BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM NĂM 2024

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm có 01 trang)

MÔN THI: TOÁN

(Dùng riêng cho thí sinh thi vào lớp chuyên Toán và chuyên Tin học)
Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài 1. (3,0 điểm) a) Cho hai số thực a, b thỏa mãn các điều kiện sau: $|a| < 2024, |b| < 2024$ và $\sqrt{a+2024}+\sqrt{2025-a}-\sqrt{2024-a}=\sqrt{b+2024}+\sqrt{2025-b}-\sqrt{2024-b}$.

Tính giá trị của biểu thức $M = a^{2024}+a^{2025}-b^{2024}-b^{2025}$.

b) Tồn tại hay không các số hữu tỉ dương a, b sao cho $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{\sqrt{2024}}$?

Bài 2. (2,0 điểm) Giả sử ta có quy tắc $*$ mà với mỗi cặp số nguyên dương $(a; b)$, ta luôn xác định được chỉ một số nguyên dương tương ứng kí hiệu là $a*b$, sao cho ba điều kiện sau được thỏa mãn:

i) $a*a=a$ với mọi số nguyên dương a;

ii) $a*b=b*a$ với mọi số nguyên dương a và b;

iii) $a*b=(a-b)*b$ với mọi số nguyên dương a và b mà $a>b$.

a) Tính giá trị của $16*2024$.

b) Hãy chỉ ra một quy tắc $*$ thỏa mãn ba điều kiện trên.

Bài 3. (3,0 điểm) Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung BC cố định không đi qua tâm O. Điểm A di dộng trên $(O;R)$ sao cho tam giác ABC nhọn và $AB \neq AC$. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H. Đường thẳng EF cắt $(O;R)$ tại hai điểm P và Q (điểm F nằm giữa hai điểm P và E). Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh:

a) $AP^2 = AQ^2 = AH.AD$.

b) Bốn điểm P, Q, M, D cùng thuộc một đường tròn (ω).

c) Tâm I của đường tròn (ω) chạy trên một đường tròn cố định.

Bài 4. (1,0 điểm) Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta đặt $f(n)$ là tổng các chữ số của số $3n^2+n+1$ (Ví dụ: với $n=3$ thì $3n^2+n+1=31$ và $f(3)=4$). Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của $f(n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Bài 5. (1,0 điểm) Cho bảng vuông kích thước 8×8 được chia thành 8 hàng, 8 cột, 64 ô vuông đơn vị có cùng kích thước. Ta lát kín bảng đó bằng các domino màu đen và domino màu trắng (mỗi domino như thế là hình gồm 2 ô vuông đơn vị có chung cạnh) thỏa mãn ba điều kiện sau:

i) Mỗi domino phủ đúng 2 ô vuông đơn vị của bảng;

ii) Hai domino không cùng phủ một ô vuông đơn vị của bảng;

iii) Mọi hình vuông gồm 4 ô vuông đơn vị của bảng đều có ít nhất một ô vuông đơn vị được phủ bởi một domino màu đen.

Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho tồn tại một cách lát bảng ban đầu thỏa mãn ba điều kiện trên mà trong cách lát đó ta sử dụng đúng k domino màu đen.

HẾT

Ghi chú: Thí sinh không được sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh:.. Số báo danh:............................

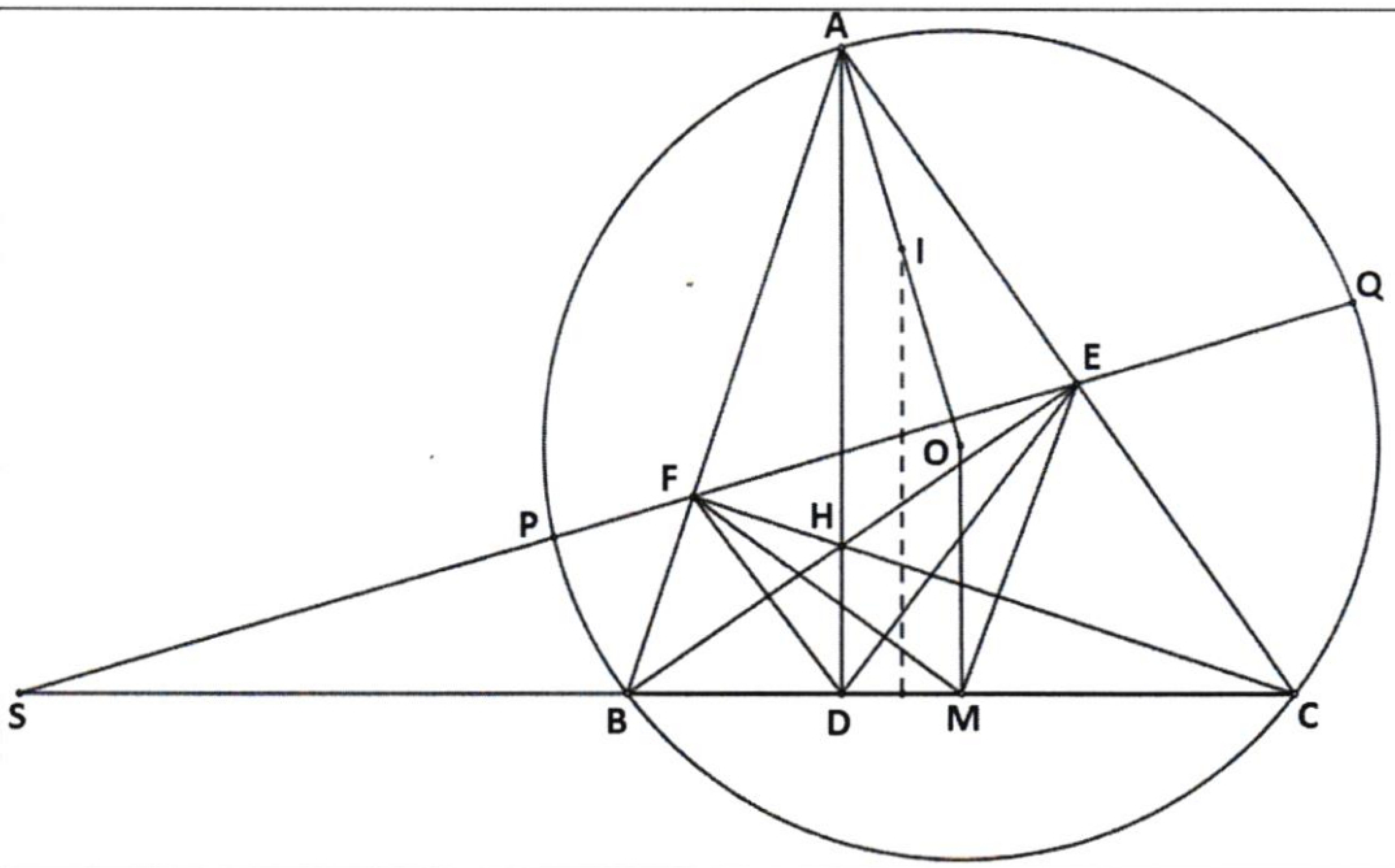
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM NĂM 2024

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐÁP ÁN-HƯỚNG DẪN GIẢI
MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Câu	**Nội dung**	**Điểm**
Bài 1		**3,0**
a		**1,5**
	Điều kiện: $-2024 < a < 2024,\ -2024 < b < 2024$. Ta có: $\sqrt{a+2024}+\sqrt{2025-a}-\sqrt{2024-a}=\sqrt{b+2024}+\sqrt{2025-b}-\sqrt{2024-b}$ $\Leftrightarrow (\sqrt{a+2024}-\sqrt{b+2024})+(\sqrt{2025-a}-\sqrt{2025-b})+(\sqrt{2024-b}-\sqrt{2024-a})=0$ $\Leftrightarrow (a-b).\left(\dfrac{1}{\sqrt{a+2024}+\sqrt{b+2024}}-\dfrac{1}{\sqrt{2025-a}+\sqrt{2025-b}}+\dfrac{1}{\sqrt{2024-b}+\sqrt{2024-a}}\right)=0(*).$	
	Do $\dfrac{1}{\sqrt{2024-a}+\sqrt{2024-b}}-\dfrac{1}{\sqrt{2025-a}+\sqrt{2025-b}}>0$ nên $\dfrac{1}{\sqrt{a+2024}+\sqrt{b+2024}}+\dfrac{1}{\sqrt{2024-a}+\sqrt{2024-b}}-\dfrac{1}{\sqrt{2025-a}+\sqrt{2025-b}}>0.$	
	Do đó, từ (*) suy ra $a=b$. Với $a=b$ thì $M=a^{2024}+a^{2025}-b^{2024}-b^{2025}=0.$	
b		**1,5**
	Giả sử tồn tại các số hữu tỉ dương a, b sao cho $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{\sqrt{2024}}$.	
	Ta có: $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{\sqrt{2024}} \Rightarrow a+b+2\sqrt{ab}=\sqrt{2024}$ $\Rightarrow 2\sqrt{ab}=\sqrt{2024}-(a+b)$ $\Rightarrow 4ab=2024+(a+b)^2-2(a+b)\sqrt{2024}$ (*)	
	Từ (*) và $a>0$, $b>0$, ta suy ra: $2(a+b)\sqrt{2024}=2024+\left[(a+b)^2-4ab\right]$ $\Rightarrow \sqrt{2024}=\dfrac{2024+[(a+b)^2-4ab]}{2(a+b)}$ (**).	
	Từ (**), ta nhận được mâu thuẫn vì $\sqrt{2024}$ là số vô tỉ, còn $\dfrac{2024+[(a+b)^2-4ab]}{2(a+b)}$ là số hữu tỉ. Vậy không tồn tại các số hữu tỉ dương a, b sao cho $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{\sqrt{2024}}$.	

Bài 2		**2,0**
a		**1,0**
	Ta có: $16*2024=2024*16=(2024-16)*16=(2024-2.16)*16=...=(2024-126.16)*16$	
	$=8*16=16*8=(16-8)*8=8*8=8.$	
b		**1,0**
	Xét quy tắc * cho tương ứng mỗi cặp số nguyên dương $(a;b)$ với ƯCLN(a,b). Tức là $a*b=$ ƯCLN(a,b).	
	Ta thấy: i) Do ƯCLN$(a,a)=a$ nên $a*a=a$ với mọi số nguyên dương a; ii) Do ƯCLN$(a,b)=$ ƯCLN(b,a) nên $a*b=b*a$ với mọi số nguyên dương a, b; iii) Xét a, b nguyên dương thỏa mãn $a>b$: Do ƯCLN$(a,b)=$ ƯCLN$(a-b,b)$ nên $a*b=(a-b)*b$. Vậy quy tắc * xác định như trên thỏa mãn yêu cầu của bài toán.	
Bài 3		**3,0**
a		**1,0**
	Do tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $AFQ=ACB$. Suy ra sđ AQ + sđ PB = sđ AB, tức là $AQ=AP$ (cung ở đây ta hiểu là cung nhỏ). Vì thế $AP=AQ$.	
	Do $\Delta ADB \backsim \Delta AFH$ nên $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AH}{AF} \Rightarrow AB.AF=AD.AH$.	
	Xét hai tam giác AFP và APB, ta có: $FAP=PAB$; $APF=ABP$ (do $AQ=AP$). Suy ra $\Delta AFP \backsim \Delta APB$, do đó $\dfrac{AP}{AF}=\dfrac{AB}{AP} \Rightarrow AB.AF=AP^2$.	

	Vậy $AP^2 = AQ^2 = AD.AH$.	
b		**1,0**
	Gọi S là giao điểm của đường thẳng EF và BC. Do tứ giác $BCQP$ nội tiếp nên $\Delta SPB \backsim \Delta SCQ$, suy ra $\dfrac{SB}{SP} = \dfrac{SQ}{SC} \Rightarrow SP.SQ = SB.SC$. Do tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $\Delta SBF \backsim \Delta SEC$, suy ra $\dfrac{SB}{SF} = \dfrac{SE}{SC} \Rightarrow SB.SC = SF.SE$. Do đó $SP.SQ = SF.SE$ (1).	
	Do tam giác CFM cân tại M nên $BMF = 2BCF$. Do tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $FEB = BCF$. Do tứ giác $CDHE$ nội tiếp nên $HED = BCF$. Suy ra $DEF = HED + FEB = 2BCF$. Do đó $DMF = BMF = DEF$, suy ra bốn điểm D, M, E, F nằm trên một đường tròn.	
	Do bốn điểm D, M, E, F nằm trên một đường tròn nên $\Delta SDF \backsim \Delta SEM$, suy ra $\dfrac{SD}{SF} = \dfrac{SE}{SM} \Rightarrow SF.SE = SD.SM$ (2).	
	Từ (1) và (2) ta có: $SP.SQ = SD.SM$. Vậy bốn điểm P, D, M, Q nằm trên cùng một đường tròn.	
c		**1,0**
	Do $AP = AQ$ nên AO là đường trung trực của đoạn thẳng PQ. Mà PQ là dây cung của đường tròn (ω) nên điểm I nằm trên đường thẳng AO.	
	Do DM là dây cung của đường tròn (ω) nên điểm I nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng DM.	
	Do tứ giác $ADMO$ là hình thang vuông với hai đáy là OM, AD nên đường trung trực của đoạn thẳng DM đi qua trung điểm của đoạn thẳng AO.	
	Do đó I là trung điểm của đoạn thẳng AO. Suy ra $OI = \dfrac{1}{2}OA = \dfrac{1}{2}R$. Vậy I chạy trên đường tròn tâm O bán kính $\dfrac{1}{2}R$.	
Bài 4		**1,0**
	Vì $3n^2 + n + 1 = 2n^2 + n(n+1) + 1$ là số lẻ nên chữ số hàng đơn vị của nó khác 0. Mà $3n^2 + n + 1 > 1$ nên $f(n) \geq 2$.	
	Nếu $f(n) = 2$ thì $3n^2 + n + 1$ có dạng $\overline{10\cdots01}$, trong đó chữ số đầu và chữ số cuối bằng 1, các chữ số còn lại (nếu có) phải bằng 0. Do đó $3n^2 + n + 1 = 10^k + 1$ với k nguyên dương $\Rightarrow 3n^2 + n = 10^k \Rightarrow n(3n+1) = 10^k$.	
	Vì $(n; 3n+1) = 1$ nên ta có các trường hợp sau: *Trường hợp 1:* $n = 1, 3n+1 = 10^k \Rightarrow 4 = 10^k$: Điều này là vô lí. *Trường hợp 2:* $n = 2^k, 3n+1 = 5^k \Rightarrow 3 \cdot 2^k + 1 = 5^k$. Nếu $k = 1$ thì $3.2 + 1 = 5$: Điều này là vô lí. Nếu $k \geq 2$ thì $5^k > 4^k = 2^k \cdot 2^k \geq 4 \cdot 2^k = 3 \cdot 2^k + 2^k > 3 \cdot 2^k + 1$: Điều này là vô lí.	
	Vậy ta luôn có $f(n) > 2$, tức $f(n) \geq 3$. Mặt khác, ta có: $f(8) = 3$. Vì thế giá trị nhỏ nhất của $f(n)$ là 3.	

Bài 5		1,0

Ta đánh dấu × vào một số ô vuông đơn vị của bảng đã cho như sau:

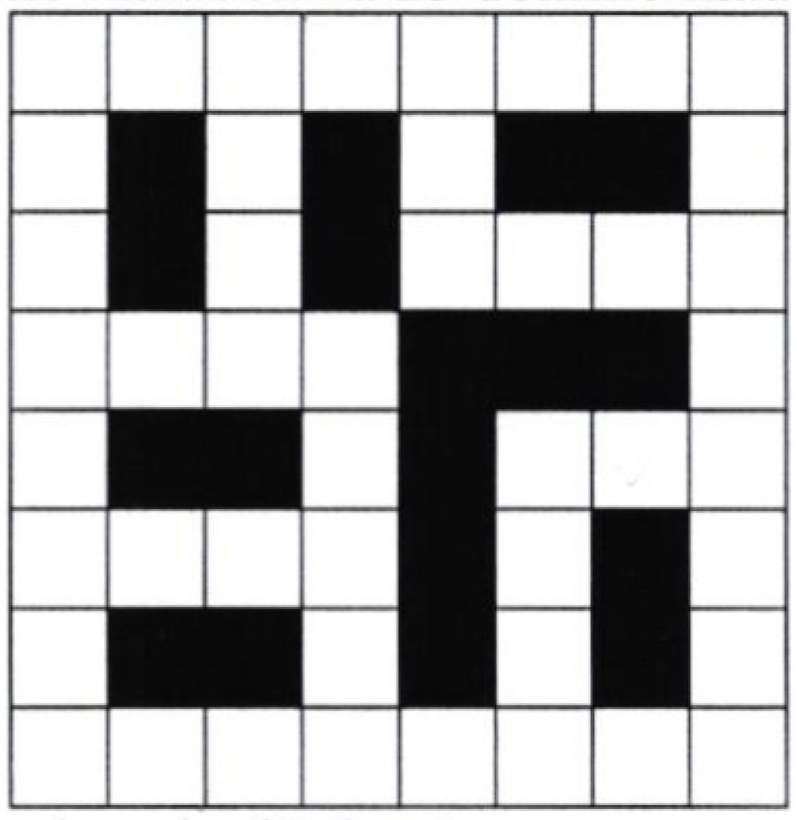
		×			×		
		×			×		
×	×	×	×	×	×	×	×
		×			×		
		×			×		
×	×	×	×	×	×	×	×
		×			×		
		×			×		

Phần bảng còn lại gồm các ô vuông đơn vị không được đánh dấu là hợp của 9 hình vuông 2×2, ta gọi các hình vuông này là hình vuông “đẹp”. Ta kí hiệu 9 hình vuông “đẹp” này là $H_1, H_2, ..., H_9$.

Xét một cách lát thỏa mãn yêu cầu. Với mỗi hình vuông “đẹp” H_i, ta gọi d_i là số domino màu đen phủ ít nhất một ô vuông đơn vị của nó. Xét $T = d_1 + d_2 + ... + d_9$.
Theo giả thiết, ta có: $d_i \geq 1, \forall i = 1, 2, ..., 9,$ suy ra $T \geq 9$.

Do không thể có domino màu đen được lát nào lại phủ lên cả hai hình vuông “đẹp” khác nhau nên số domino màu đen cần dùng lớn hơn hoặc bằng T.
Vậy số domino màu đen cần sử dụng để lát được theo yêu cầu lớn hơn hoặc bằng 9.

Ta chỉ ra cách lát với 9 domino màu đen và 23 domino màu trắng thỏa mãn đề bài.



Bước 1: Ta lát 9 domino màu đen như hình vẽ.
Bước 2: Ta lát kín phần còn lại của bảng bằng 23 domino màu trắng.
Vậy giá trị nhỏ nhất của k là 9.

HẾT