SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÁI BÌNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2024-2025

MÔN THI: TOÁN

(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán, Tin)

Thời gian làm bài: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1: *(2,0 điểm)*

1. Cho x là số thực dương thỏa mãn $\dfrac{x^3+1}{x}=18\sqrt{x}$. Tính $A=\dfrac{x^2+1}{x}$.

2. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+\sqrt{abc}=4$.

Rút gọn biểu thức: $A=\sqrt{a(4-b)(4-c)}+\sqrt{b(4-c)(4-a)}+\sqrt{c(4-a)(4-b)}-\sqrt{abc}$.

Câu 2: *(2,5 điểm)*

1. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2+5x-1}=(x+2)\sqrt{2}$.

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2-2x-2=0 \\ 4x^2-2y^2-2xy+6x-3y+2=0 \end{cases}$

Câu 3: *(3,5 điểm)*

Cho đường tròn tâm I nội tiếp tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ tiếp xúc với các cạnh BC,CA,AB lần lượt tại D,E,F. Đường thẳng qua A song song với BC cắt đường thẳng EF tại K. Gọi H là giao điểm của đường thẳng DI và đường thẳng EF, N là giao điểm của đường thẳng IA và đường thẳng EF. Đường thẳng AH cắt đường thẳng BC và đường thẳng IK lần lượt tại M và P.

1. Chứng minh $ANPK$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh ID là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PDK.
3. Đường thẳng BI cắt đường thẳng EF tại R. Đường thẳng IM cắt đường thẳng DK tại điểm T và đường thẳng RC cắt đường thẳng DK tại điểm U. Chứng minh bốn điểm I,T,U,R nằm trên một đường tròn.

Câu 4: *(1,0 điểm)*

Giả sử a, b là các số nguyên dương sao cho $\dfrac{(a+b)^2+4a}{ab}$ là số nguyên. Biết b là số lẻ. Chứng minh rằng a là số chính phương.

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+2}{(a+1)^2}+\frac{b+2}{(b+1)^2}+\frac{c+2}{(c+1)^2}\ge\frac{9}{4}.$$

------------HẾT------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÁI BÌNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2024 – 2025

MÔN THI: TOÁN

(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán, Tin)

Thời gian làm bài: ***150 phút*** *(Không kể thời gian giao đề)*

Câu 1 (2,0 điểm).

1. Cho x là số thực dương thỏa mãn $\frac{x^3+1}{x}=18\sqrt{x}$. Tính $A=\frac{x^2+1}{x}$.
2. Cho *a, b, c* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+\sqrt{abc}=4$. Rút gọn biểu thức

$$A=\sqrt{a(4-b)(4-c)}+\sqrt{b(4-c)(4-a)}+\sqrt{c(4-a)(4-b)}-\sqrt{abc}$$

Câu 2 (2,5 điểm).

1. Giải phương trình $\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2+5x-1}=(x+2)\sqrt{2}$
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2-2x-2=0 \\ 4x^2-2y^2-2xy+6x-3y+2=0 \end{cases}$

Câu 3 (3,5 điểm).

Cho đường tròn tâm I nội tiếp tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng qua A song song với BC cắt đường thẳng EF tại K. Gọi H là giao điểm của đường thẳng DI và đường thẳng EF, N là giao điểm của đường thẳng IA và đường thẳng EF. Đường thẳng AH cắt đường thẳng BC và đường thẳng IK lần lượt tại M và P.

1. Chứng minh $ANPK$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh ID là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PDK.
3. Đường thẳng BI cắt đường thẳng EF tại R. Đường thẳng IM cắt đường thẳng DK tại điểm T và đường thẳng RC cắt đường thẳng DK tại điểm U. Chứng minh bốn điểm I, T, U, R nằm trên một đường tròn.

Câu 4 (1,0 điểm).

Giả sử a, b là các số nguyên dương sao cho $\frac{(a+b)^2+4a}{ab}$ là số nguyên. Biết *b* là số lẻ. Chứng minh rằng a là số chính phương.

Câu 5 (1,0 điểm).

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+2}{(a+1)^2}+\frac{b+2}{(b+1)^2}+\frac{c+2}{(c+1)^2}\ge\frac{9}{4}$$

----- HẾT -----

LỜI GIẢI THAM KHẢO

Câu 1 (2,0 điểm).

1. Cho x là số thực dương thỏa mãn $\dfrac{x^3+1}{x}=18\sqrt{x}$. Tính $A=\dfrac{x^2+1}{x}$.

2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+\sqrt{abc}=4$. Rút gọn biểu thức

$$A=\sqrt{a(4-b)(4-c)}+\sqrt{b(4-c)(4-a)}+\sqrt{c(4-a)(4-b)}-\sqrt{abc}$$

Lời giải

1. Ta có: $\dfrac{x^3+1}{x}=18\sqrt{x}\Leftrightarrow\dfrac{x^3+1}{x\sqrt{x}}=18\Leftrightarrow\dfrac{x^6+2x^3+1}{x^3}=324\Leftrightarrow x^3+\dfrac{1}{x^3}=322$

Suy ra $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-322=0$

Đặt $x+\dfrac{1}{x}=t$ $(t\geq 2)$ ta có $t^3-3t-322=0\Leftrightarrow(t-7)\left(t^2+7t+46\right)=0$

Vì $t^2+7t+46=\left(t+\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{43}{2}>0$, do đó $t=7$ hay $x+\dfrac{1}{x}=7\Leftrightarrow\dfrac{x^2+1}{x}=7$.

Vậy $A=7$

2. Ta có $(4-b)(4-c)=16-4(b+c)+bc=4\left(a+b+c+\sqrt{abc}\right)-4(b+c)+bc$

$$=4a+4\sqrt{abc}+bc$$

Suy ra $a(4-b)(4-c)=4a^2+4a\sqrt{abc}+abc=\left(2a+\sqrt{abc}\right)^2$

$\Rightarrow\sqrt{a(4-b)(4-c)}=2a+\sqrt{abc}$ (1)

Tương tự, suy ra $\sqrt{b(4-c)(4-a)}=2b+\sqrt{abc}$ (2)

$\sqrt{c(4-a)(4-c)}=2c+\sqrt{abc}$ (3)

Lấy (1) + (2) + (3), ta được

$$A=\sqrt{a(4-b)(4-c)}+\sqrt{b(4-c)(4-a)}+\sqrt{c(4-a)(4-b)}-\sqrt{abc}$$

$$=2a+\sqrt{abc}+2b+\sqrt{abc}+2c+\sqrt{abc}-\sqrt{abc}$$

$$=2a+2b+2c+2\sqrt{abc}=8$$

Vậy $A=8$.

Câu 2 (2,5 điểm).

1. Giải phương trình $\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2+5x-1}=(x+2)\sqrt{2}$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2-2x-2=0 \\ 4x^2-2y^2-2xy+6x-3y+2=0 \end{cases}$

Lời giải

1. $\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2+5x-1}=(x+2)\sqrt{2}$ (1)

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x^2+3x+1\ge 0 \\ 2x^2+5x-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\ge \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ x\le \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\ge \dfrac{-5+\sqrt{33}}{2} \\ x\le \dfrac{-5-\sqrt{33}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge \dfrac{-5+\sqrt{33}}{2} \\ x\le \dfrac{-5-\sqrt{33}}{2} \end{array}\right.$ (*)

Bình phương hai vế của phương trình (1), ta được

$$3x^2+8x+2\sqrt{(x^2+3x+1)(2x^2+5x-1)}=2x^2+8x+8$$

$$\Leftrightarrow x^2-8+2\sqrt{(x^2+3x+1)(2x^2+5x-1)}=0 \quad (2)$$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x^2+3x+1}=a \\ \sqrt{2x^2+5x-1}=b \end{cases} (a>0,b\ge 0)$, phương trình (2) trở thành

$$3b^2-5a^2+2ab=0$$

$$\Leftrightarrow 5a^2-2ab-3b^2=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(5a+3b)=0$$

Vì $a>0,b\ge 0$ nên $5a+3b>0$, do đó $a=b$.

Tức là

$$\sqrt{x^2+3x+1}=\sqrt{2x^2+5x-1}$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x+1=2x^2+5x-1$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1+\sqrt{3} \\ x=-1-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện xác định và thử lại, ta có $x=-1+\sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình có nghiệm $x=-1+\sqrt{3}$.

2. $\begin{cases} x^2+y^2-2x-2=0 & (1) \\ 4x^2-2y^2-2xy+6x-3y+2=0 & (2) \end{cases}$

Xét phương trình (2), ta có

$$4x^2-2y^2-2xy+6x-3y+2=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-2y+1)(2x+y+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{2x+1}{2} \\ y=-2x-2 \end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $y=\dfrac{2x+1}{2}$, thay vào (1) ta được

$$x^2+\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2-2x-2=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+(2x+1)^2-8x-8=0$$

$$\Leftrightarrow 8x^2-4x-7=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{15}}{4} \Rightarrow y=\dfrac{3+\sqrt{15}}{4} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{15}}{4} \Rightarrow y=\dfrac{3-\sqrt{15}}{4} \end{array}\right.$$

Trường hợp 2: $y=-2x-2$, thay vào (1) ta được

$$x^2+(-2x-2)^2-2x-2=0 \Leftrightarrow 5x^2+6x+2=0 \text{ (vô nghiệm)}$$

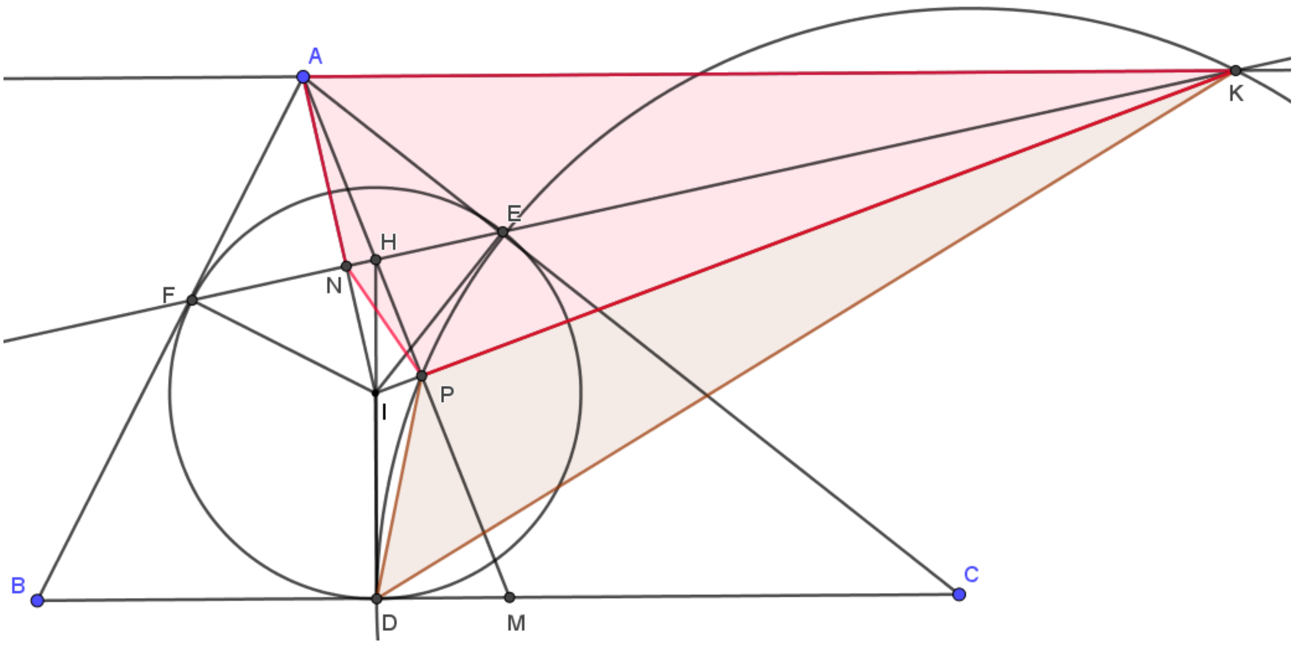
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x,y)\in\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{15}}{4};\dfrac{3+\sqrt{15}}{4}\right);\left(\dfrac{1-\sqrt{15}}{4};\dfrac{3-\sqrt{15}}{4}\right)\right\}$.

Câu 3 (3,5 điểm).

Cho đường tròn tâm I nội tiếp tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng qua A song song với BC cắt đường thẳng EF tại K. Gọi H là giao điểm của đường thẳng DI và đường thẳng EF, N là giao điểm của đường thẳng IA và đường thẳng EF. Đường thẳng AH cắt đường thẳng BC và đường thẳng IK lần lượt tại M và P.

1. Chứng minh $ANPK$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh ID là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PDK.
3. Đường thẳng BI cắt đường thẳng EF tại R. Đường thẳng IM cắt đường thẳng DK tại điểm T và đường thẳng RC cắt đường thẳng DK tại điểm U. Chứng minh bốn điểm I, T, U, R nằm trên một đường tròn.

Lời giải



1. Vì $ID \perp BC, AK \parallel BC$ nên $ID \perp AK$.

Ta có $\widehat{NAE} + \widehat{NEA} = \dfrac{\widehat{EAF}}{2} + \dfrac{\widehat{AEF} + \widehat{AFE}}{2} = 90^\circ$ nên $AI \perp EF$ tại N.

Suy ra $KH \perp AI$ hay $\widehat{ANK} = 90^\circ$.

Xét ΔAIK có $ID \perp AK, KH \perp AI$ nên H là trực tâm ΔAIK nên $AP \perp IK$ hay $\widehat{APK} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $ANPK$ có $\widehat{ANK} = \widehat{APK} = 90^\circ$ nên $ANPK$ là tứ giác nội tiếp.

2. Vì ΔAIF vuông tại F có $FN \perp AI$ nên $IN \cdot IA = IF^2 = ID^2$ (1)

Vì tứ giác $ANPK$ nội tiếp nên $\widehat{IPN} = \widehat{IAK}$.

Xét ΔIPN và ΔIAK có $\left.\begin{array}{l} \widehat{AIK}\ chung \\ \widehat{IPN} = \widehat{IAK} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta IPN \backsim \Delta IAK$

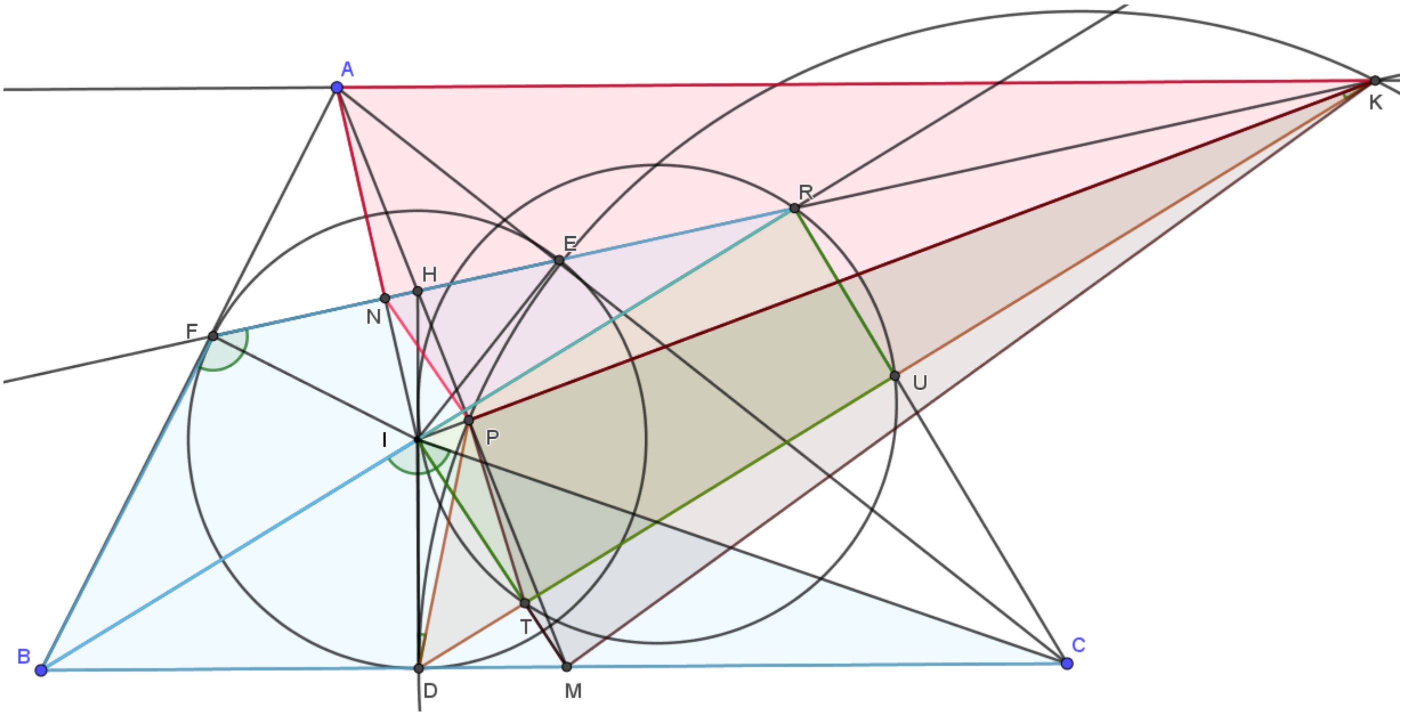
$\Rightarrow \dfrac{IP}{IN} = \dfrac{IA}{IK} \Rightarrow IP \cdot IK = IN \cdot IA$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $ID^2 = IP \cdot IK \Leftrightarrow \dfrac{ID}{IP} = \dfrac{IK}{ID}$

Xét ΔIDP và ΔIKD có $\left.\begin{array}{l} \widehat{DIK}\ chung \\ \dfrac{ID}{IP} = \dfrac{IK}{ID} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta IDP \backsim \Delta IKD$

$\Rightarrow \widehat{IDP} = \widehat{IKD}$

$\Rightarrow ID$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PDK.



3. Ta có $\widehat{BFR} = \widehat{BFN} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2} + 90° = \widehat{BIC}$

Xét ΔBFR và ΔBIC có $\left.\begin{matrix} \widehat{FBR} = \widehat{IBC} \\ \widehat{BFR} = \widehat{BIC} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta BFR \backsim \Delta BIC$

$\Rightarrow \widehat{BRF} = \widehat{BCI} = \widehat{ACI}$

$\Rightarrow IERC$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{IRC} = \widehat{IEC} = 90°$ hay $RI \perp RC$

$\Rightarrow \widehat{IRU} = 90°$

Gọi T' là chân đường vuông góc hạ từ I xuống DU, M' là giao điểm của IT' với BC.

Áp dụng hệ thức cạnh và đường cao vào $\Delta IDM'$ vuông tại D có $DT' \perp IM'$:

$$IT' \cdot IM' = ID^2 = IP \cdot IK \Leftrightarrow \frac{IT'}{IP} = \frac{IK}{IM'}$$

Xét $\Delta IT'P$ và $\Delta IKM'$ có $\left.\begin{matrix} \widehat{KIM'} \, chung \\ \dfrac{IT'}{IP} = \dfrac{IK}{IM'} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta IT'P \backsim \Delta IKM'$

$\Rightarrow \widehat{IT'P} = \widehat{IKM'}$

$\Rightarrow PT'M'K$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{M'PK} = \widehat{M'T'K} = 90°$

Mà $\widehat{MPK} = 180° - \widehat{APK} = 90°$ nên $\widehat{MPK} = \widehat{M'PK}$, suy ra $M \equiv M'$

$\Rightarrow T \equiv T' \Rightarrow IM \perp DK = \{T\} \Rightarrow \widehat{ITU} = 90°$

Vì tứ giác $ITUR$ có $\widehat{ITU} + \widehat{IRU} = 180°$ nên $ITUR$ nội tiếp hay bốn điểm I, T, U, R nằm trên một đường tròn.

Câu 4 (1,0 điểm). Giả sử a,b là các số nguyên dương sao cho $\dfrac{(a+b)^2+4a}{ab}$ là số nguyên. Biết b là số lẻ. Chứng minh rằng a là số chính phương.

Lời giải

Gọi $\gcd(a,b)=d\ (d\in\mathbb{N}^*)$ và d lẻ (vì b lẻ)

Đặt $\begin{cases} a=dx \\ b=dy \end{cases}\ (x,y\in\mathbb{N}^*,\ \gcd(x,y)=1)$

Vì $\dfrac{(a+b)^2+4a}{ab}=\dfrac{(dx+dy)^2+4dx}{d^2xy}\in\mathbb{Z}$ nên $d^2xy \mid \left[d^2(x+y)^2+4dx\right]$

Suy ra $dxy \mid \left[d\left(x^2+2xy+y^2\right)+4x\right] \Rightarrow dxy \mid \left[d\left(x^2+y^2\right)+4x\right]$

Từ đó, ta có $\begin{cases} x \mid dy^2 \\ d \mid 4x \end{cases}$, kết hợp các điều kiện $(x,y)=1$ và d lẻ thì ta có $\begin{cases} x \mid d \\ d \mid x \end{cases} \Rightarrow x=d \Rightarrow a=x^2$

Do đó a là số chính phương.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+2}{(a+1)^2}+\frac{b+2}{(b+1)^2}+\frac{c+2}{(c+1)^2}\ge\frac{9}{4}$$

Lời giải

Đặt $A=\dfrac{a+2}{(a+1)^2}+\dfrac{b+2}{(b+1)^2}+\dfrac{c+2}{(c+1)^2}=\underbrace{\left(\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}\right)}_{B}+\underbrace{\left[\dfrac{1}{(a+1)^2}+\dfrac{1}{(b+1)^2}+\dfrac{1}{(c+1)^2}\right]}_{C}$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\ge\dfrac{9}{x+y+z}$, ta có $B=\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}\ge\dfrac{9}{a+b+c+3}=\dfrac{3}{2}$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức $x^2+1\ge\dfrac{(x+1)^2}{2}$, ta có $C=\dfrac{1}{(a+1)^2}+\dfrac{1}{(b+1)^2}+\dfrac{1}{(c+1)^2}\ge\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}+\dfrac{1}{c^2+1}\right]$

Suy ra $2C\ge\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}+\dfrac{1}{c^2+1}\Leftrightarrow 3-2C\le\dfrac{a^2}{a^2+1}+\dfrac{b^2}{b^2+1}+\dfrac{c^2}{c^2+1}\le\dfrac{a^2}{2a}+\dfrac{b^2}{2b}+\dfrac{c^2}{2c}=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow C\ge\dfrac{3}{4}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $A\ge B+C\ge\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{4}$

Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

----- HẾT -----

Lời giải được thực hiện bởi Vũ Đức Huy 9A1 – THCS Trọng điểm Lê Hữu Trác – Mỹ Hào – Hưng Yên