

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho  $a, b, c$  là các số thực thỏa mãn  $40a + 20b = 30b + 15c = 24c + 12a$ . Chứng minh  $a + b = c$ .

b) Cho  $a, b, c$  là các số thực thỏa mãn  $a + b + c = 6$  và  $a^2 + b^2 + c^2 = 12$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = (a - 3)^{2024} + (b - 3)^{2024} + (c - 3)^{2024}$ .

Câu 2. (2,5 điểm)

a) Giải phương trình  $4x^3 + 31x^2 - 27 = 12(x^2 + x)\sqrt{1 - x}$ .

b) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} (x + y)(4x + y) = 5x + 2y - 1 \\ 2x^2 - 5x + 2\sqrt{x + y} - \sqrt{3x - 1} = 0. \end{cases}$$

Câu 3. (1,5 điểm)

a) Cho phương trình  $x^4 + x^2(ax + a - 1) + ax = 2 - a$  ( $a$  là tham số). Chứng minh rằng nếu  $a$  khác 2 và tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là số nguyên thì  $2a^2 - 6a + 9$  là hợp số.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 3abc$ .

Câu 4. (2,5 điểm) Cho đường tròn  $(O)$ . Từ điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn, vẽ các tiếp tuyến  $AE, AF$  tới đường tròn  $(O)$  ( $E, F$  là các tiếp điểm) và cát tuyến  $ABC$  ( $B, C$  thuộc đường tròn  $(O)$ ,  $B$  nằm giữa  $A$  và  $C$ ).

a) Chứng minh rằng  $BE \cdot CF = CE \cdot BF$ .

b) Gọi  $H$  là giao điểm của  $AO$  và  $EF$ ,  $I$  là trung điểm của  $BC$ . Đường thẳng đi qua  $I$  song song với  $CE$  cắt  $EF$  tại  $D$ ,  $CD$  cắt  $AE$  tại  $K$ . Chứng minh  $HK$  vuông góc với  $OF$ .

c) Trong tam giác  $FBC$  lấy điểm  $N$  sao cho  $AN = AF$ . Qua điểm  $N$  vẽ các dây cung  $BQ, CR, FP$  của đường tròn  $(O)$ . Chứng minh rằng tam giác  $PQR$  là tam giác cân.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm, đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a - b)^2} + \frac{1}{(b - c)^2} + \frac{1}{(c - a)^2} \geq \frac{4}{ab + bc + ca}.$$

Câu 6. (0,5 điểm) Trong hình lục giác đều có cạnh bằng 4 cho 257 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại hình vuông có cạnh bằng 1 chứa ít nhất 5 điểm (có thể thuộc cạnh hình vuông) trong số các điểm đã cho.