\perp(A'B'C'D')\Rightarrow MN\perp A'C'$ (2)

Ta có $\begin{cases} A'C'\perp MN \\ A'C'\perp DM\end{cases} \Rightarrow A'C'\perp(MND)\Rightarrow A'C'\perp DN$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$\left(\widehat{(A'AC),(DA'C')}\right)=\left(\widehat{MN,DN}\right)=\widehat{DNM}=30^\circ.$$

Ta có $AD=\sqrt{AC^2-AB^2}=2a\sqrt{3}$ và $DM=\dfrac{CD\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}\Rightarrow A'O=MN=\dfrac{DM}{\tan\widehat{MND}}=3a$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=AB.AD.A'O=2a.2\sqrt{3}a.3a=12a^3\sqrt{3}$.

Câu 48. Ta có:

$f'(x)=\dfrac{f(x)}{x\ln x}+3x^2\ln x \Leftrightarrow f'(x)-\dfrac{f(x)}{x\ln x}=3x^2\ln x \Leftrightarrow \dfrac{-f(x)}{x\ln^2 x}+\dfrac{f'(x)}{\ln x}=3x^2$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{\ln x}f(x)\right)'=3x^2$. Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $\dfrac{1}{\ln x}f(x)=x^3+C$.

Do $f(e)=e^3$ nên $C=0$, hay $f(x)=x^3\ln x$.

Vậy $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{f(x)}{x^4}dx=\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx=\int_e^{e^2}\ln x\,d(\ln x)=\left(\frac{1}{2}\ln^2 x\right)\Big|_e^{e^2}=\frac{3}{2}$

Câu 49.

Cách 1: Ta có $g'(x)-\frac{1}{6}h'(x)=(2x+3)(x-1)^2$, do đó hai đồ thị hàm số $y=g'(x)$ và $y=\frac{1}{6}h'(x)$ tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ $x=1$.

Mặt khác $g'(x)\ge 0,\forall x\ge 0$ và $h'(x)\le 0,\forall x\ge 0$.

Suy ra hai đồ thị hàm số $y=g'(x)$ và $y=\frac{1}{6}h'(x)$ tiếp xúc với nhau và tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x=1$.

Do đó ta có điều kiện : $\begin{cases} g'(1)=0 \\ g''(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases}$.

Khi đó $k=f'(-2)=5$. Vậy phương trình tiếp tuyến là $y=5x+1$.

Cách 2 : $g(x)=f(x)-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+1 \Rightarrow g'(x)=f'(x)-2x^2-x+1$

$g'(x)=x^3+ax^2+bx+1-2x^2-x+1$. Theo giả thiết ta có :

$g'(x)\ge 0$ với $\forall x\ge 0$ tương đương với : $ax^2+bx\ge -x^3+2x^2+x-2;\ \forall x\ge 0$.

$h(x)=f(x)-\frac{1}{6}(3x^4+2x^3-9x^2+12x-1) \Rightarrow h'(x)=f'(x)-\frac{1}{6}(12x^3+6x^2-18x+12)$

$h'(x)=x^3+ax^2+bx+1-2x^3-x^2+3x-2$. Theo giả thiết ta có :

$h'(x)\le 0$ với $\forall x\ge 0$ tương đương với : $ax^2+bx\le x^3+x^2-3x+1;\forall x\ge 0$

Ta có hệ điều kiện : $\begin{cases} ax^2+bx\ge -x^3+2x^2+x-2\,(1) \\ ax^2+bx\le x^3+x^2-3x+1 \end{cases}$, $\forall x\ge 0$ (*)

Thay $x=1$ vào hệ trên ta được : $\begin{cases} a+b\ge 0 \\ a+b\le 0 \end{cases} \Rightarrow a+b=0 \Leftrightarrow b=-a$.

Thay vào bất phương trình (1) ta được : $ax^2-ax\ge -x^3+2x^2+x-2$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+(a-1)x-2)\ge 0$. Để bất phương trình đúng với $\forall x\ge 0$ thì điều kiện cần là phương trình $x^2+(a-1)x-2=0$ có nghiệm $x=1$, hay $a=2\Rightarrow b=-2$.

Thử lại với $a=2\Rightarrow b=-2$ thì ta thấy hệ bất phương trình (*) có dạng :

$\begin{cases} x^3-3x+2\ge 0 \\ x^3-x^2-x+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2(x+2)\ge 0 \\ (x-1)^2(x+1)\ge 0 \end{cases}$ luôn đúng với $\forall x\ge 0$.

Do đó : $f'(x)=x^3+2x^2-2x+1$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=-2$ là $k=f'(-2)=5$.

Phương trình tiếp tuyến là $y=5x+m$, tiếp tuyến đi qua điểm $M(0;1)$ nên $m=1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $y=5x+1$.

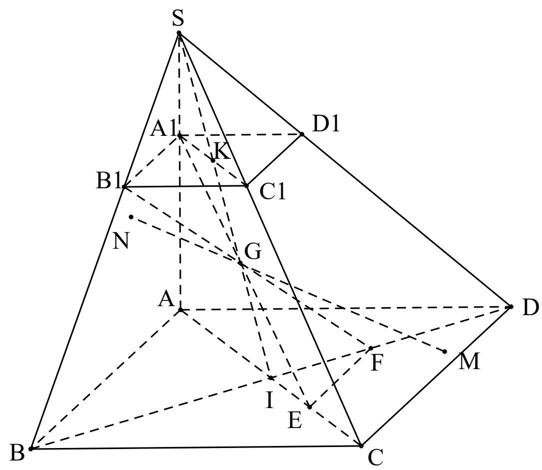
Câu 50. + $Q=\frac{MG}{NG}+\frac{NG}{MG}\ge 2$ .Dấu bằng khi và chỉ khi $\frac{MG}{NG}=\frac{NG}{MG}=1$ hay G là trung điểm MN.

Cách 1 : Gọi $M(a;b;0)$, do $G\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ nên $N\left(\frac{4}{3}-a;\frac{4}{3}-b;\frac{4}{3}\right)$. Mặt khác $N\in(Oxz)$ có phương trình $y=0$, nên $\frac{4}{3}-b=0\Leftrightarrow b=\frac{4}{3}$.

Hay $M\left(a;\frac{4}{3};0\right)$, tức là M luôn thuộc đường thẳng $x=\frac{4}{3}+t, y=\frac{4}{3}, z=0$.

Do đó $\left(2;\frac{4}{3};0\right)$ thuộc đường thẳng đã cho.

Cách 2 : SG cắt mp$(ABCD)$ tại tâm I của hình bình hành $ABCD$. Gọi K là trung điểm của SG . Từ K dựng mặt phẳng song song với mp$(ABCD)$ cắt SA, SB, SC, SD lần lượt tại A_1, B_1, C_1, D_1. Từ N dựng mặt phẳng song song với mp$(ABCD)$ cắt SG tại N'.



Ta có : $\frac{NG}{MG}=\frac{N'G}{OG}; \frac{NG}{MG}=1 \Leftrightarrow N'$ trùng $K \Leftrightarrow N$ thuộc cạnh A_1B_1 của hình bình hành $A_1B_1C_1D_1$. Nối A_1G cắt AC tại E, B_1G cắt BD tại F.

+ Từ đó $Q=2$ khi và chỉ khi M thuộc đoạn thẳng EF .

Ta có : $G\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right);K\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$.

Phương trình mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ là $z-\frac{4}{3}=0$.

Do đó ta tìm được : $A_1\left(0;0;\frac{4}{3}\right),B_1\left(\frac{2}{3};0;\frac{4}{3}\right)$. Từ đó ta tìm được $E\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};0\right),F\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3};0\right)$.

Đường thẳng EF có phương trình $x=\frac{4}{3}+t, y=\frac{4}{3}, z=0$. Do đó $\left(2;\frac{4}{3};0\right)$ thuộc đường thẳng đã cho.

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	B	B	C	B	C	C	A	D	A	D	A	A	D	C	A	A	D	B	A	C	C	D	B	C
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
A	B	C	B	D	B	A	A	D	A	A	D	C	A	A	C	A	B	B	D	D	C	A	A	D

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Trong không gian Oxyz, mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$ có toạ độ tâm là

A. $(1;-2;1)$. **B.** $(1;-2;-1)$ **C.** $(-1;-2;1)$ **D.** $(-1;2;1)$

Lời giải

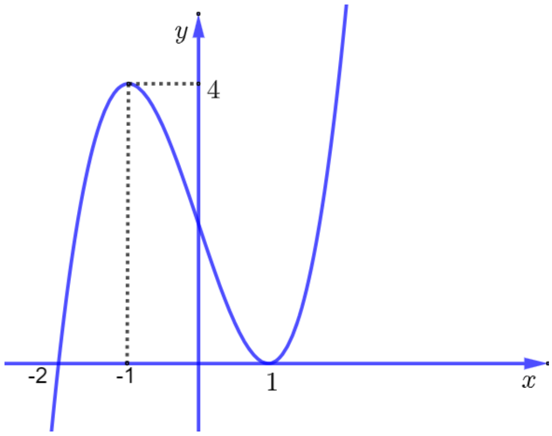
Chọn A

Trong không gian Oxyz, mặt cầu $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ có toạ độ tâm là $I(a;b;c)$

Câu 2: Cho àm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

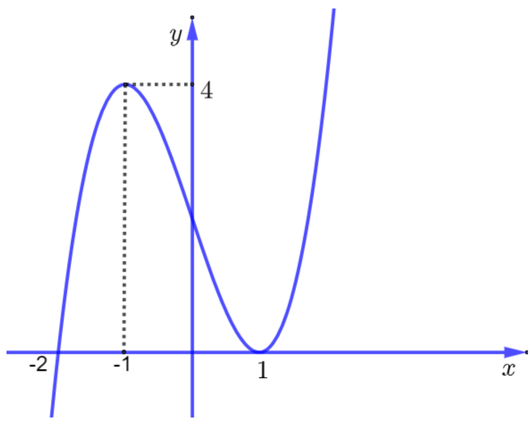
A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$. **B.** Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=4$. **D.** Hàm số đạt cực tiểu tại. $x=0$



Lời giải

Chọn B



Nhìn vào đồ thị ta thấy hàm số đồng biến trong khoảng từ $(-\infty;-1)$

Và nghịch biến trong khoảng từ $(-1;1)$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=-1$

Câu 3: Từ tập hợp $A=\{1;2;3;4;5\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 4 chữ số đôi một khác nhau?

A. A_5^4. **B.** $3A_4^3$. **C.** $3C_4^3$. **D.** C_5^4.

Lời giải

Chọn B

Gọi số cần tìm là $\overline{abcd}$ trong đó d có 3 cách chọn và a, b, c có A_4^3 cách chọn. Vậy để lập số tự nhiên lẻ có 4 chữ số đôi một khác nhau thì có $3A_4^3$ cách

Câu 4: Cho $\int_1^4 f(x)dx=-2.$ Tính $\int_1^4 2f(x)dx$

A. 4. **B.** 6. **C.** -4. **D.** -6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_1^4 2f(x)dx=2\int_1^4 f(x)dx=2.(-2)=-4$

Câu 5. Cho a là số thực dương tùy ý và khác 1. Giá trị của $\log_a\sqrt[3]{a}$ bằng

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** -3. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_a\sqrt[3]{a}=\log_a a^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(-1;1\right)$. **B.** $\left(-\infty;1\right)$. **C.** $\left(-\infty;-2\right)$. **D.** $\left(-1;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ nên hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-2\right)$

Câu 7. Cho cấp số nhân $\left(u_n\right)$ có $u_1=-2$, $u_2=4$. Công bội của cấp số nhân đó là

A. 2. **B.** -6. **C.** -2. **D.** 6.

Lời giải

Ta có: $u_2 = u_1.q \Rightarrow q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{4}{-2} = -2$.

Câu 8. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B = 12$ và chiều cao $h = 6$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. 72. **B.** 36. **C.** 18. **D.** 24.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng $V = B.h = 12.6 = 72$.

Câu 9. Số phức $z = 2 - 3i$ có số phức liên hợp là

A. $3 + 2i$. **B.** $-2 - 3i$. **C.** $-2 + 3i$. **D.** $2 + 3i$.

Lời giải

Chọn D

Số phức liên hợp của z là: $\overline{z} = 2 + 3i$

Câu 10. Nghiệm của phương trình $3^{x+1} = 9$ là

A. $x = 1$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 5$.

Lời giải

Chọn A

$3^{x+1} = 9 \Leftrightarrow x + 1 = \log_3 9 \Leftrightarrow x = 1$

Câu 11. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào sau đây biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$

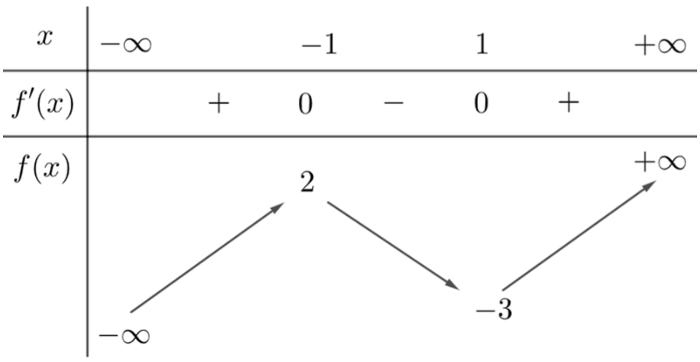
A. $M(1;-2)$. **B.** $P(-1;-2)$. **C.** $N(1;2)$. **D.** $Q(-1;2)$.

Lời giải

Chọn D

Điểm biểu diễn của số phức z là $Q(-1;2)$

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ là

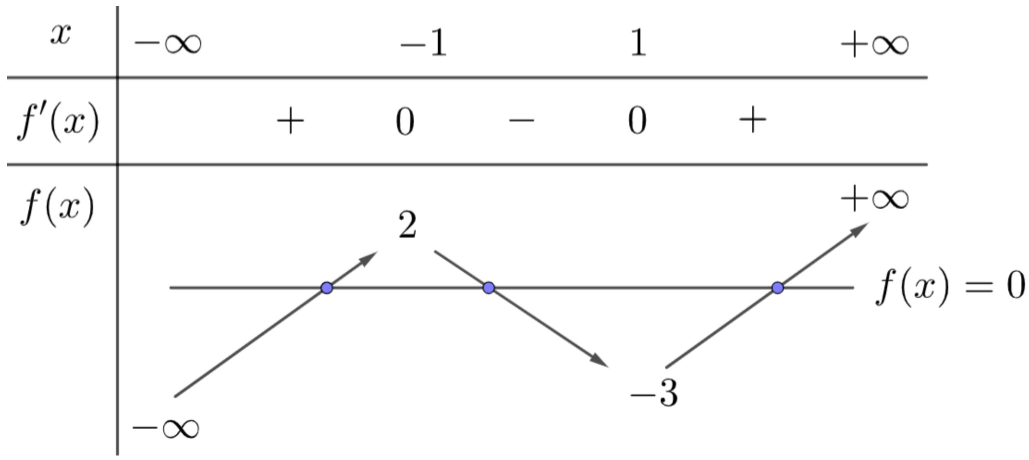


A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

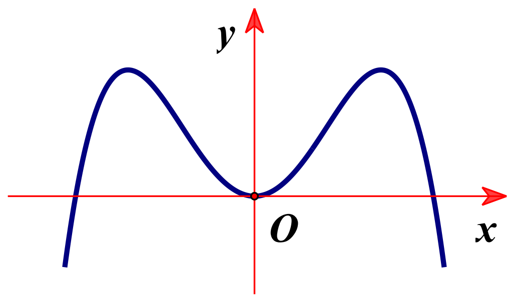
Chọn A

Ta biểu diễn đường thẳng $y = 0$ lên bảng biến thiên:



$\Rightarrow$ Hàm số $y=f(x)$ có 3 giao điểm với $f(x)=0 \Rightarrow$ Phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm

Câu 13. Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình vẽ.



A. $y=-x^4+2x^2$. **B.** $y=x^3-2x^2$.

C. $y=-x^3+2x^2$ **D.** $y=x^4-2x^2$.

Lời giải

Chọn A

Dễ thấy đồ thị hàm số đã cho có dạng của hàm số trùng phương, có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$ nên hệ số $a<0$. Do đó chỉ có hàm số $y=-x^4+2x^2$ thỏa mãn.

Câu 14. Giá trị của $I=\int\limits_1^2 x\mathrm{d}x$ là

A. 1. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** -1. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$I=\int\limits_1^2 x\mathrm{d}x=\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2=\frac{2^2}{2}-\frac{1^2}{2}=\frac{3}{2}.$$

Câu 15. Đường thẳng nào sau đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$?

A. $x=1$. **B.** $y=-1$. **C.** $x=-1$. **D.** $y=2$.

Lời giải

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ là đường thẳng $x=-1$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=2e^x-3$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=2e^x-3x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2e^{x-1}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=2e^x+3x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2e^x+C$.

Lời giải

Chọn A

$\int f(x)\mathrm{d}x=\int(2e^x-3)\mathrm{d}x=2e^x-3x+C$.

Câu 17. Thể tích khối nón tròn xoay có đường kính đáy bằng 4 và chiều cao bằng 3 là

A. 4π. **B.** 48π. **C.** 16π. **D.** 12π.

Lời giải

Chọn A

Bán kính đáy của khối nón là $r=\dfrac{4}{2}=2$.

Thể tích khối nón là: $V_{(N)}=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi.2^2.3=4\pi$.

Câu 18. Số điểm cực trị của hàm số $y=x^4+3x^2-4$

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=4x^3+6x=x(4x^2+6)=0\Leftrightarrow x=0$.

Phương trình $y'=0$ có nghiệm duy nhất và y' đổi dấu 1 lần suy ra hàm số đã cho có 1 điểm cực trị.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P):2x-y+z-3=0$?

A. $\overrightarrow{n_2}=(2;1;1)$. **B.** $\overrightarrow{n_3}=(2;-1;1)$. **C.** $\overrightarrow{n_4}=(2;0;-3)$. **D.** $\overrightarrow{n_1}=(2;1;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P):2x-y+z-3=0$ là $\overrightarrow{n_3}=(2;-1;1)$.

Câu 20. Tìm tập xác định của hàm số $y=\log_3(x-2)$.

A. $D=(2;+\infty)$. **B.** $D=[2;+\infty)$. **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **D.** $D=(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho xác định khi $x-2>0\Leftrightarrow x>2$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $D=(2;+\infty)$.

Câu 21. Một tổ có 7 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 4 học sinh từ tổ đó. Xác suất để trong 4 học sinh được chọn luôn có học sinh nam là

A. $\frac{151}{165}$. **B.** $\frac{14}{165}$. **C.** $\frac{329}{330}$. **D.** $\frac{1}{330}$.

Lời giải

Chọn C

Chọn ngẫu nhiên 4 học sinh từ tổ gồm 11 học sinh: $n(\Omega)=C_{11}^4=330$.

Gọi A là biến cố: "4 học sinh được chọn luôn có học sinh nam". Khi đó biến cố đối của biến cố A là $\overline{A}$: "4 học sinh được chọn là nữ".

Ta có: $n(\overline{A})=C_4^4=1$. Suy ra xác suất của biến cố $\overline{A}$ là: $P(\overline{A})=\frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)}=\frac{1}{330}$.

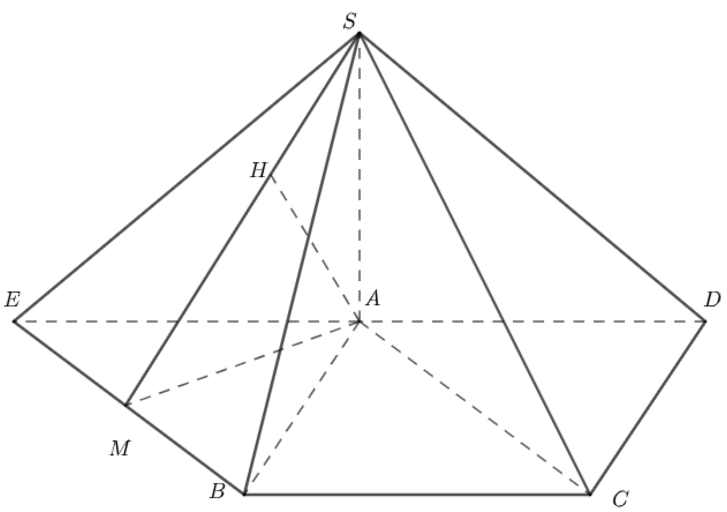
Vậy xác suất của biến cố A là: $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{330}=\frac{329}{330}$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA=1$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C



Từ B dựng BE song song với AC sao cho tứ giác $ACBE$ là hình bình hành.

Khi đó ta có $AC//(SBE)$.

Từ đó $d(AC,SB)=d(AC,(SBE))=d(A,(SBE))$.

Gọi M là trung điểm BE ta có $AM\perp BE$ (vì tam giác ABE cân tại A).

Từ A dựng $AH\perp SM$ tại H ta chứng minh được: $\begin{cases} AH\perp SM \\ AH\perp EB \end{cases}\Rightarrow AH\perp(SBE)$.

Suy ra $d(A,(SBE))=AH$.

Xét tam giác SAM ta có : $SA=1$ và

$$AM=\sqrt{BA^2-BM^2}=\sqrt{BA^2-\left(\frac{BE}{2}\right)^2}=\sqrt{BA^2-\left(\frac{AC}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2}=1$$

Ta lại có: $AH=\dfrac{SA.AM}{\sqrt{SA^2+AM^2}}=\dfrac{1.1}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d\left(AC,SB\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 23. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $z+2\overline{z}=6-4i$. Tìm phần ảo của số phức z

A. 6. **B.** 2. **C.** -4. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $z=x+yi,x,y\in\mathbb{R},i^2=-1$.

Ta có: $z+2\overline{z}=6-4i\Leftrightarrow x+yi+2\left(x-yi\right)=6-4i\Leftrightarrow 3x-yi=6-4i\Leftrightarrow\begin{cases}3x=6\\y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$.

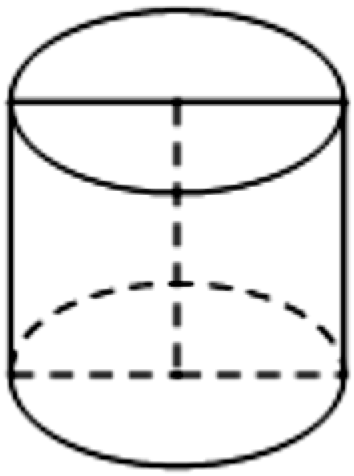
Vậy $z=2+4i$, từ đó phần ảo của số phức z là: 4.

Câu 24. Cho hình trụ có thiết diện đi qua trục là một hình vuông có cạnh bằng $4a$. Diện tích xung quanh của hình trụ là

A. $S=24\pi a^2$. **B.** $S=16\pi a^2$. **C.** $S=8\pi a^2$. **D.** $S=4\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B



Gọi r,l lần lượt là bán kính đường tròn đáy và đường sinh của hình trụ.

Ta có $l=4a$ và $r=\dfrac{4a}{2}=2a$

Vậy diện tích xung quanh của hình trụ bằng $S=2\pi rl=2\pi.2a.4a=16\pi a^2$.

Câu 29: Hàm số $y=x^3-3x$ có giá trị nhỏ nhất trên $[-1;3]$ bằng

A. 18. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

$y'=\left(x^3-3x\right)'=3x^2-3$.

$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

$y(-1)=2; y(1)=-2; y(3)=18$.

Vậy $\text{Min } y=-2$.

Câu 30: Hàm số $f(x)=-x^3+3x^2+9x+5$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;3)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Lời giải

Chọn A

$f(x)=-x^3+3x^2+9x+5$

$f'(x)=-3x^2+6x+9$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+6x+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

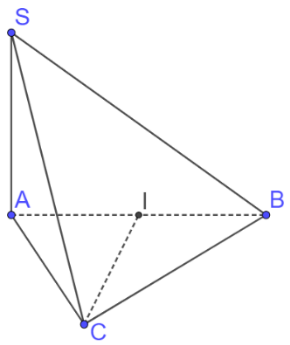
Khi đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;3)$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $C, SA=AC=a$ và $SA\perp(ABC)$. Tính khoảng cách từ C đến (SAB).

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** a.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm AB. Khi đó $CI\perp(SAB)$.

Khi đó $d\left(C;(SAB)\right)=CI=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{AC\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 32: Cho $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính tích phân $K=\int_0^2 f(2x)\mathrm{d}x$.

A. $K=6$. **B.** $K=18$. **C.** $K=3$. **D.** $K=12$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u=2x \Rightarrow du=2dx$.

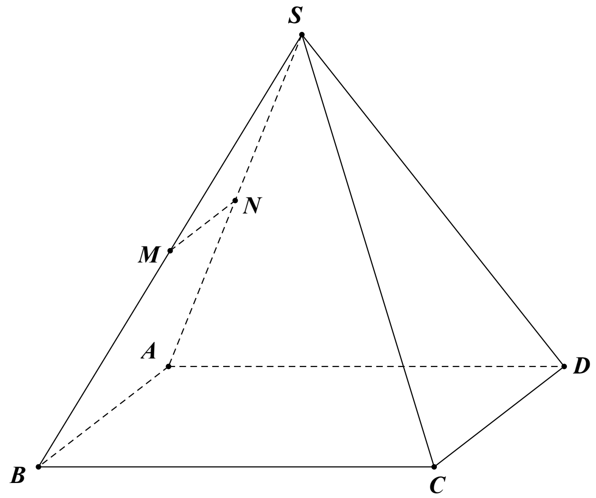
Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0 \\ x=2 \Rightarrow u=4 \end{cases}$

Khi đó $K=\int_0^2 f(2x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_0^4 f(u)\mathrm{d}u=3$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB và SA. Số đo của góc giữa hai đường thẳng MN và CB bằng

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Chọn B



Hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a nên $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều.

Suy ra $ABCD$ là hình vuông cạnh a.

Do $MN // AB$ nên $\widehat{(MN,CB)} = \widehat{(AB,CB)} = 90°$.

Câu 30. Với mọi số thực a dương, $a.\sqrt{a}$ bằng

A. $a^{\frac{1}{2}}$. **B.** $a^{\frac{5}{2}}$. **C.** $a^{\frac{2}{3}}$. **D.** $a^{\frac{3}{2}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $a.\sqrt{a} = a.a^{\frac{1}{2}} = a^{1+\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$.

Câu 31. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}} x > 2$ là

A. $\left(-\infty;\frac{1}{9}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{9}\right)$. **C.** $(9;+\infty)$. **D.** $\left(\frac{1}{9};+\infty\right)$.

Lời giải

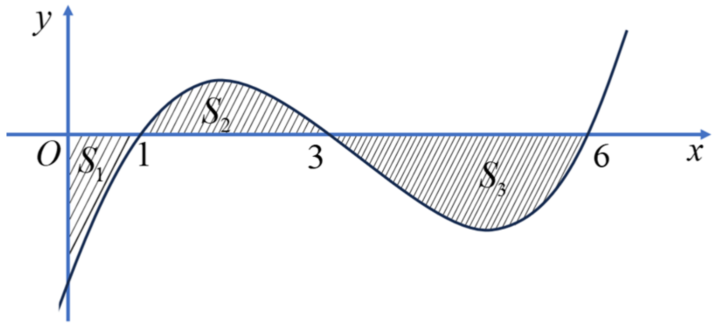
Chọn B

Điều kiện $x > 0$.

Khi đó ta có $\log_{\frac{1}{3}} x > 2 \Leftrightarrow x < \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x < \frac{1}{9}$.

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $\left(0;\frac{1}{9}\right)$.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng diện tích các miền gạch chéo như hình vẽ là $S_1 = 2, S_2 = 3$ và $S_3 = 5$. Tích phân $\int_0^6 f(x).dx$ bằng



A. -4. **B.** -3. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\limits_0^6 f(x).\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x).\mathrm{d}x + \int\limits_1^3 f(x).\mathrm{d}x + \int\limits_3^6 f(x).\mathrm{d}x = -S_1 + S_2 - S_3 = -2 + 3 - 5 = -4$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;0)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - 1 = 0$. Mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $(Q): 2x + 2y + z - 4 = 0$. **B.** $(Q): 2x - 2y + z = 0$.

C. $(Q): 2x + 2y - z + 1 = 0$. **D.** $(Q): 2x + 2y + z = 0$.

Lời giải

Chọn A

Vì (Q) song song với mặt phẳng (P) nên vtpt $\overrightarrow{n_Q} = \overrightarrow{n_P} = (2;2;1)$.

Khi đó phương trình của (Q) là: $2(x-1) + 2(y-1) + z = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z - 4 = 0$.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức, có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	

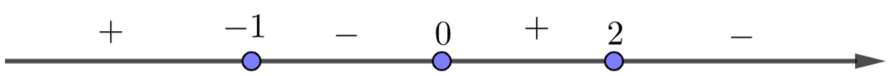
Hàm số $y = f(x-1)$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x = -1$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = -2$. **D.** $x = 1$.

Lời giải

Chọn D

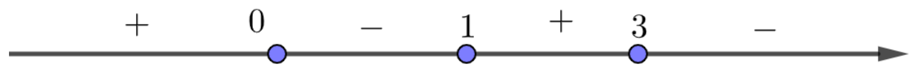
Từ bảng biến thiên, ta có dấu của $f'(x)$ trên trục số như sau:



Xét hàm số $y = f(x-1) \Rightarrow y' = f'(x-1)$

Có $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=-1 \\ x-1=0 \\ x-1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Khi đó dấu của $f'(x-1)$ trên trục số như sau:



Vậy hàm số $y = f(x-1)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

Câu 35. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = \cos 2x + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cos 2x + C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = -\cos 2x + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int \sin(ax+b)\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$ nên $\int f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$.

Câu 36. Tập xác định của hàm số $f(x) = \left(-x^2 + 10x - 1\right)^{\sqrt{3}}$ chứa bao nhiêu số nguyên?

A. 9. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 11.

Lời giải

Chọn A

Do $\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$ nên $f(x)$ xác định khi $-x^2 + 10x - 1 > 0 \Leftrightarrow 5 - 2\sqrt{6} < x < 5 + 2\sqrt{6}$

Tập xác định: $D = \left(5 - 2\sqrt{6}; 5 + 2\sqrt{6}\right)$.

Suy ra, tập xác định có chứa 9 giá trị nguyên.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)^3(x+3)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2; +\infty)$. **B.** $(-\infty; -3)$. **C.** $(-\infty; 2)$. **D.** $(-3; 2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)^3(x+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $f'(x)$:

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3; 2)$.

Câu 38. Một nhóm học sinh gồm 7 bạn nam và 4 bạn nữ đứng ngẫu nhiên thành một hàng. Xác suất để có đúng 2 trong 4 bạn nữ đứng cạnh nhau là

A. $\dfrac{6}{11}$.　　**B.** $\dfrac{27}{55}$.　　**C.** $\dfrac{28}{55}$.　　**D.** $\dfrac{2}{11}$.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega)=11!$.

Gọi A là biến cố "Trong 11 bạn đứng thành một hàng ngang có đúng 2 trong 4 bạn nữ đứng cạnh nhau".

Đầu tiên ta sắp xếp vị trí cho 7 bạn nam thì có $7!$ cách.

Khi đó bên 7 có 8 vị trí trống các bạn nữ có thể đứng vào đó.

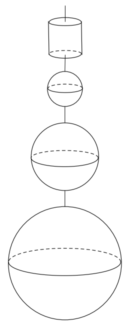
Lấy 2 bạn nữ trong 4 bạn nữ và xếp đứng cạnh nhau có $A_4^2=12$ (cách).

Coi 2 bạn nữ là một cặp và kết hợp với 2 bạn nữ còn lại ta xếp vào 3 vị trí trống trong 8 vị trí trống thì có $A_8^3=336$ (cách).

Suy ra $n(A)=7!.A_4^2.A_8^3=20321280$ (cách).

Vậy $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{7!.A_4^2.A_8^3}{11!}=\dfrac{28}{55}$.

Câu 39. Một bông hoa tai bằng vàng có dạng xích nối như hình vẽ. Biết phía trên là hình trụ có thiết diện qua trục là một hình vuông cạnh $1\ cm$. Phía dưới là 3 quả cầu nối tiếp nhau sao cho đường kính của chúng và chiều cao hình trụ tạo thành cấp số nhân với công bội $q=2$. (Giả sử phần dây nối có thể tích không đáng kể). Tính thể tích bông hoa tai?



A. $\dfrac{1171}{12}\pi\ (\text{cm}^3)$.　　**B.** $\dfrac{1169}{12}\pi\ (\text{cm}^3)$.　　**C.** $\dfrac{1168}{12}\pi\ (\text{cm}^3)$.　　**D.** $\dfrac{1213}{12}\pi\ (\text{cm}^3)$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích hình trụ là $V_1=\pi r^2h=\pi.\dfrac{1}{4}.1=\dfrac{\pi}{4}\left(\text{cm}^3\right)$(đvtt).

Gọi $r_1,\ r_2,\ r_3$ lần lượt là thể tích của ba khối cầu trong bông hoa tai.

Do đường kính của hình cầu và chiều cao hình trụ tạo thành cấp số nhân với công bội $q=2$ nên ta có $r_1=h=1,\ r_2=2,\ r_3=4$.

Vậy thể tích phần hình cầu là

$$V_2=\frac{4}{3}\pi r_1^3+\frac{4}{3}\pi r_2^3+\frac{4}{3}\pi r_3^3=\frac{4}{3}\pi\left(r_1^3+r_2^3+r_3^3\right)=\frac{4}{3}\pi\left(1^3+2^3+4^3\right)\left(\text{cm}^3\right)\ \text{(đvtt)}.$$

Vậy thể tích của bông hoa tai là $V=V_1+V_2=\dfrac{1171}{12}\pi\ (\text{cm}^3)$.

Câu 40. Cho các số phức z_1; z_2 $(z_2 \neq 1)$ thỏa mãn $|z_1| = 1$; $\dfrac{z_2+1}{z_2-1}$ là số thuần ảo và $z_1^2 z_2 - z_1 z_2^2 = \sqrt{2}$. Gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn hình học của z_1; z_2; $3z_1 + 2z_2$ trên mặt phẳng tọa độ. Tính diện tích của tam giác ABC.

A. 2. **B.** 6. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Do $|z_1| = 1$ nên tập hợp điểm biểu diễn số phức z_1 là đường tròn tâm $O(0;0)$ và $R_1 = 1$.

Đặt $z_2 = x + yi \in \mathbb{C}$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có

$$\frac{z_2+1}{z_2-1} = \frac{(x+1)+yi}{(x-1)+yi} = \frac{\left[(x+1)+yi\right]\left[(x-1)-yi\right]}{(x-1)^2+y^2} = \frac{(x+1)(x-1)+y^2+\left[(x-1)y-(x+1)y\right]i}{(x-1)^2+y^2}.$$

Do $\dfrac{z_2+1}{z_2-1}$ là số thuần ảo nên $(x+1)(x-1)+y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 1$.

Suy tập hợp điểm biểu diễn số phức z_2 là đường tròn tâm $O(0;0)$ và $R_1 = 1$.

Do $z_1^2 z_2 - z_1 z_2^2 = \sqrt{2} \Leftrightarrow z_1 z_2 (z_1 - z_2) = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1 z_2 (z_1 - z_2)| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1|.|z_2|.|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{2}$.

Vậy $\begin{cases} OA = OB = 1 \\ AB = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \Delta OAB$ vuông cân tại O.

Khi đó chọn $A(0;1)$, $B(1;0)$. Suy ra $3z_1 + 2z_2 = 2 + 3i$ nên tọa độ $C(2;3)$.

Với $AB = \sqrt{2}; AC = 2\sqrt{2}; BC = \sqrt{10}$.

Vậy diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = 2$.

Câu 41. Cho phương trình $\left[\log_3(x^2-x-2) + \log_{\frac{1}{3}} 4\right](4^x - m) = 0$ (1). Tìm số các giá trị nguyên của $m \in [1;100]$ để phương trình (1) có đúng ba nghiệm phân biệt.

A. 84. **B.** 81. **C.** 83. **D.** 82.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 2 \end{array}\right.$ (*)

Ta có phương trình $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(x^2-x-2) + \log_{\frac{1}{3}} 4 = 0 \\ 4^x - m = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \ (tm) \\ x = 3 \quad (tm) \\ 4^x = m \end{array}\right.$

Để phương trình (1) có đúng ba nghiệm phân biệt thì phương trình $4^x = m$ có một nghiệm khác (-2) và 3 thỏa mãn $x < -1, x > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < \frac{1}{4} \vee m > 16 \\ 4^{-2} \neq m \\ 4^3 \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < \frac{1}{4} \vee m > 16 \\ m \neq \frac{1}{16} \\ m \neq 64 \end{cases}$

Vậy có 83 giá trị nguyên của m.

Câu 42. Cho hàm số $y = x^4 + 2(m-1)x^2 + 3$. Khi đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều thì giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây.

A. $(-1;0)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có hàm số có ba điểm cực trị khi $2(m-1) < 0 \Leftrightarrow m < 1$ (*)

Đồ thị có ba điểm cực trị $A(0;3)$, $B\left(-\sqrt{1-m};-m^2+2m+2\right)$, $C\left(\sqrt{1-m};-m^2+2m+2\right)$ với tam giác ABC cân tại A.

Tam giác ABC đều khi $AB = BC \Leftrightarrow AB^2 = BC^2$

$(m-1)^3 + 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1 - \sqrt[3]{3}$

Vậy $m \in (-1;0)$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và điểm $A(0;1;-2)$. Từ A kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (C_1). Từ điểm M nằm ngoài (S) và nằm trong mặt phẳng chứa đường tròn (C_1), kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (C_2). Biết rằng nếu (C_1) và (C_2) có cùng bán kính thì M luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính r của đường tròn đó bằng?

A. $r = 3\sqrt{6}$. **B.** $r = 2\sqrt{6}$. **C.** $r = 3\sqrt{2}$. **D.** $r = \sqrt{10}$.

Lời giải

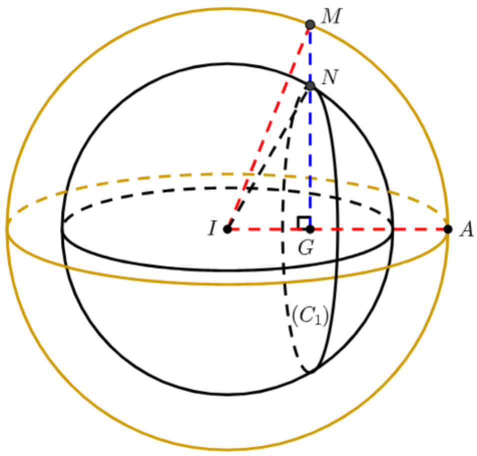
Chọn B

Có $(S):(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9 \Rightarrow$ Tâm $I(1;2;3), R_S = 3$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa (C_1).

Khi điểm M không bắt buộc thuộc vào mặt phẳng (P) thì để $(C_1),(C_2)$ là hai đường tròn có cùng bán kính thì M thuộc mặt cầu tâm $I(1;2;3), R = IA = 3\sqrt{3}$.

Do đó, điểm M thuộc đường tròn là giao của mặt phẳng (P) và $(I, R = IA)$.



Dễ thấy rằng, bán kính cần tìm chính là độ dài đoạn MG như trong hình vẽ. Với G là tâm đường tròn (C_1).

Ta có: $\begin{cases} IA = 3\sqrt{3} \\ IN = R_S = 3 \end{cases} \Rightarrow IG = \dfrac{IN^2}{IA} = \dfrac{9}{3\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Mặt khác, $MG^2 = IM^2 - IG^2 = IA^2 - IG^2 = 27 - 3 = 24$

$\Rightarrow MG = 2\sqrt{6}$.

Vậy M thuộc đường tròn bán kính $2\sqrt{6}$.

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $[0;2]$ và thỏa mãn $2f(2) = \int_0^2 x(f'(x) - 1)dx$.

Tích phân $I = \int_0^2 f(x)dx$ bằng

A. -4. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Xét $2f(2) = \int_0^2 x(f'(x)-1)dx \Rightarrow 2f(2) + \int_0^2 xdx = \int_0^2 x.f'(x)dx$

$\Leftrightarrow 2f(2) + 2 = x.f(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)dx$

$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = -2$.

Câu 45. Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, với $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $g(x) = f(x) - \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và hàm số $h(x) = 6f(x) - 3x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 12x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = -2$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(0;-1)$?

A. $y = -3x - 1$. **B.** $y = 3x - 1$. **C.** $y = -5x - 1$. **D.** $y = 5x - 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=f'(x)-2x^2-x+1=x^3+(a-2)x^2+(b-1)x+2$

$h'(x)=6f'(x)-12x^3-6x^2+18x-12=-6x^3+6(a-1)x^2+6(b-3)x-6$

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} x^3+(a-2)x^2+(b-1)x+2 \\ -6x^3+6(a-1)x^2+6(b-3)x-6 \end{cases}, \forall x\in(0;+\infty) \quad (*)$

Thay $x=1$ vào $(*)$ ta được $a+b=0 \qquad (2)$.

Do hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và hàm số $h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên $x=1$ phải là nghiệp bội chẵn của $g'(x)$ và $h'(x)$ nên ta có

$\begin{cases} g''(1)=0 \\ h''(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+2(a-2)x+(b-1)=0 \\ -18x^2+12(a-1)x+6(b-3)=0 \end{cases} \Rightarrow 2a+b=2 \qquad (3)$

Từ (2) và (3) suy ra $a=2;\, b=-2 \Rightarrow f'(x)=x^3+2x^2+2x+1$.

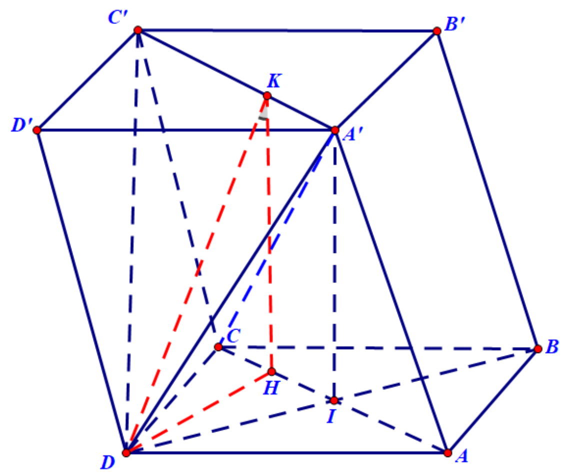
Gọi Δ là tiếp tuyến của tại điểm có hoành độ $x=-2$ và đi qua $M(0;-1)$ khi đó phương trình của Δ là: $y=f'(-2)(x-0)-1 \Leftrightarrow y=5x-1$.

Câu 46. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=2a, AC=4a$ và $A'A=A'B=A'C$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng $(A'AC)$ và $(DA'C')$ bằng $45°$, tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $6a^3\sqrt{3}$. **B.** $4a^3\sqrt{3}$. **C.** $8a^3\sqrt{3}$. **D.** $12a^3$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $CD=2a\sqrt{3}$

Vì $A'A=A'B=A'C$ nên gọi I là hình chiếu của A' trên $(ABCD) \Rightarrow IA=IB=IC$ khi đó I là trung điểm của AC

Gọi H là hình chiếu của D trên AC ta có $DH=\dfrac{DA.DC}{AC}=a\sqrt{3}$.

Kẻ $HK//IA', K\in A'C' \Rightarrow (DHK)\perp A'C'$ suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(A'AC)$ và $(DA'C')$ bằng $\widehat{DKH}=45^0$

Xét tam giác vuông cân $DHK \Rightarrow HK=DK=a\sqrt{3}=A'I$

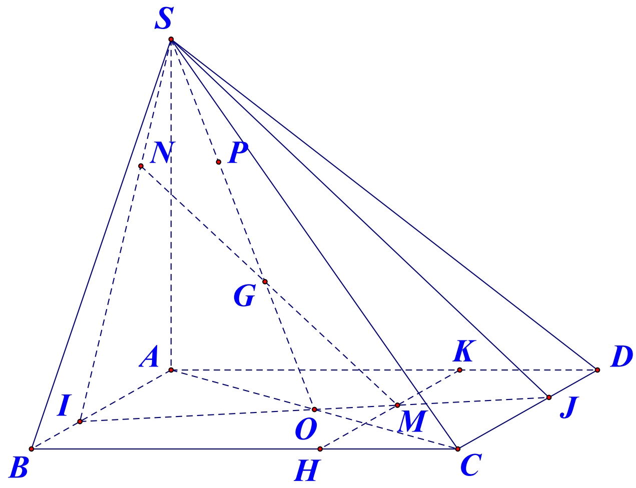
Thể tích của khối lăng trụ là: $V=2a.2a\sqrt{3}.a\sqrt{3}=12a^3$.

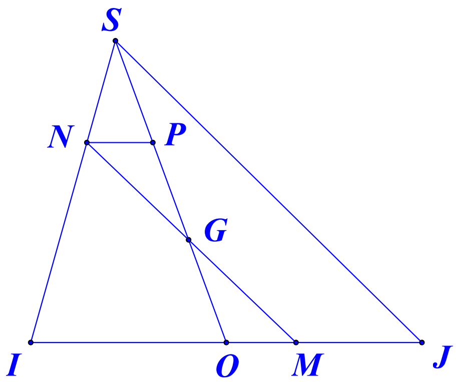
Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(2;2;0)$, $D(0;2;0)$, $S(0;0;2)$. Gọi G là trọng tâm tam giác SBD, M là điểm thuộc miền trong tứ giác $ABCD$ sao cho tia MG cắt mặt bên SAB của hình chóp tại N. Khi biểu thức $Q=\dfrac{MG}{NG}+\dfrac{NG}{MG}$ đạt giá trị nhỏ nhất thì điểm M chạy trên một đoạn thẳng, đường thẳng chứa đoạn thẳng đó đi qua điểm nào sau đây?

A. $\left(1;\dfrac{2}{3};0\right)$. **B.** $(2;1;0)$. **C.** $\left(3;\dfrac{4}{3};0\right)$. **D.** $\left(1;\dfrac{5}{3};0\right)$.

Lời giải

Chọn C





+ Ta có: $Q=\dfrac{MG}{NG}+\dfrac{NG}{MG}\geq 2\sqrt{\dfrac{MG}{NG}.\dfrac{NG}{MG}}=2$. Dấu "=" xảy ra khi $MG=NG$.

+ Trong (SAB), kéo dài SN, cắt AB tại I; Trong $(ABCD)$, kéo dài IM, cắt CD tại J.

+ Khi đó: 4 điểm I, O, M, J cùng thuộc 2 mặt phẳng (SMN) và $(ABCD)$ nên 4 điểm đó thẳng hàng và O là trung điểm IJ.

+ Xét tam giác SIJ, gọi P là trung điểm SG.

Ta có $\Delta OMG=\Delta PNG\ (c.g.c)\Rightarrow\begin{cases}\widehat{GMO}=\widehat{GNP}\\ OM=NP\end{cases}\Rightarrow NP\,//\,OM$.

Dễ thấy $\dfrac{NP}{OI}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{OM}{OI}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{OM}{OJ}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{MJ}{OJ}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow d(M;CD)=\dfrac{2}{3}d(O;CD)\ (*)$.

+ Trong $(ABCD)$, qua M kẻ đường thẳng song song với CD cắt AD tại K, cắt BC tại H.

Từ $(*)$ suy ra $\begin{cases}AK=\dfrac{2}{3}AD\\ BH=\dfrac{2}{3}BC\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}H\left(2;\dfrac{4}{3};0\right)\\ K\left(0;\dfrac{4}{3};0\right)\end{cases}\Rightarrow HK:\begin{cases}x=t\\ y=\dfrac{4}{3}\\ z=0\end{cases}$.

Vậy đường thẳng chứa quỹ tích điểm M đi qua điểm $\left(3;\dfrac{4}{3};0\right)$.

Câu 48. Cho các số thực $x;\ y$ thỏa mãn:

$$\log_5\left[x^2+(y+1)^2\right]+\log_3\left(x^2+y^2\right)\leq\log_3\left[x^2-56+(y+8)^2\right]+\log_5(2y+1).$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + y$.

A. $4 + 2\sqrt{10}$. **B.** 4. **C.** $2 + 2\sqrt{10}$. **D.** $4 + \sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

+ Điều kiện: $\begin{cases} x^2+(y+1)^2>0 \\ x^2+y^2>0 \\ x^2-56+(y+8)^2>0 \\ 2y+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2>0 \\ 2y+1>0 \end{cases}$.

+ Ta có: $\log_5\left[x^2+(y+1)^2\right]+\log_3\left(x^2+y^2\right)\le\log_3\left[x^2-56+(y+8)^2\right]+\log_5(2y+1)$

$\Leftrightarrow \log_5\dfrac{x^2+(y+1)^2}{2y+1}\le\log_3\dfrac{x^2-56+(y+8)^2}{x^2+y^2} \Leftrightarrow \log_5\left(\dfrac{x^2+y^2}{2y+1}+1\right)\le\log_3\left(1+8.\dfrac{2y+1}{x^2+y^2}\right)$ (*).

+ Đặt $t=\dfrac{x^2+y^2}{2y+1}$ $(t>0)$, bất phương trình (*) trở thành: $\log_5(t+1)\le\log_3\left(1+\dfrac{8}{t}\right)$

$\Leftrightarrow \log_5(t+1)-\log_3\left(1+\dfrac{8}{t}\right)\le 0$.

+ Xét $f(t)=\log_5(t+1)-\log_3\left(1+\dfrac{8}{t}\right)$ có $f'(t)=\dfrac{1}{(t+1)\ln 5}+\dfrac{8}{t(t+8)\ln 3}>0$.

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ và dễ thấy $f(4)=0$.

Khi đó: $f(t)=\log_5(t+1)-\log_3\left(1+\dfrac{8}{t}\right)\le 0=f(4)$

$\Leftrightarrow t\le 4 \Rightarrow \dfrac{x^2+y^2}{2y+1}\le 4 \Leftrightarrow x^2+(y-4)^2\le 20$.

+ Xét biểu thức $P=x+y=x+(y-4)+4$

$\le\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left(x^2+(y-4)^2\right)}+4\le\sqrt{2.20}+4=4+2\sqrt{10}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x=y-4 \\ x+y=4+2\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{10} \\ y=4+\sqrt{10} \end{cases}$.

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x\ln x}+3x^2\ln x$ và $f(e)=e^3$. Tích phân $\int\limits_e^{e^2}\dfrac{f(x)}{x^4}dx$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x\ln x}+3x^2\ln x$. Nhân hai vế với $\dfrac{1}{\ln x}$,ta được

$$f'(x).\frac{1}{\ln x}=\frac{f(x)}{x\ln^2 x}+3x^2 \Leftrightarrow f'(x).\frac{1}{\ln x}-f(x).\frac{1}{x\ln^2 x}=3x^2$$

$$\Leftrightarrow f'(x).\frac{1}{\ln x}+f(x).\left(\frac{1}{\ln x}\right)'=3x^2 \Leftrightarrow \left(f(x).\frac{1}{\ln x}\right)'=3x^2.$$

Nguyên hàm hai vế, ta được $f(x).\frac{1}{\ln x}=x^3+C$.

Vì $f(e)=e^3$ nên $f(e).\frac{1}{\ln e}=e^3+C \Leftrightarrow e^3.1=e^3+C \Leftrightarrow C=0$.

Vậy $f(x)=x^3.\ln x \Rightarrow \int_e^{e^2}\frac{f(x)}{x^4}\mathrm{d}x=\int_e^{e^2}\frac{x^3.\ln x}{x^4}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$.

Câu 50. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-2-4i|=1$; $|z_2+2|=|z_2+2i|$, biết rằng $\frac{z_1-z_2}{1+2i}$ là số thực. Gọi M, m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$. Khi đó $M+m$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(9;10)$. **B.** $(10;11)$. **C.** $(7;8)$. **D.** $(8;9)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $|z_1-2-4i|=1$. Gọi A là điểm biểu diễn của $z_1=x_1+y_1i$ $(x_1;y_1\in\mathbb{R})$.

Tập hợp điểm biểu diễn của z_1 là đường tròn tâm $I(2;4), R=1$.

Gọi B là điểm biểu diễn của $z_2=x_2+y_2i$ $(x_2;y_2\in\mathbb{R})$.

Ta có $|z_2+2|=|z_2+2i| \Leftrightarrow |x_2+y_2i+2|=|x_2+y_2i+2i|$

$\Leftrightarrow (x_2+2)^2+y_2^2=x_2^2+(y_2+2)^2 \Leftrightarrow x_2^2+4x+4+y_2^2=x_2^2+y_2^2+4y+4$

$\Leftrightarrow 4x_2-4y_2=0 \Leftrightarrow x_2-y_2=0$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn của z_2 là đường thẳng d có phương trình $x-y=0$.

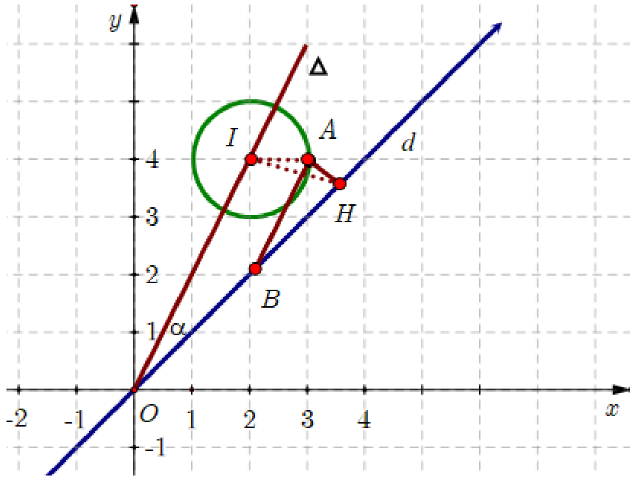
Đường thẳng d có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(1;1)$.

+ Vì $\frac{z_1-z_2}{1+2i}=\frac{x_1+y_1i-x_2-y_2i}{1+2i}=\frac{\left[(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i\right](1-2i)}{5}=$

$=\frac{\left[(x_1-x_2)+2(y_1-y_2)\right]}{5}+\frac{\left[-2(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\right]}{5}i$ là số thực nên ta có:

$-2(x_1-x_2)+(y_1-y_2)=0 \Leftrightarrow 2(x_2-x_1)-(y_2-y_1)=0$.

+ Vậy AB có một vectơ pháp tuyến là là $\vec{n}=(2;-1) \Rightarrow \overrightarrow{u_{AB}}=(1;2)$. Hay AB nằm trên đường thẳng có giá song song hoặc trùng với đường thẳng Δ có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;2)$ và qua gốc O.



+ Lấy A thuộc đường tròn, H là hình chiếu của A trên d , α là góc giữa d và Δ .

+ Có: $d\left(I,d\right)=\sqrt{2}>1=R$.

+ Ta có $\sin\alpha=\dfrac{AH}{AB}\Rightarrow AB=\dfrac{AH}{\sin\alpha}$, góc α không đổi, và $\left|R-d\left(I,d\right)\right|\le AH\le R+d\left(I,d\right)$

$\Rightarrow \max AB=\dfrac{R+d\left(I,d\right)}{\sin\alpha}$; $\min AB=\dfrac{\left|R-d\left(I,d\right)\right|}{\sin\alpha}=\dfrac{d\left(I,d\right)-R}{\sin\alpha}$.

+) Ta có $\cos\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{u_d}|}{|\overrightarrow{u_\Delta}|.|\overrightarrow{u_d}|}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}\Rightarrow \sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Suy ra $\max AB=\dfrac{d\left(I;d\right)+R}{\sin\left(AB;d\right)}=\sqrt{10}+2\sqrt{5}$; $\min AB=\dfrac{d\left(I;d\right)-R}{\sin\left(AB;d\right)}=-\sqrt{10}+2\sqrt{5}$.

$\Rightarrow M+m=4\sqrt{5}\approx 8,94\in\left(8;9\right)$.

---------------------HẾT---------------------