

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho $M = \left(\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+1} - \frac{a-\sqrt{a}-3}{a-\sqrt{a}-2} \right) : \left(\frac{a-\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}-2} + \frac{2}{\sqrt{a}-2} \right)$ với $a \geq 0, a \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức M .

b) Chứng minh rằng $M \leq \frac{1}{7}$.

Câu 2. (3,0 điểm)

a) Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 + m = 0$, (m là tham số). Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^4 + 8x_1 = x_2^2(2mx_2 - m^2 - m) + 8x_2$.

b) Giải phương trình: $\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} + 5 = 4\sqrt{(x+3)(2-x)}$.

c) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy + y\sqrt{y} - x\sqrt{x-1} - \sqrt{xy-y} = 0 \\ x^2 - 4xy + 2x + 4y = \sqrt{x-2y-1} + 3. \end{cases}$

Câu 3. (1,0 điểm)

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 - 2xy + 3y - x - 1 = 0$.

b) Tìm các cặp số nguyên dương $(a; b)$ sao cho $\frac{a^3b-1}{a+1}$ và $\frac{b^3a+1}{b-1}$ đều là các số nguyên.

Câu 4. (2,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC với $AB < AC$. Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H (với $D \in BC, E \in AC, F \in AB$). Gọi A_1, B_1 lần lượt là các điểm đối xứng với H qua D và E ; M là trung điểm của BC . Hai đường thẳng EF và BC cắt nhau tại điểm P .

a) Chứng minh các điểm A, B, C, A_1, B_1 cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $PE \cdot PF = PM \cdot PD$ và H là trực tâm của tam giác APM .

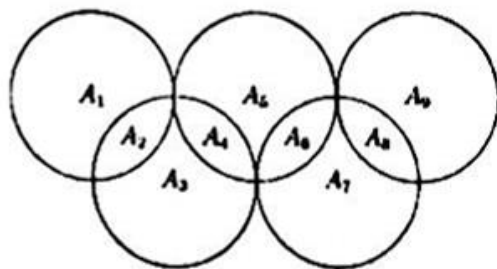
Câu 5. (1,5 điểm)

a) Cho hai số thực $x, y > 0$ thỏa mãn $xy \geq 1$. Chứng minh rằng $\left(x + 2y + \frac{2}{x+1}\right)\left(y + 2x + \frac{2}{y+1}\right) \geq 16$.

b) Cho 5 đường tròn có cùng bán kính và sắp xếp để tạo thành 9 miền được kí hiệu là $A_1, A_2, \dots, A_9$ (như hình vẽ). Sau đó, điền vào 9 miền trên các số được lấy từ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sao cho mỗi miền được điền bởi một số, hai miền khác nhau được điền bởi hai số khác nhau và tổng các số trong mỗi hình tròn đều bằng 14.

b₁) Tính tổng các số ở các miền A_2, A_4, A_6, A_8 .

b₂) Hỏi có bao nhiêu cách điền thỏa mãn điều kiện trên? Vì sao?



---HẾT---

Lưu ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.