SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH NINH BÌNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS CẤP TỈNH
Năm học 2024-2025
Môn: Toán
Ngày thi: 18/02/2025
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh :.................................... Số báo danh ....
Họ và tên, chữ kí của cán bộ coi thi thứ nhất: ....
Họ và tên, chữ kí của cán bộ coi thi thứ hai:...

Bài 1 (4,0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{3x^2+13} = x^4 + \sqrt{3x^2+6}$.

b) Cho các số thực a, b, c khác 0 thoả mãn $\dfrac{a^2}{bc} + \dfrac{b^2}{ca} + \dfrac{c^2}{ab} = 3$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \left(\frac{a+b}{c} - 1\right)\left(\frac{b+c}{a} - 1\right)\left(\frac{c+a}{b} - 1\right).$$

Bài 2 (4,0 điểm).

a) Cho $P(x)$ là một đa thức có hệ số nguyên, bậc dương. Biết $P(x)$ có một nghiệm là $x_1 = 3 - \sqrt{2}$. Chứng minh rằng đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x) = x^2 - 6x + 7$.

b) Xét các số thực x, y, z dương thoả mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{2x^2+y^2+3} + \frac{y}{2y^2+z^2+3} + \frac{z}{2z^2+x^2+3}.$$

Bài 3 (3,0 điểm). Cho p là một số nguyên tố lẻ và n là một số nguyên dương nhỏ hơn p.

a) Chứng minh rằng $n^p + (p-n)^p$ chia hết cho p^2.

b) Chứng minh rằng $\left\lfloor \dfrac{n^p}{p} \right\rfloor = \dfrac{n^p - n}{p}$.

c) Đặt $T_p = \left\lfloor \dfrac{1^p}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{2^p}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{3^p}{p} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \dfrac{(p-2)^p}{p} \right\rfloor$. Tìm số dư của phép chia T_p cho p.

(Với x là một số thực, $\lfloor x \rfloor$ kí hiệu số nguyên lớn nhất, không vượt quá x.)

Bài 4 (6,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$, nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. M là trung điểm của cạnh BC. Tia MH cắt (O) tại P.

a) Chứng minh các điểm A, E, F, H, P cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi L là giao điểm của tia HD với (O). Chứng minh hai tam giác MBH và MPB đồng dạng. Từ đó chỉ ra $BP \cdot CL = BL \cdot CP$.

c) Lấy điểm I thuộc đoạn BC sao cho $\widehat{BHI} = \widehat{CHM}$. Gọi K là hình chiếu của A trên IH. Gọi T là giao điểm của tiếp tuyến tại P của (O) với BC. Chứng minh TL là tiếp tuyến của (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác MIK tiếp xúc với (O).

Bài 5 (3,0 điểm). Trên bảng viết một số nguyên dương n $(n \geq 3)$. Hai bạn Lâm và Ngân chơi một trò chơi như sau: hai người lần lượt thực hiện lượt chơi của mình bằng cách xoá một số xuất hiện trên bảng và thay bởi hai số nguyên dương có tổng bằng nó. Người thắng cuộc là người sau khi kết thúc lượt chơi của mình mà trên bảng chỉ có các số 1 hoặc 2. Lâm là người chơi trước.

a) Chứng minh Lâm có chiến thuật để thắng cuộc với $n = 6$ và Ngân có chiến thuật để thắng cuộc với $n = 7$.

b) Chứng minh rằng Ngân có chiến thuật để thắng cuộc với $n = 2025$.

——HẾT——