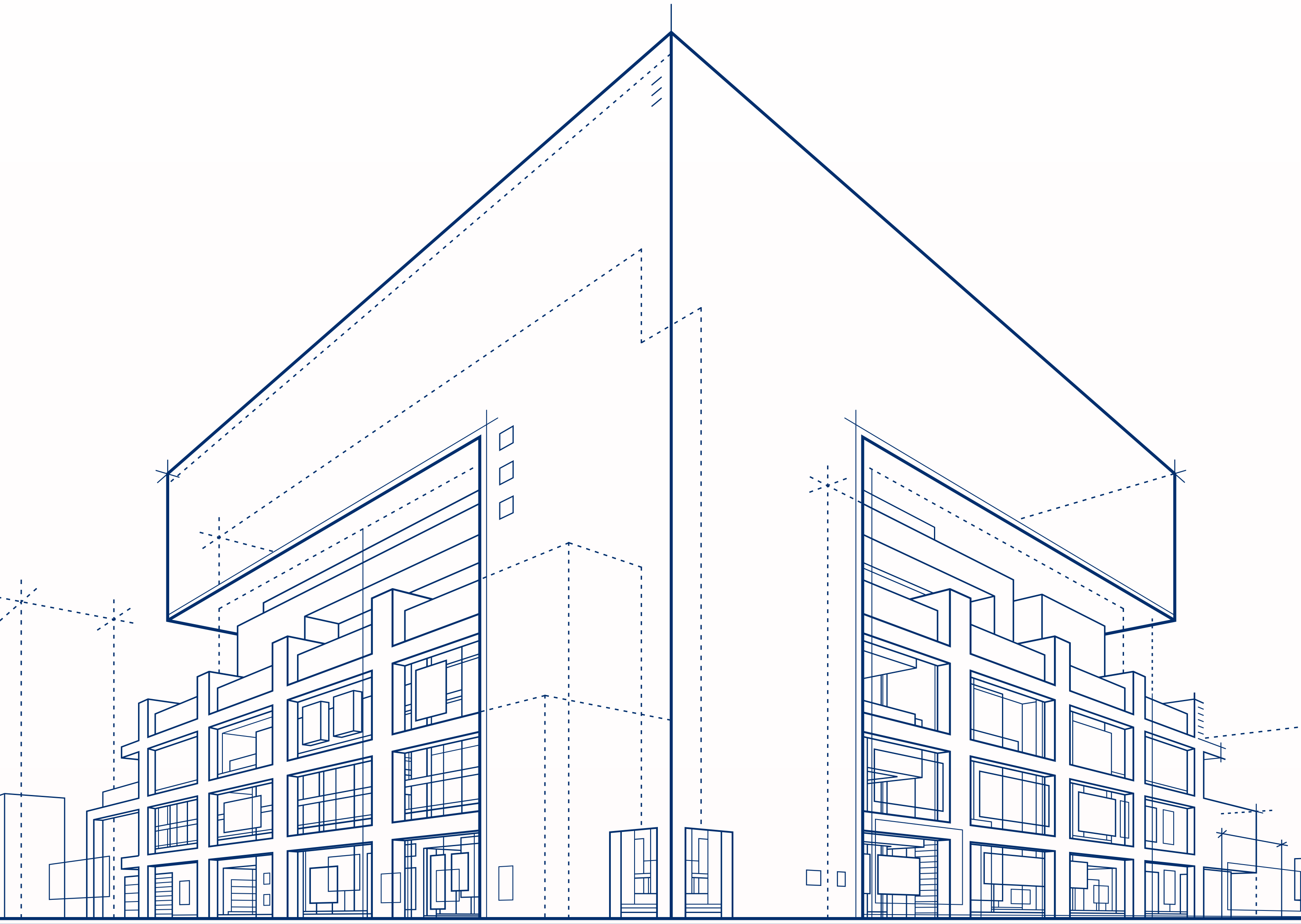
QUAN HỆ Vuông góc



TÁC GIẢ

TOÁN TỪ TÂM

MỤC LỤC

Chương 08

Bài 1. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. Lý thuyết

1. Góc giữa 2 đường thẳng

Định nghĩa:

Góc giữa hai đường thẳng a,b trong không gian, kí hiệu (a,b), là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với a và b.

Nhận xét

(1) Xác định góc giữa đường thẳng a và b ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ một đường thẳng qua O; song song với đường thẳng còn lại

(2) Với hai đường thẳng a và b bất kì: $0° \le (a,b) \le 90°$.

⌘ Để tính số đo của góc giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) ta có thể thực hiện tính thông qua góc giữa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng đã cho.

- *Bước 1.* Sử dụng tính chất sau: $\begin{cases}(d_1,d_2)=\alpha \\ d_2 // d_3\end{cases} \Rightarrow (d_1,d_2)=(d_1,d_3)=\alpha$

- *Bước 2.* Áp dụng định lí côsin trong tam giác để xác định góc.

2. Hai đường thẳng vuông góc trong không gian

Định nghĩa:

Hai đường thẳng a và b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng $90°$.
Kí hiệu $a \perp b$.

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định góc giữa hai đường thẳng

Phương pháp

» $(a,b)=(a',b')$ với $a'//a$ và $b'//b$

» $a\perp b \Leftrightarrow (a,b)=90^\circ$

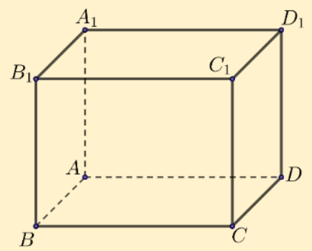
» $\begin{cases} b//c \\ a\perp c \end{cases} \Rightarrow a\perp b$

Ví dụ 1.1.

Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ (hình vẽ bên).
Xác định góc giữa các cặp đường thẳng

(1) A_1C_1 và AB

(2) B_1C và BD.



Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, $SA=AB$ và $SA\perp BC$.
Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.3.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa 2 đường thẳng:

(1) AB và $B'C'$ (2) AC và $B'C'$ (3) $A'C'$ và $B'C$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.4.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN, SC) bằng bao nhiêu?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.5.

Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng a; SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Khi đó, cosin góc giữa SB và AC bằng

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.6.

Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, $AB = AC = a, \widehat{BAC} = 120°$ và cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Phương pháp

» **Dùng định nghĩa:** *Hai đường thẳng a và b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°. Kí hiệu: $a \perp b$.*

» **Dùng định lí:** $\begin{cases} b // c \\ a \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp b$

Ví dụ 2.1.

Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{CBD} = 90^0$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD. Chứng minh rằng MN vuông góc với BC.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.2.

Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, AD, BC.

(1) Chứng minh: $MN \perp CD$.

(2) Tính cosin của góc giữa MC và MD.

(3) Gọi E là trung điểm của AC. Chứng minh: $QE \perp PE$.

(4) Chứng minh: $AB \perp CD$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA \perp AB$, $SA \perp AD$, $SA \perp AC$ và $SA = 2a$.

(1) Chứng minh: $SA \perp BC$, $SA \perp CD$.

(2) Gọi I là trung điểm của CD. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SB và AI.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» **Câu 1.** Trong không gian, góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a' và b' thỏa mãn

A. Cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với a và b.

B. Lần lượt song song hoặc trùng với a và b.

C. Cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b.

D. Lần lượt song song với a và b.

» **Câu 2.** Trong không gian, hai đường thẳng a và b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng

A. 90^0. **B.** 45^0. **C.** 0^0. **D.** 180^0.

» **Câu 3.** Trong không gian, cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau khi đó

A. Hai đường thẳng a và b có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

B. Hai đường thẳng a và b luôn cắt nhau.

C. Hai đường thẳng a và b chéo nhau.

D. Hai đường thẳng a và b song song nhau.

» **Câu 4.** Trong không gian cho hai đường thẳng a và b song song với nhau, nếu đường thẳng c vuông góc với đường thẳng a thì

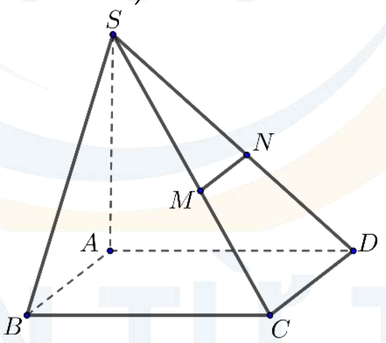
A. Đường thẳng c vuông góc với đường thẳng b.

B. Đường thẳng c song song với đường thẳng b.

C. Đường thẳng c song song hoặc trùng với đường thẳng b.

D. Đường thẳng c cắt đường thẳng b tại một điểm.

» **Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và SD (tham khảo hình vẽ).



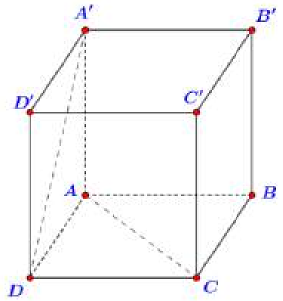
Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $MN \perp AC$. **B.** $MN \perp BD$. **C.** $MN \perp AB$. **D.** $MN \perp BC$.

» **Câu 6.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng BC'?

A. $A'D$. **B.** AC. **C.** BB'. **D.** AD'.

» **Câu 7.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng

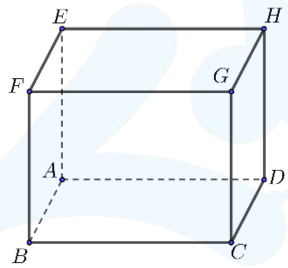


A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

» Câu 8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với BD.

A. CC'. **B.** $B'C'$. **C.** AB. **D.** $B'C$.

» Câu 9. Cho hình lăng trụ $ABCD.EFGH$ có 6 mặt đều là hình vuông. Tính góc giữa hai đường thẳng EG và GD.



A. 83°. **B.** 90°. **C.** 50°. **D.** 60°.

» Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $BC = a, BA = 4a, SB = \sqrt{5}a$. Biết $SB \perp BC$ và $SB \perp BA$. Tính góc giữa hai đường thẳng SC và DA.

A. $69,61^\circ$. **B.** $65,91^\circ$. **C.** $82,71^\circ$. **D.** $77,71^\circ$.

» Câu 11. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AD vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

A. BB'. **B.** $B'D'$. **C.** AD'. **D.** $B'D$.

» Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các mặt là hình thoi. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $AB \perp AD$. **B.** $BD \perp A'C'$. **C.** $DD' \perp DC$. **D.** $BD \perp AB$.

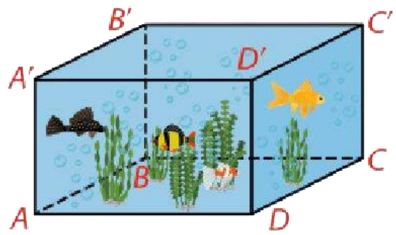
» Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA và SC. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $AB \perp AD$. **B.** $IJ \perp SA$. **C.** $IJ \perp BD$. **D.** $BD \perp AB$.

» Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SAB = SAD = 90^\circ$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SD. Đường thẳng HK vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

A. AC. **B.** SB. **C.** SD. **D.** AB.

» Câu 15. Ta biết hình hộp chữ nhật có 6 mặt là các hình chữ nhật. Quan sát một bể nuôi cá cảnh hình hộp chữ nhật sau và cho biết góc giữa hai đường thẳng AA' và $C'D'$ bằng góc nào sau đây?

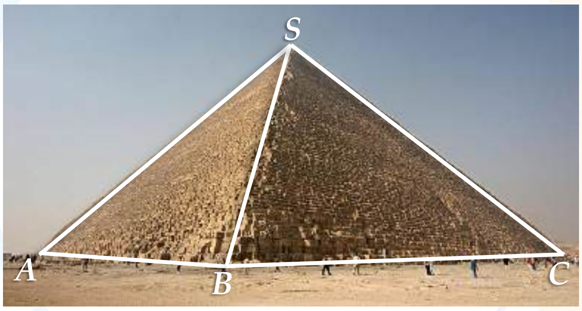


A. $(A'A, AB)$. **B.** $(A'A, AD)$. **C.** $(A'A, AB)$. **D.** $(A'A, AB')$.

» Câu 16. Đối với nhà gỗ truyền thống, trong các cấu kiện hoành, quá giang, rui, cột tương ứng được đánh số 1,2,3,4, trong hình sau, những cặp cấu kiện nào vuông góc với nhau?

A. $1-4;2-4;1-3$ **B.** $2-4;1-3$ **C.** $1-4;3-4;1-2$ **D.** $1-4,2-4,3-4$

» Câu 17. Kim tự tháp Cheops là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập, được xây dựng vào thế kỉ thứ 26 trước Công nguyên và là một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại. Kim tự tháp có dạng hình chóp $S.ABCD$ với đáy là hình vuông $ABCD$ có cạnh dài khoảng $230m$, các cạnh bên bằng nhau và dài khoảng $219m$. Tính gần đúng góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp.



A. $58°19'$. **B.** $61°29'$. **C.** $45°6'$. **D.** $30°7'$.

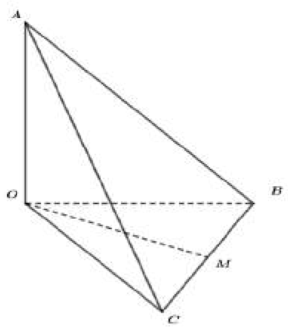
» Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=2a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết $MN=\sqrt{3}a$, góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

» Câu 19. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$ và $AA'=a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

» Câu 20. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA=OB=OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

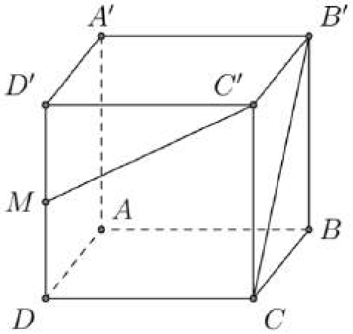


A. 90^0. **B.** 30^0. **C.** 60^0. **D.** 45^0

» Câu 21. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$; gọi M là trung điểm của $B'C'$. Góc giữa hai đường thẳng AM và BC' bằng

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

» Câu 22. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của DD' *(tham khảo hình vẽ).* Tính cô-sin của góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và $C'M$



A. $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{2\sqrt{2}}{9}$.

» Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=AB=AC=a$, $BC=a\sqrt{2}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng AB và SC ta được kết quả:

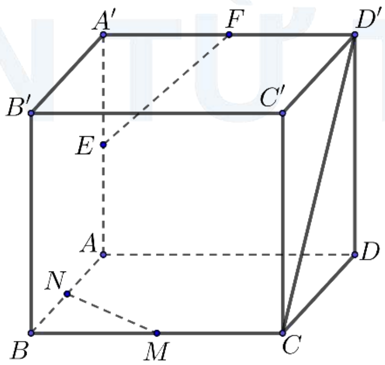
A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» Câu 24. Trong không gian, cho hai đường thẳng bất kỳ.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Góc giữa hai đường thẳng trong không gian là góc giữa 2 đường thẳng cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với hai đường thẳng đã cho.		
(b)	Hai đường thẳng vuông góc thì cắt nhau.		
(c)	Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.		
(d)	Nếu hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng đó song song với nhau.		

» Câu 25. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (như vẽ bên), gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm của $BC, AB, AA', A'D'$.



Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Cạnh MN và AA' vuông góc với nhau.		

(b)	Góc giữa MN và CD' bằng góc giữa AC và CD'.		
(c)	Góc giữa EF và CC' bằng góc giữa AD' và CC'.		
(d)	Góc giữa EF và CD' bằng $30°$.		

» Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Gọi G là trọng tâm ΔSBC
Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Góc giữa IJ và SA bằng $90°$.		
(b)	Góc giữa IJ với CD bằng $60°$.		
(c)	Cosin của góc giữa BI với SA bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$.		
(d)	Cosin của góc giữa DG và SB bằng $\frac{1}{3}$.		

» Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là vuông cạnh a. Cạnh bên $SA=a$ và vuông góc với AB và AD, $SC=a\sqrt{3}$.
Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$SA\perp BC$		
(b)	$SA\perp CD$		
(c)	$BC\perp SB$		
(d)	K là hình chiếu của A lên SB thì $SC\perp AK$		

» Câu 28. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$BD//B'D'$		
(b)	$\left(AC,B'D'\right)=90^{\circ}$		
(c)	Tam giác ACD' đều		
(d)	$\left(AC,A'B\right)=30^{\circ}$		

» Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi. Gọi M,N theo thứ tự là trung điểm của đoạn SB,SD. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$MN//BD$		
(b)	MN và AC là hai đường thẳng chéo nhau		
(c)	$AC\perp BD$		
(d)	$\left(MN,AC\right)=90^{\circ}$		

» Câu 30. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a,M là trung điểm cạnh BC, N là trung điểm của AC. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$MN//AB$		
(b)	$MD=ND=\frac{a\sqrt{2}}{2}$		
(c)	$\left(AB,DM\right)=\left(MN,DM\right)$		

(d)	$\cos\left(AB,DM\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$		

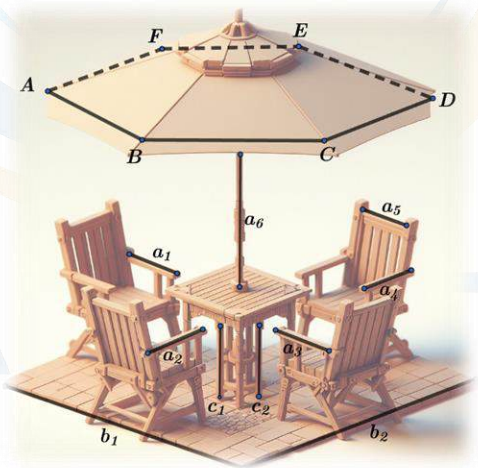
» Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D. Gọi E là trung điểm của AB. Biết $AB=2a, AD=DC=a$, đồng thời $SA\perp AB, SA\perp AD$ và $SA=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Khi đó:

	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
(a)	$\left(SB,DC\right)=SBA$		
(b)	$\tan SBA=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$		
(c)	$DE//BC$		
(d)	$\left(SD,BC\right)\approx 52,42^{\circ}$		

» Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a. Cho biết $SA=a\sqrt{3}$, $SA\perp AB, SA\perp AD$. Khi đó:

	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
(a)	$\left(AB,SA\right)=90^{\circ}$		
(b)	$SA\perp CD$		
(c)	$\left(SD,BC\right)=\left(SD,CD\right)$		
(d)	$SDA=60^{\circ}$		

» Câu 33. Một ô che nắng có viền khung hình lục giác đều $ABCDEF$. Biết các thanh gỗ a_1,a_3,a_5 song song nhau, các thanh $a_2;a_4$ song song nhau đồng thời trục của cây dù a_6 vuông góc với các đường AB,BC,CD,a_1,a_2 và song song với các đường chân bàn $c_1;c_2$. Các đường gạch lát $b_1//AB, b_2//CD$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?



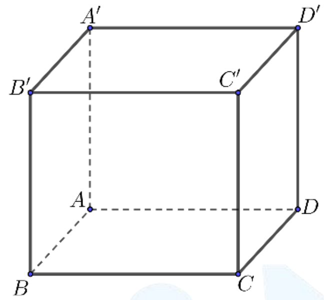
	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
(a)	$a_6\perp a_3;a_6\perp a_4;a_6\perp a_5$		
(b)	$a_6\perp ED;a_6\perp EF;a_6\perp FA$		
(c)	$c_1\perp a_1;c_2\perp a_2$		
(d)	$b_1\perp b_2$		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, tam giác SAB là tam giác đều. Tính sin của góc giữa đường thẳng SA và DC (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

✍ **Điền đáp số:**

» Câu 35. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình bên dưới).



Góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD bằng bao nhiêu? Viết câu trả lời theo đơn vị độ.

✍ **Điền đáp số:**

» Câu 36. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Tính độ dài đoạn thẳng MN biết góc giữa hai đường thẳng AB và MN bằng $30°$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

✍ **Điền đáp số:**

» Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD. Góc giữa đường thẳng MN và AC bằng bao nhiêu độ?

✍ **Điền đáp số:**

» Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, biết $SA = a$, $SC = a\sqrt{3}$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm các cạnh AD, SD. Góc của hai đường thẳng MN và SC bằng bao nhiêu độ?

✍ **Điền đáp số:**

» Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau, biết $AB = AC = AD = 1$. Góc của hai đường thẳng AB và CD bằng bao nhiêu độ?

✍ **Điền đáp số:**

» Câu 40. Cho tứ diện đều $ABCD$. Góc của hai đường thẳng AB và CD bằng bao nhiêu độ?

✍ **Điền đáp số:**

» Câu 41. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Tính góc giữa đường thẳng CD' với mỗi đường thẳng $BB', A'D$.

✍ **Điền đáp số:**

» Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Tìm số đo của góc (IJ, CD).

✍ **Điền đáp số:**

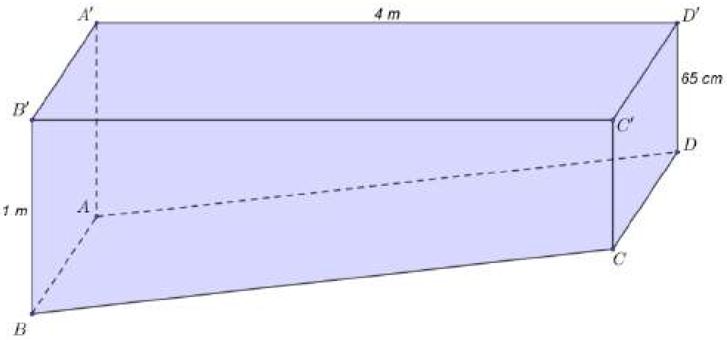
» Câu 43. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = 1; BD = 3$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết AC vuông góc với BD. Tính độ dài MN. *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.*

Điền đáp số: ☐

» Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, ΔSAB đều và $SC = 2a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Góc giữa đường thẳng AK và SH bằng bao nhiêu độ?

Điền đáp số: ☐

» Câu 45. Bác Minh có một khối gỗ có kích thước như hình vẽ. Biết $ABCD$, $A'B'C'D'$, $A'B'BA$, $CDD'C'$ là các hình chữ nhật, $A'D'DA$, $B'C'CB$ là các hình thang vuông. Bác Minh muốn làm đẹp khối gỗ đó bằng cách cắt khối gỗ theo mặt phẳng (P) đi qua C và song song với mặt phẳng $(A'B'C'D')$.



Khi đó, bác Minh cần đặt mép BC của khối gỗ tạo với lưỡi cắt của máy cắt một góc bao nhiêu độ?

Điền đáp số: ☐

---------------------------- Hết ----------------------------

Chương 08

Bài 2. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẲNG

A. Lý thuyết

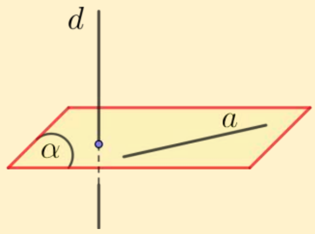
1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Định nghĩa:

Đường thẳng d được gọi là *vuông góc* với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a *nằm trong* mặt phẳng (α)

Ký hiệu: $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow d \perp a, \forall a \subset (\alpha)$

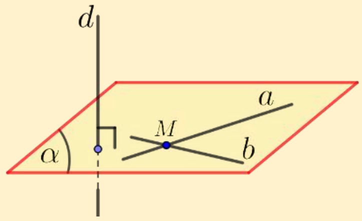
Nhận xét: $\begin{cases} d \perp (P) \\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow d \perp a$



Định lý 1:

Nếu đường thẳng d *vuông góc* với hai đường thẳng *cắt nhau* cùng thuộc một mặt phẳng thì vuông góc với mặt phẳng ấy.

$$\begin{cases} d \perp a \subset (P) \\ d \perp b \subset (P) \Rightarrow d \perp (P) \\ a \cap b = M \end{cases}$$



Định lý 2:

Có duy nhất:

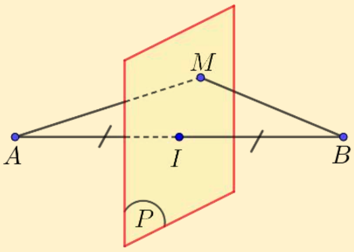
- Một mặt phẳng:
  - + đi qua một điểm cho trước, và
  - + vuông góc với đường thẳng cho trước.
- Một đường thẳng:
  - + đi qua một điểm cho trước, và
  - + vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

⌘ *Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng*

Định nghĩa:

Mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

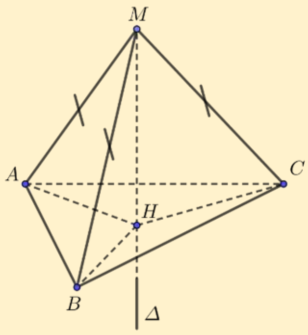
Nhận xét: (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \forall M \in (P), MA = MB$.



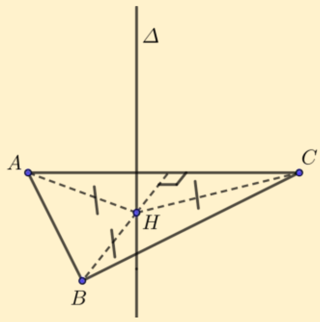
⌘ *Trục của đa giác*

Định nghĩa:

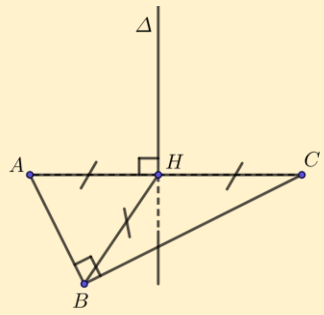
Trục của đa giác là đường thẳng qua tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đó. Nếu một điểm nằm trên trục của đa giác thì nó cách đều các đỉnh của đa giác.



Tam giác thường



Tam giác đều



Tam giác vuông

Chứng minh:

Cho đa giác có n đỉnh $A_1A_2\ldots A_n$.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác và d là trục của đa giác.

Lấy điểm $I \in d$.

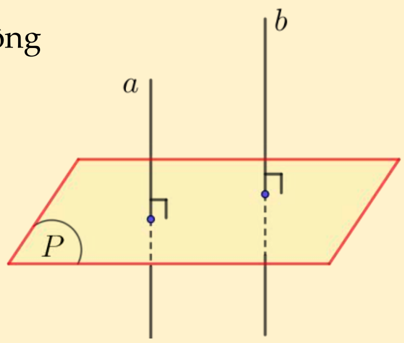
Khi đó: $\Delta IOA_1 = \Delta IOA_2 = \ldots = \Delta IOA_n$ (Δ vuông có 2 cạnh bằng nhau) $\Rightarrow IA_1 = IA_2 = \ldots = IA_n$

2. Liên hệ giữa tính song song – vuông góc của đường thẳng & mặt phẳng

Định lý 3:

(1) Cho hai đường thẳng song song, nếu mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

Tóm tắt: $\begin{cases} a//b \\ a \perp (P) \end{cases} \Rightarrow b \perp (P)$

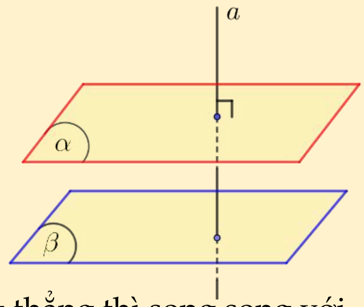


(2) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

Tóm tắt: $\begin{cases} a \neq b \\ a \perp (P)\,;\, b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a//b$

Định lý 4:

(1) Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó cũng vuông góc với bất kì mặt phẳng nào song song với mặt phẳng ấy.



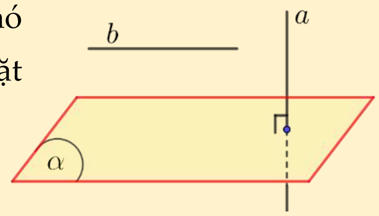
Tóm tắt: $\begin{cases}(\alpha)//(\beta)\\ a\perp(\alpha)\end{cases}\Rightarrow a\perp(\beta)$

(2) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Tóm tắt: $\begin{cases}(\alpha)\neq(\beta)\\ (\alpha)\perp a\\ (\beta)\perp a\end{cases}\Rightarrow(\alpha)//(\beta)$

Định lý 5:

(1) Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó vuông góc với bất kì đường thẳng nào song song với mặt phẳng ấy.



Tóm tắt: $\begin{cases}a\perp(\alpha)\\ b//(\alpha)\end{cases}\Rightarrow a\perp b$

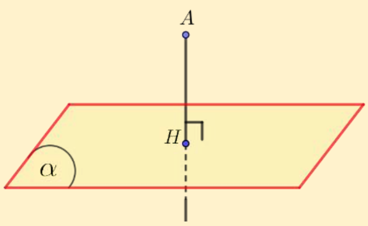
(2) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng *(không chứa đường thẳng đó)* cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

Tóm tắt: $\begin{cases}b\not\subset(\alpha)\\ b\perp a\\ (\alpha)\perp a\end{cases}\Rightarrow b//(\alpha)$

3. Phép chiếu vuông góc

Định nghĩa:

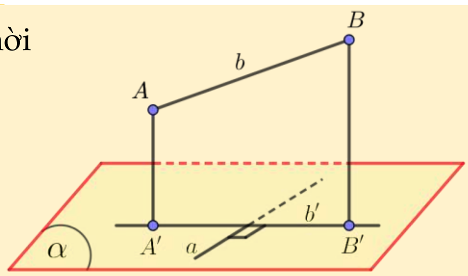
- Cho đường thẳng Δ vuông góc với (α). Phép chiếu song song theo phương của Δ lên (α) được gọi là phép chiếu vuông góc lên (α).
- H là hình chiếu vuông góc *(gọi tắt là hình chiếu)* của A lên (P) nếu $AH\perp(P)$ và $H\in(P)$.



4. Định lý ba đường vuông góc

Định lý 6 (định lý ba đường vuông góc):

- Cho a nằm trong (α) và b không thuộc (α) đồng thời không vuông góc với (α).
- Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (α).
- Khi đó $a \perp b \Leftrightarrow a \perp b'$.



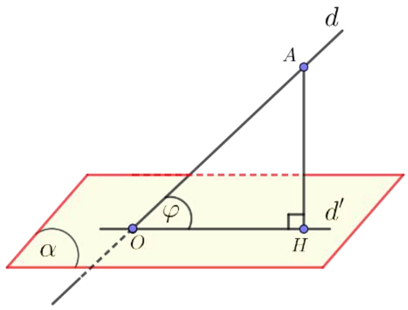
5. Góc giữa đường thẳng & mặt phẳng

Nhận xét

(1) $d \perp (P) \Rightarrow \left(\widehat{d;(P)}\right) = 90^\circ$

(2) $d \not\perp (P) \Rightarrow \left(\widehat{d;(P)}\right) = \left(\widehat{d;d'}\right) = \widehat{AOH}$ với d' là hình chiếu của đường thẳng d lên (P)

Chú ý: $0 \le \left(d;(P)\right) \le 90^\circ$.

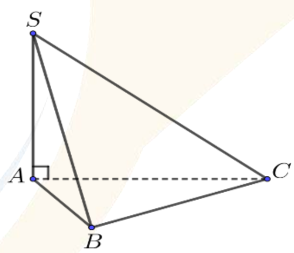


6. Kiến thức bổ trợ

6.1. Một số mô hình thường gặp

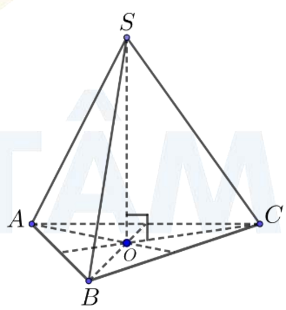
(1). Hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy.

- $SA \perp BC$
- $\Delta SAB, \Delta SAC$ vuông tại A
- A là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC).



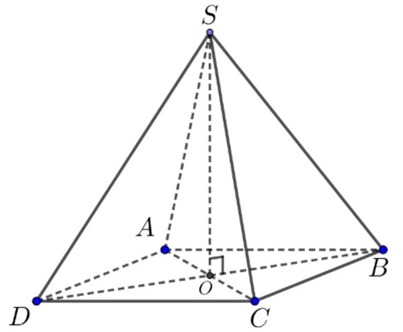
(2). Hình chóp tam giác đều.

- Đáy ΔABC là tam giác đều.
- Mặt bên là các tam giác cân tại S. (hoặc là tam giác đều nếu hình chóp là tứ diện đều).
- O là trọng tâm ΔABC.
- $SO \perp (ABC)$, SO là trục ΔABC.
- $SA = SB = SC$



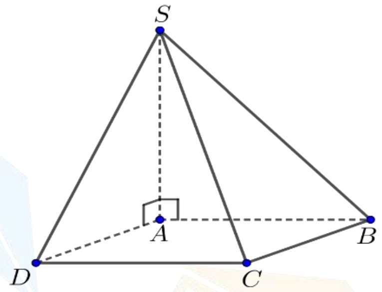
(3). Hình chóp tứ giác đều.

- Đáy $ABCD$ là hình vuông, các mặt bên là các tam giác cân tại S.
- Các tam giác SAC, SBD cân tại S.
- O là hình chiếu của S lên $ABCD$.
- $SO \perp (ABC)$, SO là trục hình vuông $ABCD$.
- $SA = SB = SC = SD$.



(4). Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, hình chữ nhật, hình vuông, hình thoi.

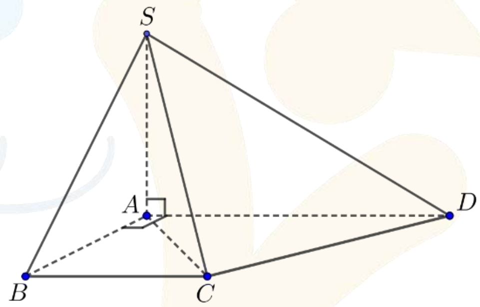
- A là hình chiếu của S lên $ABCD$.
- Các tam giác SAB, SAC, SAD vuông tại A.
- ***Đặc biệt:*** Nếu $ABCD$ là hình vuông hoặc hình thoi thì AC vuông góc BD.



(5). Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có góc A vuông và SA vuông với đáy.

- A là hình chiếu của S lên $ABCD$.
- Các tam giác SAB, SAC, SAD vuông tại A.
- ***Đặc biệt:*** Nếu $AD = 2BC$:

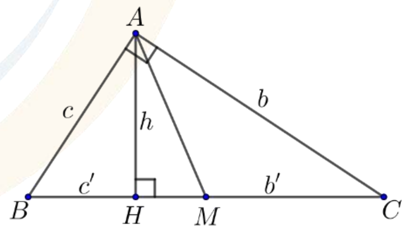
+ Gọi I là trung điểm AD thì $CI \perp AD$.
+ Trong trường hợp thêm $AB = BC$ thì $AC \perp CD$.



6.2. Các hệ thức lượng trong tam giác

(1). Tam giác ABC vuông tại A:

- $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} b.c$
- $a^2 = b^2 + c^2$ (định lý Pitago)
- $b^2 = b' \cdot a$
- $c^2 = c' \cdot a$
- $h^2 = b' \cdot c'$
- $a \cdot h = b.c$
- $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$
- $\frac{b'}{c'} = \frac{b^2}{c^2}$
- $AM = \frac{1}{2} BC$ với M là trung điểm BC.



- $\sin B = \cos C = \frac{AC}{BC}$
- $\cos B = \sin C = \frac{AB}{BC}$
- $\tan B = \cot C = \frac{AC}{AB}$
- $\cot B = \cot C = \frac{AB}{AC}$

(2). Tam giác thường:

• ***Định lí côsin:***

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

• ***Tính cosin 1 góc:***

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

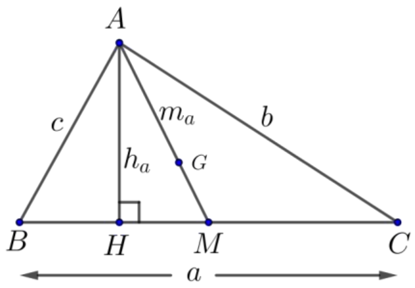
• ***Độ dài trung tuyến:***

$m_a^2 = \dfrac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4}$

$m_b^2 = \dfrac{2\left(a^2 + c^2\right) - b^2}{4}$

$m_c^2 = \dfrac{2\left(a^2 + b^2\right) - c^2}{4}$

• ***Định lí sin:*** $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$



• ***Diện tích tam giác***

$S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bh_b = \dfrac{1}{2}ch_c$

$S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ca\sin B = \dfrac{1}{2}ab\sin C$

$S = \dfrac{abc}{4R}$

$S = pr; p = \dfrac{a+b+c}{2}$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Với R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC.

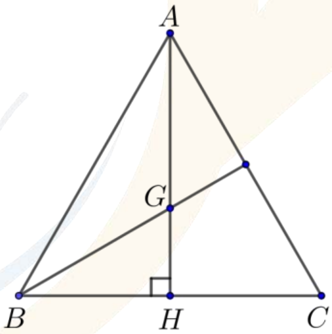
(3). Tam giác đều:

Xét tam giác đều cạnh x.

Diện tích tam giác đều: $S = x^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Đường cao tam giác đều: $h = x.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Với G là trọng tâm ΔABC: $AG = \dfrac{2}{3}.AH = x.\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



6.3. Các chú ý khác

» Độ dài đường chéo hình vuông cạnh bằng a là $a\sqrt{2}$.

» Độ dài đường chéo hình chữ nhật có độ dài 2 cạnh là a và b là $\sqrt{a^2 + b^2}$.

» Trong hình vuông và hình thoi, các đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường và vuông góc nhau.

B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Chứng minh đường thẳng vuông góc mặt phẳng

Phương pháp

☑ *Cách 1.*

Chứng minh d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng chứa trong (P).

☑ *Cách 2.*

Chứng minh d song song với a mà $a \perp (P)$

☑ *Cách 3.*

Chứng minh $d \perp (Q)$ và $(Q) // (P)$.

Ví dụ 1.1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC).

(1) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

(2) Gọi AH là đường cao của ΔSAB. Chứng minh $AH \perp SC$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.2.

Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (ABC). Chứng minh:

(1) $BC \perp (OAH)$.

(2) H là trực tâm của ΔABC.

Lời giải

Ví dụ 1.3.

Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SA\perp(ABC)$.

(1) Chứng minh $BC\perp(SAB)$.

(2) Gọi AH và AK là đường cao của $\Delta SAB,\Delta SAC$. Chứng minh $SC\perp(AHK)$.

(3) HK cắt tia CB tại I. Chứng minh: ΔAIC vuông.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Phương pháp

☑ Chứng minh hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, ta làm như sau:

- *Bước 1.* Chọn (P) chứa đường thẳng b
- *Bước 2.* Chứng minh $a\perp (P)\to a\perp b$

Ví dụ 2.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD. Chứng minh $HK\perp SC$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $SA\perp (ACBD), AD=2a, AB=BC=a$. Chứng minh rằng $CD\perp SC$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O và SA vuông góc với đáy. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC, SD.

(1) Chứng minh rằng $CD \perp (SAD)$, $BD \perp (SAC)$.

(2) Chứng minh $SC \perp HK$.

(3) Chứng minh rằng $HK \perp AI$.

Lời giải

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Trong không gian cho điểm O và đường thẳng d. Qua điểm O có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng d?

A. 1. **B.** Vô số. **C.** 3. **D.** 2.

» Câu 2. Khẳng định nào sau đây là **đúng**.

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì chúng vuông góc với nhau.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

» Câu 3. Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng phân biệt a và b. Biết rằng $a // (P)$. Hỏi mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Nếu $b // (P)$ thì $b // a$. **B.** Nếu $b \perp (P)$ thì $b \perp a$.

C. Nếu $b // a$ thì $b // (P)$. **D.** Nếu $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

» Câu 4. Cho hai đường thẳng a,b và mặt phẳng (P). Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu $a //(P)$ và $b \perp (P)$ thì $a \perp b$.

B. Nếu $a \subset (P)$ và $b \perp (P)$ thì $a \perp b$.

C. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b // (P)$ hoặc $b \subset (P)$.

D. Nếu $a //(P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

» Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$, biết SA,SB,SC đôi một vuông góc. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $AB \perp (SAC)$. **B.** $SA \perp (SBC)$. **C.** $SB \perp (ABC)$. **D.** $AC \perp (SAB)$.

» Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$, biết $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại A. Đường thẳng AB vuông góc với mặt phẳng nào?

A. $AB \perp (SAC)$. **B.** $AB \perp (ABC)$. **C.** $AB \perp (SBC)$. **D.** $AB \perp (SAB)$.

» Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng nhau và $ABCD$ là hình vuông. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $BD \perp (SAD)$. **B.** $BD \perp (SCD)$. **C.** $BD \perp (SAC)$. **D.** $BD \perp (ABCD)$.

» Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $SA \perp (SBD)$. **B.** $BD \perp (SAC)$. **C.** $AB \perp (SAD)$. **D.** $AD \perp (SAB)$.

» Câu 9. Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng a, b phân biệt biết $a \perp (P)$ và $b \perp (P)$. Khẳng định nào đúng?

A. $(a,b) = 90°$. **B.** $(a,b) = 0°$. **C.** $(a,b) = 60°$. **D.** $(a,b) = 45°$.

» **Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA\perp(ABCD)$. Gọi AE, AF lần lượt là các đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD. Chọn khẳng định đúng?

A. $SC\perp(AEF)$. **B.** $SC\perp(AEC)$. **C.** $SC\perp(AFB)$. **D.** $SC\perp(AED)$.

» **Câu 11.** Cho hai đường thẳng a, b phân biệt và mặt phẳng (P), biết $a\perp(P)$ và $b\subset(P)$. Khẳng định nào đúng?

A. $(a,b)=90°$. **B.** $(a,b)=0°$. **C.** $(a,b)=60°$. **D.** $(a,b)=45°$.

» **Câu 12.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $BA\perp(SAD)$. **B.** $BA\perp(SAC)$. **C.** $BA\perp(SBC)$. **D.** $BA\perp(SCD)$.

» **Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và SB. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

A. $CM\perp SB$. **B.** $CM\perp AN$. **C.** $MN\perp MC$. **D.** $AN\perp BC$.

» **Câu 14.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $MN\perp AB$. **B.** $MN\perp BD$. **C.** $MN\perp CD$. **D.** $AB\perp CD$.

» **Câu 15.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=2$, $DB=DC=3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $BC\perp AD$. **B.** $AC\perp BD$. **C.** $AB\perp(BCD)$. **D.** $DC\perp(ABC)$.

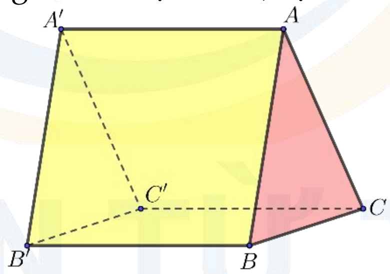
» **Câu 16.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông. Hình chiếu của tam giác SCD trên mặt phẳng (SAB) là

A. ΔACD. **B.** ΔSAD. **C.** ΔSBC. **D.** ΔSAB.

» **Câu 17.** Cho tứ diện $OABC$ có $OA\perp(OBC)$. Đường thẳng qua O và vuông góc với (ABC) tại H. Đường thẳng AH vuông góc với đường nào dưới đây?

A. BC. **B.** OA. **C.** AB. **D.** OC.

» **Câu 18.** Một cái lều có dạng hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên AA' vuông góc với đáy như hình dưới đây. Biết đáy là tam giác đều cạnh $2m$, cạnh bên $AA'=3m$.



Diện tích hình chiếu vuông góc của $\Delta ABB'$ trên mặt phẳng $(BB'C'C)$ là

A. $1,5m^2$. **B.** $3m^2$. **C.** $6m^2$. **D.** $0,75m^2$.

» **Câu 19.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều với cạnh a. Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$. M là một điểm khác B và ở trên SB sao cho AM vuông góc với MD. Khi đó, tỉ số $\frac{SM}{SB}$ bằng

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

» **Câu 20.** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $2a$, các mặt bên là các tam giác vuông cân tại S. Gọi G là trọng tâm của ΔABC, (α) là mặt phẳng qua G vuông góc với SC. Diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) bằng

A. $\frac{4}{9}a^2$. **B.** $\frac{2}{3}a^2$. **C.** $\frac{4}{3}a^2$. **D.** $\frac{2}{9}a^2$.

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» **Câu 21.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$BC \perp (SAB)$.		
(b)	$CD \perp (SAD)$.		
(c)	$AC \perp (SBD)$.		
(d)	$BD \perp (SAC)$.		

» **Câu 22.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thoi tâm O và $SA = SC, SB = SD$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$SO \perp AC$		
(b)	$SO \perp (ABCD)$		
(c)	$AC \perp (SBD)$		
(d)	$(AC, SB) = 60°$		

» **Câu 23.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của A trên các cạnh SB, SD. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tam giác SBC vuông		
(b)	Tam giác SCD vuông		
(c)	$SC \perp (AHK)$		
(d)	$HK \perp SC$		

» **Câu 24.** Cho hình chóp $SABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC (biết rằng các trực tâm này không trùng với các đỉnh của tam giác ABC và SBC). Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$BC \perp (SAH)$.		
(b)	$SB \perp (CHK)$.		
(c)	$HK \perp (SBC)$.		
(d)	$BC \perp (SAB)$.		

» **Câu 25.** Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên (ABC). Khi đó:

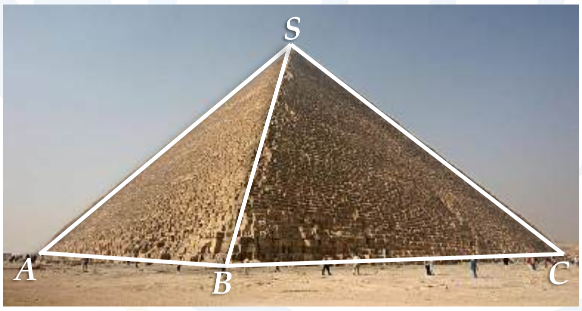
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$BC \perp (AOH)$.		

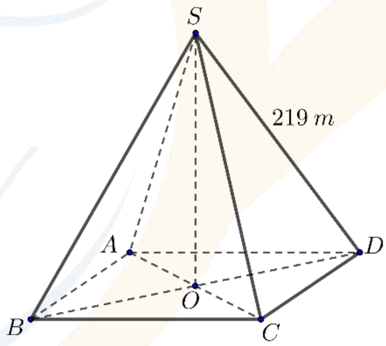
(b)	$\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$.		
(c)	H là trực tâm ΔABC.		
(d)	$AH\perp(OBC)$.		

» Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Biết $SA=a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của A lên SM. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường thẳng BC vuông góc với đường thẳng AH.		
(b)	Đường thẳng AH vuông góc với mặt phẳng (SBC).		
(c)	Đường thẳng SH là hình chiếu của đường thẳng SA lên mặt phẳng (SBC).		
(d)	Độ dài đoạn thẳng AH bằng $\dfrac{6a}{11}$.		

» Câu 27. Kim tự tháp Cheops là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập, được xây dựng vào thế kỉ thứ 26 trước Công nguyên và là một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại. Kim tự tháp có dạng hình chóp với đáy là hình vuông có cạnh dài khoảng $230\,m$, các cạnh bên bằng nhau và dài khoảng $219\,m$ (kích thước hiện nay) . Kim tử tháp Cheops được mô phỏng bởi hình chóp $S.ABCD$ với O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD như hình bên dưới. (Theo *britannica.com*). Khi đó:





	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp (gần đúng) là $48,3°$.		
(b)	Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$.		
(c)	Đường thẳng SO vuông góc cạnh đáy AB và BC.		
(d)	Biết rằng độ dài SO chính là chiều cao của kim tử tháp Cheops, ta tính được $SO\approx 146,67\,m$		

» Câu 28. Cho tứ diện $OABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi OK là đường cao của tam giác OBC và OH là đường cao của tam giác OAK. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$OA\perp(OBC)$		
(b)	$OB\perp(OAC)$		
(c)	Các cạnh đối nhau trong tứ diện $OABC$ thì vuông góc với nhau		

(d)	OH không vuông góc với mặt phẳng (ABC)		

» Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B. Gọi H, K là hình chiếu vuông góc của A trên các cạnh SB,SC. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tam giác SBC cân tại B.		
(b)	AH vuông góc với mặt phẳng (SBC).		
(c)	$(SC,HK)=90^\circ$		
(d)	Giả sử HK cắt BC tại D. Khi đó $(AC,AD)=90°$.		

» Câu 30. Cho tứ diện $OABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc. Kẻ $OH\perp(ABC)$ tại H. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$OA\perp BC, OB\perp AC, OC\perp AB$		
(b)	Tam giác ABC có ba góc nhọn.		
(c)	H là trọng tâm của tam giác ABC.		
(d)	$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh bên $SA\perp(ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân ở B. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AC và SC. Góc của hai đường thẳng BH,SC bằng bao nhiêu độ?

Điền đáp số: ☐

» Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $AB=2AD=2CD=2$. Biết $SA\perp(ABCD)$, $SA=3a$. Diện tích hình chiếu vuông góc của tam giác SBC lên mặt phẳng (SAB) là bao nhiêu?

Điền đáp số: ☐

» Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi H là trung điểm của AB và $SH\perp(ABCD)$; gọi K là trung điểm của cạnh AD. Xác định góc của hai đường thẳng AC và SK.

Điền đáp số: ☐

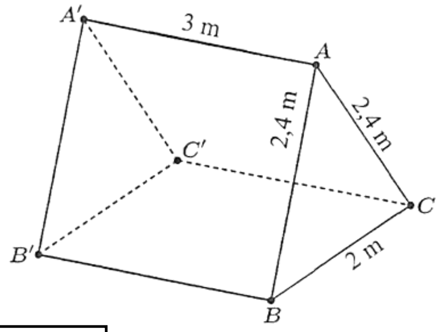
» Câu 34. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC$ và $DB=DC$. Xác định góc của hai đường thẳng BC,AD

Điền đáp số: ☐

» Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA\perp(ABCD)$. Gọi I,J,K lần lượt là trung điểm của AB,BC và SB. Xác định góc của hai đường thẳng KJ,BD.

Điền đáp số: ☐

» Câu 36. Một cái lều có dạng hình lăng trụ $ABC\cdot A'B'C'$ có các cạnh bên vuông góc với hai mặt phẳng đáy. Cho biết $AB=AC=2,4m; BC=2m; AA'=3m$. Diện tích hình chiếu của tam giác ABA' trên mặt phẳng $(BCC'B')$ bao nhiêu m^2?

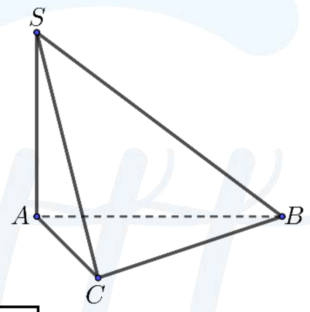


Điền đáp số:

» Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, AD. Biết $SH \perp (ABCD)$. Góc giữa hai đường thẳng BK, SC bằng bao nhiêu độ?

Điền đáp số:

» Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}$ và $BC = a$ (minh họa hình vẽ bên). Tính góc giữa hình chiếu của đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) và AB



Điền đáp số:

» Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều với cạnh a. Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. M là một điểm khác B và ở trên SB sao cho AM vuông góc với MD. Khi đó, tỉ số $\dfrac{SM}{SB}$ bằng

Điền đáp số:

» Câu 40. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $AA' = 3a$. Mặt phẳng qua A vuông góc với $A'C$ cắt các cạnh BB', CC', DD' lần lượt tại I, J, K. Tính diện tích thiết diện $AIJK$ (làm tròn đến số thập phân thứ 3)

Điền đáp số:

---------------------------- Hết ----------------------------

Chương 08

Bài 3. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

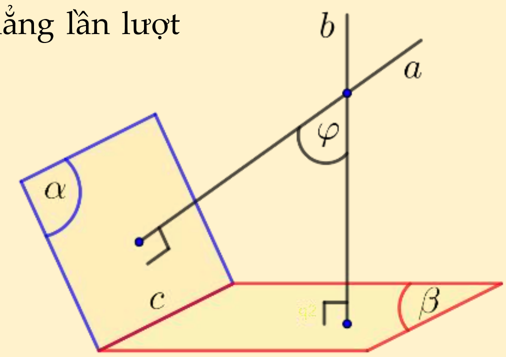
A. Lý thuyết

1. Góc giữa hai mặt phẳng

Định nghĩa:

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

$$\left.\begin{matrix} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\beta) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) = \left(\widehat{a,b}\right).$$



Chú ý:

+ Nếu $\left[\begin{matrix} (\alpha)//(\beta) \\ (\alpha) \equiv (\beta) \end{matrix}\right. \Rightarrow \left((\alpha),(\beta)\right) = 0^\circ$.

+ $0^\circ \leq \left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) \leq 90^\circ$.

2. Hai mặt phẳng vuông góc

Định nghĩa:

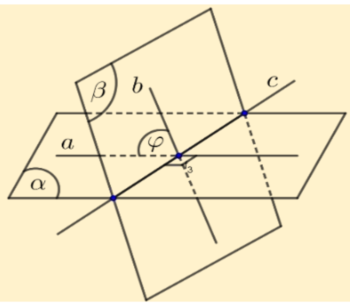
Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°.

$$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \left(\widehat{(P),(Q)}\right) = 90^\circ$$

Định nghĩa:

Cho 2 mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến c

$$\begin{cases} a \subset (\alpha), a \perp c \\ b \subset (\beta), b \perp c \end{cases} \Rightarrow \left((\alpha),(\beta)\right) = (a,b)$$



Cách xác định góc dùng cho hai mặt phẳng cắt nhau:

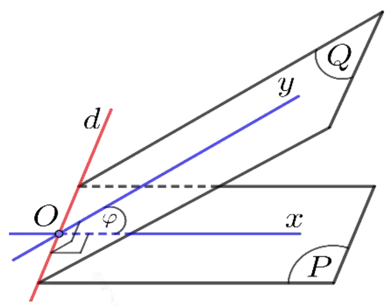
⌘ **Bước 1.** Tìm giao tuyến d của (P) và (Q).

⌘ **Bước 2.** Chọn điểm O trên d, từ đó:

• Trong (P) dựng $Ox \perp d$.

• Trong (Q) dựng $Oy \perp d$.

Khi đó: $\left((P),(Q)\right) = (Ox, Oy)$.



Lưu ý

Việc xác định điểm O có thể được thực hiện theo cách sau:

(1) Chọn điểm M trên (Q) sao cho dễ dàng xác định hình chiếu H của nó trên (P).

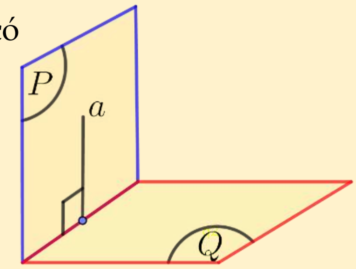
(2) Dựng $MO \perp d$ thì khi đó $\widehat{((\alpha),(\beta))} = \widehat{MOH}$.

▶ **Điều kiện hai mặt phẳng vuông góc:**

Định lý 1:

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau $\Leftrightarrow$ trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} a \subset (P) \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q).$$

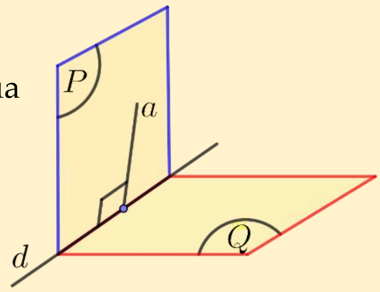


3. Tính chất cơ bản về hai mặt phẳng vuông góc

Định lý 2:

Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong (Q) mà *vuông góc với giao tuyến* của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (P).

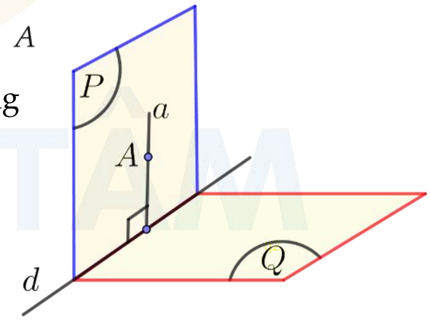
$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \Rightarrow a \perp (P) \\ (Q) \supset a \perp d \end{cases}$$



Nhận xét

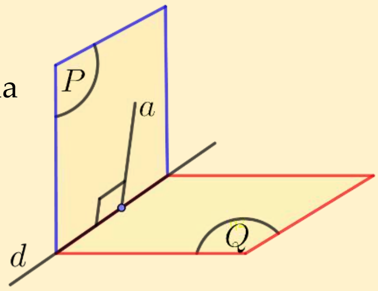
Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và thì A là một điểm trong (P) thì đường thẳng đi qua A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong mặt phẳng (P).

Kí hiệu: $\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \qquad \Rightarrow a \subset (P). \\ A \in a \perp (Q) \end{cases}$



Định lý 2:

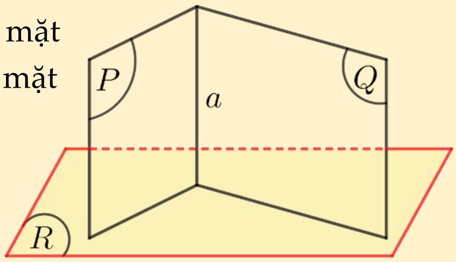
Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong (Q) mà *vuông góc với giao tuyến* của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (P).



$$\begin{cases}(P)\perp(Q)\\(P)\cap(Q)=d\\(Q)\supset a\perp d\end{cases}\Rightarrow a\perp(P)$$

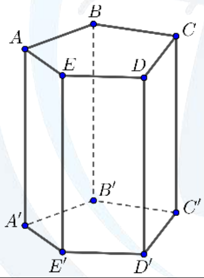
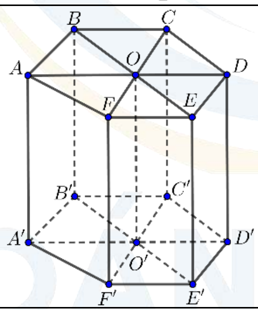
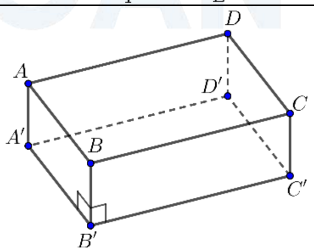
Định lý 3:

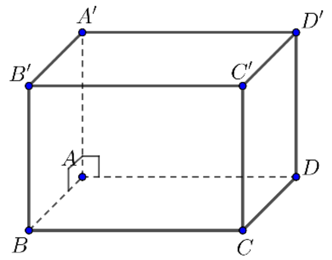
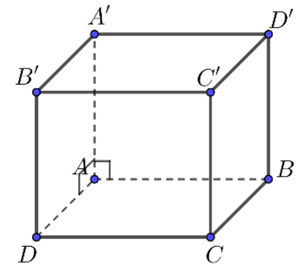
Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng sẽ vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.



$$\begin{cases}(P)\cap(Q)=a\\(P)\perp(R)\\(Q)\perp(R)\end{cases}\Rightarrow a\perp(P)$$

4. Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương

Tên	Hình vẽ	Tính chất
Hình lăng trụ đứng		Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với hai mặt đáy. • Các mặt bên là các hình chữ nhật. • Các mặt bên vuông góc với hai đáy.
Hình lăng trụ đều		Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.
Hình hộp đứng		Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

Hình hộp chữ nhật		Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật. Tất cả các mặt đều là hình chữ nhật. Đường chéo $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ với a,b,c là 3 kích thước.
Hình lập phương		Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

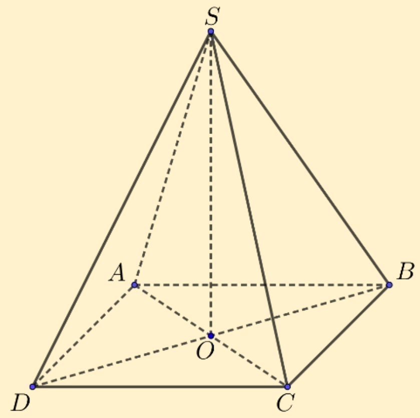
5. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

Định nghĩa hình chóp đều:

Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu nó có đáy là một đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.

Tính chất:

- Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.
- Các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác cân bằng nhau.
- Các mặt bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.

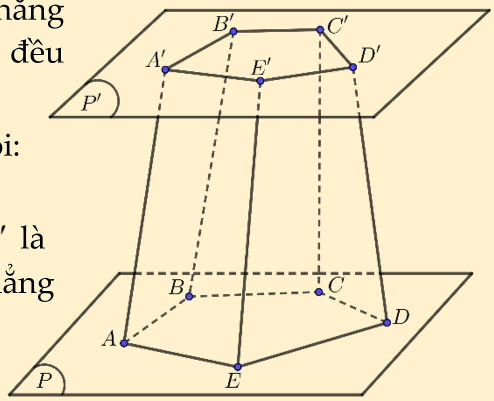


Định nghĩa hình chóp cụt đều:

Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.

▶ Trong hình chóp cụt đều $ABCDE.A'B'C'D'E'$, ta gọi:

+ Các điểm A',B',C',D',E' là các đỉnh.
+ Đa giác $ABCDE$ là đáy lớn, đa giác A',B',C',D',E' là đáy nhỏ. Đáy lớn và đáy nhỏ nằm trên hai mặt phẳng song song.



▶ Nhận xét:

- Cạnh của hai đa giác là cạnh đáy. Các cạnh đáy tương ứng song song từng đôi một
- Các hình thang cân $AA'EE', AA'B'B, BB'C'C, C'CDD', DD'E'E$ là các mặt bên.
- Cạnh bên của mặt bên gọi là cạnh bên của hình chóp cụt đều. Hình chóp cụt đều có các cạnh bên bằng nhau, các mặt bên là những hình thang cân.
- Đoạn thẳng nối tâm hai đáy là đường cao. Độ dài đường cao là chiều cao.

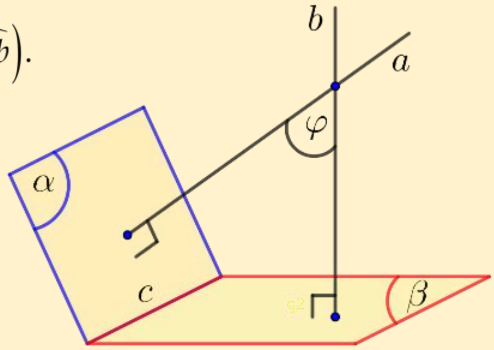
B Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng bằng cách dùng định nghĩa

Phương pháp

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

$$\left.\begin{array}{l} a\perp(\alpha) \\ b\perp(\beta)\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right).$$



Chú ý:

+ Nếu $\left[\begin{array}{l}(\alpha)//(\beta)\\ (\alpha)\equiv(\beta)\end{array}\right.\Rightarrow\left((\alpha),(\beta)\right)=0^\circ$.

+ $0^\circ\le\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)\le 90^\circ$.

Ví dụ 1.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a$, góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Côsin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SDC) bằng?

Lời giải

Dạng 2. Xác định góc giữa hai mặt phẳng dựa trên giao tuyến

Phương pháp

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm

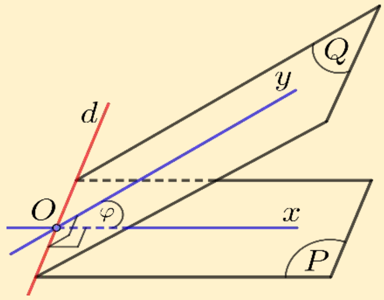
Cách xác định góc dùng cho hai mặt phẳng cắt nhau:

⌘ Bước 1. Tìm giao tuyến d của (P) và (Q).

⌘ Bước 2. Chọn điểm O trên d, từ đó:

- Trong (P) dựng $Ox \perp d$.
- Trong (Q) dựng $Oy \perp d$.

Khi đó: $\widehat{((P),(Q))} = \widehat{(Ox,Oy)}$.



Ví dụ 2.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) bằng

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.3.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $SA\perp(ABC)$, $SA=\sqrt{3}cm, AB=1cm$. Mặt bên (SBC) hợp với mặt đáy góc bằng bao nhiêu?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.4.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $BA=BC=a$, cạnh bên $AA'=a\sqrt{2}$. Gọi φ là góc hợp bởi $(A'BC);(ABC)$. Khi đó, tính $\tan\varphi$.

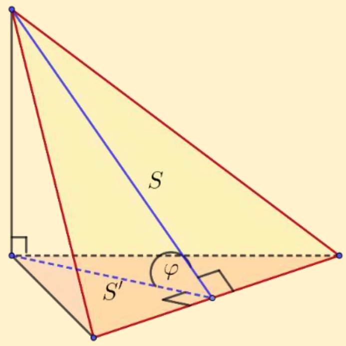
Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 3. Xác định góc giữa hai mặt phẳng dựa vào định lý hình chiếu

Phương pháp

Gọi S là diện tích của đa giác H trong mặt phẳng (α) và S' là diện tích hình chiếu của H' của H trên mặt phẳng (β) thì $S' = S.\cos\varphi$ trong đó $\varphi = \left[\widehat{(\alpha);(\beta)}\right]$.



Ví dụ 3.1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy. Tam giác SBC vuông cân tại S, có $SB = a$. Mặt phẳng (SBC) hợp với đáy một góc $30°$. Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.2.

Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}, OA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 4. Tổng hợp các phương pháp xác định góc giữa hai mặt phẳng

Ví dụ 4.1.

Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O, $AB = 2a$, $AD = a$, $SA = 3a$ và SA vuông góc với đáy. Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng:

(1) (SBC) và $(ABCD)$ (2) (SBD) và $(ABCD)$ (3) (SBC) và (SAC)

Lời giải

Ví dụ 4.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, và $SA \perp (ABCD)$.
Tính cosin góc giữa mặt (SBD) và $(ABCD)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.3.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $SA = a$ và $SA \perp (ABC)$, $AB = BC = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(SAC);(SBC)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.4.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(SBD);(ABCD)$. Biết $\tan\alpha=\sqrt{2}$, tính góc giữa $(SAC);(SBC)$.

Lời giải

Ví dụ 4.5.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$.

Tính góc giữa các mặt phẳng:

(1) (SBC) và $(ABCD)$

(2) (SBC) và (SAD)

(3) (SAB) và (SBD)

(4) (SBC) và (SAC)

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 5. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Phương pháp

Để chứng minh hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau ta dùng một trong các cách sau:

▶ **Cách 1.** Xác định góc giữa hai mặt phẳng, rồi tính trực tiếp góc đó bằng 90^0.

$$\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=90^0 \Rightarrow (\alpha)\perp(\beta).$$

▶ **Cách 2.** Chứng minh trong mặt này có một đường thẳng vuông góc với mặt kia.

$$\begin{cases} a\subset(\alpha) \\ a\perp(\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\perp(\beta).$$

Ví dụ 5.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA=a$, các cạnh còn lại bằng b.
Chứng minh $(SAC)\perp(ABCD)$ và $(SAC)\perp(SBD)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với đáy . Chứng minh $(SAB)\perp(SAD)$ và $(SAC)\perp(SBD)$.

(1) Chứng minh: $(SAB)\perp(SAD)$ (2) Chứng minh: $(SAC)\perp(SBD)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SD. Chứng minh rằng $(SAC)\perp(AHK)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 5.4.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). Chứng minh rằng $(SBC)\perp(SAC)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 5.5.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N là các điểm thuộc BC và CD sao cho $BM = \frac{a}{2}, DN = \frac{3a}{4}$. Chứng minh: $(SAM) \perp (SMN)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 6. Thiết diện

Phương pháp

Mặt phẳng (P) đi qua một điểm và vuông góc đường thẳng a cắt hình chóp theo thiết diện.

- Xác định mặt phẳng (P) có tính chất gì?
  Tìm đường thẳng song song với (P).
- Tìm các đoạn giao tuyến của (P) và các mặt của hình chóp:
- Sử dụng tính chất về giao tuyến song song: $\begin{cases} a \subset (Q) \\ a // (P) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (Q) = m // a.$

Ví dụ 6.1.

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB = a, SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC, mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SI cắt hình chóp đã cho theo một thiết diện. Tính diện tích thiết diện đó.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A, D; $AB = 2a$; $SA = AD = DC = a$; $SA \perp (ABCD)$. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) qua SD và $(\alpha) \perp (SAC)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 6.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC. Tính diện tích của thiết diện cắt bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 6.4.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SB. Khi đó, mặt phẳng (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6.5.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = AC = a$; cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA = a$. Gọi M là trung điểm của SC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với AC.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Góc giữa (SBD) và $(ABCD)$ là

A. SOA. **B.** SBA. **C.** SDA. **D.** SOC.

» Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA\perp(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng góc nào sau đây?

A. ASD. **B.** BSC. **C.** ASC. **D.** BSD.

» Câu 3. Cho các đường thẳng a,b và các mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$. Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau:

A. $\begin{cases} a\perp(\alpha) \\ a\subset(\beta) \end{cases}\Rightarrow(\alpha)\perp(\beta)$.

B. $\begin{cases} a\perp b \\ a\perp(\alpha) \end{cases}\Rightarrow b\,//\,(\alpha)$.

C. $\begin{cases} a\perp b \\ a\subset(\alpha) \\ b\subset(\beta) \end{cases}\Rightarrow(\alpha)\perp(\beta)$.

D. $\begin{cases} (\alpha)\perp(\beta) \\ a\subset(\alpha) \\ b\subset(\beta) \end{cases}\Rightarrow a\perp b$.

» Câu 4. Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (α). Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và vuông góc với (α)?

A. 0. **B.** Vô số. **C.** 2. **D.** 1.

» Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O và $SA=SC$, $SB=SD$. Mệnh đề nào sau đây **sai?**

A. $SO\perp(ABCD)$. **B.** $SC\perp(SBD)$. **C.** $(SBD)\perp(ABCD)$. **D.** $(SAC)\perp(ABCD)$.

» Câu 6. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC, mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. $(ABB')\perp(ACC')$. **B.** $(AC'M)\perp(ABC)$. **C.** $(AMC')\perp(BCC')$. **D.** $(ABC)\perp(ABA')$.

» Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O và $SA=SC$, $SB=SD$. Mệnh đề nào sau đây **sai?**

A. $SC\perp(SBD)$. **B.** $SO\perp(ABCD)$.

C. $(SBD)\perp(ABCD)$. **D.** $(SAC)\perp(ABCD)$.

» Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $SA\perp BC$. **B.** $AB\perp BC$. **C.** $AB\perp SC$. **D.** $SB\perp BC$.

» Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hai mặt bên (SAB) và (SAD) vuông góc với mặt đáy. AH, AK lần lượt là đường cao của tam giác SAB, SAD. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $BC\perp AH$. **B.** $SA\perp AC$. **C.** $HK\perp SC$. **D.** $AK\perp BD$.

» **Câu 10.** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC, mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. $(ABB')\perp(ACC')$. **B.** $(AC'M)\perp(ABC)$.

C. $(AMC')\perp(BCC')$. **D.** $(ABC)\perp(ABA')$.

» **Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC, H là hình chiếu của I lên SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(BIH)\perp(SBC)$. **B.** $(SAC)\perp(SAB)$. **C.** $(SBC)\perp(ABC)$. **D.** $(SAC)\perp(SBC)$.

» **Câu 12.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $SA\perp(ABC)$, gọi M là trung điểm của AC. Mệnh đề nào **sai** ?

A. $(SAB)\perp(SAC)$. **B.** $BM\perp AC$. **C.** $(SBM)\perp(SAC)$. **D.** $(SAB)\perp(SBC)$.

» **Câu 13.** Cho hình lập phương $ABCD.A'BC'D'$. Tính góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ACC'A')$

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

» **Câu 14.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $(ACC'A')\perp(BDD'B')$. **B.** $(ABCD)\perp(BCD'A')$.

C. $(A'BC)\perp(ABCD)$. **D.** $A'B\perp(ABCD)$.

» **Câu 15.** Cho hình chóp đều $S.ABC$. Gọi d và Δ là hai đường lần lượt vuông góc với mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (SBC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $((SBC),(ABC))=(\Delta,d)$. **B.** $((SBC),(ABC))=60°$.

C. $((SBC),(ABC))=(\Delta,(ABC))$. **D.** $((SBC),(ABC))=(\Delta,(SBC))$.

» **Câu 16.** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có M là trung điểm của BC. Xác định góc giữa hai mặt phẳng (SBC) với mặt phẳng (ABC).

A. $((SBC),(ABC))=SBA$. **B.** $((SBC),(ABC))=MSA$.

C. $((SBC),(ABC))=SMA$. **D.** $((SBC),(ABC))=MAS$.

» **Câu 17.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

» **Câu 18.** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ với $ABCD$ có tâm O. Gọi M là trung điểm của CD. Xác định góc giữa (SCD) với $(ABCD)$.

A. $((SCD),(ABCD))=SMO$. **B.** $((SCD),(ABCD))=MSO$.

C. $((SCD),(ABCD))=SOC$. **D.** $((SCD),(ABCD))=SOM$.

» **Câu 19.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB=SB=a$, $SO=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

» Câu 20. Cho hình chop $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC đều cạnh $2a$, SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 30°. Khi đó $\text{mp}(SBC)$ tạo với đáy một góc x. Tính $\tan x$.

A. $\tan x=2$. **B.** $\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\tan x=\frac{3}{2}$. **D.** $\tan x=\frac{2}{3}$.

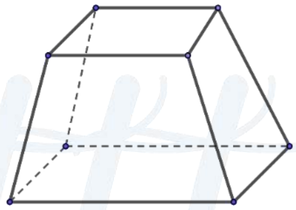
» Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Ta có tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

» Câu 22. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC=AD=BC=BD=a$, $CD=2x$. Tìm giá trị của x để hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau.

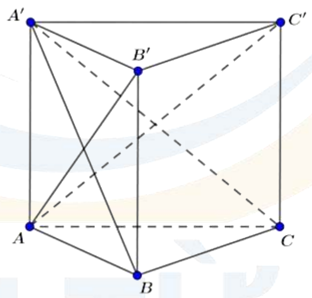
A. $x=\frac{a}{3}$. **B.** $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $x=\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $x=\frac{a}{2}$.

» Câu 23. Người ta cần sơn tất cả các mặt của một khối bê tông hình chóp cụt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng 2 m, đáy nhỏ có cạnh bằng 1 m và cạnh bên bằng 2 m như hình vẽ. Tính tổng diện tích các bề mặt cần sơn.



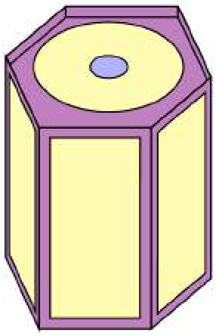
A. $5+3\sqrt{5}$. **B.** $4+3\sqrt{5}$. **C.** $2+3\sqrt{5}$. **D.** 5.

» Câu 24. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'BC)$, tính $\cos\alpha$



A. $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\frac{4}{7}$.

» Câu 25. Một hộp đèn treo trần có hình dạng lăng trụ đứng lục giác đều như hình vẽ, cạnh đáy bằng 10 cm và cạnh bên bằng 50 cm. Tính tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích một mặt đáy của hộp đèn.



A. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{20}{3}$. D. $\frac{20\sqrt{3}}{5}$.

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$AB \perp (SAD)$		
(b)	$BC \perp (SAB)$		
(c)	$AC \perp (SBD)$		
(d)	$BC \perp (SCD)$		

» Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$((SAC),(SBD)) = 90°$		
(b)	$((SAC),(SBD)) = 45°$		
(c)	$(SAB) \perp (SBC)$		
(d)	$(SCD) \perp (SAD)$		

» Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$((SAB),(ABCD)) = 90^\circ$		
(b)	$((SBC),(ABCD)) = SAB$		
(c)	$((SBC),(ABCD)) = 60^\circ$		
(d)	$((SBD),(ABCD)) \approx 69,43^\circ$		

» Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$((SCD),(ABCD)) = 45^\circ$.		
(b)	$((SBD),(ABCD)) = SOA$		
(c)	$((SBD),(ABCD)) \approx 58,74^\circ$.		

(d)	$(SBD)\perp(SAC)$		

» Câu 30. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm của đáy là O với $SO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm cạnh AD và BC. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$(SMN)\perp(ABCD)$		
(b)	$(SAD)\perp(SMN)$		
(c)	$((SBC),(ABCD))=30^\circ$		
(d)	$((SBC),(SCD))\approx 80,52^\circ$.		

» Câu 31. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, biết $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$ và $((ACB'),(ABC))=60^\circ$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A'A\perp(ABC)$		
(b)	$((ACB'),(ABB'A'))=60^\circ$		
(c)	$((ACC'A'),(BCC'B'))=30^\circ$		
(d)	Tổng diện tích ba mặt bên của hình lăng trụ đã cho bằng $(3\sqrt{3}+3)a^2$		

» Câu 32. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và BC. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(A'B'CD)$ bằng 90°.		
(b)	Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(A'BCD')$ bằng 90°.		
(c)	Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(CB'D')$ bằng 90°.		
(d)	Góc giữa đường thẳng EF và mặt phẳng $(BB'D'D)$ bằng 90°.		

» Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm J, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H,K,J lần lượt là hình chiếu của A lên SA,SC,SD. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$AH\perp(SBC)$		
(b)	$AJ\perp(SCD)$		
(c)	$SC\perp(AHJ)$		
(d)	$AK\perp(SBD)$		

» Câu 34. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Độ dài đường chéo của hình lập phương là $3a$.		
(b)	Hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'C')$ vuông góc nhau.		
(c)	Hình chiếu của AC' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là $A'C$.		

(d)	Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Một góc phẳng của góc nhị diện $\left[C,BD,C'\right]$ là COC'.		

» Câu 35. Cho tứ diện đều $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$CD\perp\left(ABO\right)$ với O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác BCD.		
(b)	Góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng $\left(BCD\right)$ bằng $60°$.		
(c)	Côsin của góc giữa hai mặt phẳng $\left(ABC\right)$ và $\left(BCD\right)$ bằng $\frac{2}{3}$.		
(d)	Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD là MN.		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng $\left(SAB\right)$ và $\left(SAC\right)$ bằng bao nhiêu độ?

✍ **Điền đáp số:** ☐

» Câu 37. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng đáy $2a$, đường cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính $\tan\varphi$ của góc giữa mặt phẳng $\left(SCD\right)$ và $\left(ABCD\right)$. *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

✍ **Điền đáp số:** ☐

» Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $SA\perp\left(ABC\right)$, $AB=BC=a, SA=a\sqrt{3}$. Góc giữa hai mặt phẳng $\left(SBC\right)$ và $\left(ABC\right)$ bằng bao nhiêu độ?

✍ **Điền đáp số:** ☐

» Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{6}$. Góc giữa hai mặt phẳng $\left(SBD\right)$ và $\left(ABCD\right)$ bằng bao nhiêu độ?

✍ **Điền đáp số:** ☐

» Câu 40. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC=AD=BC=BD=\sqrt{2}$, $CD=2x\sqrt{2}$. Giá trị của x để hai mặt phẳng $\left(ABC\right)$ và $\left(ABD\right)$ vuông góc với nhau là $x=\frac{a}{b}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của a^2+2b là

✍ **Điền đáp số:** ☐

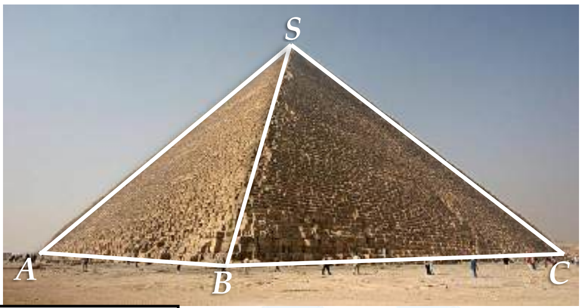
» Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và $SA\perp\left(ABC\right)$, gọi AH và AK lần lượt là đường cao trong tam giác SAB và SAC và D là giao điểm của HK và BC. Mặt phẳng $\left(SAD\right)$ vuông góc với bao nhiêu mặt bên và mặt đáy của hình chóp?

✍ **Điền đáp số:** ☐

» Câu 42. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $A'A=A'B=A'C=a$. O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, H là trung điểm BC. Mặt phẳng $\left(A'AO\right)$ vuông góc với bao nhiêu mặt bên và mặt đáy của hình lăng trụ?

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 43.** Kim tự tháp Kheops ở Ai Cập có dạng là hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy dài $262(m)$ cạnh bên dài $230(m)$. Tính góc được tạo bởi các cạnh bên và mặt đáy (làm tròn đến hàng đơn vị của độ).



✍ **Điền đáp số:**

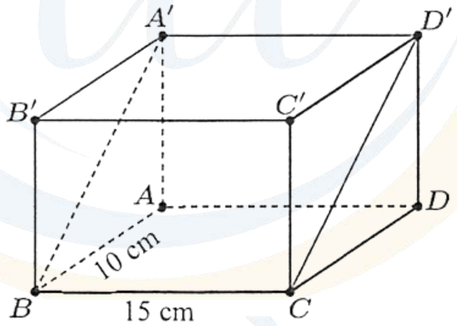
» **Câu 44.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC), SA=1$ và đáy ABC là tam giác đều với độ dài cạnh bằng 2. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC).

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 45.** Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(AC'D')$

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 46.** Một khối gỗ có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD\cdot A'B'C'D'$. Biết rằng $AB=10cm, BC=15cm$ và góc hai mặt phẳng $(BCD'A'),(ABCD)$ bằng 30°. Tổng diện tích tất cả các mặt của khối gỗ đó đạt bao nhiêu cm^2? *Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.*



✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 47.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB=a, AD=a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) bằng bao nhiêu độ?

✍ **Điền đáp số:**

---------------------------- Hết ----------------------------

Chương 08

Bài 4. KHOẢNG CÁCH & THỂ TÍCH

A. Lý thuyết

1. Khoảng cách từ 1 điểm tới 1 đường thẳng, đến 1 mặt phẳng

1.1. *Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng*

Định nghĩa:

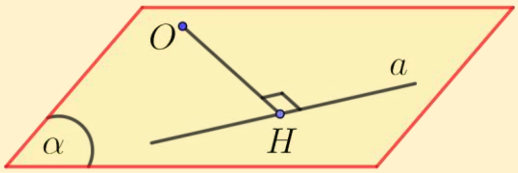
Cho điểm O và đường thẳng a.

Trong mặt phẳng (O,a),

• Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên a.

• Khi đó khoảng cách giữa hai điểm O và H được gọi là khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a.

Kí hiệu : $d(O,a)=OH$.



Nhận xét

• $\forall N \in a: ON \geq d(O,a)=OH$

• $d(O,a)=0 \Leftrightarrow O \in a$

1.2. *Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng*

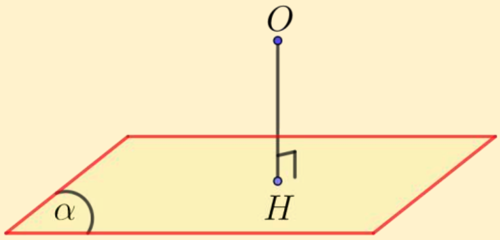
Định nghĩa:

Cho điểm O và mặt phẳng (α).

• Gọi H là hcvg của O trên mặt phẳng (α).

• Khi đó khoảng cách giữa hai điểm O và H được gọi là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α).

Kí hiệu : $d(O,(\alpha))=OH$



Nhận xét

• $\forall N \in (P): ON \geq d(O,(P))=OH$

• $d(O,(P))=0 \Leftrightarrow O \in (P)$

2. Khoảng cách giữa đường và mặt song song, hai mặt song song

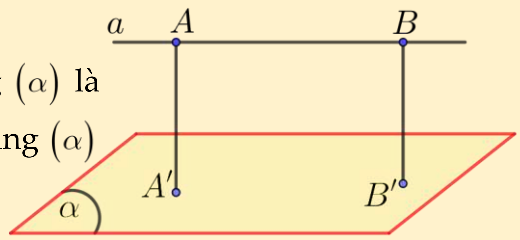
2.1. *Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song*

Định nghĩa:

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α).

• Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) là khoảng cách từ một điểm bất kì của a đến mặt phẳng (α)

Kí hiệu : $d(a,(\alpha)) = d(A,(\alpha))$

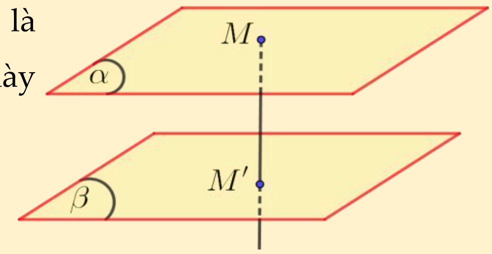


2.2. *Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song*

Định nghĩa:

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(\alpha),(\beta)$ là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia

Kí hiệu : $d((\alpha),(\beta)) = d(M,(\beta))$ với điểm $M \in (\alpha)$



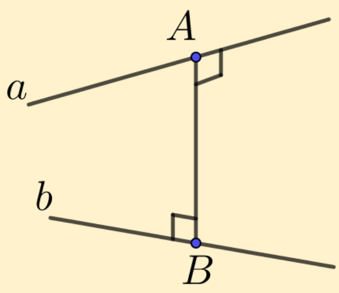
3. Đường vuông góc chung và khoảng cách hai đường chéo nhau

3.1. *Định nghĩa*

Định nghĩa:

- Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b và cùng vuông góc với mỗi đường ấy được gọi là đường vuông góc chung của a và b
- Nếu đường vuông góc chung Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b tại A, B thì độ dài đoạn thẳng AB gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b

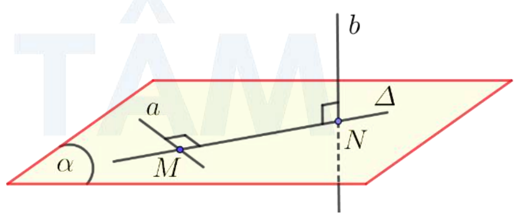
Kí hiệu: $d(a,b) = AB$



3.2. *Cách dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau*

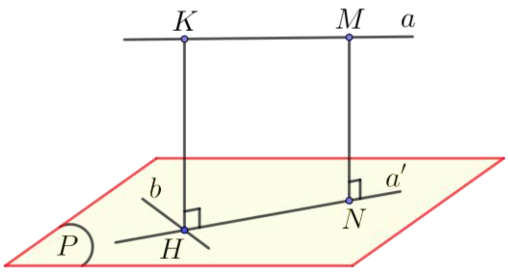
▶ **Cách 1:** Khi a vuông b

- Dựng một mặt phẳng $(\alpha) \supset a, (\alpha) \perp b$ tại N
- Trong (α) dựng $NM \perp a$ tại M
- Đoạn MN là đoạn vuông góc chung của a và b



▶ **Cách 2:** Khi a chéo b

- Dựng một mặt phẳng $(P)\supset b,(P)//a$.
- Dựng a' là hình chiếu của a lên mặt phẳng (P), bằng cách lấy $M\in a$ dựng đoạn $MN\perp(P)$, lúc đó a' là đường thẳng đi qua N và song song với a
- Gọi $H=a'\cap b$, dựng $HK//MN$ $\Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung của a và b



Nhận xét

(1) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau *bằng* khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó với mặt phẳng song song với nó và chứa thẳng còn lại.

(2) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau *bằng* khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

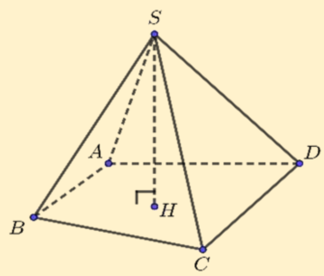
4. Thể tích khối chóp

Định nghĩa:

Công thức tính thể tích khối chóp:

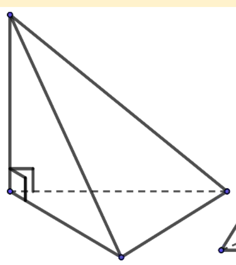
$$V=\frac{1}{3}S.h$$

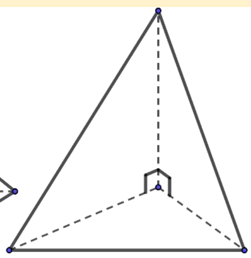
Trong đó:
S là diện tích đáy
h là chiều cao khối chóp
(khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy).

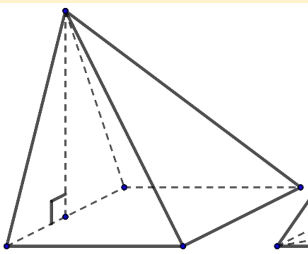


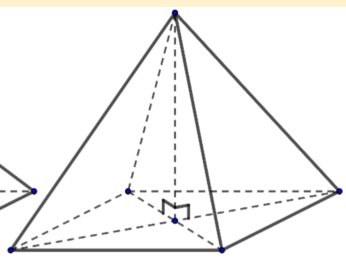
Cách xác định đường cao khối chóp:

Loại	*Đường cao*
Cạnh bên vuông đáy *Hình 1.1*	Đường cao chính là cạnh bên.
Hai mặt bên vuông đáy *Hình 1.2*	Đường cao là giao tuyến của hai mặt bên vuông góc đáy.
Mặt bên vuông đáy *Hình 1.3*	Đường cao của mặt bên vuông góc đáy.
Chóp đều *Hình 1.4*	Đường cao hạ từ đỉnh đến tâm đa giác đáy.


Hình 1.1


Hình 1.2


Hình 1.3


Hình 1.4

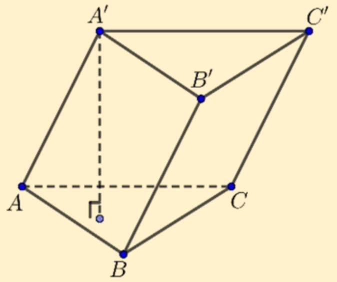
5. Thể tích khối lăng trụ

Định nghĩa:

Công thức tính thể tích khối chóp:

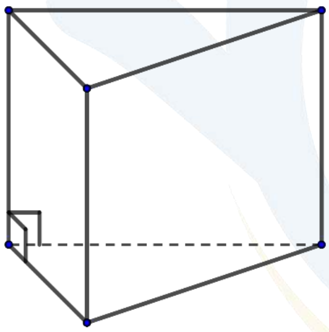
$$V = S.h$$

Trong đó:
S là diện tích đáy
h là chiều cao khối chóp
(khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy).

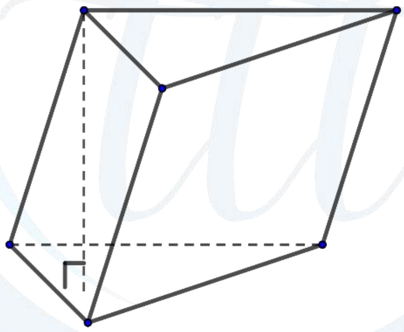


Cách xác định đường cao lăng trụ:

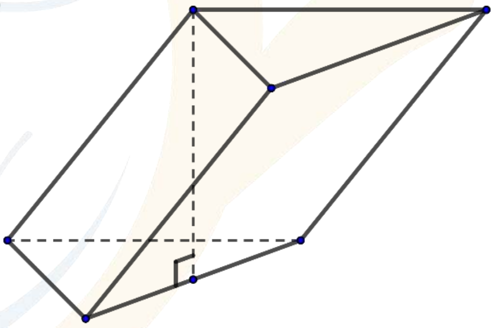
Loại	*Đường cao*
Cạnh bên vuông đáy *Hình 2.1*	Đường cao chính là cạnh bên.
Lăng trụ đứng *Hình 2.1*	Đường cao chính là cạnh bên.
Lăng trụ xiên *Hình 2.2*	Đường cao hạ từ đỉnh xuống mặt đáy.
Lăng trụ có hình chiếu *Hình 2.3*	Đường cao là hình chiếu vuông góc của 1 đỉnh xuống đáy.



Hình 2.1

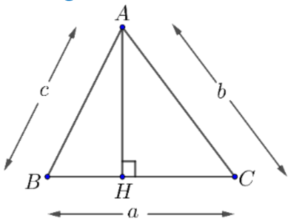
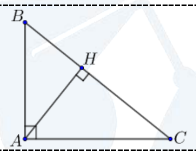
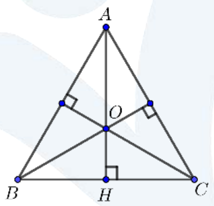
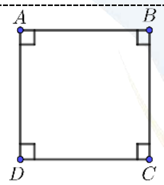
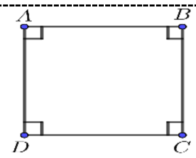
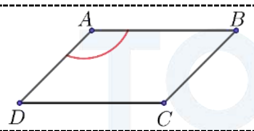
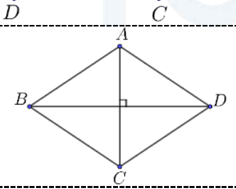
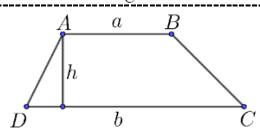


Hình 2.2



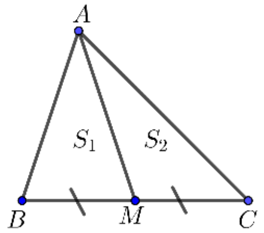
Hình 2.3

6. Công thức tính diện tích đáy.

Tam giác 	$S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$ $S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$ $S=\frac{1}{2}ba.\sin A=\frac{1}{2}ca.\sin B=\frac{1}{2}ba.\sin C$ $S=\frac{abc}{4R}=2R^2.\sin A.\sin B.\sin C$ với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. $S=p.r$ với p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p=\frac{a+b+c}{2}$ hoặc $S=\frac{1}{4}\sqrt{\left[(a+b)^2-c^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right]}$
	*Tam giác vuông* ΔABC vuông tại A: $S=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}BC.AH$.
	*Tam giác đều* ΔABC đều, cạnh AB: $S=(AB)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}$; Chiều cao tam giác đều $h=AB.\frac{\sqrt{3}}{2}$.
	*Hình vuông cạnh* AB Diện tích hình vuông $ABCD: S=(AB)^2$
	*Hình chữ nhật* Diện tích hình chữ nhật $ABCD: S=AB.CD$
	*Hình bình hành* Diện tích hình bình hành $ABCD: S=AB.AD.\sin BAD$
	*Hình thoi* Diện tích hình thoi $ABCD: S=AB.AD.\sin BAD=\frac{1}{2}AC.BD$
	*Hình thang* Diện tích hình thang $ABCD: S=\frac{1}{2}(AB+CD).h$
	Tứ giác có hai đường chéo vuông góc: $S=\frac{1}{2}AC.BD$

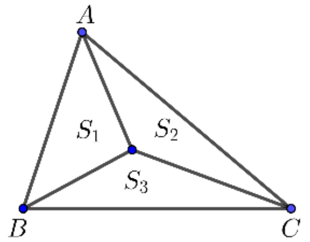
7. Tỷ số diện tích.

Ta có các tỷ số thường gặp sau:



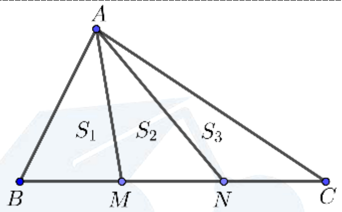
AM trung tuyến,

đặt $S_{ABC} = S \longrightarrow S_1 = S_2 = \dfrac{S}{2}$.



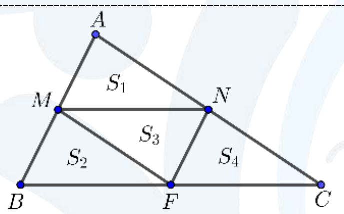
G là trọng tâm,

đặt $S_{ABC} = S \longrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = \dfrac{S}{3}$.



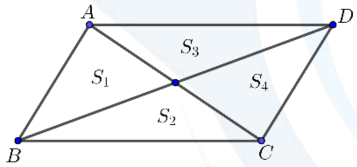
$BM = MN = NC$

đặt $S_{ABC} = S \longrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = \dfrac{S}{3}$.

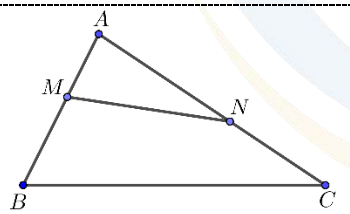


$M; N; F$ lần lượt là trung điểm $AB; AC; BC$

đặt $S_{ABC} = S \longrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \dfrac{S}{4}$.



$S_{ABCD} = S \longrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \dfrac{S}{4}$



$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC}$$

B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Khoảng cách từ chân đường cao đến một mặt bên

Phương pháp

- **Bước 1:** Xác định giao tuyến Δ.
- **Bước 2:** Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp \Delta$ (với $H \in \Delta$).
- **Bước 3:** Dựng $AI \perp SH$ (với $I \in SH$). Khoảng cách cần tìm là AI.
  Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

Ba bước dựng ở trên là sử dụng tính chất:

"Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, nếu một đường thẳng nằm trên mặt này vuông góc với giao tuyến thì sẽ vuông góc với mặt phẳng kia."

Nhận xét:

Đây là bài toán cơ bản nhưng vô cùng quan trọng trong việc tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng. Hầu như tính khoảng cách từ một điểm bất kỳ đến mặt phẳng bên đều thông qua điểm này.

Ví dụ 1.1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy (ABC).

Hãy xác định khoảng cách từ điểm A đến mặt bên (SBC).

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a, biết $SA=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải

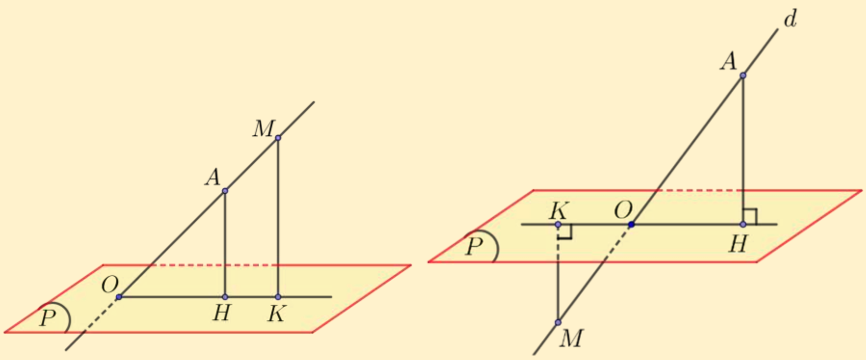
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 2. Khoảng cách từ điểm bất kỳ đến một mặt phẳng

Phương pháp

Từ các điểm yêu cầu, ta quy về chân đường cao:

Giả sử $AM \cap (P) = \{O\}$ như hình vẽ.



Khi đó: $\dfrac{d(M,(P))}{d(A,(P))} = \dfrac{OM}{OA} \Rightarrow d(M,(P)) = \dfrac{OM}{OA} \cdot d(A,(P))$ với $\dfrac{OM}{OA}$ là hằng số.

Để tính được $d(M,(P))$ ta chỉ cần tính $d(A,(P))$ bằng các bước sau:

- **Bước 1:** Xác định giao tuyến Δ.
- **Bước 2:** Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp \Delta$ (với $H \in \Delta$).
- **Bước 3:** Dựng $AI \perp SH$ (với $I \in SH$). Khoảng cách cần tìm là AI.
  Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

Ví dụ 2.1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A với $BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 60°$. Gọi M là trung điểm BC. Biết $SA = SB = SC = a\sqrt{5}$.

(1) Tính chiều cao của hình chóp.

(2) Tính khoảng cách từ M đến (SAB).

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a$, $BC = 4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^\circ$.

Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 3. Khoảng cách hai đường chéo nhau

Phương pháp

Phương pháp chung: Ta phải chuyển khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau về khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng hoặc khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

⌘ ***Trường hợp 1:***

♲ Nếu đường thẳng $\begin{cases} a \subset (P) \\ b // (P) \end{cases} \Rightarrow d(a,b) = d(b,(P))$.

Khi đó chọn $M \in b$ sao cho có thể tính $d(M,(P))$ là $d(a,b)$.

♲ Nếu không tìm được $\begin{cases} (P) \supset a \\ (P) // b \end{cases}$ thì ta phải dựng $\begin{cases} (Q) \supset a \\ (Q) // b \end{cases}$

⌘ ***Trường hợp 2:*** a và b lần lượt thuộc hai mặt phẳng song song nhau.

♲ Nếu đường thẳng $\begin{cases} a \in (P) \\ b \in (Q) \\ (P) // (Q) \end{cases} \Rightarrow d(a,b) = d((P),(Q))$

⌘ ***Trường hợp 3:*** a là cạnh bên còn b là một cạnh đáy của hình chóp

♲ Ta làm như sau:

(+) Gọi $I = a \cap (P)$ (mặt đáy).

(+) Từ I dựng đường thẳng Δ song song với b.

(+) Khi đó b song song với (P) chứa a và Δ.

(+) Chọn M trên b sao cho có thể tính $d(M,(P))$ là $d(a,b)$.

Để tính được $d(M,(P))$ ta chỉ cần tính $d(A,(P))$ bằng các bước sau:

▶ **Bước 1:** Xác định giao tuyến Δ.

▶ **Bước 2:** Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp \Delta$ (với $H \in \Delta$).

▶ **Bước 3:** Dựng $AI \perp SH$ (với $I \in SH$). Khoảng cách cần tìm là AI.
Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

Ví dụ 3.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD, BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD theo a.

Lời giải

....

....

....

....

Ví dụ 3.2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và (ABC) bằng 60^0. Tính khoảng cách giữa SA và BC theo a.

Lời giải

Ví dụ 3.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh $2a$, $SA \perp (ABCD)$, góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Tính

(1) $d(AC,SB)$.

(2) Sin của góc giữa SB và mặt phẳng (SAC).

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 4. Chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

Phương pháp

☑ Đây là dạng dễ xác định được đường cao (h).

☑ Áp dụng công thức: $V = \frac{1}{3}S.h$

Ví dụ 4.1.

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

Lời giải

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.2.

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a, BC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

Lời giải

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.3.

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông canh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Thể tích của khối chóp $S.BCD$ là:

Lời giải

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.4.

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, ΔABC vuông cân tại A, $SA=BC=a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 4.5.

Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$, biết rằng $SB=a\sqrt{5}$

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 4.6.

Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, $SA=a$, $AB=a$, $AC=2a$ và $\widehat{BAC}=120°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 4.7.

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SA\perp(ABCD)$, $AB=3a$, $AD=2a$, $SB=5a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 4.8.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB = a$, $AD = 3a$, $BC = a$. Biết $SA = a\sqrt{3}$, tính thể tích khối chóp $S.BCD$ theo a.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.9.

Cho hình chóp $SABCD$, $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SC và $(ABCD)$ là $60°$. Tính thể tích khối chóp $SABCD$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.10.

Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $AC = a$ biết SA vuông góc với đáy ABC và SC hợp với (SAB) một góc $30°$. Tính thể tích khối chóp

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.11.

Cho khối chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.12.

Cho khối chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $SA = a$ và diện tích tam giác SBC bằng $3a^2$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.13.

Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết SA vuông góc với đáy ABC và SA hợp với (SBC) một góc $45°$. Tính thể tích khối chóp $SABC$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.14.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy, tam giác SBD là tam giác đều. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.15.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy (ABC). Khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Tính thể tích $V_{S.ABC}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 5. Chóp có mặt bên vuông góc với đáy

Phương pháp

☑ Khối chóp có mặt bên vuông góc mặt phẳng đáy.

- Áp dụng công thức: $V=\frac{1}{3}S.h$.
- Chiều cao khối chóp là đoạn thẳng từ đỉnh của chóp ta kẻ vuông góc vào giao tuyến của mặt bên và mặt đáy.

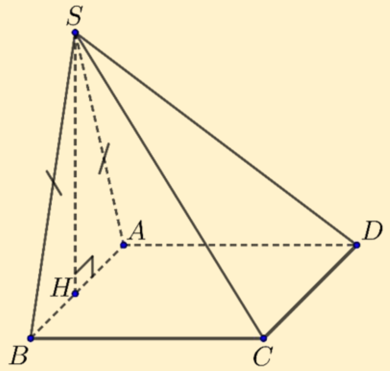
☑ Một số trường hợp thường gặp:

① Mặt bên (SAB) vuông với đáy $(ABCD)$ và SAB là tam giác đều cạnh x

$\rightarrow SH\perp(ABCD)\rightarrow h=SH=\frac{x\sqrt{3}}{2}$ với H là trung điểm AB.

② Mặt bên (SAB) vuông với đáy $(ABCD)$ và SAB là tam giác cân S tại

$\rightarrow SH\perp(ABCD)\rightarrow h=SH$ với H là trung điểm AB.



Ví dụ 5.1.

Hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình chữ nhật có $AB=2a\sqrt{3}$; $AD=2a$. Mặt bên (SAB) là Δ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối $S.ABD$ là?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a; hình chiếu của S trên $(ABCD)$ trùng với trung điểm của cạnh AB cạnh bên $SD=\frac{3}{2}a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ tính theo a bằng?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Đường thẳng SC tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.4.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân đỉnh A, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.5.

Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác BCD cân tại D và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết AD hợp với (ABC) một góc $60°$. Tính thể tích của khối tứ diện đã cho.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.6.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại C, tam giác SAB đều cạnh a nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối chóp.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 5.7.

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. SC tạo với (SAB) một góc $45°$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 6. Chóp đều

Phương pháp

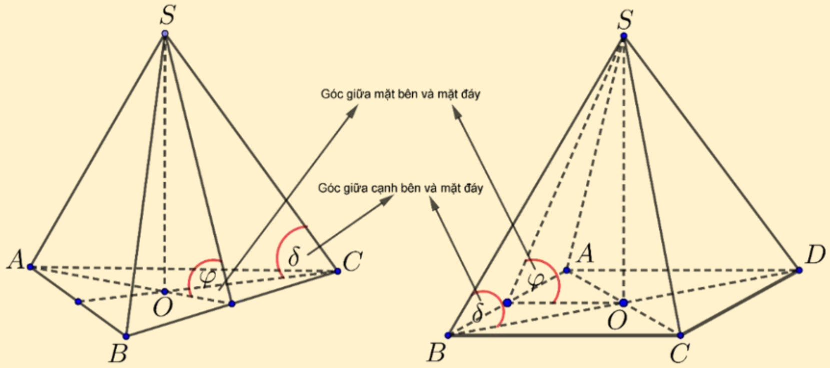
☑ Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau.

- ✈ Áp dụng công thức: $V = \frac{1}{3}S.h$.
- ✈ Chiều cao khối chóp là đoạn thẳng từ đỉnh chóp hạ vuông góc xuống tâm mặt đáy.

☑ Một số kiểu thường gặp:

① Chóp đều $S.ABCD$, góc giữa mặt phẳng bên và mặt đáy là φ hoặc góc giữa cạnh bên và mặt đáy là δ.

② Chóp đều $S.ABC$, góc giữa mặt phẳng bên và mặt đáy là φ hoặc góc giữa cạnh bên và mặt đáy là δ.



Một số công thức tính nhanh:

Chóp đều cạnh x, đáy là tam giác	$V = (x)^3.\frac{\sqrt{2}}{12}$
Chóp đều cạnh x, đáy là tứ giác	$V = (x)^3.\frac{\sqrt{2}}{6}$
Chóp đều, cạnh bên bằng x, đáy là tam giác cạnh y.	$V = \frac{(y)^2\sqrt{3(x)^2-(y)^2}}{12}$
Chóp đều, cạnh bên bằng x, đáy là tứ giác cạnh y.	$V = \frac{(y)^2\sqrt{4(x)^2-2(y)^2}}{6}$
Chóp đều, các mặt bên cùng tạo với đáy góc φ, đáy là tam giác cạnh x.	$V = \frac{(x)^3\tan\varphi}{24}$
Chóp đều, các mặt bên cùng tạo với đáy góc φ, đáy là tứ giác cạnh x.	$V = \frac{(x)^3\tan\varphi}{6}$

Ví dụ 6.1.

Tính chiều cao của hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6.2.

Tính thể tích của khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6.3.

Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp đó theo a.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6.4.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy một góc 60°. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6.5.

Khối chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau và có thể tích bằng $\frac{2}{3}$. Tính độ dài cạnh của khối chóp.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6.6.

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và cạnh bằng a, $SO \perp (ABCD)$, $SA = 3a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6.7.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy $ABCD$ có diện tích $16\,\text{cm}^2$, diện tích một mặt bên là $8\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6.8.

Cho khối tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a, M là trung điểm DC. Thể tích V của khối chóp $M.ABC$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6.9.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{3a}{4}$. Tính thể tích khối chóp đã cho.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6.10.

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA=1$. Gọi D,E lần lượt là trung điểm của SA,SC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $BD\perp AE$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 7. Lăng trụ đứng

Phương pháp

☑ Áp dụng công thức chính: $V = S.h$.

❍ Tính được diện tích đáy ta xem lại "**Công thức tính diện tích đáy**"

❍ Lăng trụ đứng sẽ có các đường cao song song nhau, tùy vào trường hợp đề ra ta sẽ sử dụng đường cao hợp lý.

	Định nghĩa	*Tính chất*
Hình lăng trụ đứng	Là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.	Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.
Hình lăng trụ đều	Là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.	Các mặt bên của hình lăng trụ đều là các hình chữ nhật bằng nhau và vuông góc với mặt đáy.

Ví dụ 7.1.

Khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a, đường cao bằng $a\sqrt{3}$ có thể tích bằng bao nhiêu?

Lời giải

....
....
....

Ví dụ 7.2.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$. Đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Lời giải

....
....
....
....

Ví dụ 7.3.

Khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài đoạn $A'C = a$. Thể tích khối đó thu được?

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 7.4.

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = 4a$ và $AA' = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 7.5.

Cho lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng $3a$.
Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng bao nhiêu?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 7.6.

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B. Biết $C'A = a\sqrt{2}$ và $\widehat{AC'C} = 45°$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng bao nhiêu?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 7.7.

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 2. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với mặt đáy bằng 45^o. Thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 7.8.

Cho khối hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=120^o$, đường thẳng AC_1 tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60^o. Tính thể tích khối hộp đã cho.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 7.9.

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC, $A'M=a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 7.10.

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a$, biết rằng $(A'BC)$ hợp với đáy (ABC) một góc 45^o. Thể tích lăng trụ là bao nhiêu?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **SAI** ?

A. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a,b là khoảng cách từ một điểm M thuộc mặt phẳng (α) chứa a và song song với b đến một điểm N bất kì trên b.

B. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

C. Nếu hai đường thẳng a,b chéo nhau và vuông góc với nhau thì đường vuông góc chung của chúng nằm trong mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường kia.

D. Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với a là khoảng cách từ một điểm A bất kì thuộc a tới mặt phẳng (α).

» Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông tại B, $SA\perp(ABC)$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là

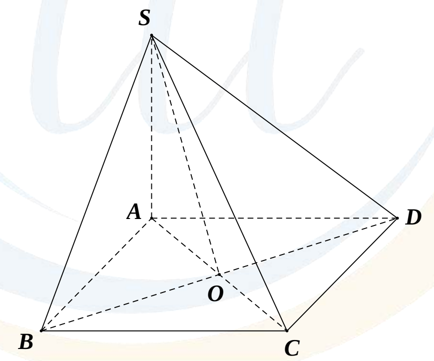
A. Độ dài đoạn AC.

B. Độ dài đoạn AB.

C. Độ dài đoạn AH, trong đó H là hình chiếu vuông góc của A trên SB.

D. Độ dài đoạn AM, trong đó M là trung điểm của SC .

» Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, SA vuông góc với đáy $ABCD$. Xác định khoảng cách từ điểm S đến AB?



A. SO. **B.** SA. **C.** SB. **D.** SD.

» Câu 4. Cho khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 3, đáy ABC có diện tích bằng 10. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. 2. **B.** 15. **C.** 10. **D.** 30.

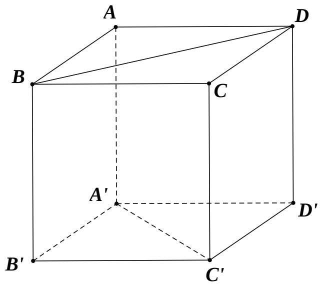
» Câu 5. Cho hình chóp $SABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AD=2a$, $SA=a$. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng:

A. $\frac{3a}{\sqrt{7}}$ **B.** $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$ **D.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

» Câu 6. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC'=a\sqrt{3}$.

A. $V=a^3$ **B.** $V=\frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$ **C.** $V=3\sqrt{3}a^3$ **D.** $V=\frac{1}{3}a^3$

» **Câu 7.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ).



Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

A. a **B.** $\sqrt{2}a$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ **D.** $\sqrt{3}a$

» **Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với $AB=\frac{a}{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC bằng

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

» **Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BC bằng

A. a. **B.** $\sqrt{2}a$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

» **Câu 10.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB=a$ và $A'B=a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a^3}{6}$ **C.** $\frac{a^3}{2}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

» **Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Biết $SA=a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BC bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{15}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{15}}{3}$.

» **Câu 12.** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** a.

» **Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, biết $AB=4a, SB=6a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là V. Tỷ số $\frac{a^3}{3V}$ là

A. $\frac{\sqrt{5}}{80}$ **B.** $\frac{\sqrt{5}}{40}$ **C.** $\frac{\sqrt{5}}{20}$ **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{80}$

» **Câu 14.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB=a$ và $AD=2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60^0.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{15}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$ **C.** $V=\frac{4a^3\sqrt{15}}{15}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$

» Câu 15. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa một mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính độ dài đường cao SH.

A. $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $SH=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $SH=\dfrac{a}{2}$. **D.** $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

» Câu 16. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Biết $ASC=90°$, tính thể tích V của khối chóp đó.

A. $V=\dfrac{a^3}{3}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

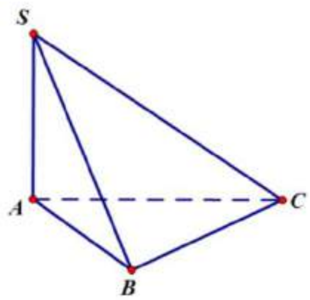
» Câu 17. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có góc giữa $A'C$ và hình chiếu của nó là $45°$, biết $A'C=a\sqrt{2}$. Tính độ dài CC'.

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** a^2 **D.** a

» Câu 18. Cho một chậu nước hình chóp cụt đều (hình vẽ) có chiều cao bằng $3dm$, đáy là lục giác đều, độ dài cạnh đáy lớn bằng $2dm$ và độ dài cạnh đáy nhỏ bằng $1dm$. Tính thể tích của chậu nước

A. $\dfrac{21\sqrt{3}}{2}dm^3$. **B.** $\dfrac{21\sqrt{2}}{4}dm^3$. **C.** $\dfrac{21}{2}dm^3$. **D.** $\dfrac{21\sqrt{6}}{4}dm^3$.

» Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng 45^0 (tham khảo hình bên). Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng



A. $\dfrac{a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{3a^3}{8}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

» Câu 20. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

A. $\dfrac{a^3}{3}$ **B.** a^3 **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{9}$ **D.** $\dfrac{a^3}{2}$

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» Câu 21. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'CD'$ có cạnh a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên $B'D$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng DB' là BH.		
(b)	Độ dài đoạn $BH=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.		
(c)	$d(B,AC)=\dfrac{1}{2}AC$		

(d)	$d(B, AA') = BA'$		

» Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. Biết $BC = 2AB = 2AD = 2a, SB = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SB vuông góc với mặt đáy, E là trung điểm BC. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$d(D,(SAB)) = a$		
(b)	$d(E,(SBD)) = EA$		
(c)	$d(B,(SCD)) = BJ = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$, với J là hình chiếu vuông góc của điểm B lên SD		
(d)	$d(I,(SCD)) = a\sqrt{30}$, với I là giao điểm AC và BD		

» Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là vuông cạnh a. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Vẽ đường cao AH của tam giác SAB. Vẽ đường cao AK của tam giác SAD. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$BC \perp AH$		
(b)	Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng: $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$		
(c)	Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng: $\dfrac{a\sqrt{2}}{7}$		
(d)	Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (AHK) bằng: $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$		

» Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$AD // (SBC)$		
(b)	Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng: $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$		
(c)	Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD, AB bằng: $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$		
(d)	Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng: $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$		

» Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy và tam giác SAB đều cạnh $2a$. Biết tam giác ABC vuông tại C và cạnh $AC = a\sqrt{3}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$SH \perp (ABC)$		
(b)	$d(S,(ABC)) = a\sqrt{3}$		
(c)	$d(C,(SAB)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$		

(d)	Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3}{6}$		

» Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B có $AB=1, ACB=30^\circ$. Biết SA vuông góc với mặt đáy và $SA=2$. Gọi H là hình chiếu của A trên SB. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$d(A,SB)=AH$		
(b)	$d(B,(SAC))=\frac{\sqrt{3}}{3}$		
(c)	$BC=\sqrt{3}$		
(d)	Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng: $\frac{\sqrt{3}}{6}$		

» Câu 27. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC\cdot A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Trong mặt phẳng $(A'B'C')$, kẻ $A'H\perp B'C'$ tại H. Khi đó: $B'C'\perp(AA'H)$		
(b)	$d((ABC),(A'B'C'))=a$		
(c)	Diện tích đáy của lăng trụ là: $a^2\sqrt{5}$		
(d)	Thể tích khối lăng trụ là: $a^3\sqrt{3}$		

» Câu 28. Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB=x$, các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Diện tích tam giác BCD bằng $S_{BCD}=3\sqrt{3}$		
(b)	$V_{ABCD}=\frac{\sqrt{3}}{3}x\sqrt{36-x^2}$		
(c)	Khi $x=3$ thì $V=\frac{9}{4}$		
(d)	Khi $x=3\sqrt{2}$ thì thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.		

» Câu 29. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi O là giao điểm AC và BD. Khi đó:

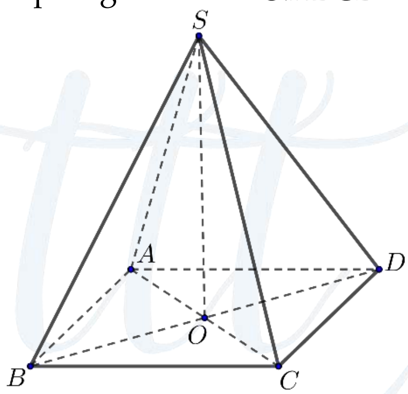
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$d(SO,CD)=OE$ với E là trung điểm CD.		
(b)	$d(AD,SB)=\frac{1}{2}d(A,(SBC))$		
(c)	Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên SE. $d(AB,SC)=2d(O,(SCD))=2OH$.		
(d)	Gọi $G;F$ lần lượt là trung điểm $BC;AD$. $d(GF,SE)=\frac{1}{2}OH$.		

» Câu 30. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA'=\frac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là H là trung điểm BC. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A'H$ là đường cao hình lăng trụ.		
(b)	Tam giác $A'HA$ vuông tại A'.		
(c)	$A'H=\sqrt{AA'^2-AH^2}$		
(d)	Đường cao của khối lăng trụ trên là $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.		

» Câu 31. Kim tự tháp bằng kính tại bảo tàng Louvre ở Paris có dạng hình chóp tứ giác đều với cạnh bên là $32,32m$ và cạnh đáy là $34m$.

Giả sử người ta kí hiệu hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ tâm O như hình vẽ.



Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Chiều cao của kim tự tháp là SA.		
(b)	Khoảng cách từ đỉnh tháp đến mặt phẳng đáy là SO.		
(c)	Chiều cao của kim tự tháp là $\sqrt{SB^2-OB^2}$.		
(d)	Chiều cao của kim tự tháp là gần bằng $24,2$ *(Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).*		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=\sqrt{3}$. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng bao nhiêu? *(Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).*

Điền đáp số: ☐

» **Câu 33.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\frac{a}{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng bao nhiêu? *(Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).*

Điền đáp số:

» **Câu 34.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của BC. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng $\frac{\sqrt{2}}{3}$. Tính SA ? *(Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).*

Điền đáp số:

» **Câu 35.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ bằng $\frac{2\sqrt{57}}{19}$. Tính chiều cao của hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$?

Điền đáp số:

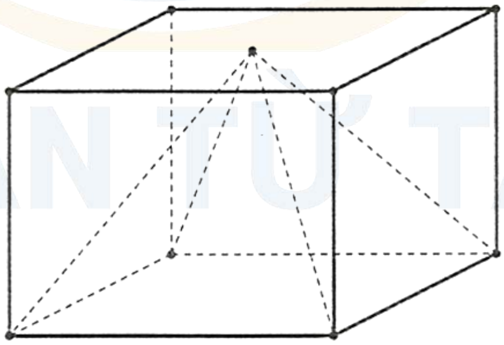
» **Câu 36.** Một bể cá được làm bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật có ba kích thước là $0,6m;2m;0,8m$. Tìm thể tích của bể cá đó.

Điền đáp số:

» **Câu 37.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh 2. Tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau AB,CD. *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Điền đáp số:

» **Câu 38.** Một cái hộp hình lập phương, bên trong nó đựng một mô hình đồ chơi có dạng hình chóp tứ giác đều mà đỉnh của hình chóp đó trùng với tâm của một mặt chiếc hộp, giả sử hình vuông đáy của hình chóp trùng với một mặt của chiếc hộp (mặt này cùng với mặt chứa đỉnh hình chóp là hai mặt đối nhau). Biết cạnh của chiếc hộp bằng $30cm$, thể tích phần không gian bên trong chiếc hộp không bị chiếm bởi mô hình đồ chơi dạng hình chóp (mô hình đồ chơi được làm bởi chất liệu nhựa đặc bên trong) đạt bao nhiêu dm^3?



Điền đáp số:

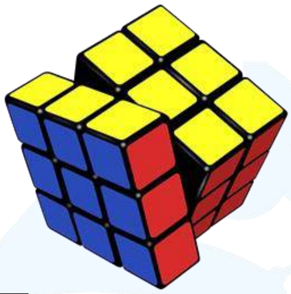
» **Câu 39.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 1, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tìm thể tích khối chóp $S.ABCD$. *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Điền đáp số: ☐

» Câu 40. Một hình chóp cụt đều $ABC \cdot A'B'C'$ có cạnh đáy lớn bằng 4, cạnh đáy nhỏ bằng 2 và chiều cao của nó bằng $\frac{3}{2}$. Tìm thể tích của khối chóp cụt đều đó. *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Điền đáp số: ☐

» Câu 41. Một khối rubik 3×3 (được chia làm 27 khối lập phương nhỏ) có dạng một hình lập phương với kích thước cạnh bằng $6cm$. Tìm thể tích của khối rubik đó, biết khoảng hở giữa các khối lập phương nhỏ không đáng kể.



Điền đáp số: ☐

» Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD), SA = 2, ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Gọi O là tâm của $ABCD$. Tính khoảng cách từ S đến DM với M là trung điểm OC. *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Điền đáp số: ☐

» Câu 43. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $2a$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(A'BD),(CB'D')$. *(Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).*

Điền đáp số: ☐

» Câu 44. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2$, $AB = \sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$ *(Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).*

Điền đáp số: ☐

---------------------------- Hết ----------------------------

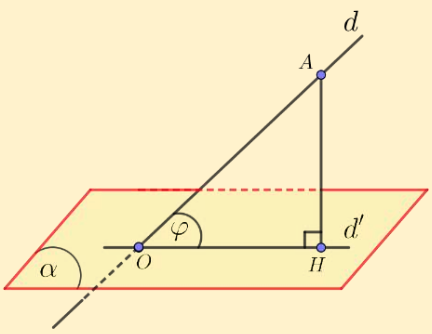
Chương 08

Bài 5. GÓC GIỮA ĐƯỜNG & MẶT – GÓC NHỊ DIỆN

A. Lý thuyết

1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Xác định góc giữa đường và mặt:



- *Trường hợp 1.* $d \perp (P) \Rightarrow \widehat{(d,(P))} = 90°$
- *Trường hợp 2.* d không vuông góc với (P).

Khi đó ta làm như sau:

» *Bước 1.* Tìm $d \cap (P) = \{O\}$.

» *Bước 2.* Trên d lấy điểm A khác O.

Tìm hình chiếu H của A lên (α).

Ta chọn điểm A trên d thỏa: $A \in \Delta$ vuông góc với (α).

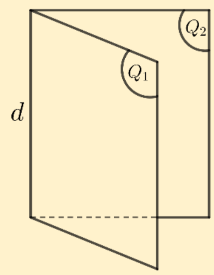
(Khi đó hình chiếu của A là giao điểm của Δ và (α)).

» *Bước 3.* Suy ra $\left(\widehat{d,(P)}\right) = \left(\widehat{AI,HI}\right) = \widehat{AIH} = \varphi$.

Chú ý: $0 \le (d;(P)) \le 90°$.

2. Góc nhị diện

Định nghĩa:



» Cho hai nửa mặt (P_1) và (Q_1) có chung bờ là đường thẳng d.

» Hình tạo bởi (P_1), (Q_1) và d được gọi là góc nhị diện tạo bởi (P_1) và (Q_1), kí hiệu $[P_1,d,Q_1]$.

» Hai nửa mặt (P_1), (Q_1) gọi là hai mặt của nhị diện và d gọi là cạnh của nhị diện

Chú ý

(1) Hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến d tạo thành bốn góc nhị diện.

(2) Góc nhị diện $[P_1;d;Q_1]$ còn được ký hiệu là $[M;d;N]$ với $M;N$ tương ứng thuộc hai nửa mặt phẳng $(P_1);(Q_1)$.

3. Góc phẳng nhị diện

Định nghĩa:

» *Góc phẳng nhị diện* của góc nhị diện là góc:

✓ có đỉnh nằm trên cạnh của nhị diện,

✓ có hai cạnh lần lượt nằm trên hai mặt của nhị diện và vuông góc với cạnh của nhị diện.

Chú ý

(1) Số đo của góc nhị diện có thể nhận giá trị từ $0°$ đến $180°$.

(2) Góc nhị diện được gọi là vuông, nhọn, tù nếu nó có số đo tương ứng bằng, nhỏ hơn, lớn hơn $90°$.

(3) Đối với hai điểm M,N không thuộc đường thẳng a, ta kí hiệu $[M,a,N]$ là góc nhị diện có cạnh a và các mặt tương ứng chứa M,N.

(4) Hai mặt phẳng cắt nhau tạo thành bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì các góc nhị diện lại cũng là góc nhị diện vuông.

Phương pháp xác định góc nhị diện:

Để xác định góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng $(P)\&(Q)$, ta thực hiện theo các bước:

▶ **Bước 1:** Xác định giao tuyến $a=(P)\cap(Q)$.

▶ **Bước 2:** Tìm $Ox\subset(P):Ox\perp a$ và $Oy\subset(Q):Oy\perp a$.

▶ **Bước 3:** Kết luận $[P;a;Q]$

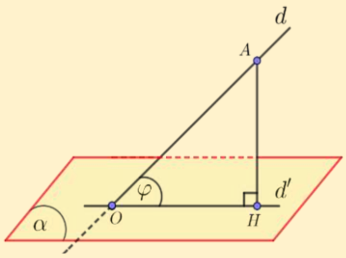
B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp

- ***Trường hợp 1.*** $d\perp(P)\Rightarrow\widehat{(d,(P))}=90^\circ$
- ***Trường hợp 2.*** d không vuông góc với (P). Khi đó ta làm như sau:
  - » ***Bước 1.*** Tìm $d\cap(P)=\{O\}$.
  - » ***Bước 2.*** Trên d lấy điểm A khác O.
    Tìm hình chiếu H của A lên (α).
    Ta chọn điểm A trên d thỏa: $A\in\Delta$ vuông góc với (α).
    (Khi đó hình chiếu của A là giao điểm của Δ và (α)).
  - » ***Bước 3.*** Suy ra $\left(\widehat{d,(P)}\right)=\left(\widehat{AI,HI}\right)=\widehat{AIH}=\varphi$.

Chú ý: $0\le\left(d;(P)\right)\le 90^\circ$



Ví dụ 1.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tìm hình chiếu của:

(1) SC,SB,SO lên mặt phẳng $(ABCD)$.

(2) AC,SC,SD lên mặt phẳng (SAB).

(3) SB,DC lên mặt phẳng (SAC)

(4) SA,AC lên mặt phẳng (SCD).

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, ABC là tam giác vuông cân tại B. Cho độ dài các cạnh $SA = AB = a$. Xác định và tính:

(1) Góc giữa SB và (ABC).

(2) Góc giữa SC và (SAB).

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, $SO \perp (ABCD)$. Xác định:

(1) Góc giữa SA và $(ABCD)$.

(2) Góc giữa SA và (SBD).

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.4.

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a$. ΔABC đều cạnh a. Tính

(1) Góc giữa đường thẳng SB và (ABC) (2) Góc giữa đường thẳng SC và (SAB)

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.5.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính góc giữa SC và (SAB)

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.6.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, có $AB = a; BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA \perp (ABC)$, SB tạo với đáy một góc $60°$ và H là trung điểm của BC.

(1) Tính cosin góc giữa SC và mặt phẳng (ABC).

(2) Tính cosin góc giữa SH và mặt phẳng (ABC).

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.7.

Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông cân tại B, $SA \perp (ABC)$, $AB = a, SA = a\sqrt{3}$.

(1) Tính góc giữa đường thẳng SC và (ABC).

(2) Gọi H, K lần lượt là đường cao của $\Delta SAB, \Delta SAC$. Tính góc giữa đường thẳng AK và (SBC).

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 2. Góc nhị diện

Phương pháp

Định nghĩa: Cho hai nửa mặt (P_1) và (Q_1) có chung bờ là đường thẳng d.

Hình tạo bởi (P_1), (Q_1) và d được gọi là góc nhị diện tạo bởi (P_1) và (Q_1)

Kí hiệu $[P_1, d, Q_1]$.

Cách xác định góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng $(P)\&(Q)$, ta thực hiện theo các bước:

» *Bước 1.* Xác định giao tuyến $a=(P)\cap(Q)$.

» *Bước 2.* Tìm $Ox\subset(P): Ox\perp a$ và $Oy\subset(Q): Oy\perp a$.

» *Bước 3.* Kết luận $[P;a;Q]$

Chú ý:

(1) Số đo của góc nhị diện có thể nhận giá trị từ $0°$ đến $180°$.

(2) Góc nhị diện được gọi là vuông, nhọn, tù nếu nó có số đo tương ứng bằng, nhỏ hơn, lớn hơn $90°$.

(3) Đối với hai điểm M, N không thuộc đường thẳng a, ta kí hiệu $[M, a, N]$ là góc nhị diện có cạnh a và các mặt tương ứng chứa M, N.

(4) Hai mặt phẳng cắt nhau tạo thành bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì các góc nhị diện lại cũng là góc nhị diện vuông.

Ví dụ 2.1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy. Xác định góc phẳng của góc nhị diện $[S, BC, A]$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, SA vuông góc với đáy $ABCD$. Xác định góc phẳng của góc nhị diện $[S, BD, A]$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.3.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Tính góc phẳng nhị diện $\left[B,SA,C\right]$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.4.

Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD$ và $BC = BD$. Gọi I là trung điểm của CD.
Xác định góc phẳng nhị diện $\left[A,CD,B\right]$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.5.

Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a.
Tính cosin số đo góc nhị diện $\left[S,CD,A\right]$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.6.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $AC = a$
Tính số đo của góc nhị diện $\left[S,DA,B\right]$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.7.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng a, $AC=a, SA=\frac{1}{2}a$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình thoi $ABCD$ và H là hình chiếu của O trên SC.

(1) Tính số đo của các góc nhị diện $[B,SA,D]$; $[S,BD,A]$; $[S,BD,C]$.

(2) Chứng minh rằng $\widehat{BHD}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B,SC,D]$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.8.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB=SB=a$, $SO=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính số đo của góc nhị diện $[B,SA,D]$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.9.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính số đo góc nhị diện $[A',B'D,C']$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.10

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, tam giác SBC là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, biết α là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) và $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{26}}{13}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, AC, B]$.

Lời giải

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Nếu A là một điểm không thuộc mặt phẳng (P) và A' là hình chiếu của A trên (P) thì

A. Đường thẳng AA' nằm trên mặt phẳng (P).

B. Đường thẳng AA' vuông góc với mặt phẳng (P).

C. Đường thẳng AA' song song với mặt phẳng (P).

D. Đường thẳng AA' không cắt mặt phẳng (P).

» Câu 2. Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì hình chiếu của a trên (P) là

A. Đường thẳng a' song song với a.
B. Đường thẳng a' vuông góc với a.
C. Đường thẳng a' nằm trên mặt phẳng (P).

D. Là giao điểm H của đường thẳng a với mặt phẳng (P).

» Câu 3. Cho đường thẳng a cắt mặt phẳng (P) tại điểm A và đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P). Trên đường thẳng a lấy điểm M khác A. Gọi H là hình chiếu của M trên (P). Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng?

A. Hình chiếu vuông góc của đường thẳng a trên (P) là đường thẳng AH.

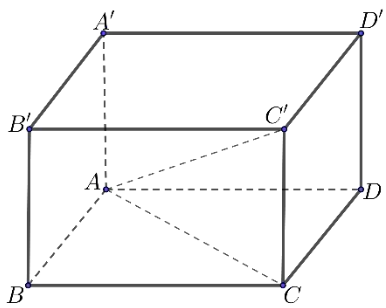
B. Hình chiếu vuông góc của đường thẳng a trên (P) là đường thẳng đi qua M.

C. Hình chiếu vuông góc của đường thẳng a trên (P) là đường thẳng đi qua H và song song với a.

D. Hình chiếu vuông góc của đường thẳng a trên (P) là đường thẳng đi qua H và vuông góc với a.

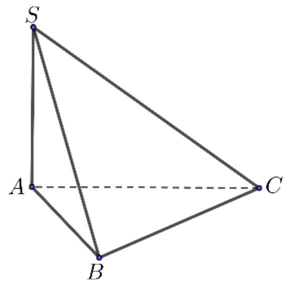
» Câu 4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?
A. Hình chiếu vuông góc của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng song song.
B. Hình chiếu vuông góc của một hình bình hành là một hình bình hành.
C. Phép chiếu vuông góc biến một tam giác thành một tam giác nếu mặt phẳng chứa tam giác không song song với phương chiếu.
D. Phép chiếu vuông góc không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng.

» Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (*tham khảo hình vẽ*). Hình chiếu vuông góc của điểm C' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm



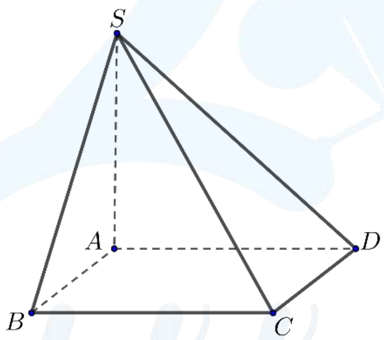
A. C. **B.** A. **C.** D. **D.** B.

» Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), (*tham khảo hình vẽ*). Hình chiếu vuông góc của đường thẳng SB trên mặt phẳng (ABC) là đường thẳng



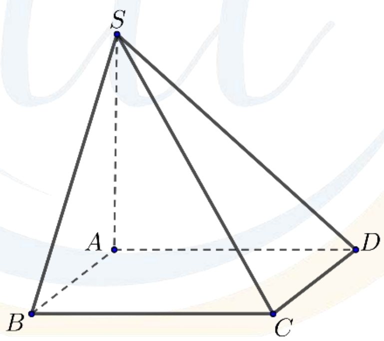
A. BC **B.** AB. **C.** AC. **D.** SA.

» Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy (*tham khảo hình vẽ*). Hình chiếu vuông góc của tam giác ΔSCD mặt phẳng $(ABCD)$ là



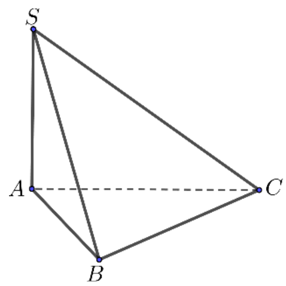
A. ΔABC **B.** ΔACD. **C.** ΔBCD. **D.** ΔABD.

» Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh, SA vuông góc với mặt phẳng đáy (*tham khảo hình vẽ*). Góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$ là góc nào sau đây?



A. SAC **B.** CSA **C.** SCA **D.** ABC

» Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = a\sqrt{2}$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = a\sqrt{2}$ (*tham khảo hình vẽ*). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng



A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

» Câu 10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Góc phẳng nhị diện $[S,AB,C]$ là SBC.

B. Góc phẳng nhị diện $[D,SA,C]$ là DAC.

C. Góc phẳng nhị diện $[S,AC,B]$ là SOB.

D. Góc phẳng nhị diện $[D,SA,B]$ là BSD.

» Câu 11. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, biết đáy $ABCD$ là hình vuông. Xác định góc giữa $A'C$ và $(ABCD)$.

A. $A'CA$. **B.** $A'CA$. **C.** $A'AD$. **D.** $CA'A$.

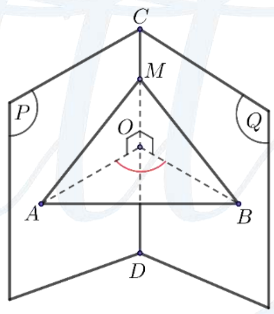
» Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ như hình vẽ. Biết $SA \perp (ABC)$, H là điểm thuộc đoạn thẳng BC. Xác định góc nhị diện $[H,SA,B]$.

A. HAB. **B.** HBA. **C.** CHA. **D.** CAH.

» Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và . Góc giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (SAC)

A. ACD. **B.** CBA. **C.** DAC. **D.** CAS.

» Câu 14. Cho hai mặt phẳng $(P),(Q)$ có giao tuyến là đường thẳng CD. Điểm $A \in (P); B \in (Q)$ và AO, BO cùng vuông góc với CD. M là một điểm bất kì thuộc CD $(M \neq O)$. Xác định góc nhị diện $[A,CD,B]$



A. AOB. **B.** AMO. **C.** AMB. **D.** OAB.

» Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh $2a$, $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy. Số đo của góc nhị diện $[S,BD,A]$?

A. 90^0. **B.** 30^0. **C.** 60^0. **D.** 45^0.

» Câu 16. Cho hình chóp $O.ABC$ có OA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $OA = \frac{3a}{2}$, tam giác ABC đều cạnh bằng a. Gọi H là trung điểm BC. Góc giữa đường thẳng OH và mặt phẳng (ABC) bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

» Câu 17. Khẳng định nào sau đây đúng?

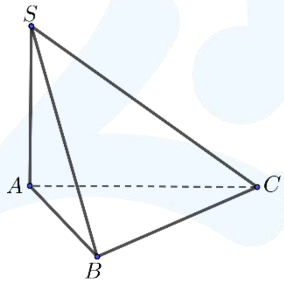
A. Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).

B. Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b song song với hình chiếu a' của a trên (P).

C. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).

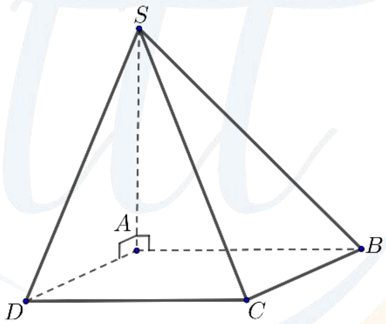
D. Cho đường thẳng a tùy ý và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).

» Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông tại B (*tham khảo hình vẽ*). Đường thẳng SB vuông góc với đường thẳng nào sau đây?



A. SC. **B.** BC. **C.** AC. **D.** SA.

» Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $BD \perp SC$. **B.** $BD \perp SD$. **C.** $AD \perp SD$. **D.** $AD \perp SC$.

» Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại O, $SO \perp (ABCD)$, tam giác SAC là tam giác đều. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Xác định góc nhị diện $[M,SO,D]$.

A. MOD. **B.** SOM. **C.** SOD. **D.** MOA.

» Câu 21. Một chiếc máy bay cất cánh từ một đường băng và giữ vận tốc không đổi với độ lớn $240\,\text{km/h}$ trong suốt 2 phút đầu kể từ khi cất cánh. Đường bay lên là một đường thẳng tạo với mặt phẳng nằm ngang một góc $30°$. Hỏi sau thời gian 1 phút kể từ lúc cất cánh, máy bay đạt độ cao bao nhiêu km so với mặt đất?

Chú ý: Độ cao của máy bay so với mặt đất là khoảng cách từ máy bay (coi là một điểm) đến hình chiếu của nó trên mặt đất.

A. $2\,\text{km}$. **B.** $2,5\,\text{km}$. **C.** $4\,\text{km}$. **D.** $4,5\,\text{km}$.

» Câu 22. Một con diều được thả dây căng, tạo với mặt đất một góc $60°$. Đoạn dây diều (từ đầu ở mặt đất đến đầu ở con diều) dài 10 m. Hỏi con diều cách mặt đất bao nhiêu centimét (lấy giá trị nguyên gần đúng)?

A. $866(\text{cm})$. **B.** $1154(\text{cm})$. **C.** $1000(\text{cm})$. **D.** $87(\text{cm})$.

» Câu 23. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 4a$, $AD = 3a$. Các cạnh bên đều có độ dài $5a$. Tính góc nhị diện $[S,BC,O]$

A. $\alpha \approx 75°46'$. **B.** $\alpha \approx 71°21'$. **C.** $\alpha \approx 68°31'$. **D.** $\alpha \approx 65°21'$.

» Câu 24. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}$, $OA = a$. Tính góc nhị diện $[A,BC,O]$

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

» Câu 25. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a, gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Tính $\sin\alpha$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» Câu 26. Cho hình chóp $SABCD$, $ABCD$ là hình vuông có tâm O và $SA = SB = SC = SD$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm O.		
(b)	Hình chiếu vuông góc của SA trên mặt phẳng $(ABCD)$ là SO.		
(c)	$BD \perp SA$		
(d)	Hình chiếu vuông góc của ΔSOB trên mặt phẳng $(ABCD)$ là ΔOBC.		

» Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC$ và $SB = SD$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hình chiếu vuông góc của điểm S lên $(ABCD)$ là điểm O.		
(b)	Hình chiếu vuông góc của đường thẳng SO lên $(ABCD)$ là điểm O.		
(c)	Hình chiếu vuông góc của ΔSAB lên $(ABCD)$ là ΔOAB.		
(d)	Hình chiếu vuông góc của ΔBCD lên (SBD) là ΔSBD.		

» Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Góc giữa đường thẳng AE và mặt phẳng (SBC) bằng $90°$.		
(b)	Góc giữa đường thẳng AF và mặt phẳng (SCD) bằng $60°$.		
(c)	Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC) bằng $45°$.		
(d)	Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (AEF) bằng $30°$.		

» Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	AB là hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$		
(b)	$(SB,(ABCD)) \approx 54,75^{\circ}$		
(c)	$(SC,(ABCD)) = 45^{\circ}$		

(d)	$(SC,(SAB))=60^\circ$.		

» Câu 30. Cho tứ diện $ABCD$ có AB,AC,AD đôi một vuông góc với nhau. Biết rằng $AB=AC=a, AD=a\sqrt{3}$. Khi đó:

	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
(a)	$AC\perp(ABD)$		
(b)	$(CD,(ABD))=30^\circ$		
(c)	Góc phẳng nhị diện $[A,BC,D]\approx 87,79^\circ$		
(d)	Góc phẳng nhị diện $[C,AB,D]=90^\circ$		

» Câu 31. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó:

	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
(a)	$SO\perp(ABC)$		
(b)	$(SA,(ABC))=(SA,OA)$		
(c)	$(SA,(ABC))=60^\circ$		
(d)	$(SM,(ABC))\approx 70,9^\circ$.		

» Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
(a)	Số đo của góc nhị diện $[S,AB,D]$ bằng số đo góc SDA.		
(b)	Số đo của góc nhị diện $[S,AD,B]$ bằng 90°.		
(c)	Số đo của góc nhị diện $[S,BD,C]$ bằng số đo của góc SCO.		
(d)	Số đo của góc nhị diện $[S,BD,C]$ bằng 135°.		

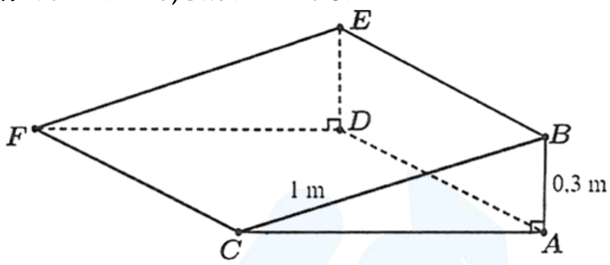
» Câu 33. Cho hình ảnh thiết kế phòng vệ sinh của một biệt thự.

	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
(a)	Khi đó đường thẳng c vuông góc với đường thẳng a.		
(b)	Khi đó đường thẳng c vuông góc với đường thẳng b.		
(c)	Đường thẳng a không vuông góc với đường thẳng d.		
(d)	Khi đó đường thẳng c vuông góc với mp$(a;b)$.		

» Câu 34. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC\cdot A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng $3a$. Khi đó:

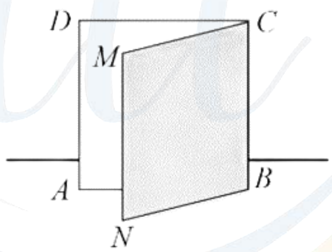
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Gọi M là trung điểm $A'B'$, ta có $C'M = a\sqrt{2}$		
(b)	Góc phẳng nhị diện $[C, A'B', C']$ bằng 60°		
(c)	Gọi K là trung điểm AB, M là trung điểm $A'B'$, khi đó: $A'B' \perp MK$		
(d)	Góc phẳng nhị diện $[A, A'B', C]$ bằng 30°		

» Câu 35. Một tấm cầu dốc kê bậc thềm được làm bằng cao su như hình vẽ sau. Biết $BCFE$ là hình vuông có cạnh bằng $1m$ và $AB = 0,3m$. Khi đó:



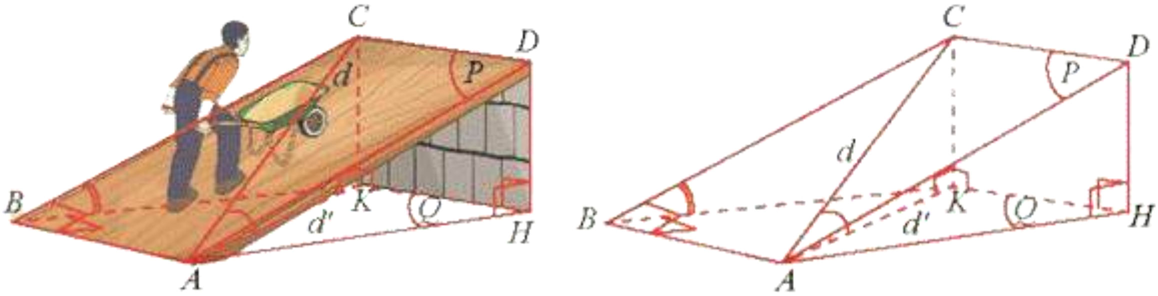
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\sin BCA = 0,5$		
(b)	$(BC,(ACFD)) \approx 17,46^\circ$		
(c)	$BF = \sqrt{2}\,m$		
(d)	$(BF,(ACFD)) \approx 15,25^\circ$		

» Câu 36. Hình dưới đây minh họa một cánh cửa và khung cửa. Cánh cửa có dạng hình chữ nhật $ABCD$ ở đó $AB = BN$. Góc mở cửa là góc nhị diện $[A, BC, N]$. Chiều rộng BN của cửa là $1,2\text{m}$.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Góc giữa đường thẳng MN và mặt sàn là $90°$		
(b)	Số đo của góc nhị diện $[A, BC, N]$ bằng số đo góc nhị diện $[A, BC, M]$		
(c)	Biết khoảng cách AN là $1,2\text{m}$, khi đó góc mở cửa là $60°$		
(d)	Khi số đo góc mở cửa là $30°$, thì khoảng cách DM xấp xỉ $0,38\text{m}$ (*làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2*).		

» Câu 37. Trong lao động, mặt phẳng nghiêng thường được sử dụng vì tính tiện dụng của nó. Hình vẽ sau minh họa một mặt phẳng nghiêng dung để vận chuyển đồ, có độ nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang là $30°$, vận chuyển lên mặt phẳng có độ cao 1m. Quan sát hình vẽ và xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau:



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	CAK được gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (Q)		
(b)	CAK là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[C, AB, K]$		
(c)	Mặt phẳng nghiêng có độ dài khoảng $1,73$m		
(d)	Biết chiều rộng của mặt phẳng nghiêng đang sử dụng là 1m, khi đó sin của góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (Q) là $\frac{\sqrt{5}}{5}$.		

» Câu 38. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông. Hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của AD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, CD.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khi đó $BP \perp SC$		
(b)	Khi đó $BP \perp NM$		
(c)	Khi đó $BP \perp SA$		
(d)	Khi đó $BP \perp MA$		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 39. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại C, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Trên hình có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với BC ?

Điền đáp số:

» Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a Biết $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi α là góc nhị diện $[S; BC; A]$. Tính $a+b$ biết

$$\tan\alpha = \frac{a}{\sqrt{b}}\left(a, b \in \mathbb{N}\right).$$

Điền đáp số:

» Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi K hình chiếu vuông góc của điểm C trên mặt phẳng (SBD). Biết rằng $SA = AC = 2\sqrt{5}$. Tính độ dài CK.

Điền đáp số:

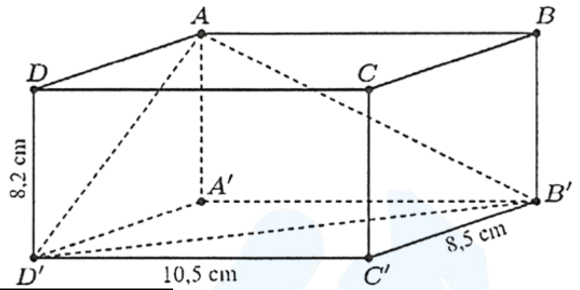
» Câu 42. Kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao $98m$ và cạnh đáy $180m$. Số đo góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy của kim tự tháp đó bằng bao nhiêu độ? *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Điền đáp số:

» **Câu 43.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa $A'C$ với mặt phẳng $(ABCD)$. *(tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).*

✍ **Điền đáp số:** ☐

» **Câu 44.** Một hộp phấn không bụi có dạng hình hộp chữ nhật, chiều cao hộp phấn bằng $8,2cm$ và đáy của nó có hai kích thước là $8,5cm; 10,5cm$ (xem hình vẽ sau). Tìm góc phẳng nhị diện $[A, B'D', A']$ *(tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).*



✍ **Điền đáp số:** ☐

» **Câu 45.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đáy tâm O, cạnh a và cạnh bên là $2a$. Tính góc phẳng nhị diện $[S, BC, O]$? *(tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).*

✍ **Điền đáp số:** ☐

» **Câu 46.** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy tâm O cạnh a và cạnh bên là $a\sqrt{7}$. Tính góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng đáy? *(tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).*

✍ **Điền đáp số:** ☐

» **Câu 47.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = 2a, AA' = 3a$. Tính góc phẳng nhị diện $[A', BD, A]$? *(tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).*

✍ **Điền đáp số:** ☐

» **Câu 48.** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy tâm O cạnh a và cạnh bên là $a\sqrt{7}$. Tính góc phẳng nhị diện $[S, BC, O]$? *(tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).*

✍ **Điền đáp số:** ☐

» **Câu 49.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của AB. Cạnh bên SB tạo với đáy một góc $60°$. Gọi φ là góc tạo bởi SC và mặt phẳng $(ABCD)$. Biết rằng $\tan\varphi = \frac{\sqrt{x}}{y}$, trong đó y là số nguyên dương nhỏ hơn 10. Tính giá trị của $S = x + y$.

✍ **Điền đáp số:** ☐

» **Câu 50.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân $(AD // BC)$ và $BC = 2$, $AB = AD = CD = 1$. Mặt bên SBC là tam giác đều. Tính độ dài SD để SD vuông góc với AC.

✍ **Điền đáp số:** ☐

» **Câu 51.** Một khay đá viên gồm 6 ngăn nhỏ có dạng là các hình chóp cụt với miệng và đáy là hình vuông (xem hình, kích thước của miệng lớn hơn của đáy).

Ta đo được độ dài cạnh đáynhỏ, cạnh đáy lớn lần lượt bằng 1 cm, 3 cm và chiều cao mặt bên bằng $\sqrt{2}$ cm. Tính cosin góc giữa đường chéo của viên đá với cạnh đáy của viên đá (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2)

✍ **Điền đáp số:**

----------------------------- Hết -----------------------------