

**Câu I. (1,5 điểm)** Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}} - \frac{2x+12}{x-9}$  (với  $x \geq 0, x \neq 9$ ).

1. Rút gọn biểu thức  $A$ .
2. Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 13 - 4\sqrt{3}$ .

**Câu II. (2,0 điểm)**

1. Giải phương trình  $(x-1)(x+2) = 10$ .

2. Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \frac{x}{x-2} + 2y = 5 \\ \frac{x-1}{x-2} - y = 1 \end{cases}$$

**Câu III. (1,5 điểm)** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho parabol  $(P)$  có phương trình  $y = x^2$  và đường thẳng  $(d)$  có phương trình  $y = (m-2)x + 2m$  (với  $m$  là tham số).

1. Tìm giá trị của tham số  $m$  để đường thẳng  $(d)$  cắt parabol  $(P)$  tại điểm có hoành độ bằng 3.

2. Tìm điều kiện của tham số  $m$  để đường thẳng  $(d)$  cắt parabol  $(P)$  tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1(2-x_2) - 2024 \leq 2(2-x_2)$ .

**Câu IV. (1,0 điểm)** Một phòng họp có 255 ghế được xếp thành từng hàng, các hàng có số ghế bằng nhau. Tại phòng họp đó có 320 người đến dự họp, do đó người ta kê thêm 1 hàng ghế có số ghế như các hàng ban đầu; sau đó mỗi hàng ghế xếp thêm 3 ghế thì vừa đủ chỗ ngồi cho người dự họp. Hỏi lúc đầu phòng họp có bao nhiêu hàng ghế và mỗi hàng có bao nhiêu ghế? (biết các ghế là như nhau và mỗi ghế chỉ một người ngồi).

**Câu V. (3,5 điểm)** Cho đường tròn  $(O; R)$  đường kính  $AB$ . Kẻ tia  $Ax$  là tiếp tuyến tại  $A$  của  $(O)$ . Trên tia  $Ax$  lấy điểm  $C$  sao cho  $CA > R$ . Kẻ tiếp tuyến  $CD$  của  $(O)$  ( $D$  là tiếp điểm,  $D$  khác  $A$ ). Đường thẳng  $CB$  cắt  $(O)$  tại điểm  $M$  ( $M$  khác  $B$ ).

1. Chứng minh tứ giác  $ACDO$  nội tiếp đường tròn.
2. Chứng minh hai đường thẳng  $BD$  và  $OC$  song song với nhau.

3. Khi  $AC = \frac{3R}{2}$ , tính độ dài đoạn thẳng  $MD$  theo  $R$ .

4. Gọi  $I$  là trung điểm của  $BM$ ;  $E, K, F$  lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng  $AD$  và  $OI$ ,  $ME$  và  $AC$ ,  $CD$  và  $BE$ . Chứng minh ba đường thẳng  $AD, BC, KF$  đồng quy tại một điểm.

**Câu VI. (0,5 điểm)** Cho các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $x + y \leq 5$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{4}{xy} + \frac{9}{x+2y+1}$ .

--- HẾT ---

Thí sinh không được sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

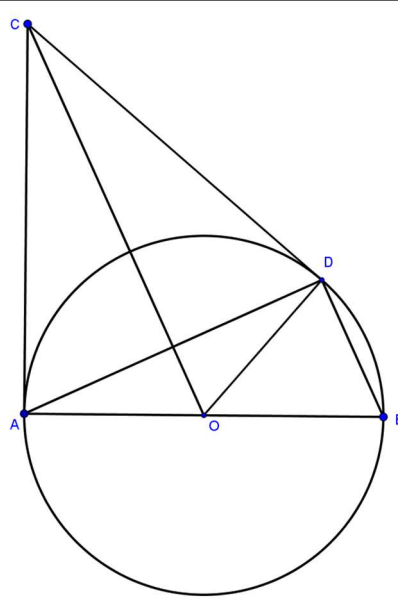
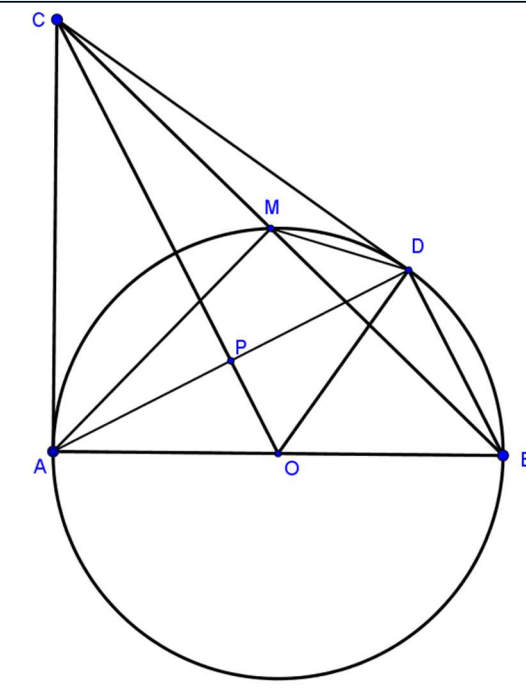
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN  
(Hướng dẫn chấm gồm 05 trang)

Lưu ý:

- Các cách giải đúng khác đáp án cho điểm tương ứng theo hướng dẫn chấm.
- Tổng điểm toàn bài không làm tròn.

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
Câu I 1,5 điểm	Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}} - \frac{2x+12}{x-9}$ (với $x \geq 0, x \neq 9$ ).		
	1 1,0 điểm	1. Rút gọn biểu thức $A$ .	0,25
		$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}} - \frac{2x+12}{x-9}$ $A = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-3}) + (\sqrt{x+2})(\sqrt{x+3}) - 2x - 12}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})}$	
		$A = \frac{x - 3\sqrt{x} + x + 5\sqrt{x} + 6 - 2x - 12}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})}$ $A = \frac{2\sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})}$	
		$A = \frac{2(\sqrt{x-3})}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} = \frac{2}{\sqrt{x+3}}$	0,25
	2 0,5 điểm	2. Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $x = 13 - 4\sqrt{3}$ .	0,25
$x = 13 - 4\sqrt{3} = (2\sqrt{3} - 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2\sqrt{3} - 1$ $\Rightarrow A = \frac{2}{2\sqrt{3} + 2} = \frac{1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$			
II 2,0 điểm	1 1,0 điểm	1. Giải phương trình: $(x-1)(x+2) = 10$	0,5
		Phương trình tương đương $x^2 + x - 12 = 0$ $\Delta = 49 > 0 \Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = -4; x_2 = 3$	
	2 1,0 điểm	2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{x}{x-2} + 2y = 5 \\ \frac{x-1}{x-2} - y = 1 \end{cases}$	0,25
		Điều kiện: $x \neq 2$ Hệ phương trình tương đương: $\begin{cases} \frac{2}{x-2} + 2y = 4 \\ \frac{1}{x-2} - y = 0 \end{cases}$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x-2} + 2y = 4 \\ \frac{2}{x-2} - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-2} - y = 0 \\ \frac{4}{x-2} = 4 \end{cases}$	0,25	

		$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-2} = 1 \\ y = 1 \end{cases}$	0,25
		$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ . Vậy hệ có một nghiệm $(x; y) = (3; 1)$	0,25
	Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ , cho parabol $(P)$ có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng $(d)$ có phương trình $y = (m-2)x + 2m$ (với $m$ là tham số).		
<b>III</b> <b>(1,5 điểm)</b>	<b>1</b> <b>0,5 điểm</b>	1. Tìm giá trị của tham số $m$ để đường thẳng $(d)$ cắt parabol $(P)$ tại điểm có hoành độ bằng 3.	
		$x = 3 \Rightarrow y = 9$	0,25
		Thay $x = 3; y = 9$ vào phương trình đường thẳng $(d)$ ta có: $9 = 3(m-2) + 2m \Leftrightarrow 5m = 15 \Leftrightarrow m = 3$ . Vậy $m = 3$ .	0,25
	<b>2</b> <b>1,0 điểm</b>	2. Tìm điều kiện của tham số $m$ để đường thẳng $(d)$ cắt parabol $(P)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2$ thỏa mãn $x_1(2-x_2) - 2024 \leq 2(2-x_2)$ .	
		Ta có phương trình hoành độ giao điểm của $(d)$ và $(P)$ là $x^2 = (m-2)x + 2m \Leftrightarrow x^2 - (m-2)x - 2m = 0$ (1)	0,25
		$(d)$ cắt parabol tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Delta = (m-2)^2 + 8m = (m+2)^2 > 0$ $\Leftrightarrow m \neq -2$	0,25
Theo Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m-2 \\ x_1 x_2 = -2m \end{cases}$ $x_1(2-x_2) - 2024 \leq 2(2-x_2) \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) - x_1 x_2 \leq 2028$ $\Leftrightarrow 2(m-2) + 2m \leq 2028 \Leftrightarrow 4m \leq 2032 \Leftrightarrow m \leq 508$ Kết hợp điều kiện suy ra $m \leq 508; m \neq -2$		0,25	
	<b>Câu IV. (1,0 điểm)</b> Một phòng họp có 255 ghế được xếp thành từng hàng, các hàng có số ghế bằng nhau. Tại phòng họp đó có 320 người đến dự họp, do đó người ta kê thêm 1 hàng ghế có số ghế như các hàng ban đầu; sau đó mỗi hàng ghế xếp thêm 3 ghế thì vừa đủ chỗ ngồi cho người dự họp. Hỏi lúc đầu phòng họp có bao nhiêu hàng ghế và mỗi hàng có bao nhiêu ghế? (biết các ghế là như nhau và mỗi ghế chỉ một người ngồi).		
<b>IV</b> <b>1,0 điểm</b>	Gọi số hàng ghế lúc đầu của phòng họp là $x$ (hàng), $x \in \mathbb{N}^*$		0,25
	Vì phòng họp có 255 ghế nên số ghế ở mỗi hàng lúc đầu là $\frac{255}{x}$		0,25
	Trong buổi họp phải kê thêm một hàng ghế nên số hàng ghế trong cuộc họp là $x+1$		
	Do có 320 người đến dự họp nên số ghế ở mỗi hàng trong cuộc họp là $\frac{320}{x+1}$		
	Trong cuộc họp, mỗi hàng phải xếp thêm 3 ghế nên ta có phương trình $\frac{320}{x+1} - \frac{255}{x} = 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 62x + 255 = 0 \quad \begin{cases} x = 15(m) \\ x = \frac{17}{3}(l) \end{cases}$		0,5
	Vậy lúc đầu trong phòng họp có 15 hàng ghế và mỗi hàng có $\frac{255}{15} = 17$ ghế.		
<b>V</b>	Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính $AB$ . Kẻ tia $Ax$ là tiếp tuyến tại $A$ của $(O)$ . Trên		

<b>3,5 điểm</b>	tia $Ax$ lấy điểm $C$ sao cho $CA > R$ . Kẻ tiếp tuyến $CD$ của $(O)$ ( $D$ là tiếp điểm, $D$ khác $A$ ). Đường thẳng $CB$ cắt $(O)$ tại điểm $M$ ( $M$ khác $B$ ).		
<b>1</b> <b>1,0 điểm</b>	<b>1. Chứng minh tứ giác <math>ACDO</math> nội tiếp đường tròn.</b>		
		0,25	
	$CAO = 90^\circ$ ( $CA$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O)$ )		
	$CDO = 90^\circ$ ( $CD$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O)$ )		0,25
	$\Rightarrow CAO + CDO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$		0,25
Vậy tứ giác $ACDO$ nội tiếp	0,25		
<b>2</b> <b>1,0 điểm</b>	<b>2. Chứng minh hai đường thẳng <math>BD</math> và <math>OC</math> song song với nhau.</b>		
	$CD = CA$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $OA = OD = R$ $\Rightarrow OC$ là đường trung trực của $AD \Rightarrow OC \perp AD$ (1)	0,5	
	$\hat{A}DB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BD \perp AD$ (2)	0,25	
	Từ (1) và (2) suy ra $OC$ song song với $BD$	0,25	
<b>3</b> <b>0,75 điểm</b>	<b>3. Khi <math>AC = \frac{3R}{2}</math>, tính độ dài đoạn thẳng <math>MD</math> theo <math>R</math>.</b>		
			
	Gọi $P = AD \cap OC$	0,25	

$CDM = DBC$  (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn cung  $MD$  của  $(O)$ )

$$\Rightarrow \Delta CMD \text{ đồng dạng } \Delta CDB (g.g) \Rightarrow \frac{MD}{BD} = \frac{CD}{CB} \Rightarrow MD = \frac{CD \cdot BD}{BC}$$

Ta có:  $CD = CA = \frac{3R}{2}$  (cmt)

Có  $\Delta CAB$  vuông tại  $A \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \frac{5R}{2}$

$\Delta v AOC$  có:  $\frac{1}{AP^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AO^2} \Rightarrow AP = \frac{3R\sqrt{13}}{13}$

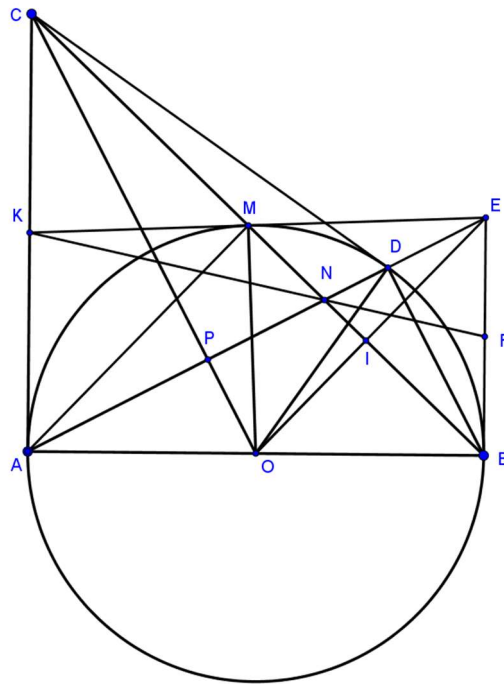
Do  $P$  là trung điểm của  $AD \Rightarrow AD = \frac{6R\sqrt{13}}{13}$

$\Rightarrow BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \frac{4R\sqrt{13}}{13} \Rightarrow MD = \frac{12R\sqrt{13}}{65}$

0,25

0,25

4. Gọi  $I$  là trung điểm của  $BM$ ;  $E, K, F$  lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng  $AD$  và  $OI$ ;  $ME$  và  $AC$ ;  $CD$  và  $BE$ . Chứng minh rằng ba đường thẳng  $AD, BC, KF$  đồng quy tại một điểm.



4  
0,75 điểm

Do  $I$  là trung điểm của  $BM \Rightarrow OI \perp MD$  (tính chất đường kính và dây cung)  $\Rightarrow \widehat{OIM} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta v OIC$  đồng dạng  $\Delta v OPE (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{OI}{OP} = \frac{OC}{OE} \Rightarrow OI \cdot OE = OP \cdot OC$$

Lại có  $\Delta COD$  vuông tại  $D \Rightarrow OP \cdot OC = OD^2 = OM^2 (= R^2)$

$$\Rightarrow OI \cdot OE = OM^2$$

$$\Rightarrow \frac{OI}{OM} = \frac{OM}{OE} \Rightarrow \Delta OIM \text{ đồng dạng } \Delta OME \text{ (c.g.c)}$$

$\Rightarrow \widehat{OME} = \widehat{OIM} = 90^\circ \Rightarrow ME$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$

Cmtt ta có  $BE$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$

$KA = KM$  (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

0,25

0,25

	<p><math>\Rightarrow \Delta KAM</math> cân tại <math>K \Rightarrow \widehat{KAM} = \widehat{KMA} \Rightarrow \widehat{KMC} = \widehat{KCM}</math> (cùng phụ với hai góc bằng nhau)</p> <p><math>\Rightarrow \Delta KCM</math> cân <math>\Rightarrow KM = KC</math> mà <math>KA = KM \Rightarrow KA = KC</math></p> <p>Chứng minh tương tự ta có <math>FB = FE</math>.</p> <p>Gọi <math>N = AE \cap BC</math>. Ta chứng minh <math>N, K, F</math> thẳng hàng</p> <p><math>AC // BE</math> (cùng vuông góc với <math>AB</math>)</p> <p><math>\Delta ANC</math> đồng dạng với <math>\Delta ENB</math> (g.g) <math>\Rightarrow \frac{AN}{NE} = \frac{AC}{BE} = \frac{AK}{EF}</math></p> <p><math>\Rightarrow \Delta ANK</math> đồng dạng với <math>\Delta ENF</math> (c.g.c) <math>\Rightarrow \widehat{ANK} = \widehat{ENF}</math></p> <p><math>180^\circ = \widehat{ANK} + \widehat{KNE} = \widehat{ENF} + \widehat{KNE} = \widehat{KNF}</math></p> <p>Vậy ba đường thẳng <math>AD, BC, KF</math> đồng quy tại <math>N</math>.</p>	0,25
<p><b>Câu VI</b> <b>0,5 điểm</b></p>	<p>Cho các số thực dương <math>x, y</math> thỏa mãn <math>x + y \leq 5</math>. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức <math>P = \frac{4}{xy} + \frac{9}{x+2y+1}</math>.</p>	
	<p><math>x + y \leq 5 \Rightarrow P = \frac{4}{xy} + \frac{9}{x+2y+1} \geq \frac{4}{xy} + \frac{9}{y+6}</math></p> <p><math>P \geq \frac{4}{xy} + \frac{xy}{9} + \frac{9}{y+6} + \frac{y+6}{9} - \frac{xy+y+6}{9}</math></p>	0,25
	<p>Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:</p> <p><math>\frac{4}{xy} + \frac{xy}{9} \geq 2\sqrt{\frac{4xy}{9xy}} = \frac{4}{3}</math> (1); <math>\frac{9}{y+6} + \frac{y+6}{9} \geq 2\sqrt{\frac{9(y+6)}{9(y+6)}} = 2</math> (2)</p> <p><math>\frac{xy+y+6}{9} = \frac{y(x+1)+6}{9} \leq \frac{(y+x+1)^2+6}{9} \leq \frac{5}{3}</math> (3)</p> <p>Kết hợp (1), (2) và (3) ta có <math>P \geq \frac{4}{3} + 2 - \frac{5}{3} = \frac{5}{3}</math></p> <p>Dấu bằng xảy ra <math>\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}</math></p> <p>Vậy GTNN của biểu thức <math>P = \frac{5}{3}</math> xảy ra khi <math>\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}</math></p>	0,25