

Câu 1 (1,5 điểm)

- a) Tìm điều kiện của x để biểu thức $A = \sqrt{x-5}$ có nghĩa.
- b) Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức $B = \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} - 5$.
- c) Rút gọn biểu thức $C = \left(1 + \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}\right) \left(1 - \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}\right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

Câu 2 (1,5 điểm)

- a) Không sử dụng máy tính cầm tay, giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$.

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = mx + n - 1$ ($m \neq 0$). Tìm các giá trị của m, n để đường thẳng (d) đi qua điểm $M(1;5)$ và song song với đường thẳng $y = 2x + 1$.

Câu 3 (1,0 điểm)

Hai học sinh cùng tham gia một giải chạy với hai cự li khác nhau, cự li của học sinh thứ nhất gấp đôi cự li của học sinh thứ hai (cự li là quãng đường mà người chạy phải hoàn thành). Biết rằng học sinh thứ nhất mất trung bình 5 phút để chạy hết 1 km, học sinh thứ hai mất trung bình 7 phút để chạy hết 1 km và thời gian hoàn thành cự li của học sinh thứ nhất nhiều hơn thời gian hoàn thành cự li của học sinh thứ hai là 15 phút. Tính cự li của mỗi học sinh tham gia.

Câu 4 (2,0 điểm)

Cho phương trình $x^2 - 2(m-5)x + 1 - 2m = 0$ (1), với x là ẩn số.

- a) Giải phương trình (1) khi $m = 3$.
- b) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .
- c) Tìm tất cả giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$(x_1^2 - 2mx_1 + 1)(x_2^2 - 2mx_2 + 1) = 64.$$

Câu 5 (3,0 điểm)

Cho đường tròn (O) đường kính AB và điểm M thuộc đoạn thẳng OB (M khác O và B). Đường thẳng qua M vuông góc với AB cắt đường tròn (O) tại hai điểm C, D . Đường thẳng qua D vuông góc với AC cắt AC tại N và cắt đường tròn (O) tại K (K khác D).

- a) Chứng minh tứ giác $ADMN$ nội tiếp.
- b) Chứng minh MN song song với BK .
- c) Đường thẳng qua M vuông góc với MN cắt DK tại E . Chứng minh BE vuông góc với DK và $MB = ME$.

Câu 6 (1,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh AC cố định thì được một hình nón có thể tích bằng $9\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Tính bán kính đáy của hình nón đó.

----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN GIẢI THAM KHẢO

Câu 1: (1,5 điểm)

- a) Tìm điều kiện của x để biểu thức $A = \sqrt{x-5}$ có nghĩa.
b) Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức $B = \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} - 5$.
c) Rút gọn biểu thức $C = \left(1 + \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}\right) \cdot \left(1 - \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}\right)$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

Lời giải

- a) Biểu thức A có nghĩa khi $x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$.
Vậy $x \geq 5$.
b) Ta có $B = \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} - 5 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2^2 \cdot 3} - 5 = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} - 5 = 6 - 5 = 1$.
Vậy $B = 1$.
c) Với $x \geq 0, x \neq 1$, ta có

$$\begin{aligned} C &= \left(1 + \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}\right) \cdot \left(1 - \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}\right) = \left(1 + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1}\right) \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1}\right) \\ &= (1 + \sqrt{x}) \cdot (1 - \sqrt{x}) = 1 - x. \end{aligned}$$

Vậy $C = 1 - x$.

Câu 2: (1,5 điểm)

- a) Không sử dụng máy tính cầm tay, giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$.
b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = mx + n - 1$ ($m \neq 0$). Tìm các giá trị của m, n để đường thẳng (d) đi qua điểm $M(1;5)$ và song song với đường thẳng $y = 2x + 1$.

Lời giải

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 8 \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; 1)$.

$$\text{b) Vì } (d) \text{ song song với đường thẳng } y = 2x + 1 \text{ nên } \begin{cases} m = 2 \\ n - 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n \neq 2 \end{cases}.$$

Suy ra $(d): y = 2x + n - 1$ ($n \neq 2$).

(d) đi qua $M(1;5)$ nên $5 = 2 \cdot 1 + n - 1 \Leftrightarrow n = 4$ (thỏa $n \neq 2$)

Vậy $m = 2, n = 4$.

Câu 3: (1,0 điểm)

Hai học sinh cùng tham gia một giải chạy với hai cự li khác nhau, cự li của học sinh thứ nhất gấp đôi cự li của học sinh thứ hai (cự li là quãng đường mà người chạy phải hoàn thành). Biết rằng học sinh thứ nhất mất trung bình 5 phút để chạy hết 1 km, học sinh thứ hai mất trung bình 7 phút để chạy hết 1 km và thời gian hoàn thành cự li của học sinh thứ nhất nhiều hơn thời gian hoàn thành cự li của học sinh thứ hai là 15 phút. Tính cự li của mỗi học sinh tham gia.

Lời giải

Gọi x, y (km) lần lượt là cự li của học sinh thứ nhất và học sinh thứ hai, $x, y > 0$.

Do cự li của học sinh thứ nhất gấp đôi cự li của học sinh thứ hai nên ta có: $x = 2y$ (1)

Thời gian để học sinh thứ nhất hoàn thành cự li: $5x$ (phút)

Thời gian để học sinh thứ hai hoàn thành cự li: $7y$ (phút)

Do thời gian hoàn thành cự li của học sinh thứ nhất nhiều hơn của học sinh thứ hai 15 phút nên ta có:

$$5x - 7y = 15 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x = 2y \\ 5x - 7y = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 5.2y - 7y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 5 \end{cases} \quad (\text{thỏa } x, y > 0).$$

Vậy cự li của học sinh thứ nhất là 10 km, cự li của học sinh thứ hai là 5 km.

Câu 4: (2,0 điểm)

Cho phương trình $x^2 - 2(m-5)x + 1 - 2m = 0$ (1), với x là ẩn số.

a) Giải phương trình (1) khi $m = 3$.

b) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .

c) Tìm tất cả giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$(x_1^2 - 2mx_1 + 1)(x_2^2 - 2mx_2 + 1) = 64.$$

Lời giải

a) Khi $m = 3$, phương trình (1) trở thành: $x^2 + 4x - 5 = 0$

Ta có $a + b + c = 1 + 4 + (-5) = 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 1$; $x = \frac{c}{a} = -5$.

b) Ta có $\Delta' = (m-5)^2 - (1-2m) = m^2 - 8m + 24 = (m^2 - 8m + 16) + 8 = (m-4)^2 + 8 > 0$ với mọi m .

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị m .

c) Do x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) nên theo định lý Vi-ét, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 10 \\ x_1 x_2 = 1 - 2m \end{cases}.$$

Vì x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên:

$$x_1^2 - 2(m-5)x_1 + 1 - 2m = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 2mx_1 + 10x_1 + 1 - 2m = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 2mx_1 + 1 = 2m - 10x_1.$$

Tương tự, ta có $x_2^2 - 2mx_2 + 1 = 2m - 10x_2$.

Theo giả thiết: $(x_1^2 - 2mx_1 + 1)(x_2^2 - 2mx_2 + 1) = 64$

$$\Leftrightarrow (2m - 10x_1)(2m - 10x_2) = 64 \Leftrightarrow (m - 5x_1)(m - 5x_2) = 16 \Leftrightarrow m^2 - 5m(x_1 + x_2) + 25x_1x_2 = 16$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 5m(2m - 10) + 25(1 - 2m) = 16 \Leftrightarrow -9m^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Vậy, $m = \pm 1$.

Câu 5: (3,0 điểm)

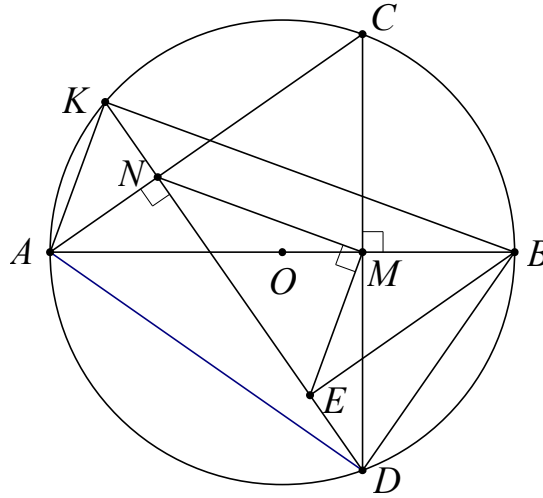
Cho đường tròn (O) đường kính AB và điểm M thuộc đoạn thẳng OB (M khác O và B). Đường thẳng qua M vuông góc với AB cắt đường tròn (O) tại hai điểm C, D . Đường thẳng qua D vuông góc với AC cắt AC tại N và cắt đường tròn (O) tại K (K khác D).

a) Chứng minh tứ giác $ADMN$ nội tiếp.

b) Chứng minh MN song song với BK .

c) Đường thẳng qua M vuông góc với MN cắt DK tại E . Chứng minh BE vuông góc với DK và $MB = ME$.

Lời giải



a) Ta có $MD \perp AM$ nên $\widehat{AMD} = 90^\circ$ và $AN \perp ND$ nên $\widehat{AND} = 90^\circ$
Suy ra M, N cùng nhìn AD dưới một góc vuông.

Do đó, tứ giác $ADMN$ nội tiếp đường tròn đường kính AD .

b) Tứ giác $ADMN$ nội tiếp (theo câu a) nên $\widehat{AMN} = \widehat{ADN}$ (cùng chắn cung $\widehat{AN}$)

Mặt khác $\widehat{ABK} = \widehat{ADK}$ (cùng chắn cung $\widehat{AK}$ của đường tròn (O))

Suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{ABK}$. Do đó $MN \parallel BK$ (hai góc đồng vị).

c) Ta có $AK \perp BK$ (K nằm trên đường tròn đường kính AB)

$\Rightarrow AK \perp MN$ (do $MN \parallel BK$)

Mà $ME \perp MN$ nên $AK \parallel ME$. Suy ra $\widehat{AKD} = \widehat{KEM}$ (so le trong) (1)

Mặt khác $\widehat{ABD} = \widehat{AKD}$ (cùng chắn cung $\widehat{AD}$ của đường tròn (O)) (2)

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{ABD} = \widehat{KEM}$. Suy ra $\widehat{MBD} + \widehat{MED} = \widehat{KEM} + \widehat{MED} = 180^\circ$.

Do đó, tứ giác $BMED$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{BED} = \widehat{BMD} = 90^\circ$.

Vậy, $BE \perp ED$ hay $BE \perp DK$.

Ta có $\widehat{MBE} = \widehat{MDE}$ (cùng chắn cung $\widehat{ME}$)

$\widehat{MDE} = \widehat{MDN} = \widehat{MAN}$ (cùng chắn cung $\widehat{MN}$)

$\widehat{MAN} = \widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ (cùng chắn cung $\widehat{BC}$)

$\widehat{BDC} = \widehat{BDM} = \widehat{BEM}$ (cùng chắn cung $\widehat{MB}$)

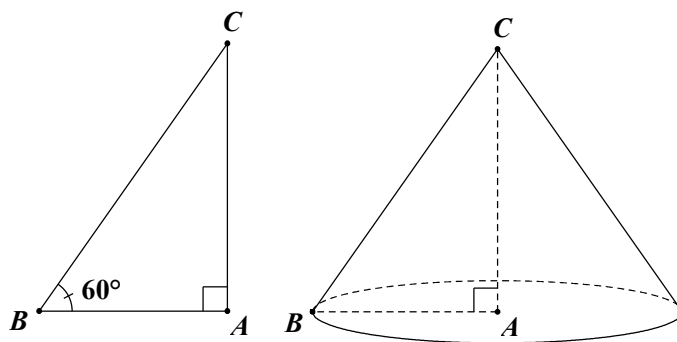
Suy ra $\widehat{MBE} = \widehat{BEM}$.

Do đó, $\triangle BME$ cân tại M . Vậy $MB = ME$.

Câu 6: (1,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh AC cố định thì được một hình nón có thể tích bằng $9\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Tính bán kính đáy của hình nón đó.

Lời giải



Quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh AC thì được một hình nón có bán kính đáy $r = AB$ và chiều cao $h = AC$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , có: $h = AC = AB \cdot \tan B = AB \cdot \tan 60^\circ = AB\sqrt{3} = r\sqrt{3}$.

Ta có: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Leftrightarrow 9\pi\sqrt{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r\sqrt{3} \Leftrightarrow r^3 = 27 \Leftrightarrow r = 3$.

Vậy bán kính đáy của hình nón là $r = 3 \text{ cm}$.