

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x+4}-2} - \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}}$.

b) Cho phương trình $x^2 - (m-1)x - 2(m+1) = 0$ (với m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 + x_2$.

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2} + 2$. Tìm tọa độ giao điểm của Parabol (P) và đường thẳng (d) .

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình $x^2 - 4xy + 5y^2 = 2(x - y + 1)$.

Câu 3 (3,0 điểm). Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB cố định, I là điểm thuộc đoạn thẳng AO sao cho $AI = 2IO$. Đường thẳng qua I vuông góc với đường thẳng AB cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt M và N . Điểm C di động trên cung nhỏ MB (C không trùng với M và B), E là giao điểm của hai đường thẳng AN và BM . Đường thẳng qua E vuông góc với đường thẳng AB cắt đường thẳng AM tại F .

a) Chứng minh rằng bốn điểm M, N, E, F cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi D là giao điểm của hai đường thẳng AC và MN . Chứng minh rằng

$$AD \cdot AC - AI \cdot IB = AI^2.$$

c) Gọi K là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle MCD$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2KM \cdot KB - MK \cdot MB$.

Câu 4 (2,0 điểm).

a) Giải phương trình $3x + 2\sqrt{(x^2+5)(x-1)} = x^2 + 8$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12 \\ x^3 = 8x + 1 + 2\sqrt{y-2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 5 (1,0 điểm).

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} + \frac{3}{2}.$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH GIA LAI

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG
NĂM HỌC 2024 - 2025

.....
ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

Môn: **TOÁN**

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: **8/6/2024**

Họ và tên thí sinh.....Số báo danh.....

Câu 1: (2 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+4}-2} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+4}+2} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}}$.

b) Cho phương trình $x^2 - (m-1)x - 2(m+1) = 0$ (với m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = x_1 + x_2$.

Câu 2: (2 điểm).

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}+2$. Tìm tọa độ giao điểm của Parabol (P) và đường thẳng (d) .

b) Tìm tất cả nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình $x^2 - 4xy + 5y^2 = 2(x - y + 1)$.

Câu 3: (3 điểm). Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB cố định, I là điểm thuộc đoạn thẳng AO sao cho $AI = 2IO$. Đường thẳng qua I vuông góc với đường thẳng AB cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt M và N . Điểm C di động trên cung nhỏ MB (C không trùng với M và B), E là giao điểm của hai đường thẳng AN và BM . Đường thẳng qua E vuông góc với đường thẳng AB cắt đường thẳng AM tại F .

a) Chứng minh rằng bốn điểm M, N, E, F cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi D là giao điểm của hai đường thẳng AC và MN . Chứng minh rằng

$$AD.AC - AI.IB = AI^2.$$

c) Gọi K là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔMCD . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 2KM.KB - MK.MB.$$

Câu 4: (2 điểm).

a) Giải phương trình $3x + 2\sqrt{(x^2+5)(x-1)} = x^2 + 8$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12 \\ x^3 = 8x + 1 + 2\sqrt{y-2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$

Câu 5: (1 điểm).

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} + \frac{3}{2}$$

Hết

LỜI GIẢI ĐỀ THI TOÁN 10 (CHUYÊN) THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - GIA LAI 2024 - 2025

PHAN MINH ĐỨC - NGUYỄN KHẮC GIA KIÊN
DOÀN MINH DŨNG - NGUYỄN HỮU CHIẾN THẮNG

❖ Câu .1 (2 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+4}-2} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+4}+2} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}}$.

b) Cho phương trình $x^2 - (m-1)x - 2(m+1) = 0$ (với m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = x_1 + x_2$.

💬 Lời giải.

a) Điều kiện: $x > 0$. Với $x > 0$ ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+4}-2} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+4}+2} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{\sqrt{x}+4}+2 - (\sqrt{\sqrt{x}+4}-2)}{(\sqrt{\sqrt{x}+4}-2)(\sqrt{\sqrt{x}+4}+2)} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{\sqrt{x}+4}+2 - \sqrt{\sqrt{x}+4}+2}{\sqrt{x}+4-4} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{x}} : \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{4}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} = 4. \end{aligned}$$

Vậy với $x > 0$ thì $P = 4$.

b) Ta có phương trình: $x^2 - (m-1)x - 2(m+1) = 0$ (với m là tham số).
Để phương trình đã cho có nghiệm thì:

$$\begin{aligned} \Delta \geq 0 &\Leftrightarrow (m-1)^2 + 8(m+1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 + 6m + 9 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (m+3)^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng } \forall m) \end{aligned}$$

Theo định lí Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m-1 \\ x_1x_2 = -2(m+1) \end{cases} \quad (1)$$

Ta có:

$$x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = x_1 + x_2 \Leftrightarrow x_1x_2(x_1 + x_2) = x_1 + x_2. \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$\begin{aligned} -2(m+1)(m-1) &= m-1 \\ \Leftrightarrow -2(m^2-1) &= m-1 \\ \Leftrightarrow 2m^2+m-3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (m-1)(2m+3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ta thấy các giá trị m vừa tìm được thỏa mãn điều kiện. Vậy $m = 1; m = -\frac{3}{2}$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.



❖ Câu .2 (2 điểm).

- a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} + 2$. Tìm tọa độ giao điểm của Parabol (P) và đường thẳng (d) .
- b) Tìm tất cả nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình $x^2 - 4xy + 5y^2 = 2(x - y + 1)$.

💬 Lời giải.

- a) Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{2} + 1)x - \sqrt{2} - 2 = 0$$

Ta có: $a - b + c = 1 + (\sqrt{2} + 1) - \sqrt{2} - 2 = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm là: $\begin{cases} x = -1 \\ x = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$

- Với $x = -1$ thay vào (P) ta được: $y = 1 \Rightarrow A(-1; 1)$

- Với $x = 2 + \sqrt{2}$ thay vào (P) ta được: $y = 6 + 4\sqrt{2} \Rightarrow B(2 + \sqrt{2}; 6 + 4\sqrt{2})$

Vậy tọa độ giao điểm của Parabol (P) và đường thẳng (d) là: $A(-1; 1)$ và $B(2 + \sqrt{2}; 6 + 4\sqrt{2})$.

- b) Ta có phương trình:

$$\begin{aligned} x^2 - 4xy + 5y^2 &= 2(x - y + 1) \\ \Leftrightarrow x^2 - 4xy + 5y^2 - 2x + 2y - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2(2y + 1)x + 5y^2 + 2y - 2 &= 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Ta có phương trình $(*)$ là phương trình bậc 2 theo ẩn x . Ta có:

$$\Delta' = (2y + 1)^2 - (5y^2 + 2y - 2) = -y^2 + 2y + 3$$

Để phương trình $(*)$ có nghiệm thì

$$\begin{aligned} \Delta' \geq 0 &\Leftrightarrow -y^2 + 2y + 3 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -(y - 1)^2 + 4 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (y - 1)^2 \leq 4 \\ &\Leftrightarrow |y - 1| \leq 2 \\ &\Leftrightarrow -2 \leq y - 1 \leq 2 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq y \leq 3 \end{aligned}$$

Mà $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$

- Với $y = -1$ thay vào $(*)$ ta được: $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. (chọn)

- Với $y = 0$ thay vào $(*)$ ta được: $x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$ (loại, vì $x \notin \mathbb{Z}$)

- Với $y = 1$ thay vào $(*)$ ta được: $x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$ (chọn)

- Với $y = 2$ thay vào $(*)$ ta được: $x^2 - 10x + 22 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + \sqrt{3} \\ x = 5 - \sqrt{3} \end{cases}$ (loại, vì $x \notin \mathbb{Z}$)

- Với $y = 3$ thay vào $(*)$ ta được: $x^2 - 14x + 49 = 0 \Leftrightarrow x = 7$ (chọn)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $(x; y) = (1; 1); (5; 1); (-1; -1); (7; 3)$



❖ **Câu .3 (3 điểm).** Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB cố định, I là điểm thuộc đoạn thẳng AO sao cho $AI = 2IO$. Đường thẳng qua I vuông góc với đường thẳng AB cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt M và N . Điểm C di động trên cung nhỏ MB (C không trùng với M và B), E là giao điểm của hai đường thẳng AN và BM . Đường thẳng qua E vuông góc với đường thẳng AB cắt đường thẳng AM tại F .

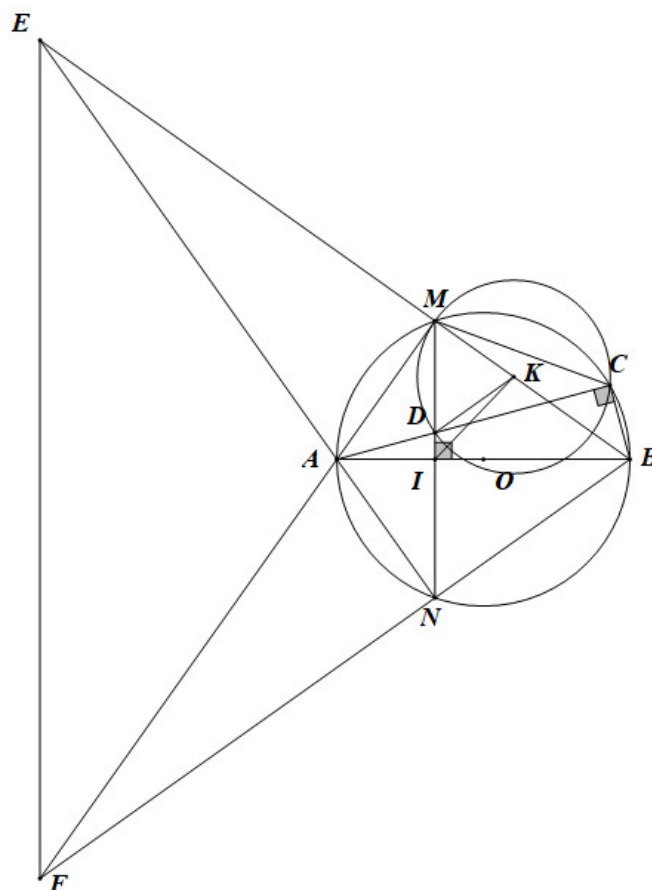
- a) Chứng minh rằng bốn điểm M, N, E, F cùng thuộc một đường tròn.
b) Gọi D là giao điểm của hai đường thẳng AC và MN . Chứng minh rằng

$$AD.AC - AI.IB = AI^2.$$

- c) Gọi K là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle MCD$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 2KM.KB - MK.MB.$$

💬 **Lời giải.**



- a) Dễ thấy $\triangle AMN$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ANM}$ mà $EF \parallel MN$ (cùng vuông góc với OA).
 $\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ANM} = \widehat{FEN} \Rightarrow M, N, F, E$ cùng thuộc 1 đường tròn.

- b) Ta cần chứng minh:

$$AD.AC - AI.IB = AI^2 \Leftrightarrow AD.AC = AI(AI + IB) \Leftrightarrow AD.AC = AI.AB \quad (*)$$

Mà do $DCIB$ là tứ giác nội tiếp (vì $\widehat{DIB} + \widehat{DCB} = 180^\circ$) $\Rightarrow (*)$ đúng.

- c) Trước hết ta chứng minh K, M, B thẳng hàng.

$$\text{Thật vậy, ta có } \widehat{AMK} = \widehat{AMD} + \widehat{DMK} = \widehat{AMD} + 90^\circ - \frac{\widehat{MKD}}{2} = \widehat{AMD} + 90^\circ - \widehat{MCD}$$

Mà $\widehat{AMD} = \widehat{MCD}$ (2 góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau) $\Rightarrow \widehat{AMK} = 90^\circ$.

Mà $\widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow K, M, B$ thẳng hàng.

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= 2KM.KB - KM.MB \\ &= KM(2KB - MB) \\ &= KM(KB - KM) \\ &= \frac{(2KM)(KB - KM)}{2} \\ &\leq \frac{(KB + KM)^2}{8} \\ &= \frac{MB^2}{8} \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$MB^2 = IA.IB = \frac{8}{3}R^2$$

Suy ra:

$$P \leq \frac{R^2}{3}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là: $\frac{R^2}{3}$ xảy ra khi $MK = \frac{1}{4}MB$.

□

❖ Câu .4 (2 điểm).

a) Giải phương trình $3x + 2\sqrt{(x^2 + 5)(x - 1)} = x^2 + 8$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12 \\ x^3 = 8x + 1 + 2\sqrt{y-2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$

💬 Lời giải.

a) Điều kiện: $x \geq 1$.

Ta có:

$$\begin{aligned} 3x + 2\sqrt{(x^2 + 5)(x - 1)} &= x^2 + 8 \\ \Leftrightarrow 3(x - 1) + 2\sqrt{(x^2 + 5)(x - 1)} &= x^2 + 5 \end{aligned}$$

Ta đặt: $\begin{cases} x - 1 = v \\ x^2 + 5 = u \end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} 3v + 2\sqrt{uv} &= u \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{uv} &= u - 3v \\ \Leftrightarrow 4uv &= (u - 3v)^2 \quad (u \geq v, \forall u, v) \\ \Leftrightarrow 4uv &= u^2 - 6uv + 9v^2 \\ \Leftrightarrow u^2 - 10uv + 9v^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (u - v)(u - 9v) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = 9v \end{cases} \end{aligned}$$

- Với $u = v$ thì $x^2 + 5 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 6 = 0$ (phương trình vô nghiệm).

- Với $u = 9v$ thì $x^2 + 5 = 9(x - 1) \Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 7 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x = 2$; $x = 7$

b) Điều kiện xác định: $\begin{cases} -2\sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{3} \\ 2 \leq y \leq 12 \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12 & (1) \\ x^3 = 8x + 1 + 2\sqrt{y-2} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sqrt{y(12-x^2)} = 12 - x\sqrt{12-y} \\ &\Leftrightarrow y(12-x^2) = (12 - x\sqrt{12-y})^2 \\ &\Leftrightarrow 12y - x^2y = 144 - 24x\sqrt{12-y} + 12x^2 - x^2y \\ &\Leftrightarrow 12y - 144 + 24x\sqrt{12-y} - 12x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -12(12-y) + 24x\sqrt{12-y} - 12x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x\sqrt{12-y} + (12-y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - \sqrt{12-y})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{12-y} \\ &\Leftrightarrow x^2 = 12-y \quad (3) \end{aligned}$$

Thay (3) vào (2) ta được:

$$\begin{aligned} x^3 - 8x - 1 &= 2\sqrt{10-x^2} \quad (4) \\ \Leftrightarrow x^3 - 8x - 3 &= 2(\sqrt{10-x^2} - 1) \\ \Leftrightarrow x^2(x-3) + 3x(x-3) + (x-3) &= 2\frac{9-x^2}{\sqrt{10-x^2}+1} \\ \Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+1) &= \frac{2(3-x)(3+x)}{\sqrt{10-x^2}+1} \\ \Leftrightarrow (x-3)\left(x^2+3x+1 + \frac{2(3+x)}{\sqrt{10-x^2}+1}\right) &= 0 \end{aligned}$$

TH1: $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (thỏa mãn điều kiện).

TH2: $x^2 + 3x + 1 + \frac{2(3+x)}{\sqrt{10-x^2}+1} = 0$.

Ta đi chứng minh $x > 0$. Phản chứng giả sử $x < 0$. Từ (1) ta có:

$$\sqrt{y(12-x^2)} = 12 - x\sqrt{12-y} > 12.$$

Mà

$$\sqrt{y(12-x^2)} < \sqrt{12(12-0)} = 12$$

$\Rightarrow$ Vô lý. Như vậy $x > 0$. Với $x > 0$ thì phương trình (4) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (3; 3)$.

□

❖ **Câu .5 (1 điểm).** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} + \frac{3}{2}$$

💬 **Lời giải.**

Ta có:

$$\begin{aligned} a^2 + 2b^2 + 3 &= (a^2 + b^2) + (b^2 + 1) + 2 \geq 2ab + 2b + 2 \\ \Rightarrow \frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} &\leq \frac{1}{2ab + 2b + 2} = \frac{1}{2(ab + b + 1)} \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta được:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} &\leq \frac{1}{2bc + 2c + 2} = \frac{1}{2(bc + c + 1)} \\ \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} &\leq \frac{1}{2ca + 2a + 2} = \frac{1}{2(ca + a + 1)} \\ \Rightarrow P &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} \right) + \frac{3}{2} \quad (*) \end{aligned}$$

Bây giờ ta chứng minh:

$$\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} = 1 \quad (**)$$

Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} \\ &= \frac{\frac{1}{abc}}{\frac{ab + b + abc}{abc}} + \frac{\frac{1}{abc}}{\frac{bc + abc^2 + abc}{abc}} + \frac{1}{ca + a + 1} \\ &= \frac{\frac{1}{ac}}{\frac{ca + a + 1}{ac}} + \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1 + ac + a}{a}} + \frac{1}{ca + a + 1} \\ &= \frac{ca + a + 1}{ca + a + 1} = 1 \end{aligned}$$

Như vậy (**) đã được chứng minh. Từ (*) và (**) ta được: $P \leq 2$.

Dấu "=" xảy ra khi: $a = b = c = 1$. Vậy giá trị lớn nhất của P là 2 xảy ra khi: $a = b = c = 1$. $\square$