SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LÀO CAI	**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2024 – 2025 MÔN CHUYÊN: TOÁN**
ĐỀ CHÍNH THỨC	Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề *(Đề thi gồm 01 trang, 07 câu)* **Ngày thi: 05/06/2024**

Câu 1 (2,0 điểm):

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3}-\dfrac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$, với $x\geq 0; x\neq 9$

b) Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c-\sqrt{ab}-\sqrt{bc}-\sqrt{ca}=0$.

Tính giá trị của biểu thức $P=2023\dfrac{a^{2023}}{b^{2023}}+2024\dfrac{b^{2024}}{c^{2024}}+2025\dfrac{c^{2025}}{a^{2025}}$

Câu 2 (0,5 điểm): Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập S. Tính xác suất để lấy được một số chia hết cho 7.

Câu 3 (1,0 điểm): Một cửa hàng bán gạo trong 4 ngày liên tiếp và mỗi ngày (kể từ ngày đầu tiên) lượng gạo bán ra bằng $r\%$ lượng gạo còn lại của ngày hôm trước. Tính r biết rằng lượng gạo còn lại sau ngày thứ tư bằng $\dfrac{1}{16}$ lượng gạo ban đầu.

Câu 4 (1,0 điểm):

a) Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a^2+bc}+\dfrac{1}{b^2+ac}+\dfrac{1}{c^2+ba}\leq\dfrac{a+b+c}{2abc}$

b) Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $xy\geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}+\frac{1}{xy+1}.$$

Câu 5 (1,0 điểm):

a) Cho x,y là các số nguyên dương sao cho x^2+2y là số chính phương. Chứng minh rằng x^2+y là tổng của 2 số chính phương.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn

$$\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)+2(x-y)(1-xy)=4(1+xy).$$

Câu 6 (1,0 điểm):

Cho 2 phương trình: $2x^2+x-m^2+2m-15=0$ (1) và $2x^2+3x-m^2+2m-14=0$ (2). Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 và phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt x_3,x_4 thỏa mãn: $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=3x_2x_3$.

Câu 7 (3,5 điểm): Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Gọi M là một điểm thuộc nửa đường tròn đã cho (M khác A và B), H là hình chiếu của M trên AB. Đường thẳng qua O và song song với MA cắt tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn (O) tại điểm K.

a) Chứng minh rằng tứ giác $OBKM$ nội tiếp.

b) Gọi C,D lần lượt là hình chiếu của H trên các đường thẳng MA và MB. Gọi I là giao điểm của AK với MH. Chứng minh rằng I là trung điểm CD.

c) Gọi E,F lần lượt là trung điểm của AH và BH. Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác $CDFE$ đạt giá trị lớn nhất.

......HẾT......

Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Pytago
EDUCATION

LỜI GIẢI THAM KHẢO ĐỀ TOÁN (CHUYÊN) KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TỈNH LÀO CAI NĂM HỌC 2024 - 2025

Câu 1a (1,0 điểm)

Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \dfrac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$, với $x \geq 0;\ x \neq 9$.

Lời giải. Ta có
$$P = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$$
$$= \frac{x\sqrt{x}-3-2(\sqrt{x}-3)^2-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$
$$= \frac{(\sqrt{x}-3)(x+8)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x+8}{\sqrt{x}+1}$$
$$= \sqrt{x}-1+\frac{9}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}+1+\frac{9}{\sqrt{x}+1}-2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $P \geq 2\cdot\sqrt{(\sqrt{x}+1)\cdot\dfrac{9}{\sqrt{x}+1}} - 2 = 4$.

Dấu " $=$ " xảy ra khi $\sqrt{x}+1 = \dfrac{9}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$.

Vậy $\min P = 4$ tại $x = 4$. □

Câu 1b (1,0 điểm)

Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c-\sqrt{ab}-\sqrt{bc}-\sqrt{ca} = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = 2023\dfrac{a^{2023}}{c^{2023}} + 2024\dfrac{b^{2024}}{c^{2024}} + 2025\dfrac{c^{2025}}{a^{2025}}$

Lời giải. Ta có $a+b+c-\sqrt{ab}-\sqrt{bc}-\sqrt{ca} = 0$

$\Leftrightarrow 2a+2b+2c-2\sqrt{ab}-2\sqrt{bc}-2\sqrt{ca} = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2+(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2 = 0$

$\Leftrightarrow a = b = c > 0$.

Thay vào $P = 2023+2024+2025 = 6072$. □

Câu 2 (0,5 điểm)

Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập hợp S. Tính xác suất để lấy được một số chia hết cho 7.

Lời giải. Ta có $S = \{100; 101; 102; ...; 999\}$

$\Rightarrow$ Không gian mẫu $\Omega = S \Rightarrow n(\Omega) = 900$.

Gọi A là biến cố "lấy được số chia hết cho 7" $\Rightarrow A = \{105; 112; ...; 994\}$.

$\Rightarrow n(A) = \dfrac{994 - 105}{7} + 1 = 128$.

Vậy xác suất xảy ra biến cố A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{32}{225}$. □

Câu 3 (1,0 điểm)

Một cửa hàng bán gạo trong 4 ngày liên tiếp và mỗi ngày (kể từ ngày đầu tiên) lượng gạo bán ra bằng $r\%$ lượng gạo còn lại của ngày hôm trước. Tính r biết rằng lượng gạo còn lại sau ngày thứ tư bằng $\dfrac{1}{16}$ lượng gạo ban đầu.

Lời giải.

Điều kiện $r > 0$ (%)

Gọi lượng gạo ban đầu cửa hàng có là A (đvkl, $A > 0$)

Lượng gạo ngày đầu tiên bán được là $A \cdot \dfrac{r}{100}$

Lượng gạo còn lại sau ngày đầu tiên bán là $A - \dfrac{r}{100}A = A \cdot \left(1 - \dfrac{r}{100}\right)$

Lượng gạo bán trong ngày thứ hai là $A \cdot \dfrac{r}{100} \cdot \left(1 - \dfrac{r}{100}\right)$

Lượng gạo còn lại sau ngày thứ hai bán là $A \cdot \left(1 - \dfrac{r}{100}\right) - A \cdot \dfrac{r}{100} \cdot \left(1 - \dfrac{r}{100}\right) = A \cdot \left(1 - \dfrac{r}{100}\right)^2$

Tương tự suy ra lượng gạo còn lại sau ngày thứ ba bán là $A \cdot \left(1 - \dfrac{r}{100}\right)^3$

Lượng lượng gạo còn lại sau ngày thứ tư bán là $A \cdot \left(1 - \dfrac{r}{100}\right)^4$.

Theo đề ra ta có phương trình $A \cdot \left(1 - \dfrac{r}{100}\right)^4 = \dfrac{A}{16} \Leftrightarrow 1 - \dfrac{r}{100} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow r = 50$ (%) (thỏa mãn).

Vậy $r = 50(\%)$. □

Câu 4a (0,5 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ac} + \frac{1}{c^2 + ab} \leq \frac{a + b + c}{2abc}.$$

Lời giải. Bất đẳng thức đã cho tương đương với $\dfrac{2abc}{a^2 + bc} + \dfrac{2abc}{b^2 + ac} + \dfrac{2abc}{c^2 + ab} \leq a + b + c$. (1)

Áp dụng bất đẳng thức *AM-GM* ta có $a^2 + bc \geq 2a\sqrt{bc} \Rightarrow \dfrac{2abc}{a^2 + bc} \leq \sqrt{bc}$.

Tương tự suy ra $\dfrac{2abc}{a^2 + bc} + \dfrac{2abc}{b^2 + ac} + \dfrac{2abc}{c^2 + ab} \leq \sqrt{bc} + \sqrt{ac} + \sqrt{ab}$ (2).

Áp dụng bất đẳng thức *AM-GM* ta có $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

Tương tự suy ra $\sqrt{bc} + \sqrt{ac} + \sqrt{ab} \leq a + b + c$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra đpcm.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

□

Câu 4b (0,5 điểm)

Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{1}{xy+1}.$$

Lời giải.

Ta có $\frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{1}{xy+1} = \frac{x^2}{xy+x} + \frac{y^2}{xy+y} + \frac{1}{xy+1}$

$$\geq \frac{(x+y)^2}{2xy+x+y} + \frac{1}{xy+1} \quad (1) \text{ (BĐT \textit{Cauchy Schwarz dạng Engel})}.$$

Sử dụng $(x+y)^2 \geq 4xy$ suy ra

$$\frac{(x+y)^2}{2xy+x+y} + \frac{1}{xy+1} \geq \frac{(x+y)^2}{\frac{(x+y)^2}{2} + x + y} + \frac{1}{\frac{(x+y)^2}{4} + 1} = \frac{2(x+y)}{x+y+2} + \frac{4}{(x+y)^2+4}.$$

Đặt $t = x + y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2$.

Ta thấy $\frac{2t}{t+2} + \frac{4}{t^2+4} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{(t-2)^3}{2(t+2)(t^2+4)} \geq 0$ luôn đúng với mọi $t \geq 2$.

Vậy $\min P = \frac{3}{2}$ tại $x = y = 1$.

□

Câu 5a (0,5 điểm)

Cho x, y là các số nguyên dương sao cho $x^2 + 2y$ là số chính phương. Chứng minh rằng $x^2 + y$ là tổng của 2 số chính phương.

Lời giải. Theo đề bài: $x^2 + 2y = m^2$ với $m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 2y = m^2 - x^2$

$\Rightarrow m$ và x cùng tính chẵn lẻ $\Rightarrow \frac{m+x}{2}; \frac{m-x}{2}$ là các số nguyên.

Ta có: $x^2 + y = x^2 + \frac{m^2 - x^2}{2} = \frac{2(m^2+x^2)}{4} = \left(\frac{m-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{m+x}{2}\right)^2$

Ta có điều phải chứng minh. □

Câu 5b (0,5 điểm)

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn
$(x^2+1)(y^2+1) + 2(x-y)(1-xy) = 4(1+xy)$.

Lời giải. $(x^2+1)(y^2+1)+2(x-y)(1-xy)=4(1+xy)$
$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy+x^2y^2-2xy+1+2(x-y)(1-xy)=4$
$\Leftrightarrow (x-y)^2+(1-xy)^2+2(x-y)(1-xy)=4$
$\Leftrightarrow (x-y+1-xy)^2=4$
$\Leftrightarrow (1-y)^2(x+1)^2=4$
$\Leftrightarrow (y-1)(x+1)=2$ (vì x, y nguyên dương)
Do x nguyên dương $\Rightarrow x+1\geq 2$ nên ta có $\begin{cases} x+1=2 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$
Vậy $(x;y)=(1;2)$. □

Câu 6 (1,0 điểm)

Cho 2 phương trình: $2x^2+x-m^2+2m-15=0$ (1) và $2x^2+3x-m^2+2m-14=0$ (2). Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn: $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=3x_2x_3$.

Lời giải. Ta thấy cả hai phương trình (1) và (2) có cùng biệt thức $\Delta=8(m-1)^2+113>0$
$\Rightarrow \sqrt{\Delta}>10$ và x_1, x_2 trái dấu; x_3, x_4 trái dấu.
Do $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2>0$ nên $x_2x_3>0$ suy ra x_2 và x_3 mang cùng một dấu.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_2x_3=\dfrac{-1-\sqrt{\Delta}}{4}\cdot\dfrac{-3-\sqrt{\Delta}}{4}=\dfrac{\Delta+4\sqrt{\Delta}+3}{16} \\ x_2x_3=\dfrac{-1+\sqrt{\Delta}}{4}\cdot\dfrac{-3+\sqrt{\Delta}}{4}=\dfrac{\Delta-4\sqrt{\Delta}+3}{16} \end{array}\right.$$

Áp dụng định lý Vi-et ta có $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+(x_3+x_4)^2-2x_3x_4$
$=2(m-1)^2+\dfrac{59}{2}=\dfrac{1}{4}\cdot(8(m-1)^2+113)+\dfrac{5}{4}=\dfrac{\Delta+5}{4}$.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \dfrac{\Delta+5}{4}=3\cdot\dfrac{\Delta+4\Delta+3}{16} & (3) \\ \dfrac{\Delta+5}{4}=3\cdot\dfrac{\Delta-4\Delta+3}{16} & (4) \end{array}\right..$$

Giải (3) ta được $\Delta-12\sqrt{\Delta}+11=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\Delta}=1 \text{ (loại)} \\ \sqrt{\Delta}=11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{\Delta}=11.$

$\Leftrightarrow 8(m-1)^2+113=121 \Leftrightarrow (m-1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=0 \end{array}\right..$

Giải (4) ta được $\Delta+12\sqrt{\Delta}+11=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\Delta}=-1 \text{ (loại)} \\ \sqrt{\Delta}=-11 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Vậy $m\in\{0;2\}$.

□

Câu 7 (3,5 điểm)

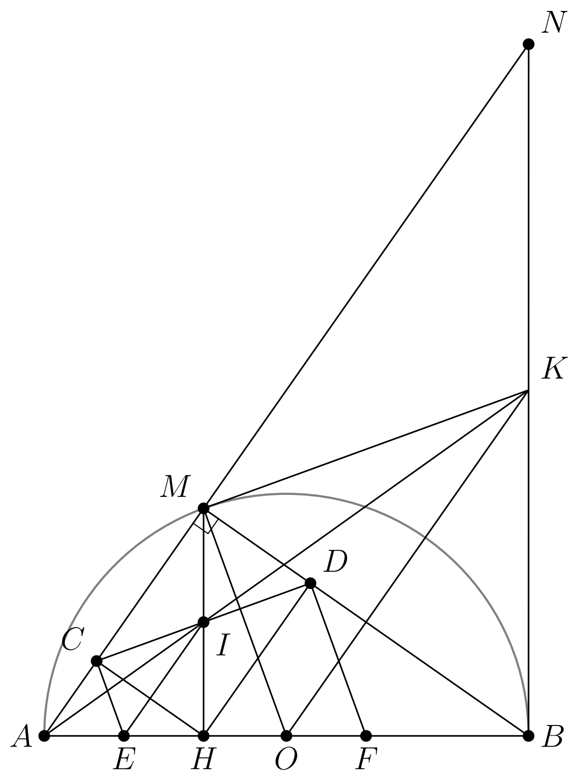
Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB. Gọi M là một điểm thuộc nửa đường tròn đã cho (M khác A và B), H là hình chiếu của M trên AB. Đường thẳng qua O và song song với MA cắt tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn (O) tại điểm K.

a) Chứng minh tứ giác $OBKM$ nội tiếp.

b) Gọi C, D lần lượt là hình chiếu của H trên các đường thẳng MA và MB. Gọi I là giao điểm của AK và MH. Chứng minh I là trung điểm CD.

c) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AH và BH. Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác $CDFE$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.



a) Ta có $OM = OB$, mà $OK \perp MB$ nên OK là đường trung trực của đoạn MB.

Khi đó: $KB = KM$, mà KB là tiếp tuyến của (O) và $\triangle OMK = \triangle OBK$ (c-c-c).

$\Rightarrow \widehat{KMO} = \widehat{KBO} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $OBKM$ nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°)

b) Gọi N là giao điểm của BK và AM.

Vì $AN \parallel OK$, mà O là trung điểm AB nên K là trung điểm NB.

Áp dụng định lý *Thales*, ta có: $\dfrac{IM}{IH} = \dfrac{KN}{KB} = 1 \Rightarrow IM = IH$ hay I là trung điểm của MH.

Vì $MCHD$ là hình chữ nhật nên I cũng là trung điểm CD.

c) Vì $MCHD$ là hình chữ nhật nên $IC = IH$.

Xét tam giác ACH vuông tại C có E là trung điểm AH, ta có: $CE = \dfrac{1}{2}AH = EH$.

Xét hai tam giác IEC và IEH, ta có:

$$\begin{cases} \text{Cạnh } IE \text{ chung} \\ IC = IH \\ EC = EH \end{cases} \Rightarrow \triangle IEC = \triangle IEH \text{ (c-c-c)}$$

$\Rightarrow \widehat{ICE} = \widehat{IHE} = 90^\circ$ (hai góc tương ứng).

Tương tự, ta chứng minh được $\widehat{IDF} = 90^\circ$

$\Rightarrow CDFE$ là hình thang vuông.

Diện tích của hình thang vuông $CDFE$ là

$$S = \frac{1}{2} \cdot (CE + DF) \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}AH + \frac{1}{2}BH\right) \cdot MH = \frac{1}{4} \cdot AB \cdot MH.$$

Mặt khác: $MH \leq MO = R$ suy ra $S \leq \dfrac{1}{4} \cdot AB \cdot MO = \dfrac{R^2}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của S là $\dfrac{R^2}{2}$ khi $H \equiv O$ hay $MO \perp AB$ nên M là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O).

$\square$