

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: Toán (chuyên)

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Khóa thi ngày: 04 - 06/6/2024

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{x-5\sqrt{x}+6}$ , với  $x \geq 0$ ,  $x \neq 4$  và  $x \neq 9$ . Rút gọn biểu thức A và tìm tất cả các giá trị của x sao cho  $A > -1$ .

b) Cho parabol (P):  $y = -x^2$  và điểm A thuộc (P) có hoành độ bằng -2. Đường thẳng (d) đi qua điểm B(0;-3), song song với OA (O là gốc tọa độ) và cắt (P) tại hai điểm M, N. Tìm tọa độ của M và N, biết M có hoành độ âm.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình  $x^2 + \sqrt{x^2 + x + 3} = x + 2 + \sqrt{2x + 5}$ .

b) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 3xy + y^2 + 2x - 10y - 1 = 0 \\ (3xy + y^2)(2x - 1) - 21y^2 = 0 \end{cases}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

Cho hình bình hành ABCD có góc BAD là góc tù,  $AB < AD$  và tia phân giác của góc BAD cắt cạnh BC tại K sao cho  $CK < AB$ . Trên cạnh AB lấy điểm L sao cho  $AL = CK$ . Hai đoạn thẳng AK và CL cắt nhau tại M. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ALM cắt đường thẳng AD tại N (N khác A).

a) Chứng minh  $AB \cdot NL = AK \cdot NM$ .

b) Chứng minh  $\widehat{CNL} = 90^\circ$ .

c) Gọi I là giao điểm của BD và KL, chứng minh  $\frac{BA}{BL} + \frac{BC}{BK} = \frac{BD}{BI}$ .

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ( $AB < AC$ ) có AE là đường phân giác (E thuộc cạnh BC). Trên đường thẳng đi qua A và vuông góc với AE lấy điểm D sao cho góc BCD bằng  $90^\circ$ . Trên cạnh AB lấy điểm F sao cho góc DEF bằng  $90^\circ$ .

a) Chứng minh tứ giác ADCE nội tiếp đường tròn và  $BE^2 = BA \cdot BF$ .

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF, đường thẳng đi qua E và song song với AC cắt cạnh AB tại P. Chứng minh OP vuông góc với AE và điểm O thuộc đường thẳng BD.

Câu 5. (2,0 điểm)

a) Cho ba số tự nhiên  $a, b, c$  thỏa mãn  $a > 1$ ,  $b > c > 1$  và  $abc + 1$  chia hết cho  $ab - b + 1$ . Chứng minh  $b$  chia hết cho  $a$ .

b) Cho ba số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $\frac{x-1}{x+3} + \frac{y-1}{y+4} \geq \frac{6}{z+5}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = (2x+2)(2y+3)(2z+4)$ .

----- HẾT -----

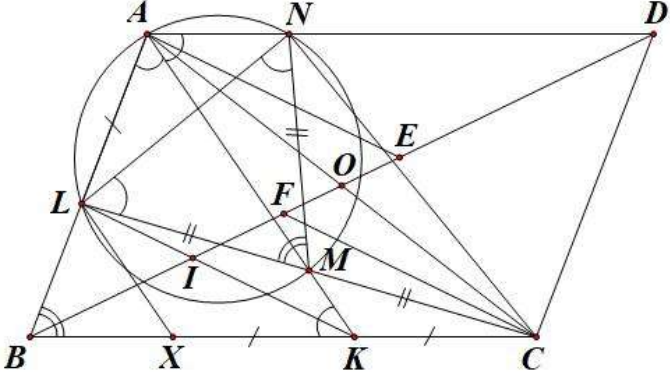
\* Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

\* Họ và tên thí sinh: ..... Số báo danh: .....

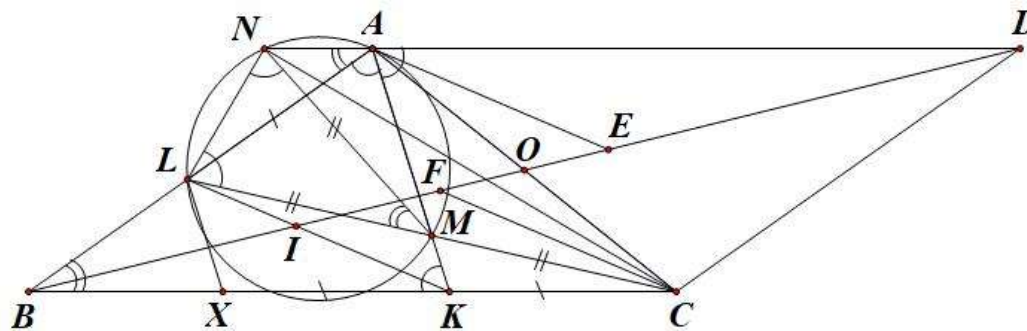
| Câu   | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Điểm |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Câu 1 | a) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{x-5\sqrt{x}+6}$ , với $x \geq 0, x \neq 4$ và $x \neq 9$ .<br>Rút gọn biểu thức A và tìm tất cả các giá trị của x sao cho $A > -1$ .                                                                                    | 1,0  |
|       | $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{(\sqrt{x}-2)^2 - (\sqrt{x}-3)^2 + 1}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}$                                                                                                                                        | 0,25 |
|       | $= \frac{x-4\sqrt{x}+4-(x-6\sqrt{x}+9)+1}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{2}{\sqrt{x}-3}$                                                                                                                                                                             | 0,25 |
|       | $A > -1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-3} > -1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-3} + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} > 0$<br>Trường hợp 1: $\begin{cases} \sqrt{x}-1 > 0 \\ \sqrt{x}-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 9 \end{cases} \Leftrightarrow x > 9$ (nhận). | 0,25 |
|       | Trường hợp 2: $\begin{cases} \sqrt{x}-1 < 0 \\ \sqrt{x}-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ 0 \leq x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$ (nhận).<br>Vậy $x > 9$ hoặc $0 \leq x < 1$ .                                                                                            | 0,25 |
|       | b) Cho parabol (P): $y = -x^2$ và điểm A thuộc (P) có hoành độ bằng -2. Đường thẳng (d) đi qua điểm B(0;-3), song song với OA (O là gốc tọa độ) và cắt (P) tại hai điểm M, N. Tìm tọa độ của M và N, biết M có hoành độ âm.                                                                                            | 1,0  |
|       | Tung độ điểm A là $y = -(-2)^2 = -4$ , suy ra A(-2;-4).                                                                                                                                                                                                                                                                | 0,25 |
|       | Đường thẳng OA: $y = 2x$ . Gọi đường thẳng (d): $y = ax + b$ .<br>Vì (d) song song OA nên hệ số góc $a = 2, b \neq 0$ . Vì (d) đi qua B(0;-3) nên $b = -3$ .<br>Suy ra (d): $y = 2x - 3$ .                                                                                                                             | 0,25 |
|       | Các hoành độ của M và N là các nghiệm của phương trình: $-x^2 = 2x - 3$<br>$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$<br>Phương trình này có 2 nghiệm: $x = 1, x = -3$ .                                                                                                                                                       | 0,25 |
|       | Vì M có hoành độ âm nên M(-3;-9) và N(1;-1).                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,25 |

| Câu   | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Điểm |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Câu 2 | a) Giải phương trình $x^2 + \sqrt{x^2 + x + 3} = x + 2 + \sqrt{2x + 5}$ (1)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 1,0  |
|       | $x^2 + x + 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ .<br>Điều kiện: $2x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{2}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0,25 |
|       | $(1) \Leftrightarrow x^2 - x - 2 + \sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{2x + 5} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 + \frac{(x^2 + x + 3) - (2x + 5)}{\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{2x + 5}} = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                      | 0,25 |
|       | $\Leftrightarrow x^2 - x - 2 + \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{2x + 5}} = 0$<br>$\Leftrightarrow (x^2 - x - 2) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{2x + 5}}\right) = 0$<br>$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ (vì $1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{2x + 5}} > 0$ với mọi $x \geq -\frac{5}{2}$ )                                                                                                                       | 0,25 |
|       | Phương trình này có 2 nghiệm: $x = -1, x = 2$ (thỏa mãn điều kiện).<br>Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x = -1, x = 2$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0,25 |
|       | b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3xy + y^2 + 2x - 10y - 1 = 0 \\ (3xy + y^2)(2x - 1) - 21y^2 = 0 \end{cases}$ (1)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 1,0  |
| Câu 2 | - Xét $y = 0$ : Hệ (1) có nghiệm $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0,25 |
|       | - Xét $y \neq 0$ : Hệ (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} (3xy + y^2) + (2x - 1) = 10y \\ (3xy + y^2)(2x - 1) = 21y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3xy + y^2}{y} + \frac{2x - 1}{y} = 10 \\ \left(\frac{3xy + y^2}{y}\right) \left(\frac{2x - 1}{y}\right) = 21 \end{cases}$ (2)                                                                                                                                                    | 0,25 |
|       | Đặt $a = \frac{3xy + y^2}{y}, b = \frac{2x - 1}{y}$ , hệ (2) trở thành: $\begin{cases} a + b = 10 \\ ab = 21 \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |      |
|       | $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 3 \\ b = 7 \end{cases}$<br>Với $\begin{cases} a = 7 \\ b = 3 \end{cases}$ , ta có $\begin{cases} \frac{3xy + y^2}{y} = 7 \\ \frac{2x - 1}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3xy + y^2 = 7y \\ 2x - 1 = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ | 0,25 |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |      |
|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|  | <p>Với <math>\begin{cases} a=3 \\ b=7 \end{cases}</math>, ta có <math>\begin{cases} \frac{3xy+y^2}{y}=3 \\ \frac{2x-1}{y}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3xy+y^2=3y \\ 2x-1=7y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=3 \\ 2x-7y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{22}{23} \\ y=\frac{3}{23} \end{cases}</math></p> <p>Vậy hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm: <math>\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{22}{23} \\ y=\frac{3}{23} \end{cases}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0,25 |
|  | <p><b>Cách khác giải câu 2b)</b></p> <p>Đặt <math>u = 3xy + y^2</math>, <math>v = 2x - 1</math>, hệ (1) viết lại: <math>\begin{cases} u+v=10y \\ uv=21y^2 \end{cases}</math>, khi đó <math>u, v</math> thỏa mãn phương trình: <math>X^2 - 10y.X + 21y^2 = 0 \Leftrightarrow (X - 7y)(X - 3y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 7y \\ X = 3y \end{cases}</math>.</p> <p>+ Với <math>\begin{cases} u = 7y \\ v = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3xy + y^2 = 7y \\ 2x - 1 = 3y \end{cases}</math>, tìm được nghiệm <math>\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}</math>.</p> <p>+ Với <math>\begin{cases} u = 3y \\ v = 7y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3xy + y^2 = 3y \\ 2x - 1 = 7y \end{cases}</math>, tìm được nghiệm <math>\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{22}{23} \\ y = \frac{3}{23} \end{cases}</math>.</p> <p>Kết luận hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm: <math>\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{22}{23} \\ y = \frac{3}{23} \end{cases}</math>.</p> |      |

| Câu   | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                               | Điểm |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|       | Cho hình bình hành ABCD có góc BAD là góc tù, $AB < AD$ và tia phân giác của góc BAD cắt cạnh BC tại K sao cho $CK < AB$ . Trên cạnh AB lấy điểm L sao cho $AL = CK$ . Hai đoạn thẳng AK và CL cắt nhau tại M. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ALM cắt đường thẳng AD tại N (N khác A). | 2,0  |
|       | a) Chứng minh $AB.NL = AK.NM$                                                                                                                                                                                                                                                          | 0,75 |
|       |  <p>Hình vẽ phục vụ câu a): 0,25 điểm</p>                                                                                                                                                            | 0,25 |
|       | Tứ giác ALMN nội tiếp đường tròn nên $\widehat{BAK} = \widehat{MNL}$ (1)                                                                                                                                                                                                               | 0,25 |
|       | Ta có: $\widehat{ABK} = 180^\circ - \widehat{LAN} = \widehat{NML}$ (2)                                                                                                                                                                                                                 | 0,25 |
|       | Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ABK$ và $\triangle NML$ đồng dạng.                                                                                                                                                                                                                     | 0,25 |
| Câu 3 | Do đó $\frac{AB}{NM} = \frac{AK}{NL}$ hay $AB.NL = AK.NM$ .                                                                                                                                                                                                                            | 0,25 |
|       | b) Chứng minh $\widehat{CNL} = 90^\circ$ .                                                                                                                                                                                                                                             | 0,75 |
|       | Vì $\widehat{NAM} = \widehat{LAM}$ nên $NM = LM$ (3)                                                                                                                                                                                                                                   | 0,25 |
|       | Kẻ $LX \parallel AK$ , X thuộc BC. Vì $\widehat{AKX} = \widehat{KAD} = \widehat{KAL}$ nên tứ giác ALXK là hình thang cân, suy ra $XK = AL = CK$ .                                                                                                                                      | 0,25 |
|       | Tam giác CLX có $XK = CK$ và $MK \parallel XL$ nên $LM = CM$ (4)                                                                                                                                                                                                                       | 0,25 |
|       | Từ (3) và (4) suy ra $NM = LM = CM$ . Do đó $\triangle CNL$ vuông tại N hay $\widehat{CNL} = 90^\circ$ .                                                                                                                                                                               | 0,25 |
|       | c) Gọi I là giao điểm của BD và KL, chứng minh $\frac{BA}{BL} + \frac{BC}{BK} = \frac{BD}{BI}$ .                                                                                                                                                                                       | 0,5  |
|       | Kẻ $AE \parallel KL$ và $CF \parallel KL$ (E, F thuộc BD), gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có: $\frac{BA}{BL} + \frac{BC}{BK} = \frac{BE}{BI} + \frac{BF}{BI} = \frac{BO + OE}{BI} + \frac{BO - OF}{BI} = \frac{2BO + OE - OF}{BI}$                                                | 0,25 |
|       | Hai tam giác AOE và COF bằng nhau (g-c-g), suy ra $OE = OF$ .<br>Do đó $\frac{BA}{BL} + \frac{BC}{BK} = \frac{2BO}{BI} = \frac{BD}{BI}$ .                                                                                                                                              | 0,25 |

Với hình vẽ sau, cách chứng minh (1), (2), (3):



**Câu a)**

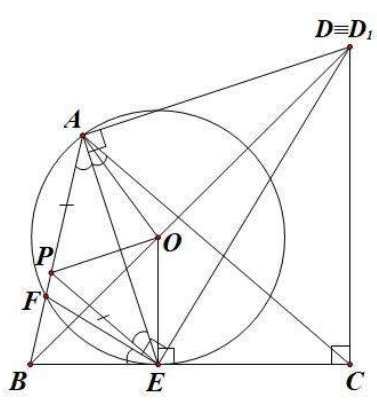
Tứ giác AMLN nội tiếp đường tròn nên  $\widehat{BAK} = \widehat{MNL}$  (1)

$\widehat{ABK} = \widehat{NAL}$ ,  $\widehat{NAL} = \widehat{NML} \Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{NML}$  (2)

**Câu b)**

$\widehat{MLN} = \widehat{MAD}$  (do tứ giác AMLN nội tiếp đường tròn)  
 $= \widehat{MAL} = \widehat{MNL}$

Suy ra  $\triangle NML$  cân tại M hay  $NM = LM$  (3)

| Câu   | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Điểm |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|       | Cho tam giác nhọn ABC ( $AB < AC$ ) có AE là đường phân giác (E thuộc cạnh BC). Trên đường thẳng đi qua A và vuông góc với AE lấy điểm D sao cho góc BCD bằng $90^\circ$ . Trên cạnh AB lấy điểm F sao cho góc DEF bằng $90^\circ$ .                                                                                               | 2,0  |
|       | a) Chứng minh tứ giác ADCE nội tiếp đường tròn và $BE^2 = BA \cdot BF$ .                                                                                                                                                                                                                                                           | 1,0  |
|       |  <p>Hình vẽ phục vụ câu a): 0,25 điểm</p>                                                                                                                                                                                                        | 0,25 |
|       | Theo giả thiết: $\widehat{DAE} = 90^\circ$ và $\widehat{DCE} = 90^\circ$ . Vì $\widehat{DAE} + \widehat{DCE} = 180^\circ$ nên tứ giác ADCE nội tiếp đường tròn (đường kính DE).                                                                                                                                                    | 0,25 |
| Câu 4 | $\widehat{BAE} = \widehat{CAE}$ , $\widehat{CAE} = \widehat{CDE}$ (cùng chắn cung CE của đường tròn đường kính DE), $\widehat{CDE} = 180^\circ - 90^\circ - \widehat{CED} = \widehat{BEF} \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{BEF}$ .                                                                                             | 0,25 |
|       | Do đó $\triangle BAE$ và $\triangle BEF$ đồng dạng. Do đó $\frac{BA}{BE} = \frac{BE}{BF}$ hay $BE^2 = BA \cdot BF$ .                                                                                                                                                                                                               | 0,25 |
|       | b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF, đường thẳng đi qua E và song song với AC cắt cạnh AB tại P. Chứng minh OP vuông góc với AE và điểm O thuộc đường thẳng BD.                                                                                                                                                     | 1,0  |
|       | Vì $\widehat{AEP} = \widehat{EAC} = \widehat{EAP}$ nên $\triangle AEP$ cân tại P hay $PA = PE$ . Vì $PA = PE$ và $OA = OE$ nên OP là đường trung trực của đoạn thẳng AE. Suy ra $OP \perp AE$ .                                                                                                                                    | 0,25 |
|       | Vì $\widehat{BEF} = \widehat{BAE}$ (theo câu a)) nên BE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$ , suy ra $OE \perp BC \Rightarrow OE \parallel CD$ . Vì $OP \parallel DA$ , $OE \parallel DC$ , $EP \parallel CA$ nên $\triangle OEP$ đồng dạng với $\triangle DCA$ , suy ra $\frac{OE}{DC} = \frac{EP}{CA}$ . (1) | 0,25 |
|       | $EP \parallel CA \Rightarrow \frac{EP}{CA} = \frac{BE}{BC}$ (2). Giả sử BO cắt CD tại $D_1$ ; $OE \parallel D_1C \Rightarrow \frac{BE}{BC} = \frac{OE}{D_1C}$ (3)                                                                                                                                                                  | 0,25 |
|       | Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{OE}{DC} = \frac{OE}{D_1C} \Leftrightarrow DC = D_1C$ , mà D và $D_1$ nằm cùng phía đối với đường thẳng BC nên D trùng $D_1$ . Vậy điểm O thuộc đường thẳng BD.                                                                                                                                    | 0,25 |
|       | <b>Cách khác:</b> Từ (1) và (2) suy ra $\frac{OE}{DC} = \frac{BE}{BC}$ , mà $\widehat{BEO} = \widehat{BCD} = 90^\circ$ nên $\triangle BEO$ và $\triangle BCD$ đồng dạng. Suy ra $\widehat{EBO} = \widehat{CBD}$ , mà O và D nằm cùng phía đối với đường thẳng BC nên hai tia BO và BD trùng nhau. Vậy điểm O thuộc đường thẳng BD. |      |

| Câu   | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Điểm |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|       | a) Cho ba số tự nhiên $a, b, c$ thỏa mãn $a > 1, b > c > 1$ và $abc + 1$ chia hết cho $ab - b + 1$ . Chứng minh $b$ chia hết cho $a$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 1,0  |
|       | Ta có: $(abc + 1) - (ab - b + 1) = b(ac - a + 1)$<br>Vì $(abc + 1) : (ab - b + 1)$ nên $b(ac - a + 1) : (ab - b + 1)$ (1)                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0,25 |
|       | Vì $ab - b + 1 = (a - 1)b + 1$ nên $ab - b + 1$ và $b$ là hai số nguyên tố cùng nhau.<br>Do đó (1) $\Rightarrow (ac - a + 1) : (ab - b + 1)$ hay $(ac - a + 1) = k.(ab - b + 1), k \in \mathbb{N}^*$ . (2)                                                                                                                                                                                                                | 0,25 |
|       | Ta có: $ac - a + 1 = a(c - 1) + 1 > 0$ .<br>$2(ab - b + 1) - (ac - a + 1) = ab - ac + ab - 2b + a + 1$ $= a(b - c) + (a - 2)b + a + 1 > 0.$<br>Do đó $0 < ac - a + 1 < 2(ab - b + 1) \Leftrightarrow 0 < k.(ab - b + 1) < 2(ab - b + 1) \Rightarrow k = 1$ (3)                                                                                                                                                            | 0,25 |
|       | Từ (2) và (3) suy ra: $ac - a + 1 = ab - b + 1 \Rightarrow b = ab - ac + a = a(b - c + 1) \Rightarrow b : a$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,25 |
|       | b) Cho ba số thực dương $x, y, z$ thỏa mãn $\frac{x-1}{x+3} + \frac{y-1}{y+4} \geq \frac{6}{z+5}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (2x+2)(2y+3)(2z+4)$ .                                                                                                                                                                                                                                                         | 1,0  |
| Câu 5 | $\frac{x-1}{x+3} + \frac{y-1}{y+4} - \frac{6}{z+5} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{x+3} + 1 - \frac{5}{y+4} - \frac{6}{z+5} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x+3} + \frac{5}{y+4} + \frac{6}{z+5} \leq 2$<br>Ta có: $\frac{2x+2}{x+3} = 2 - \frac{4}{x+3} \geq \frac{5}{y+4} + \frac{6}{z+5} \geq 2\sqrt{\frac{5}{y+4} \cdot \frac{6}{z+5}}$ (1)<br>(Bất đẳng thức $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ cho hai số $a, b$ không âm) | 0,25 |
|       | Tương tự ta có: $\frac{2y+3}{y+4} = 2 - \frac{5}{y+4} \geq \frac{4}{x+3} + \frac{6}{z+5} \geq 2\sqrt{\frac{4}{x+3} \cdot \frac{6}{z+5}}$ (2)<br>$\frac{2z+4}{z+5} = 2 - \frac{6}{z+5} \geq \frac{4}{x+3} + \frac{5}{y+4} \geq 2\sqrt{\frac{4}{x+3} \cdot \frac{5}{y+4}}$ (3)                                                                                                                                              | 0,25 |
|       | Nhân (1), (2) và (3) về theo về, ta được:<br>$\frac{2x+2}{x+3} \cdot \frac{2y+3}{y+4} \cdot \frac{2z+4}{z+5} \geq 8 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{(x+3)(y+4)(z+5)} \Leftrightarrow (2x+2)(2y+3)(2z+4) \geq 960$                                                                                                                                                                                                          | 0,25 |
|       | Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \frac{4}{x+3} + \frac{5}{y+4} + \frac{6}{z+5} = 2 \\ \frac{4}{x+3} = \frac{5}{y+4} = \frac{6}{z+5} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{x+3} = \frac{5}{y+4} = \frac{6}{z+5} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{7}{2} \\ z = 4 \end{cases}$<br>Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 960, đạt được khi $x = 3, y = \frac{7}{2}, z = 4$ .                | 0,25 |

----- HẾT -----

\* **Lưu ý:** Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong HDC nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như HDC quy định.



ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: Toán (chuyên Tin học)

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Khóa thi ngày: 04 - 06/6/2024

Câu 1. (1,5 điểm)

Cho biểu thức  $P = \left( \frac{3}{\sqrt{x}-1} - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} \right)$  với điều kiện  $x > 0, x \neq 1, x \neq 4$ .

- Rút gọn biểu thức  $P$ .
- Tìm tất cả các giá trị của  $x$  để  $P < -3$ .

Câu 2. (1,5 điểm)

- Tìm tất cả các nghiệm nguyên  $(x; y)$  của phương trình  $6xy - 3x + 2y - 8 = 0$ .
- Cho  $A = (9m + 2024n) \cdot (2024m + 9n)$  với  $m$  và  $n$  là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu  $A$  chia hết cho 19 thì  $A$  có ít nhất một ước số là số chính phương khác 1.

Câu 3. (1,5 điểm)

- Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 3\sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 5 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 3 \end{cases}$$
.
- Giải phương trình  $x^2 - x + 2 = 2\sqrt{x+1}(1-x)$ .

Câu 4. (1,0 điểm)

Trên cùng mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho parabol  $(P): y = -x^2$  và đường thẳng  $(d): y = 3x + 3m - 1$ . Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để  $(P)$  và  $(d)$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1; x_2$  thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2 + |x_1 x_2| = 10$ .

Câu 5. (3,5 điểm)

Cho tứ giác  $ABCD$  có hai cặp cạnh đối không song song và tứ giác đó nội tiếp đường tròn  $(O)$  có đường kính  $AB$ . Gọi  $E$  là giao điểm của hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$ ,  $F$  là giao điểm của hai đường thẳng  $AD$  và  $BC$ . Hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  cắt nhau tại  $I$ . Qua  $I$  kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng  $AB$  và cắt đường thẳng  $AB$  tại  $H$ .

- Chứng minh tứ giác  $BCIH$  nội tiếp một đường tròn.
- Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BCE$  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  $CDF$  tại điểm thứ hai là  $M$ . Chứng minh ba điểm  $E, M, F$  thẳng hàng.
- Gọi  $N$  là giao điểm của hai đường thẳng  $CH$  và  $BI$ . Chứng minh  $BN \cdot DN = IN(BD + BN)$ .

Câu 6. (1,0 điểm)

Cho ba số dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{1+y-x} + \frac{y^2}{1+z-y} + \frac{z^2}{1+x-z} \geq 1.$$

----- HẾT -----

HDC CHÍNH THỨC

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN ( CHUYÊN TIN)

(Hướng dẫn chấm có 06 trang)

| Câu           | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Điểm       |
|---------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Câu 1.</b> | Cho biểu thức $P = \left( \frac{3}{\sqrt{x}-1} - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} \right)$ với điều kiện $x > 0, x \neq 1, x \neq 4$ .<br>a) Rút gọn biểu thức $P$ .<br>b) Tìm tất cả các giá trị của $x$ để $P < -3$ . | <b>1,5</b> |
| <b>1a</b>     | $P = \left[ \frac{3\sqrt{x}-3(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right] : \left[ \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} \right]$                                                                                                          | 0,25       |
|               | $= \frac{3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{x-1-x+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)}$                                                                                                                                                                                                            | 0,25       |
|               | $= \frac{3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)}{3}$                                                                                                                                                                                                              | 0,25       |
|               | $= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$                                                                                                                                                                                                                                                          | 0,25       |
| <b>1b</b>     | $P < -3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} < -3 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 < -3\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} < \frac{1}{2} \text{ (vì } x > 0)$                                                                                                                             | 0,25       |
|               | $\Leftrightarrow x < \frac{1}{4}. \text{ Kết hợp điều kiện ban đầu ta được: } 0 < x < \frac{1}{4}.$                                                                                                                                                                                      | 0,25       |

|                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                   |        |      |      |     |      |        |      |      |     |     |  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|------|------|-----|------|--------|------|------|-----|-----|--|
| <b>Câu 2.</b>                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                   |        |      |      |     |      |        |      |      |     |     |  |
| a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình $6xy-3x+2y-8=0$ .                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                   |        |      |      |     | 1,5  |        |      |      |     |     |  |
| b) Cho $A=(9m+2024n).(2024m+9n)$ với $m$ và $n$ là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu $A$ chia hết cho 19 thì $A$ có ít nhất một ước số là số chính phương khác 1. |                                                                                                                                                                                                                                                                                   |        |      |      |     |      |        |      |      |     |     |  |
| 2a                                                                                                                                                                       | $6xy-3x+2y-8=0 \Leftrightarrow 6xy-3x+2y-1=7 \Leftrightarrow (2y-1).(3x+1)=7$                                                                                                                                                                                                     |        |      |      |     | 0,25 |        |      |      |     |     |  |
|                                                                                                                                                                          | Kẻ bảng các trường hợp                                                                                                                                                                                                                                                            |        |      |      |     |      |        |      |      |     |     |  |
|                                                                                                                                                                          | <table><tr><td><math>3x+1</math></td><td><math>-7</math></td><td><math>-1</math></td><td><math>1</math></td><td><math>7</math></td></tr><tr><td><math>2y-1</math></td><td><math>-1</math></td><td><math>-7</math></td><td><math>7</math></td><td><math>1</math></td></tr></table> | $3x+1$ | $-7$ | $-1$ | $1$ | $7$  | $2y-1$ | $-1$ | $-7$ | $7$ | $1$ |  |
| $3x+1$                                                                                                                                                                   | $-7$                                                                                                                                                                                                                                                                              | $-1$   | $1$  | $7$  |     |      |        |      |      |     |     |  |
| $2y-1$                                                                                                                                                                   | $-1$                                                                                                                                                                                                                                                                              | $-7$   | $7$  | $1$  |     |      |        |      |      |     |     |  |

|           |                                                                                                                                                                                                                     |      |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|           | Giải các trường hợp trên với $(x; y)$ là cặp số nguyên, ta được các nghiệm của phương trình đã cho là: $(0; 4)$ và $(2; 1)$ .                                                                                       | 0,25 |
| <b>2b</b> | Giả sử $(9m + 2024n) \cdot (2024m + 9n) : 19 \Rightarrow \begin{cases} (9m + 2024n) : 19 \\ (2024m + 9n) : 19 \end{cases}$ , vì 19 là số nguyên tố.                                                                 | 0,25 |
|           | Trường hợp 1: $(9m + 2024n) : 19$<br>Vì $(9m + 2024n) + (2024m + 9n) = 2033(m + n) = 19 \cdot 107(m + n) : 19$ nên $(2024m + 9n) : 19$<br>Do đó, $(9m + 2024n) \cdot (2024m + 9n) : (19 \cdot 19)$ hay $A : 19^2$ . | 0,25 |
|           | Trường hợp 2: $(2024m + 9n) : 19$ , tương tự ta cũng thu được<br>$(9m + 2024n) \cdot (2024m + 9n) : 19^2$                                                                                                           | 0,25 |
|           | Vậy nếu $A$ chia hết cho 19 thì $A$ có ít nhất một ước số là số chính phương khác 1.                                                                                                                                |      |

|                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                         |      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Câu 3.                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                         | 1,5  |
| a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3\sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 5 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 3 \end{cases}$ .<br>b) Giải phương trình $x^2 - x + 2 = 2\sqrt{x+1}(1-x)$ . |                                                                                                                                                                                                                                         |      |
| 3a                                                                                                                                                                       | Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y+1 \geq 0 \end{cases}$ .                                                                                                                                                                         | 0,25 |
|                                                                                                                                                                          | Khi đó $\begin{cases} 3\sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 5 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 3 \end{cases}$                                                         |      |
|                                                                                                                                                                          | $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{y+1} = 2 \end{cases}$                                                                                                                                                              | 0,25 |
|                                                                                                                                                                          | $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y+1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ (thỏa điều kiện).<br>Vậy hệ phương trình đã cho có một nghiệm $(x; y)$ duy nhất là $(1; 3)$ .                     | 0,25 |
| 3b                                                                                                                                                                       | Điều kiện: $x+1 \geq 0$ . (*)                                                                                                                                                                                                           | 0,25 |
|                                                                                                                                                                          | $x^2 - x + 2 = 2\sqrt{x+1}(1-x) \Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x+1} = x + 2\sqrt{x+1} - 2$<br>$\Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x+1} + (x+1) = x + 2\sqrt{x+1} + (x+1) - 2$<br>$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x+1})^2 = 2(x + \sqrt{x+1}) - 1$ |      |
|                                                                                                                                                                          | $\Leftrightarrow (x + \sqrt{x+1})^2 - 2(x + \sqrt{x+1}) + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{x+1} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 1 - x$                                                                                          | 0,25 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x+1=(1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ \begin{cases} x=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ (thỏa điều kiện (*))} \\ x=3 \end{cases} \end{cases}$ <p>Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất <math>x=0</math>.</p> | 0,25 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |      |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|------------|
| <b>Câu 4.</b><br>Trên cùng mặt phẳng tọa độ $Oxy$ , cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3x + 3m - 1$ .<br>Tìm tất cả các giá trị của $m$ để $(P)$ và $(d)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 +  x_1 x_2  = 10$ .                                                                                                                                                                                               |      | <b>1,0</b> |
| Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^2 = 3x + 3m - 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 3m - 1 = 0$ (1)<br>để $(P)$ và $(d)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì điều kiện là phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ , hay $\Delta = 3^2 - 4(3m - 1) > 0 \Leftrightarrow -12m + 13 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{13}{12}$ .                                                                                                                                        | 0,25 |            |
| Khi đó, theo định lí Vi-ét ta có:<br>$\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 & (2) \\ x_1 \cdot x_2 = 3m - 1 & (3) \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 0,25 |            |
| Theo đề, $x_1^2 + x_2^2 +  x_1 x_2  = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 +  x_1 x_2  = 10$ (4)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |      |            |
| Thay (2) và (3) vào (4) ta được:<br>$(-3)^2 - 2(3m - 1) +  3m - 1  = 10 \Leftrightarrow  3m - 1  = 6m - 1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0,25 |            |
| $\Leftrightarrow \begin{cases} 6m - 1 \geq 0 \\ \begin{cases} 3m - 1 = 6m - 1 \\ 3m - 1 = -(6m - 1) \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{1}{6} \\ \begin{cases} 3m = 0 \\ 9m = 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{1}{6} \\ \begin{cases} m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{9} \\ m = \frac{2}{9} \end{cases} \end{cases}$ <p>So sánh điều kiện ta được <math>m = \frac{2}{9}</math> là giá trị cần tìm.</p> | 0,25 |            |

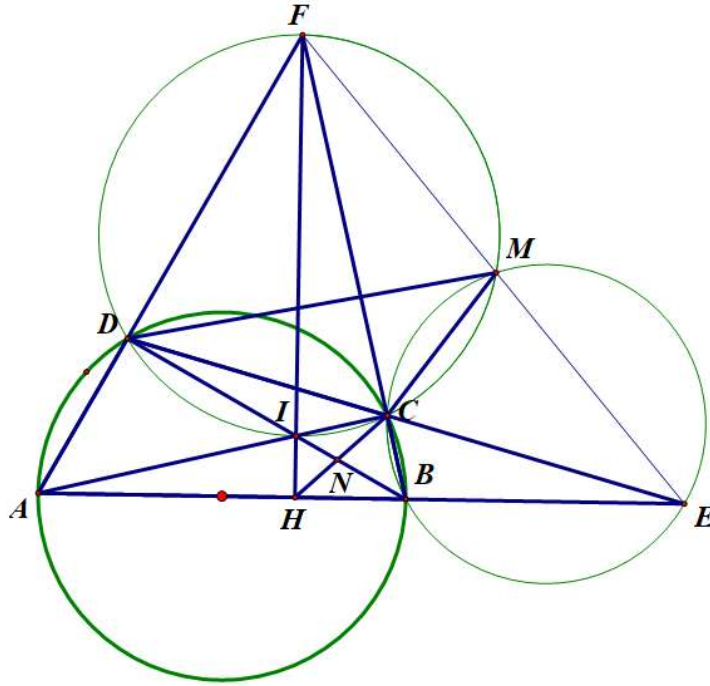
**Câu 5.**

Cho tứ giác  $ABCD$  có hai cặp cạnh đối không song song và tứ giác đó nội tiếp đường tròn  $(O)$  có đường kính  $AB$ . Gọi  $E$  là giao điểm của hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$ ,  $F$  là giao điểm của hai đường thẳng  $AD$  và  $BC$ . Hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  cắt nhau tại  $I$ . Qua  $I$  kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng  $AB$  và cắt đường thẳng  $AB$  tại  $H$ .

**3,5**

- Chứng minh tứ giác  $BCIH$  nội tiếp một đường tròn.
- Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BCE$  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  $CDF$  tại điểm thứ hai là  $M$ . Chứng minh ba điểm  $E, M, F$  thẳng hàng.
- Gọi  $N$  là giao điểm của hai đường thẳng  $CH$  và  $BI$ . Chứng minh  $BN \cdot DN = IN(BD + BN)$ .

**5a**



**0,5**

Hình vẽ phục vụ giải câu 5a): 0,5

Ta có:  $\widehat{IHB} = 90^\circ$  ( vì  $IH \perp AB$  )

**0,25**

$\widehat{ICB} = 90^\circ$  ( vì  $C$  thuộc nửa đường tròn  $(O)$  )

**0,25**

Tứ giác  $BCIH$  có  $\widehat{IHB} + \widehat{ICB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$  nên nội tiếp được đường tròn.

**0,25**

**5b**

$\widehat{DMC} = \widehat{AFB}$  ( cùng chắn cung  $DC$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $DFC$  )

**0,25**

$\widehat{CME} = \widehat{ABF}$  ( cùng bù với  $\widehat{CBE}$  )

**0,25**

$\widehat{FMD} = \widehat{DCF}$  ( cùng chắn cung  $DF$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $DFC$  )

và  $\widehat{DCF} = \widehat{FAB}$  ( cùng bù với  $\widehat{DCB}$  )

Suy ra  $\widehat{FMD} = \widehat{FAB}$

**0,25**

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                      |      |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|    | <p>Có: <math>\widehat{FME} = \widehat{FMD} + \widehat{DMC} + \widehat{CME} = \widehat{FAB} + \widehat{AFB} + \widehat{ABF} = 180^\circ</math> ( tổng ba góc trong của tam giác )</p> <p>Nên <math>E, M, F</math> thẳng hàng.</p>                                     | 0,25 |
| 5c | <p>Ta có: <math>\widehat{ICH} = \widehat{DBA}</math> ( cùng chắn cung <math>IH</math> của đường tròn ngoại tiếp tứ giác <math>BCIH</math> )</p> <p><math>\widehat{DCA} = \widehat{DBA}</math> ( cùng chắn cung <math>AD</math> của đường tròn <math>(O)</math> )</p> | 0,25 |
|    | Suy ra $\widehat{DCA} = \widehat{ICH}$ . Do đó, $CI$ là đường phân giác trong của tam giác $CDN$ .                                                                                                                                                                   | 0,25 |
|    | Vì $CI \perp CB$ nên $CB$ là đường phân giác ngoài của tam giác $CDN$ .                                                                                                                                                                                              | 0,25 |
|    | Từ đó, ta có $\frac{ID}{IN} = \frac{BD}{BN} = \frac{CD}{CN}$ .                                                                                                                                                                                                       | 0,25 |
|    | <p>Suy ra</p> $\frac{ID}{IN} = \frac{BD}{BN} \Leftrightarrow BD.IN = BN.ID \Leftrightarrow BD.IN = BN.(DN - IN)$ $\Leftrightarrow BN.DN = BD.IN + BN.IN \Leftrightarrow BN.DN = IN(BD + BN)$                                                                         | 0,25 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |  |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|------------|
| <p><b>Câu 6.</b></p> <p>Cho ba số dương <math>x, y, z</math> thỏa mãn <math>x^2 + y^2 + z^2 = 1</math>. Chứng minh rằng:</p> $\frac{x^2}{1+y-x} + \frac{y^2}{1+z-y} + \frac{z^2}{1+x-z} \geq 1.$                                                                                                                                                                                                                      |  | <b>1,0</b> |
| <p>Từ giả thiết suy ra <math>0 &lt; x &lt; 1, 0 &lt; y &lt; 1, 0 &lt; z &lt; 1</math>.</p> <p>Ta có:</p> $\frac{x^2}{1+y-x} \geq \frac{x^2[1-(y-x)^2]}{1+y-x} = \frac{x^2(1-y+x)(1+y-x)}{1+y-x} = x^2(1-y+x) = x^2 - x^2y + x^3$ <p style="text-align: right;">(vì <math>1 \geq 1-(y-x)^2</math>)</p> <p>Tương tự: <math>\frac{y^2}{1+z-y} \geq y^2 - y^2z + y^3</math></p> $\frac{z^2}{1+x-z} \geq z^2 - z^2x + z^3$ |  | 0,25       |
| <p>Do đó:</p> $\frac{x^2}{1+y-x} + \frac{y^2}{1+z-y} + \frac{z^2}{1+x-z} \geq x^3 + y^3 + z^3 - x^2y - y^2z - z^2x + 1 \quad (\text{vì } x^2 + y^2 + z^2 = 1).$                                                                                                                                                                                                                                                       |  | 0,25       |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |      |
|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|  | <p>Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương, ta có:</p> $x^3 + x^3 + y^3 \geq 3\sqrt[3]{x^3 x^3 y^3} = 3x^2 y$ <p>Tương tự: <math>y^3 + y^3 + z^3 \geq 3y^2 z</math></p> $z^3 + z^3 + x^3 \geq 3z^2 x$                                                                                                                                                           | 0,25 |
|  | <p>Suy ra <math>3x^3 + 3y^3 + 3z^3 \geq 3x^2 y + 3y^2 z + 3z^2 x</math></p> $\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2 y + y^2 z + z^2 x$ $\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 - x^2 y - y^2 z - z^2 x \geq 0$ <p>Vậy <math>\frac{x^2}{1+y-x} + \frac{y^2}{1+z-y} + \frac{z^2}{1+x-z} \geq 1</math>. Dấu “=” xảy ra khi <math>x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}</math>.</p> | 0,25 |

.....HẾT.....

**\* Lưu ý:**

Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong hướng dẫn chấm nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.

**\* Cách 2 câu 3b.**

|                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |      |
|------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Giải phương trình $x^2 - x + 2 = 2\sqrt{x+1}(1-x)$ . |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0,75 |
|                                                      | <p>Đặt <math>t = \sqrt{x+1}</math>, <math>t \geq 0</math> thì <math>t^2 = x+1 \Leftrightarrow x = t^2 - 1</math>. Phương trình đã cho trở thành</p> $(t^2 - 1)^2 - (t^2 - 1) + 2 = 2t[1 - (t^2 - 1)]$ $\Leftrightarrow t^4 - 3t^2 + 4 = -2t^3 + 4t$ $\Leftrightarrow t^4 + 2t^3 - 3t^2 - 4t + 4 = 0 \quad (1)$ | 0,25 |
|                                                      | $\Leftrightarrow (t-1)(t^3 + 3t^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-1)(t^2 + 4t + 4) = 0$ $\Leftrightarrow (t-1)^2(t+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-2 \end{cases}$ <p>So sánh điều kiện <math>t \geq 0</math> ta được <math>t=1</math> là nghiệm của phương trình (1).</p>                    | 0,25 |
|                                                      | <p>Với <math>t=1</math> thì <math>\sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0</math> là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.</p>                                                                                                                                                          | 0,25 |