

Câu 1. (2,0 điểm)

1. Cho biểu thức $A = \left[\frac{2x-1+\sqrt{x}}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} \right] \cdot \frac{(x-\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}-1} - 1$, với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$.

Tìm các giá trị của x sao cho $A < \frac{-1}{7}$.

2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+2\sqrt{abc}=1$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-c)(1-a)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} - \sqrt{abc} + 2024$$

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = y^3 + y \\ 4x + 6\sqrt{x-1} + 7 = (4x-1)y \end{cases}$$

2. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x+y+z=0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2x-1}{x^2+2} + \frac{2y-1}{y^2+2} + \frac{2z-1}{z^2+2} \geq \frac{-3}{2}.$$

Câu 3. (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $(x^2-x-1)(y^2+xy-9)=2x+1$.

2. Cho số nguyên tố lẻ p và số nguyên dương a thỏa mãn: a^p-1 chia hết cho p^3 . Chứng minh rằng $a-1$ chia hết cho p^2 .

Câu 4. (3,0 điểm) Cho đường tròn (O) cố định và điểm A cố định trên (O) , các điểm B, C thay đổi trên (O) sao cho B, C không trùng A và $AC < BC$. Điểm M trên đoạn BC sao cho $\widehat{MAC} = \widehat{ABC}$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và BI cắt AC tại D . Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAC .

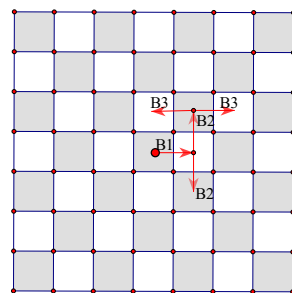
1. Chứng minh rằng hai tam giác CJM và CIA đồng dạng.

2. Gọi P là giao điểm khác I của đường thẳng CI và đường tròn ngoại tiếp tam giác AID , đường thẳng PM cắt đường thẳng JD tại N . Chứng minh rằng bốn điểm N, M, J, C thuộc một đường tròn.

3. Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BNC . Chứng minh khi B, C thay đổi trên (O) thì T luôn thuộc một đường cố định.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho bảng vuông 7×7 gồm 49 ô vuông đơn vị như hình vẽ. Có 37 con robot được đặt vào tâm của các ô vuông đơn vị sao cho không có 2 con robot cùng nằm trong một ô. Các con robot được lập trình để di chuyển đồng loạt, với cùng tốc độ theo nguyên tắc như sau: Ban đầu, mỗi con đều di chuyển sang tâm của một ô vuông đơn vị bất kỳ chung cạnh với ô vuông nó đang đứng. Sau đó, mỗi khi chạm vào tâm của ô vuông đến, nó sẽ quay một góc 90° và di chuyển tiếp theo hướng đó sang tâm của ô tiếp theo và cứ tiếp tục di chuyển như thế (một ví dụ về cách di chuyển của một con robot như hình vẽ). Chứng minh rằng dù ban đầu có đặt các con robot như thế nào thì vẫn luôn có một thời điểm mà có hai con robot ở chung một ô vuông.



----- Hết -----

Họ và tên thí sinh:

Số báo danh: Phòng thi:

Cán bộ coi thi số 1:

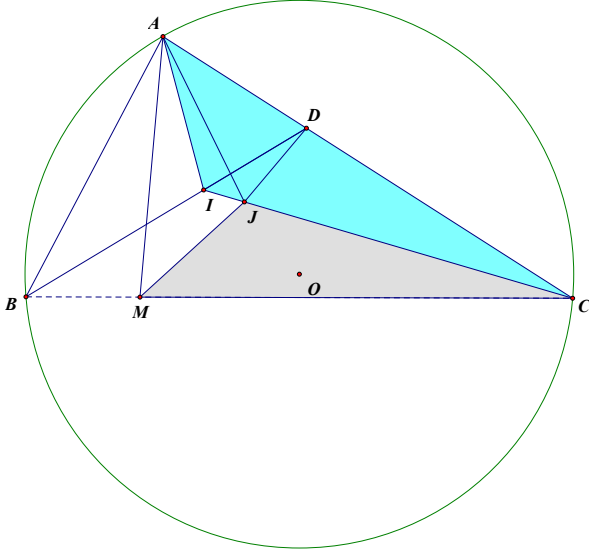
Cán bộ coi thi số 2:

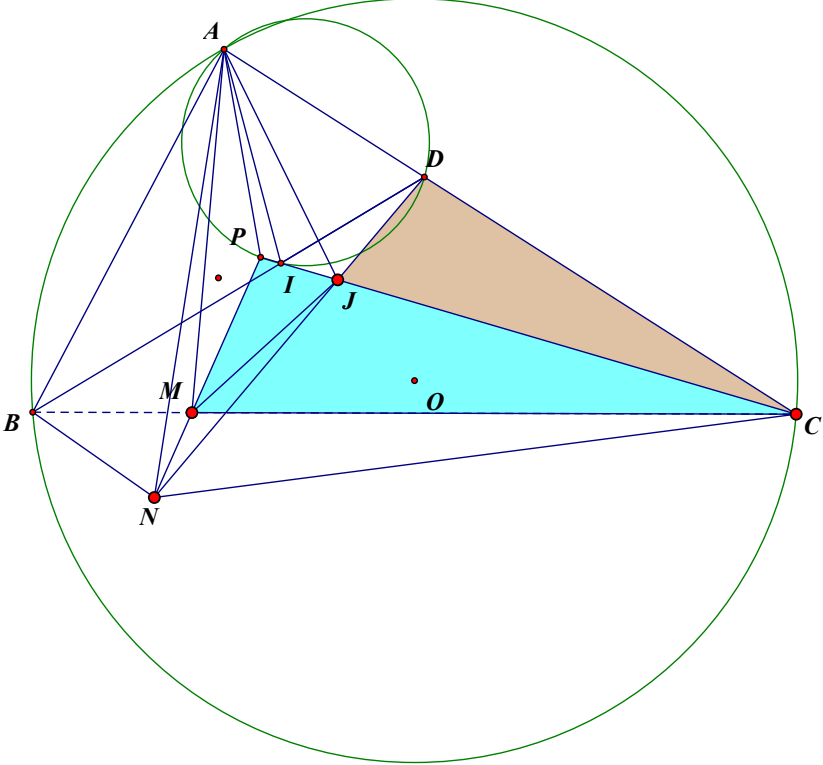
Câu	Đáp án	Điểm
1	Câu 1. (2,0 điểm) 1. Cho biểu thức $A = \left[\frac{2x-1+\sqrt{x}}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} \right] \cdot \frac{(x-\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}-1} - 1$, với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$. Tìm các giá trị của x sao cho $A < \frac{-1}{7}$.	
	Đặt $\sqrt{x} = a \geq 0 \Rightarrow x = a^2$, ta có $A = \left[\frac{2a^2-1+a}{1-a^2} + \frac{2a^3+a^2-a}{a^3+1} \right] \cdot \frac{(a^2-a)(1-a)}{2a-1} - 1$	0,25
	$A = \left[\frac{(a+1)(2a-1)}{(1-a)(1+a)} + \frac{a(a+1)(2a-1)}{(a+1)(a^2-a+1)} \right] \cdot \frac{a(a-1)(1-a)}{2a-1} - 1$ $A = \left[\frac{(2a-1)}{(1-a)} + \frac{a(2a-1)}{(a^2-a+1)} \right] \cdot \frac{a(a-1)(1-a)}{2a-1} - 1$	0,25
	$A = \left[\frac{1}{(1-a)} + \frac{a}{(a^2-a+1)} \right] \cdot (2a-1) \cdot \frac{a(a-1)(1-a)}{2a-1} - 1 = \frac{a^2-a}{a^2-a+1} - 1$ $A = \frac{-1}{a^2-a+1}$	0,25
	Khi đó $A < -\frac{1}{7} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2-a+1} > \frac{1}{7} \Leftrightarrow a^2-a+1 < 7 \Leftrightarrow a^2-a-6 < 0 \Leftrightarrow -2 < a < 3$. Mà $a \geq 0$ nên $0 \leq x < 9, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$ Vậy $0 \leq x < 9, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$	0,25
2	2. (1,0 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c + 2\sqrt{abc} = 1$. Tính giá trị biểu thức $P = \sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-c)(1-a)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} - \sqrt{abc} + 2024$	

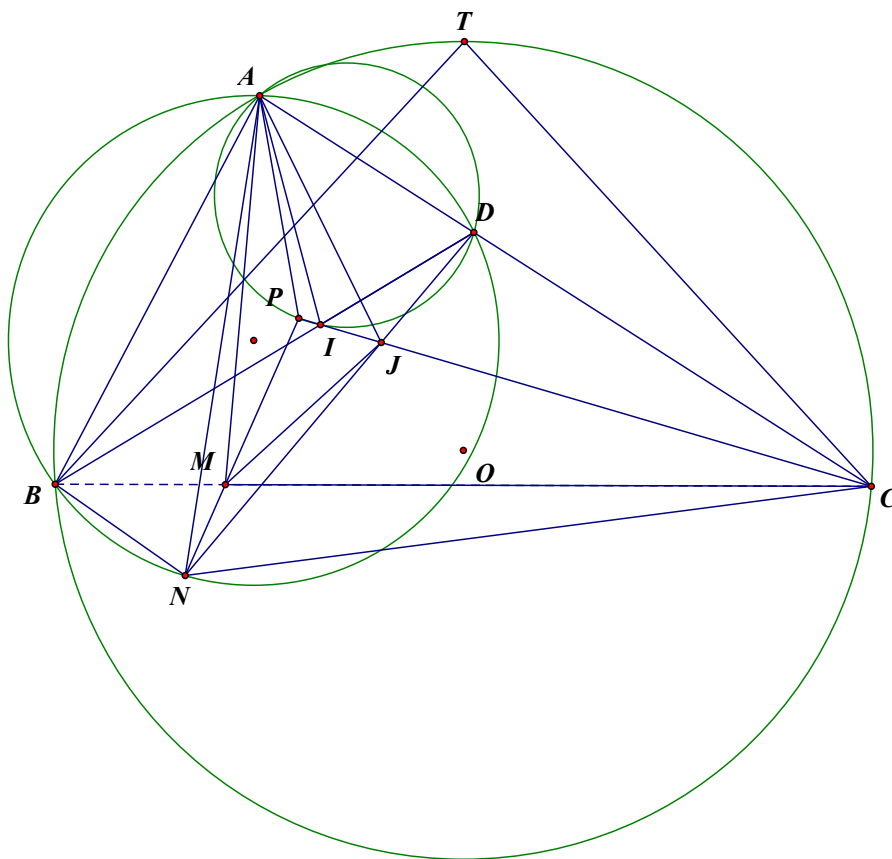
	Ta có $a + b + c + 2\sqrt{abc} = 1 \Rightarrow b + c = 1 - a - 2\sqrt{abc}$, nên: $\sqrt{(1-b)(1-c)} = \sqrt{(1-b-c+bc)} = \sqrt{1-(b+c)+bc}$ $= \sqrt{1-(1-2\sqrt{abc}-a)+bc} = \sqrt{a+2\sqrt{abc}+bc}$	0,25
	$= \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{bc})^2} = \sqrt{a} + \sqrt{bc}$ $\Rightarrow \sqrt{a(1-b)(1-c)} = \sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{bc}) = a + \sqrt{abc}$	0,25
	Tương tự, ta có: $\sqrt{(1-c)(1-a)} = \sqrt{b} + \sqrt{ca} \Rightarrow \sqrt{b(1-c)(1-a)} = b + \sqrt{abc}$ $\sqrt{(1-a)(1-b)} = \sqrt{c} + \sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{c(1-a)(1-b)} = c + \sqrt{abc}$	0,25
	Do đó, ta được: $P = a + \sqrt{abc} + b + \sqrt{abc} + c + \sqrt{abc} - \sqrt{abc} + 2024$ $= a + b + c + 2\sqrt{abc} + 2024 = 2025.$ Vậy $P = 2025$.	0,25
2	Câu 2. (2,0 điểm) 1. (1,0 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = y^3 + y \\ 4x + 6\sqrt{x-1} + 7 = (4x-1)y \end{cases}$	
	Điều kiện: $x \geq 1, y \in \mathbb{R}$ Xét hệ: $\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = y^3 + y & (1) \\ 4x + 6\sqrt{x-1} + 7 = (4x-1)y & (2) \end{cases}$	0,25
	$(1) \Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = y^3 + y \Leftrightarrow (x+1-y) \left[(x+1)^2 + (x+1)y + y^2 + 1 \right] = 0$	
	$\Leftrightarrow y = x+1 \text{ (vì } (x+1)^2 + (x+1)y + y^2 + 1 = \left(x+1+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 1 > 0 \forall x, y).$	0,25
	Thay $y = x+1$ vào phương trình (2), ta được: $4x + 6\sqrt{x-1} + 7 = (4x-1)(x+1)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (\sqrt{x-1} + 3)^2 = 4x^2 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} + 3 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x-1 = (2x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$ Từ đó $\Rightarrow y = 3$ Vậy $(x; y) = (2; 3)$.	0,25

2. (1,0 điểm) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng: $\frac{2x-1}{x^2+2} + \frac{2y-1}{y^2+2} + \frac{2z-1}{z^2+2} \geq \frac{-3}{2}$.	
Trong 3 số x, y, z luôn có hai số cùng không âm hoặc cùng không dương do $x + y + z = 0$ Không mất tổng quát, giả sử $xy \geq 0$.	0,25
Đặt $P = \frac{2x-1}{x^2+2} + \frac{2y-1}{y^2+2} + \frac{2z-1}{z^2+2}$ Áp dụng $\frac{m^2}{a} + \frac{n^2}{b} \geq \frac{(m+n)^2}{a+b}$ với $a, b > 0$ (không cần chứng minh) $P + 3 = \left(\frac{2x-1}{x^2+2} + 1 \right) + \left(\frac{2y-1}{y^2+2} + 1 \right) + \left(\frac{2z-1}{z^2+2} + 1 \right) = \frac{(x+1)^2}{x^2+2} + \frac{(y+1)^2}{y^2+2} + \frac{(z+1)^2}{z^2+2}$ $P + 3 \geq \frac{(x+y+2)^2}{x^2+y^2+4} + \frac{(z+1)^2}{z^2+2}$	0,25
$P + 3 \geq \frac{(x+y+2)^2}{(x+y)^2 - 2xy + 4} + \frac{(z+1)^2}{z^2+2}$ $\Rightarrow P + 3 \geq \frac{(x+y+2)^2}{(x+y)^2 + 4} + \frac{(z+1)^2}{z^2+2} \quad (\text{vì } xy \geq 0)$ Do $x + y + z = 0$ nên $P + 3 \geq \frac{(z-2)^2}{z^2+4} + \frac{(z+1)^2}{z^2+2}$	0,25
Ta chứng minh $P + 3 \geq \frac{3}{2}$. Thật vậy $\frac{(z-2)^2}{z^2+4} + \frac{(z+1)^2}{z^2+2} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{(z-2)^2(z^2+2) + (z+1)^2(z^2+4)}{z^4+6z^2+8} \geq \frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow 2(z^2-4z+4)(z^2+2) + 2(z^2+2z+1)(z^2+4) \geq 3(z^4+6z^2+8)$ $\Leftrightarrow z^4 - 4z^3 + 4z^2 \geq 0 \Leftrightarrow z^2(z^2 - 4z + 4) \geq 0 \Leftrightarrow z^2(z-2)^2 \geq 0,$ Điều này đúng với mọi z. Dấu bằng xảy ra khi $z = 0$ hoặc $z = 2$. Suy ra $P + 3 \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow P \geq \frac{-3}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y, x.y = 0, z^2(z-2)^2 = 0, x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$. Vậy có điều phải chứng minh.	0,25

3	Câu 3. (2,0 điểm)	
	1. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $(x^2 - x - 1)(y^2 + xy - 9) = 2x + 1$.	
	Cách 1. Vì $(x^2 - x - 1)(y^2 + xy - 9) = 2x + 1$ nên $(2x + 1) : (x^2 - x - 1)$	0,25
	$\rightarrow (2x + 1)(2x - 3) : (x^2 - x - 1)$ $\rightarrow (4x^2 - 4x - 3) : (x^2 - x - 1)$ $\rightarrow [4(x^2 - x - 1) + 1] : (x^2 - x - 1)$ $\rightarrow 1 : (x^2 - x - 1)$	0,25
	$\rightarrow (x^2 - x - 1) \in \{-1; 1\}$ $\rightarrow x \in \{-1; 0; 1; 2\}$ mà x nguyên dương nên $x \in \{1; 2\}$.	0,25
	Với $x = 1$ thì $-(y^2 + y - 9) = 3$ nên $y^2 + y - 6 = 0$, ta được $y = 2$. Với $x = 2 \Rightarrow y^2 + 2y - 14 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \pm \sqrt{15}$ (loại do y nguyên dương). Thử lại $(x; y) = (1; 2)$ thỏa mãn phương trình đã cho.	0,25
	Cách 2. Vì $(x^2 - x - 1)(y^2 + xy - 9) = 2x + 1$ nên $(2x + 1) : (x^2 - x - 1)$	0,25
	Do $2x + 1 > 0$ nên $2x + 1 \geq x^2 - x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 \leq 0$.	0,25
	Nếu $x \geq 4$ thì $x^2 - 3x \geq 4 \cdot 1 = 4$. Loại. Suy ra $x \in \{1; 2; 3\}$	0,25
	Nếu $x = 1$ thì $-(y^2 + y - 9) = 3$ nên $y^2 + y - 6 = 0$, ta được $y = 2$. Nếu $x = 2 \Rightarrow y^2 + 2y - 14 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \pm \sqrt{15}$ (loại do y nguyên dương). Nếu $x = 3$ thì $5(y^2 + 3y - 9) = 7$. Mâu thuẫn do 7 không chia hết cho 5 Vậy các số nguyên dương thỏa mãn đề bài là $(x; y) = (1; 2)$	0,25
	2. (1,0 điểm) Cho p là số nguyên tố lẻ và số nguyên dương a thỏa mãn: $a^p - 1$ chia hết cho p^3 . Chứng minh rằng $a - 1$ chia hết cho p^2 .	
	Ta có $a^p \equiv 1 \pmod{p}$ do $a^p \equiv 1 \pmod{p^3}$ Theo định lý Fermat nhỏ thì $a^p \equiv a \pmod{p}$ Từ đó thì $a \equiv 1 \pmod{p}$	0,25
	Đặt $a = 1 + kp$ với k nguyên dương.	0,25

4	Ta có $a^p - 1 = (a-1).S$ với $S = a^{p-1} + a^{p-2} + \dots + a + 1$ $= (a^{p-1} - 1) + (a^{p-2} - 1) + \dots + (a - 1) + p$ $= (a-1)[(a^{p-2} + a^{p-3} + a^{p-4} + \dots + a + 1) + (a^{p-3} + a^{p-4} + \dots + a + 1) + (a^{p-4} + a^{p-5} + \dots + a + 1) + \dots + (a + 1) + 1] + p$	
	Vậy $S = (a-1).Q + p$ với $Q = a^{p-2} + 2a^{p-3} + 3a^{p-4} + \dots + (p-2)a + (p-1)$ Mặt khác $a \equiv 1 \pmod{p}$ nên $Q \equiv 1 + 2 + 3 + \dots + (p-1) = \frac{(p-1)p}{2} \equiv 0 \pmod{p}$	0,25
	Tức là $S \equiv p \pmod{p^2}$, tức là $S = p + mp^2$ suy ra $a^p - 1 = kp(p + mp^2) = kp^2 + kmp^3$ Giả sử k không chia hết cho p thì $a^p - 1$ không chia hết cho p^3 (mâu thuẫn giả thiết) Điều giả sử là sai, suy ra k chia hết cho p hay $a - 1$ chia hết cho p^2.	0,25
	Câu 4. (3,0 điểm) Cho đường tròn (O) cố định và điểm A cố định trên (O), các điểm B, C thay đổi trên (O) sao cho B, C không trùng A và $AC < BC$. Điểm M trên đoạn BC sao cho $\widehat{MAC} = \widehat{ABC}$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và BI cắt AC tại D. Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAC. 1. Chứng minh rằng hai tam giác CJM và CIA đồng dạng.	
		0,25
	Ta xét thể hình như hình vẽ. Các thể hình khác tương tự (chung cho cả 3 ý)	
	1. Ta có $\angle ACI = \angle JCM$ do CJ là phân giác góc $\angle ACB$	0,25
	Lại có $\angle CMJ = \frac{1}{2} \angle CMA = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle MAC - \angle MCA)$ $= \frac{1}{2} (180^\circ - \angle ABC - \angle ACB) = \frac{1}{2} \angle BAC = \angle IAC$	0,25

Từ đó ta được hai tam giác CJM và CIA đồng dạng.	0,25
2. Gọi P là giao điểm khác I của đường thẳng CI và đường tròn ngoại tiếp tam giác AID, đường thẳng PM cắt đường thẳng JD tại N. Chứng minh rằng bốn điểm N, M, J, C thuộc một đường tròn.	
	
Từ câu 1. ta được $\frac{CJ}{CI} = \frac{CM}{CA}$ hay $\frac{CI}{CA} = \frac{CJ}{CM}$	0,25
Mặt khác tứ giác $APID$ nội tiếp nên $CI.CP = CA.CD$, suy ra $\frac{CI}{CA} = \frac{CD}{CP}$	0,25
Từ đó có $\frac{CJ}{CM} = \frac{CD}{CP}$ nên tam giác CDJ và tam giác CPM đồng dạng. Suy ra $\angle CDJ = \angle CPM$ hay $\angle CDN = \angle CPN$	0,25
Tức là tứ giác $CDPN$ nội tiếp. Từ đó $\angle PND = \angle PCD = \angle PCM$ Suy ra tứ giác $NMJC$ nội tiếp.	0,25
3. Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BNC. Chứng minh khi B, C thay đổi trên (O) thì T luôn thuộc một đường cố định.	



3. Từ câu 2, do tứ giác $NMJC$ nội tiếp nên $PM.PN = PJ.PC$

Lại có $\angle PJA = \angle JAC + \angle JCA = \angle IBC + \angle ICB = \angle DIC = \angle PAC$ (*)

nên tam giác PAC đồng dạng tam giác PJA

0,25

Từ đó $\frac{PA}{PJ} = \frac{PC}{PA}$ suy ra $PJ \cdot PC = PA^2$ suy ra $PM \cdot PN = PA^2$.

Suy ra $\frac{PM}{PA} = \frac{PA}{PN}$. Từ đó tam giác PAM đồng dạng tam giác PNA

0,25

Ta được: $\angle ANP = \angle PAM = \angle CAM - \angle CAP = \angle ABC - \angle IBC - \angle ICB$ (do (*))

$$= \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB)$$

Vậy $\angle ANP + \angle PND = \frac{1}{2} \angle ABC$ (vì $\angle PND = \frac{1}{2} \angle ACB$)

0,25

Tức là $\angle AND = \angle ABD$ hay tứ giác $ABND$ nội tiếp.

Từ đó $\angle BNC = \angle BND + \angle DNC = 180^0 - \angle BAC + \angle DPC$

$$= 180^0 - \angle BAC + \angle DAI = 180^0 - \angle BAC + \angle IAC$$

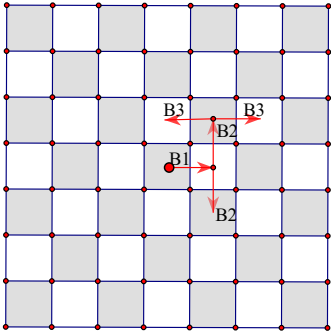
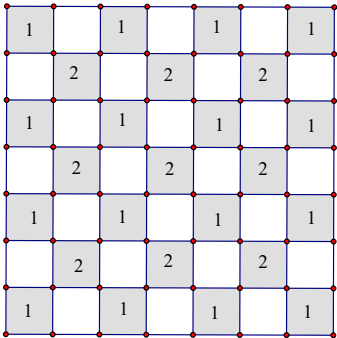
$$= 180^\circ - \angle BAC + \frac{1}{2} \angle BAC = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC$$

Nên $2(180^0 - \angle BNC) = \angle BAC$

Mà T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BNC nên $\angle BTC = 2(180^\circ - \angle BNC)$

hay $\angle BTC = \angle BAC$, tức là T thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , có

0,25

	định. Điều phải chứng minh.	
5	Câu 5. (1,0 điểm) Cho bảng vuông 7×7 gồm 49 ô vuông đơn vị như hình vẽ. Có 37 con robot được đặt vào tâm của các ô vuông đơn vị sao cho không có 2 robot cùng nằm trong một ô. Các con robot được lập trình để di chuyển đồng loạt, với cùng tốc độ theo nguyên tắc như sau: Ban đầu, mỗi con đều di chuyển sang tâm của một ô vuông đơn vị bất kỳ chung cạnh với hình vuông nó đang đứng. Sau đó, mỗi khi chạm vào tâm của ô vuông đến, nó sẽ quay một góc 90° và di chuyển tiếp theo hướng đó sang tâm của ô tiếp theo và cứ tiếp tục di chuyển như thế. Chứng minh rằng dù ban đầu có đặt các con robot thế nào thì có một thời điểm mà có hai con robot ở chung một ô vuông. 	
	Trên bảng có 25 ô đen và 24 ô trắng. Giả sử t là thời gian để robot đi từ tâm ô vuông này sang tâm của ô vuông chung cạnh với nó. Ta nói sau mỗi khoảng thời gian t, các con robot đi được 1 bước. Nhận xét: Sau 1 bước đi, các con ở ô đen sẽ chuyển sang ô trắng, các con ở ô trắng sẽ chuyển sang ô đen. Vì thế ta luôn có thể giả sử ban đầu số con robot ở ô đen nhiều hơn số robot ở ô trắng. Suy ra số robot ở ô đen lớn hơn hoặc bằng 19 con.	0,25
	Bây giờ ta đánh số cho các ô đen như hình vẽ.  Nhận xét: Sau hai bước đi, robot ở ô 1 sẽ chuyển sang ô 2 và ở ô 2 sẽ chuyển sang ô 1. Vì thế, trong số 19 con robot ở ô đen, tồn tại ít nhất 10 con nằm trong các ô đánh số 1 hoặc ít nhất 10 con nằm trong các ô đánh số 2 (nếu cả hai loại đều ít hơn 10 con thì chỉ có tối đa 18 con. Mâu thuẫn)	0,25
	+) Nếu có 10 con nằm trong ô số 1 thì sau 2 bước đi, chúng nằm trong ô số 2. Do có 9 ô số 2, mà có 10 con robot, nên tồn tại hai con cùng 1 ô.	0,25
	+) Nếu có 10 con nằm trong ô số 2, thì tương tự trên, cũng có 2 con cùng 1 ô. Ta có điều phải chứng minh.	0.25

Chú ý: Học sinh giải bằng cách khác mà lời giải đúng vẫn cho điểm tối đa.