

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN (CHUYÊN)

(Thời gian làm bài 120 phút, không kể thời gian phát đề)

Đề thi này có 01 trang

Bài 1: (1,0 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - x + \sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 2\sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

Tim các số nguyên x để A đạt giá trị nguyên.

Bài 2: (1,5 điểm) Cho hàm số $y = -x^2$ có đồ thị là parabol (P) và hàm số $y = 2(m+1)x + m^2 + 3$ có đồ thị là đường thẳng d (trong đó m là tham số).

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Tim tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho $T = x_1x_2 + y_1 + y_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 3: (1,0 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2x + \frac{1}{y}} + \sqrt{x + y - 1} = 5 \\ x - y + \frac{1}{y} = 4 \end{cases}$$
.

Bài 4: (1,5 điểm) Vào lúc 5 giờ sáng, tại khu du lịch sinh thái Hồ Bể thuộc xã Vĩnh Hải, thị xã Vĩnh Châu, một chiếc tàu cá xuất phát đi thẳng về hướng Đông với vận tốc không đổi. Đến 7 giờ sáng cùng ngày, cũng tại đó một chiếc tàu du lịch xuất phát và đi thẳng về hướng Nam với vận tốc lớn hơn vận tốc tàu cá là 10 km/h. Đến 9 giờ khoảng cách giữa 2 tàu là 100 km. Tính vận tốc mỗi tàu.

Bài 5: (1,5 điểm)

a) Tim tất cả các số tự nhiên x sao cho giá trị của biểu thức $x^2 + 3x + 5$ là một số chính phương.

b) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \geq 9.$$

Bài 6: (3,0 điểm) Yêu cầu vẽ hình khi chứng minh.

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có $BC = 10$ cm. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại E và D . Hai đường thẳng BD và CE cắt nhau tại H .

a) Chứng minh tứ giác $AEHD$ nội tiếp.

b) Đường thẳng AH cắt cung nhỏ ED tại K . Giả sử $\widehat{EKD} = 135^\circ$, tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung nhỏ ED và dây cung ED (cho $\pi = 3,14$ và kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

c) Đường thẳng AH cắt đường thẳng BC tại F . Gọi P là trung điểm CD . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABP cắt đường thẳng BC tại điểm thứ hai là Q . Chứng minh rằng AF vuông góc BC và Q là trung điểm CF .

Bài 7: (0,5 điểm) Trên bàn có 2024 viên kẹo, hai bạn A và B tiến hành trò chơi lấy viên kẹo. Hai bạn A và B thay phiên nhau lấy kẹo; đến lượt chơi mỗi bạn sẽ lấy 1, 2, 3 hoặc 4 viên kẹo. Bạn nào không còn kẹo để lấy sẽ thua cuộc. Nếu A đi trước thì bạn nào sẽ là người có chiến thuật để luôn thắng trong trò chơi và chiến thuật đó như thế nào?