

Câu I (2,0 điểm)

- Giải phương trình $x(x+1) + 2x\sqrt{x+2} + 2 = 0$.
- Cho a, b, c là các số thực khác 0 và thỏa mãn $a^2 - 2a(b+c) = b^2 - 2b(c+a) = c^2 - 2c(a+b)$.

Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}$.

Câu II (2,0 điểm)

- Tìm tất cả các số nguyên x và y thỏa mãn $x^2 + 4y^2 = 2xy(x-2y) + 5$.
- Cho m, n là các số nguyên thỏa mãn số $m^2 - mn + 4n^2$ chia hết cho 25. Chứng minh số $m^2 + mn + 4n^2$ chia hết cho 25.

Câu III (2,0 điểm)

- Cho x, y, k là các số nguyên dương sao cho số $p = \frac{x^k y}{x^2 + y^2}$ là số nguyên tố. Tìm k .
- Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a \leq 2, b \leq 2, c \leq 2$ và $a + b + c = 3$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{ab(b+c+1)} + \sqrt{bc(c+a+1)} + \sqrt{ca(a+b+1)}$.

Câu IV (3,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) , điểm M nằm giữa hai điểm B và C . Hai đường thẳng AM và DC cắt nhau tại P . Hai đường thẳng DM và AB cắt nhau tại K .

- Chứng minh tam giác BCK đồng dạng với tam giác CPB .
- Hai đường thẳng BP và CK cắt nhau tại H . Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt đường thẳng MH tại R . Chứng minh tam giác BRK là tam giác vuông cân.
- Các đường thẳng vuông góc với OH kẻ từ O và H , cắt đường thẳng AB lần lượt tại X và Y . Lấy điểm Q thuộc tia đối của tia BC sao cho $BQ = CM$. Chứng minh hai đường thẳng QR, DK cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác MXY .

Câu V (1,0 điểm)

Cho bảng ô vuông kích thước 6×6 . Ở bước đầu tiên, bạn Đan tô đỏ k ô vuông bất kỳ của bảng. Sau đó, ở mỗi bước tiếp theo bạn Đan tô đỏ các ô vuông kề với ít nhất hai ô đã được tô đỏ (hai ô vuông được gọi là kề nhau nếu chúng có cạnh chung).

- Chỉ ra một cách tô đỏ 23 ô của bảng ở bước đầu tiên sao cho dù sau bao nhiêu bước, bạn Đan cũng không thể tô đỏ được tất cả các ô của bảng.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của k để tồn tại một cách tô đỏ k ô vuông ban đầu sao cho sau một số hữu hạn bước, bạn Đan tô đỏ được tất cả các ô vuông của bảng.

-----HẾT-----

Câu I (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 3x} = x^2 - 3x - 2$.

2) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{x-2y}{z} = \frac{y-2z}{x} = \frac{z-2x}{y}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \left(2 + \frac{x}{y}\right) \left(2 + \frac{y}{z}\right) \left(2 + \frac{z}{x}\right).$$

Câu II (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả các số nguyên x và y thỏa mãn $2x^2 + 2xy + 3y = 4y^2 + 3$.

2) Cho các số nguyên dương x, y và số nguyên tố p thỏa mãn $\frac{p}{(2x+y)^2} = \frac{x-y}{p}$. Chứng minh

$$p = 3y + 2.$$

Câu III (2,0 điểm)

1) Cho a, b và c là các số nguyên dương thỏa mãn $\frac{a-b^2}{b} = a(a-c^2)$. Chứng minh $b = c$.

2) Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a \leq 1, b \leq 1, c \leq 1$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 2$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{a^4}{bc+2} + \frac{b^4}{ca+2} + \frac{c^4}{ab+2}$.

Câu IV (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng BC cắt đường tròn (O) tại giao điểm thứ hai là D . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Đường thẳng DM cắt đường tròn (O) tại giao điểm thứ hai là S .

1) Chứng minh tam giác ACS đồng dạng với tam giác BMS .

2) Gọi J là trung điểm của đoạn thẳng AS . Đường thẳng BJ cắt đường tròn (O) tại giao điểm thứ hai là T . Chứng minh đường thẳng CT song song với đường thẳng AS .

3) Các đường cao DE, BF và CK của tam giác BCD đồng quy tại H . Gọi L là chân đường vuông góc kẻ từ điểm H đến đường thẳng KF . Chứng minh các đường thẳng AE và DL cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O) .

Câu V (1,0 điểm)

Cho bảng ô vuông kích thước $n \times n$ và hai loại miếng ghép hình “dấu cộng”, “dấu trừ” như hình dưới. Ta cần phủ kín bảng ô vuông đã cho bằng cách sử dụng cả hai loại miếng ghép, các miếng ghép không được chồng lên nhau. Biết rằng mỗi ô vuông nhỏ của các miếng ghép chồng khít với một ô vuông nhỏ trong bảng và miếng ghép “dấu trừ” có thể xoay 90° .

1) Chỉ ra một cách phủ kín thỏa mãn yêu cầu trên với $n = 6$.

2) Tìm tất cả giá trị của n để bảng ô vuông kích thước $n \times n$ có thể được phủ kín bằng cách sử dụng cả hai loại miếng ghép đã cho.



HẾT

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.