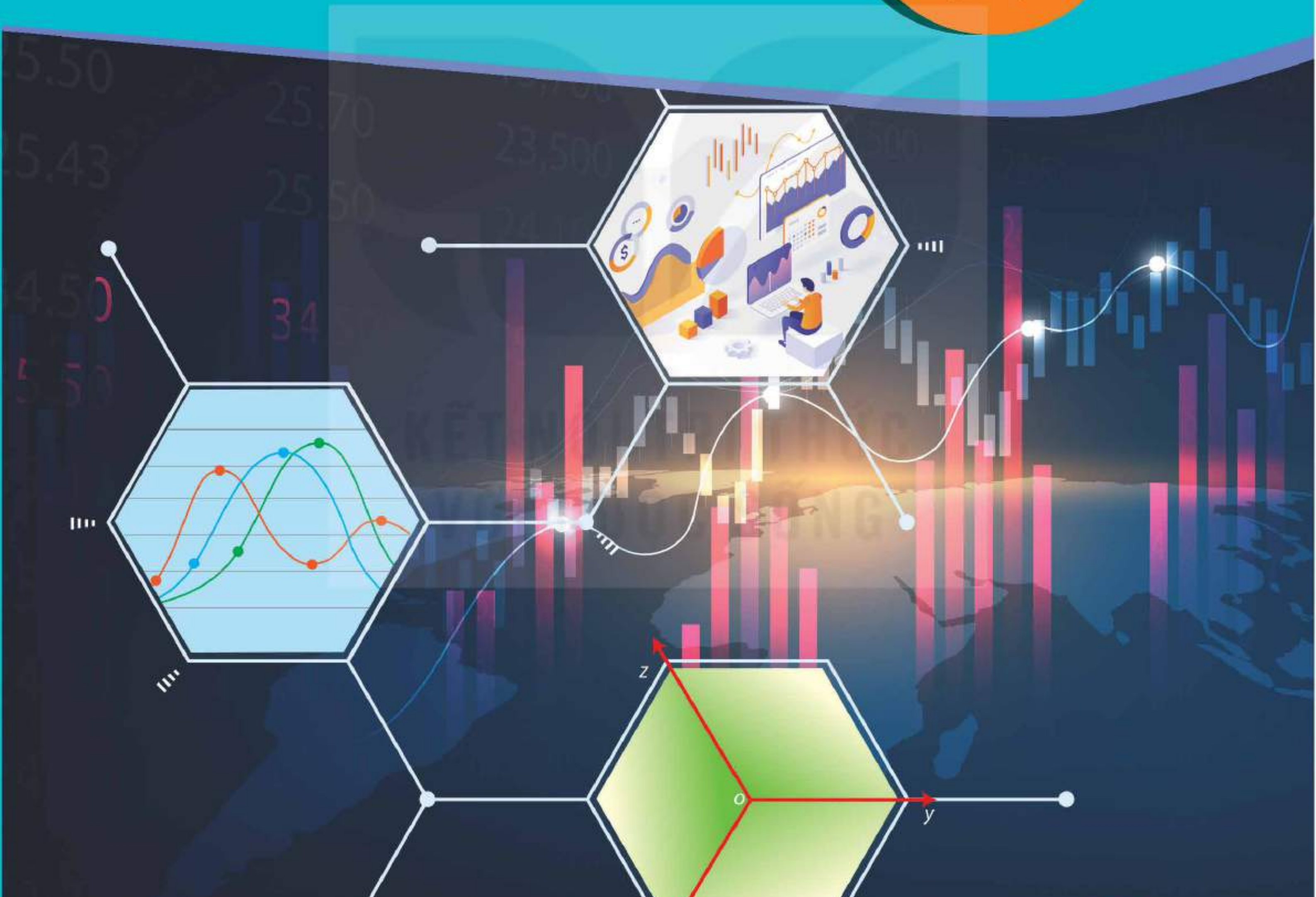
KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

HÀ HUY KHOÁI (Tổng Chủ biên)
CUNG THẾ ANH – TRẦN VĂN TẤN – ĐẶNG HÙNG THẮNG (đồng Chủ biên)
TRẦN MẠNH CƯỜNG – LÊ VĂN CƯỜNG – NGUYỄN ĐẠT ĐĂNG – LÊ VĂN HIỆN
PHAN THANH HỒNG – TRẦN ĐÌNH KẾ – PHẠM ANH MINH – NGUYỄN THỊ KIM SƠN

TOÁN 12

TẬP MỘT



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HỘI ĐỒNG QUỐC GIA THẨM ĐỊNH SÁCH GIÁO KHOA

Môn: Toán – Lớp 12

(Theo Quyết định số 1882/QĐ-BGDĐT ngày 29 tháng 6 năm 2023 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo)

LÊ MẬU HẢI (Chủ tịch), CAO THỊ HÀ (Phó Chủ tịch)
PHẠM ĐỨC TÀI (Uỷ viên, Thư kí), PHẠM KHẮC BAN – NGUYỄN HẮC HẢI
NGUYỄN DOÃN PHÚ – NGUYỄN CHIẾN THẮNG – NGUYỄN THỊ VĨNH THUYÊN
ĐINH CAO THƯỢNG – PHẠM ĐÌNH TÙNG – VŨ THỊ NHƯ TRANG (Uỷ viên)

HÀ HUY KHOÁI (Tổng Chủ biên)
CUNG THẾ ANH – TRẦN VĂN TẤN – ĐẶNG HÙNG THẮNG (đồng Chủ biên)
TRẦN MẠNH CƯỜNG – LÊ VĂN CƯỜNG – NGUYỄN ĐẠT ĐĂNG – LÊ VĂN HIỆN
PHAN THANH HỒNG – TRẦN ĐÌNH KẾ – PHẠM ANH MINH – NGUYỄN THỊ KIM SƠN

TOÁN

12

TẬP MỘT

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

1. Mỗi bài học đều được thiết kế theo cấu trúc gồm những phần sau đây.

Thuật ngữ: Điểm tên các đối tượng chính của bài học.

Kiến thức, kĩ năng: Giúp em xác định những nội dung kiến thức, kĩ năng chính cần lĩnh hội và rèn luyện trong bài học.

Mở đầu: Đưa ra tình huống làm nảy sinh nhu cầu học tập; nó có thể là một bài toán thực tế đại diện, hay là một đoạn dẫn nhập. Em không cần trả lời ngay các câu hỏi hay yêu cầu được đặt ra ở phần này, mà sẽ giải quyết chúng trong bài học, sau khi đã lĩnh hội được lượng tri thức và kĩ năng cần thiết.

Mục kiến thức: Sau phần mở đầu, bài học được chia thành các mục theo từng chủ đề. Nhìn chung, mỗi đơn vị kiến thức có cấu trúc sau đây.

> **Hình thành kiến thức:** Em cần tích cực tham gia vào các hoạt động (**HĐ**) để chiếm lĩnh tri thức. Các **HĐ** này cho em cơ hội quan sát và trải nghiệm, tính toán và lập luận để đi tới khung kiến thức một cách tự nhiên.
>
> **Ví dụ:** Em có thể học ở đây phương pháp, cách lập luận và tính toán, cách trình bày lời giải bài toán.
>
> **Luyện tập:** Vận dụng kiến thức đã học, tham khảo ví dụ tương ứng, em hãy luyện tập để củng cố kiến thức và rèn luyện kĩ năng.
>
> **Vận dụng:** Trên nền tảng kiến thức và kĩ năng đã được học, em giải quyết các bài toán gắn với thực tế, kết nối tri thức với các lĩnh vực khác nhau trong học tập, khoa học và cuộc sống.

Em có thể bắt gặp một khung chữ nhằm hỗ trợ hoặc bình luận,... cho nội dung tương ứng được đề cập ở bên cạnh.

Ngoài bốn thành phần cơ bản ở trên, trong một đơn vị kiến thức, em còn có thể có cơ hội tham gia vào ***Khám phá***, ***Trải nghiệm***, ***Thảo luận***, trả lời ?, mở rộng hiểu biết cùng ***Em có biết?***,...

Bài tập: Em chủ động thực hiện ngoài giờ trên lớp, tuy vậy, thầy/cô sẽ dành thời lượng nhất định để cùng em điểm qua các bài tập này.

2. Các bảng tra cứu và giải thích thuật ngữ (được đặt ở cuối sách) cung cấp địa chỉ tra cứu và giải thích một số khái niệm, công thức được phát biểu trong sách.

Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa
để dành tặng các em học sinh lớp sau!

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh yêu quý!

Trên tay các em là cuốn *TOÁN 12* của bộ sách "Kết nối tri thức với cuộc sống". Đúng như tên gọi của bộ sách, các kiến thức trình bày ở đây chủ yếu xuất phát từ những tình huống của cuộc sống quanh ta và trở lại giúp ta giải quyết những vấn đề của cuộc sống. Vì thế, khi học Toán theo cuốn sách này, các em sẽ cảm nhận được rằng, Toán học thật là gần gũi.

Đoạn mở đầu của các chương, các bài học thường đưa ra những tình huống, những ví dụ thực tế cho thấy sự cần thiết phải đưa đến những khái niệm toán học mới. Qua đó, các em sẽ được trau dồi những kĩ năng cần thiết cho một công dân trong thời hiện đại, đó là khả năng "mô hình hoá". Khi đã đưa vấn đề thực tiễn về bài toán (mô hình toán học), chúng ta sẽ phát hiện thêm những kiến thức toán học mới, để cùng với những kiến thức đã biết giải quyết bài toán thực tiễn đặt ra.

Hi vọng rằng, qua mỗi bài học, mỗi chương sách, qua mỗi vòng lặp từ thực tiễn đến tri thức toán học, rồi từ tri thức toán học quay về thực tiễn, *TOÁN 12* sẽ giúp các em trưởng thành nhanh chóng và trở thành người bạn thân thiết của các em.

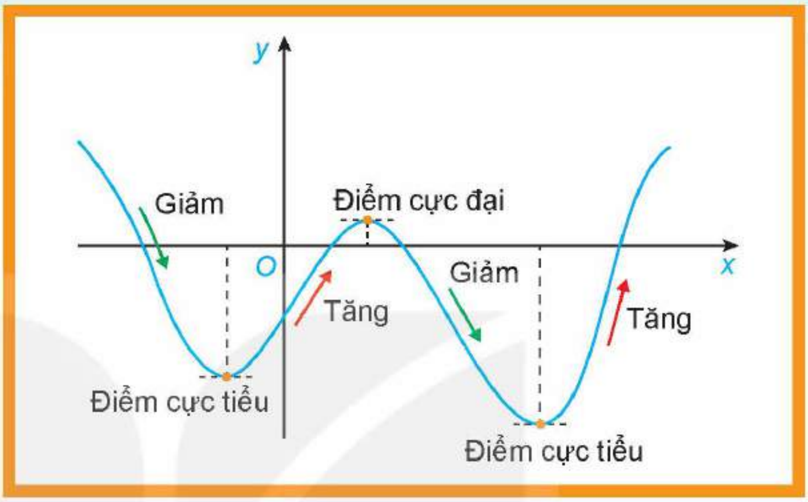
Chúc các em thành công cùng *TOÁN 12*!

MỤC LỤC

CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Trong chương này chúng ta ứng dụng đạo hàm để khảo sát sự biến thiên, vẽ đồ thị của hàm số và giải quyết những vấn đề thực tiễn liên quan.



Bài 1 TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

THUẬT NGỮ

- Bảng biến thiên
- Đồng biến
- Nghịch biến
- Cực đại
- Cực tiểu
- Cực trị

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết tính đồng biến, nghịch biến của một hàm số trên một khoảng dựa vào dấu đạo hàm cấp một của nó.
- Thể hiện tính đồng biến, nghịch biến của hàm số trong bảng biến thiên.
- Nhận biết tính đơn điệu của hàm số thông qua bảng biến thiên hoặc thông qua hình ảnh hình học của đồ thị hàm số.
- Nhận biết điểm cực trị, giá trị cực trị của hàm số thông qua bảng biến thiên hoặc thông qua hình ảnh hình học của đồ thị hàm số.

Xét một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải (H.1.1). Giả sử vị trí $s(t)$ (mét) của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm t (giây) được cho bởi công thức

$$s(t) = t^3 - 9t^2 + 15t,\ t \geq 0.$$

Hỏi trong khoảng thời gian nào thì chất điểm chuyển động sang phải, trong khoảng thời gian nào thì chất điểm chuyển động sang trái?

Hình 1.1

1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

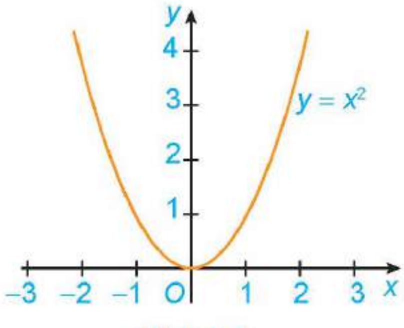
a) Khái niệm tính đơn điệu của hàm số

HĐ1. Nhận biết tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

Quan sát đồ thị của hàm số $y = x^2$ (H.1.2).

a) Hàm số đồng biến trên khoảng nào?

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng nào?



Hình 1.2

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y = f(x)$ là hàm số xác định trên K.

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Chú ý

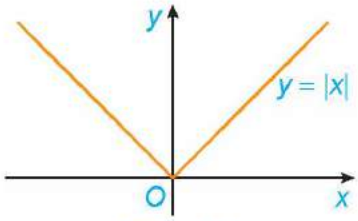
- Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của hàm số *đi lên* từ trái sang phải (H.1.3a). Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của hàm số *đi xuống* từ trái sang phải (H.1.3b).

a) Hàm số đồng biến trên (a; b). *b) Hàm số nghịch biến trên (a; b).*

Hình 1.3

- Hàm số đồng biến hay nghịch biến trên K còn được gọi chung là *đơn điệu* trên K. Việc tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số còn được gọi là tìm các khoảng đơn điệu (hay xét tính đơn điệu) của hàm số.
- Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà không chỉ rõ tập K thì ta hiểu là xét trên tập xác định của hàm số đó.

Ví dụ 1. Hình 1.4 là đồ thị của hàm số $y = f(x) = |x|$. Hãy tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số.



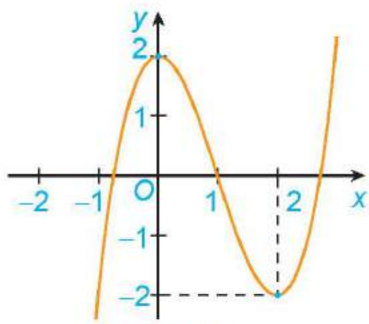
Hình 1.4

Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Từ đồ thị suy ra: Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

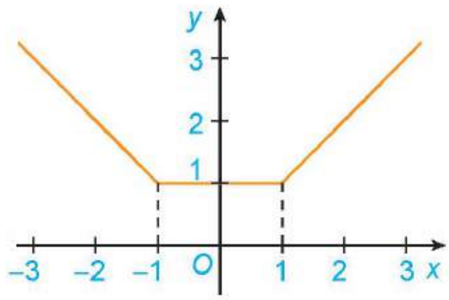
Luyện tập 1. Hình 1.5 là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Hãy tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số.



Hình 1.5

HĐ2. Nhận biết mối quan hệ giữa tính đơn điệu và dấu của đạo hàm

Xét hàm số $y = \begin{cases} -x & \text{nếu } x < -1 \\ 1 & \text{nếu } -1 \le x \le 1 \\ x & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$ có đồ thị như Hình 1.6.



Hình 1.6

a) Xét dấu đạo hàm của hàm số trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$. Nêu nhận xét về mối quan hệ giữa tính đồng biến, nghịch biến và dấu đạo hàm của hàm số trên mỗi khoảng này.

b) Có nhận xét gì về đạo hàm y' và hàm số y trên khoảng $(-1; 1)$?

ĐỊNH LÍ

> Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.
>
> a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng K.
>
> b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng K.

Chú ý

- Định lí trên vẫn đúng trong trường hợp $f'(x)$ bằng 0 tại một số hữu hạn điểm trong khoảng K.
- Người ta chứng minh được rằng, nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ không đổi trên khoảng K.

Ví dụ 2. Tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số $y = x^2 - 4x + 2$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 2x - 4$; $y' > 0$ với $x \in (2; +\infty)$; $y' < 0$ với $x \in (-\infty; 2)$.

Do đó, hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

Luyện tập 2. Tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$.

b) Sử dụng bảng biến thiên xét tính đơn điệu của hàm số

HĐ3. Xét tính đơn điệu của hàm số bằng bảng biến thiên

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$.

a) Tính đạo hàm $f'(x)$ và tìm các điểm x mà $f'(x) = 0$.

b) Lập *bảng biến thiên* của hàm số, tức là lập bảng thể hiện dấu của đạo hàm và sự đồng biến, nghịch biến của hàm số trên các khoảng tương ứng.

c) Nêu kết luận về khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Các bước để xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$:

1. Tìm tập xác định của hàm số.
2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i ($i = 1, 2,...$) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên của hàm số.
4. Nêu kết luận về khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Ví dụ 3. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{(2x-2)(x-1) - (x^2 - 2x + 5)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1; 1)$ và $(1; 3)$.

Ví dụ 4. Xét chiều biến thiên của hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$.

Giải

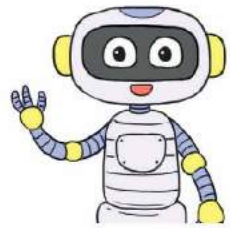
Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{(x+1) - (x-2)}{(x+1)^2} = \dfrac{3}{(x+1)^2} > 0$, với mọi $x \neq -1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty \ \Vert \ -\infty$	$\nearrow$	1

Việc tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số còn được nói gọn là *xét chiều biến thiên* của hàm số.



Từ bảng biến thiên, ta có: Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Luyện tập 3. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 5x + 2$; b) $y = \dfrac{-x^2 + 5x - 7}{x - 2}$.

Vận dụng 1. Giải bài toán trong *tình huống mở đầu* bằng cách thực hiện lần lượt các yêu cầu sau:

a) Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm, vận tốc $v(t)$ là đạo hàm của $s(t)$. Hãy tìm vận tốc $v(t)$.

b) Xét dấu của hàm $v(t)$, từ đó suy ra câu trả lời.

2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

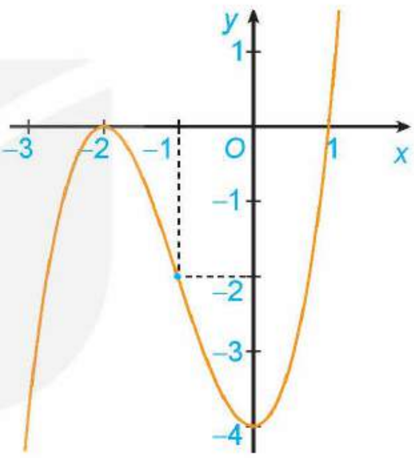
a) Khái niệm cực trị của hàm số

HĐ4. Nhận biết khái niệm cực đại, cực tiểu của hàm số

Quan sát đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ (H.1.7). Xét dấu đạo hàm của hàm số đã cho và hoàn thành các bảng sau vào vở:

x	-3		-2		-1
y'		?	0	?	
y	-4	↗	?	↘	-2

x	-1		0		1
y'		?	0	?	
y	-2	↘	?	↗	0



Hình 1.7

Tổng quát, ta có định nghĩa sau:

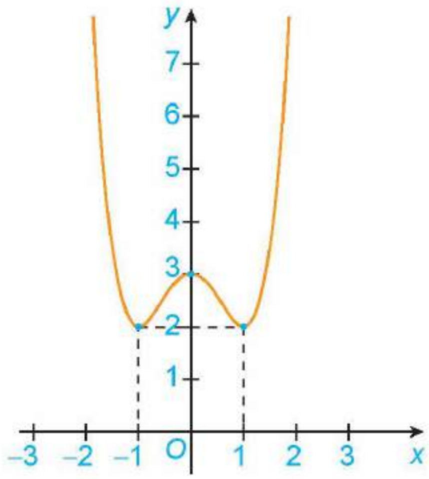
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.
- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.

Chú ý

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là *điểm cực đại* của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là *giá trị cực đại* của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là $f_{CĐ}$ hay $y_{CĐ}$. Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là *điểm cực đại* của đồ thị hàm số.
- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là *điểm cực tiểu* của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là *giá trị cực tiểu* của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CT} hay y_{CT}. Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là *điểm cực tiểu* của đồ thị hàm số.
- Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là *điểm cực trị*. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là *giá trị cực trị* (hay *cực trị*) của hàm số.

Ví dụ 5. Hình 1.8 là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Hãy tìm các cực trị của hàm số.



Hình 1.8

Giải

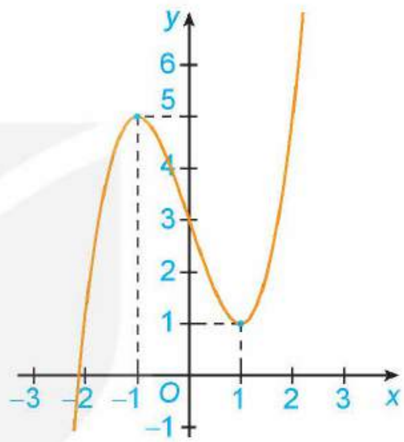
Từ đồ thị hàm số, ta có:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và $y_{CT} = y(-1) = 2$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CĐ} = y(0) = 3$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = y(1) = 2$.

Luyện tập 4. Hình 1.9 là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Hãy tìm các cực trị của hàm số.



Hình 1.9

b) Cách tìm cực trị của hàm số

HĐ5. Nhận biết cách tìm cực trị của hàm số

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + 1$.

a) Tính đạo hàm $f'(x)$ và tìm các điểm mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số.

c) Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị của hàm số.

ĐỊNH LÍ

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

a) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

b) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

Giải thích vì sao nếu $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua x_0 thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số $f(x)$?

Định lí trên được viết gọn lại trong hai bảng biến thiên sau:

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(x_0)$ (Cực tiểu)	$\nearrow$	

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(x_0)$ (Cực đại)	$\searrow$	

Chú ý. Từ định lí trên ta có các bước tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ như sau:

1. Tìm tập xác định của hàm số.
2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
3. Lập bảng biến thiên của hàm số.
4. Từ bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.

Ví dụ 6. Tìm cực trị của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 30$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

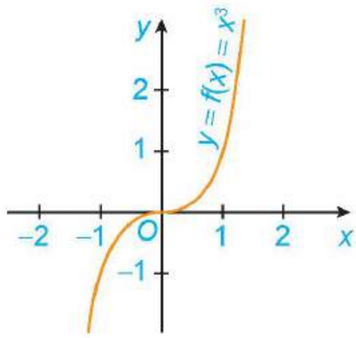
x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	34	$\searrow$	30	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và $y_{CĐ} = y(1) = 34$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ và $y_{CT} = y(3) = 30$.

Chú ý. Nếu $f'(x_0) = 0$ nhưng $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua x_0 thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số. Chẳng hạn, hàm số $f(x) = x^3$ có $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$, nhưng $x = 0$ không phải là điểm cực trị của hàm số (H.1.10).



Hình 1.10

Ví dụ 7. Tìm cực trị của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{(2x-2)(x-2) - (x^2 - 2x + 9)}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 5$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và $y_{CĐ} = y(-1) = -4$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 5$ và $y_{CT} = y(5) = 8$.

Ví dụ 8. Tìm cực trị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0$, với mọi $x \neq 1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số không có cực trị.

Luyện tập 5. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x^4 - 3x^2 + 1$;

b) $y = \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{x + 2}$.

Vận dụng 2. Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ độ cao 2 m với vận tốc ban đầu là 24,5 m/s. Trong Vật lí, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí thì độ cao h (mét) của vật sau t (giây) được cho bởi công thức

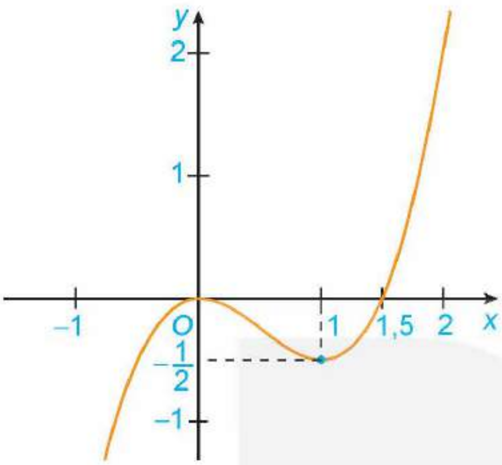
$$h(t) = 2 + 24{,}5t - 4{,}9t^2.$$

Hỏi tại thời điểm nào thì vật đạt độ cao lớn nhất?

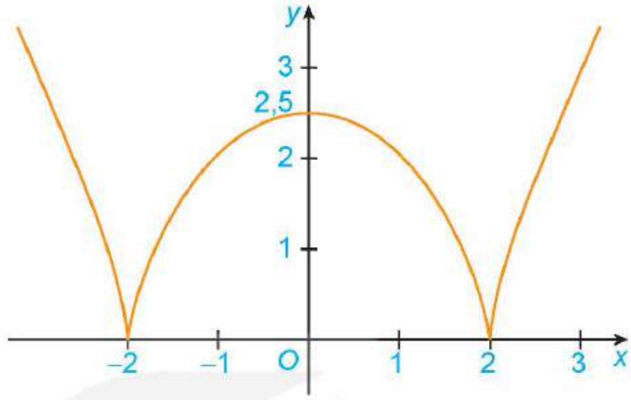
BÀI TẬP

1.1. Tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của các hàm số có đồ thị như sau:

a) Đồ thị hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2$ (H.1.11); b) Đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{\left(x^2 - 4\right)^2}$ (H.1.12).



Hình 1.11



Hình 1.12

1.2. Xét sự đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$;

b) $y = -x^3 + 2x^2 - 5x + 3$.

1.3. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x - 1}{x + 2}$; b) $y = \frac{x^2 + x + 4}{x - 3}$.

1.4. Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{4 - x^2}$; b) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.

1.5. Giả sử số dân của một thị trấn sau *t* năm kể từ năm 2000 được mô tả bởi hàm số

$$N(t) = \frac{25t + 10}{t + 5},\ t \geq 0,$$

trong đó $N(t)$ được tính bằng nghìn người.

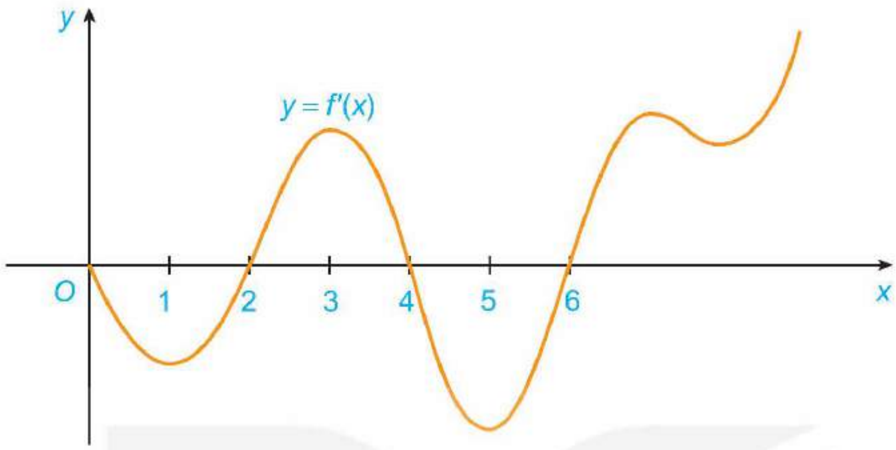
a) Tính số dân của thị trấn đó vào các năm 2000 và 2015.

b) Tính đạo hàm $N'(t)$ và $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t)$. Từ đó, giải thích tại sao số dân của thị trấn đó luôn tăng nhưng sẽ không vượt quá một ngưỡng nào đó.

1.6. Đồ thị của đạo hàm bậc nhất $y = f'(x)$ của hàm số $f(x)$ được cho trong Hình 1.13.

a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên những khoảng nào? Giải thích.

b) Tại giá trị nào của x thì $f(x)$ có cực đại hoặc cực tiểu? Giải thích.



Hình 1.13

1.7. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$;

b) $y = x^4 - 4x^2 + 2$;

c) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$;

d) $y = \sqrt{4x - 2x^2}$.

1.8. Cho hàm số $y = f(x) = |x|$.

a) Tính các giới hạn $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ và $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

Từ đó suy ra hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

b) Sử dụng định nghĩa, chứng minh hàm số có cực tiểu tại $x = 0$ (xem Hình 1.4).

1.9. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số

$$f(t) = \frac{5\,000}{1 + 5e^{-t}},\ t \geq 0,$$

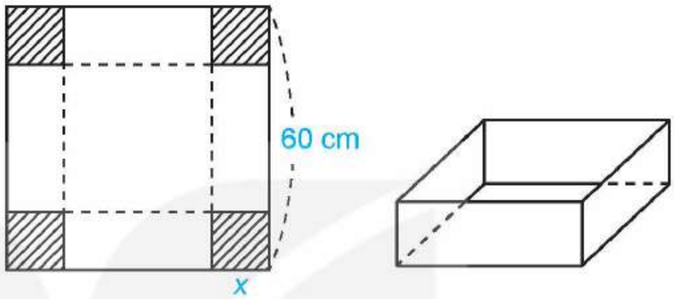
trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

Bài 2 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

THUẬT NGỮ
- Giá trị lớn nhất
- Giá trị nhỏ nhất

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Nhận biết giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập xác định cho trước.
- Xác định giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng đạo hàm trong những trường hợp đơn giản.

Từ một tấm bìa carton hình vuông có độ dài cạnh bằng 60 cm, người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gập thành một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp (H.1.14). Tính cạnh của các hình vuông bị cắt sao cho thể tích của chiếc hộp là lớn nhất.



Hình 1.14

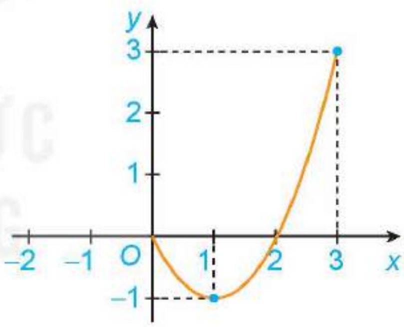
1. ĐỊNH NGHĨA

HĐ1. Nhận biết khái niệm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 2x$ với $x \in [0; 3]$, có đồ thị như Hình 1.15.

a) Giá trị lớn nhất M của hàm số trên đoạn [0; 3] là bao nhiêu? Tìm x_0 sao cho $f(x_0) = M$.

b) Giá trị nhỏ nhất m của hàm số trên đoạn [0; 3] là bao nhiêu? Tìm x_0 sao cho $f(x_0) = m$.



Hình 1.15

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D.

- Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \le M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

  Kí hiệu $M = \max\limits_{x \in D} f(x)$ hoặc $M = \max\limits_{D} f(x)$.

- Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \ge m$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

  Kí hiệu $m = \min\limits_{x \in D} f(x)$ hoặc $m = \min\limits_{D} f(x)$.

Chú ý

- Ta quy ước rằng khi nói giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ (mà không nói "trên tập D") thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên tập xác định của hàm số.
- Để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập D, ta thường lập bảng biến thiên của hàm số trên tập D để kết luận.

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $[-1; 1]$.

Cách 1. Sử dụng định nghĩa.

Ta có:

- $f(x) = \sqrt{1-x^2} \geq 0$; dấu bằng xảy ra khi $1-x^2 = 0$, tức là khi $x = -1$ hoặc $x = 1$.
  Do đó $\min\limits_{[-1;\,1]} f(x) = f(-1) = f(1) = 0$.
- $f(x) = \sqrt{1-x^2} \leq 1$; dấu bằng xảy ra khi $1-x^2 = 1$, tức là khi $x = 0$. Do đó $\max\limits_{[-1;\,1]} f(x) = f(0) = 1$.

Cách 2. Sử dụng bảng biến thiên.

Với $x \in (-1; 1)$, ta có: $y' = \dfrac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Lập bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$:

x	-1		0		1
y'	||	$+$	0	$-$	||
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên, ta được: $\min\limits_{[-1;\,1]} f(x) = f(-1) = f(1) = 0$; $\max\limits_{[-1;\,1]} f(x) = f(0) = 1$.

Chú ý. Trong thực hành, ta cũng dùng các kí hiệu $\min\limits_{D} y$, $\max\limits_{D} y$ để chỉ giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất (nếu có) của hàm số $y = f(x)$ trên tập D. Do đó, trong Ví dụ 1 ta có thể viết:

$$\min_{[-1;\,1]} y = y(-1) = y(1) = 0;\ \max_{[-1;\,1]} y = y(0) = 1.$$

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y = x - 2 + \dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Giải

Ta có: $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (vì $x > 0$).

Tính các giới hạn:

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+}\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right) = +\infty; \qquad \lim_{x\to +\infty} y = \lim_{x\to +\infty}\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

Lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(0; +\infty)$:

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta được: $\min\limits_{(0;+\infty)} y = y(1) = 0$; hàm số không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ví dụ 3. Giải bài toán trong *tình huống mở đầu*.

Giải

Gọi x (cm) là độ dài cạnh của các hình vuông nhỏ được cắt ở bốn góc của tấm bìa. Điều kiện: $0 < x < 30$. Khi cắt bỏ bốn hình vuông nhỏ có cạnh x (cm) ở bốn góc và gập lên thì ta được một chiếc hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông với độ dài cạnh bằng $(60 - 2x)$ (cm) và chiều cao bằng x (cm). Thể tích của chiếc hộp này là

$$V(x) = (60 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 240x^2 + 3\,600x \ \ (\text{cm}^3).$$

Ta có: $V'(x) = 12x^2 - 480x + 3\,600$; $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 40x + 300 = 0 \Leftrightarrow x = 10$ (thoả mãn điều kiện) hoặc $x = 30$ (loại).

Lập bảng biến thiên:

x	0		10		30
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	$16\,000$	$\searrow$	0

Vậy để thể tích của chiếc hộp là lớn nhất thì độ dài cạnh của các hình vuông nhỏ phải cắt là 10 cm.

Luyện tập 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

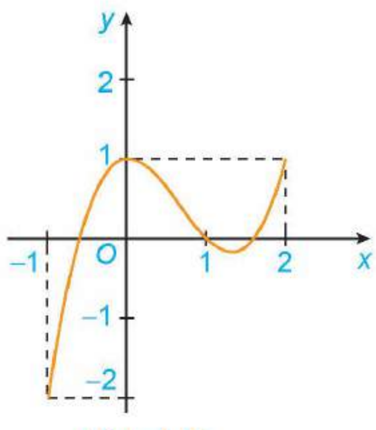
a) $y = \sqrt{2x - x^2}$;

b) $y = -x + \dfrac{1}{x - 1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$.

2. CÁCH TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT ĐOẠN

HĐ2. Hình thành các bước tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 2]$, với đồ thị như Hình 1.16.



Hình 1.16

a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 2]$.

b) Tính đạo hàm $f'(x)$ và tìm các điểm $x \in (-1; 2)$ mà $f'(x) = 0$.

c) Tính giá trị của hàm số tại hai đầu mút của đoạn $[-1; 2]$ và tại các điểm x đã tìm ở câu b. So sánh số nhỏ nhất trong các giá trị này với $\min\limits_{[-1; 2]} f(x)$, số lớn nhất trong các giá trị này với $\max\limits_{[-1; 2]} f(x)$.

Giả sử $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm trên $(a; b)$, có thể trừ ra tại một số hữu hạn điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm. Giả sử chỉ có hữu hạn điểm trong đoạn $[a; b]$ mà đạo hàm $f'(x)$ bằng 0.

Các bước tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$:

1. Tìm các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a; b)$, tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.
2. Tính $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(a)$ và $f(b)$.
3. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên. Ta có:

$$M = \max_{[a; b]} f(x); \; m = \min_{[a; b]} f(x).$$

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ trên đoạn $[0; 4]$.

Giải

Ta có: $y' = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \sqrt{2}$ (vì $x \in [0; 4]$);

$y(0) = 3$; $y(4) = 195$; $y(\sqrt{2}) = -1$.

Do đó: $\max\limits_{[0; 4]} y = y(4) = 195$; $\min\limits_{[0; 4]} y = y(\sqrt{2}) = -1$.

Ví dụ 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \cos x$ trên đoạn $[0; 2\pi]$.

Giải

Ta có: $y' = \cos x - \sin x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$ hoặc $x = \dfrac{5\pi}{4}$ (vì $x \in [0; 2\pi]$);

$y(0) = 1$; $y(2\pi) = 1$; $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$; $y\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$.

Do đó: $\max\limits_{[0; 2\pi]} y = y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$; $\min\limits_{[0; 2\pi]} y = y\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$.

Luyện tập 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ trên đoạn $[0; 2]$;

b) $y = (x + 1)e^{-x}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Vận dụng. Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hoá bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2$, $0 \le t \le 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần).

a) Hãy ước tính số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương đó.

b) Đạo hàm $N'(t)$ biểu thị tốc độ lây lan của virus (còn gọi là tốc độ truyền bệnh). Hỏi virus sẽ lây lan nhanh nhất khi nào?

BÀI TẬP

1.10. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = -x^2 + 4x + 3$;

b) $y = x^3 - 2x^2 + 1$ trên $[0; +\infty)$;

c) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ trên $(1; +\infty)$;

d) $y = \sqrt{4x - 2x^2}$.

1.11. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = x^4 - 2x^2 + 3$;

b) $y = xe^{-x}$;

c) $y = x\ln x$;

d) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$.

1.12. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 - 6x + 3$ trên đoạn $[-1; 2]$;

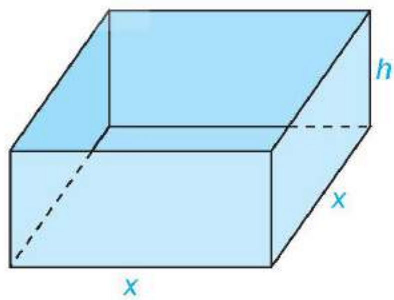
b) $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[0; 3]$;

c) $y = x - \sin 2x$ trên đoạn $[0; \pi]$;

d) $y = (x^2 - x)e^x$ trên đoạn $[0; 1]$.

1.13. Trong các hình chữ nhật có chu vi là 24 cm, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

1.14. Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng 108 cm^2 như Hình 1.17. Tìm các kích thước của chiếc hộp sao cho thể tích của hộp là lớn nhất.



Hình 1.17

1.15. Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích 1 000 cm^3. Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá 1,2 nghìn đồng/cm^2, trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá 0,75 nghìn đồng/cm^2. Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.

Bài 3 ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

THUẬT NGỮ
- Tiệm cận ngang
- Tiệm cận đứng
- Tiệm cận xiên

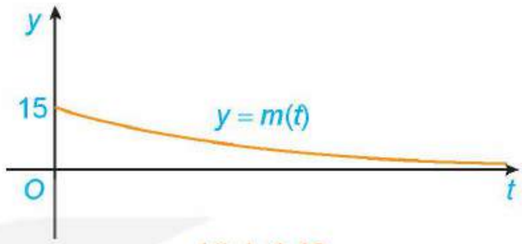
KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

Nhận biết hình ảnh hình học của đường tiệm cận ngang, đường tiệm cận đứng, đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Giả sử khối lượng còn lại của một chất phóng xạ (gam) sau t ngày phân rã được cho bởi hàm số

$$m(t) = 15e^{-0{,}012t}.$$

Khối lượng $m(t)$ thay đổi ra sao khi $t \to +\infty$? Điều này thể hiện trên Hình 1.18 như thế nào?



Hình 1.18

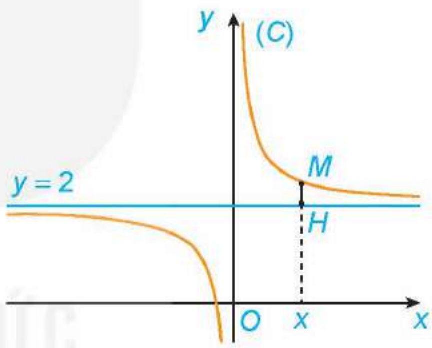
1. ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG

HĐ1. Nhận biết đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$ có đồ thị (C). Với $x > 0$, xét điểm $M(x; f(x))$ thuộc (C). Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng $y = 2$ (H.1.19).

a) Tính khoảng cách MH.

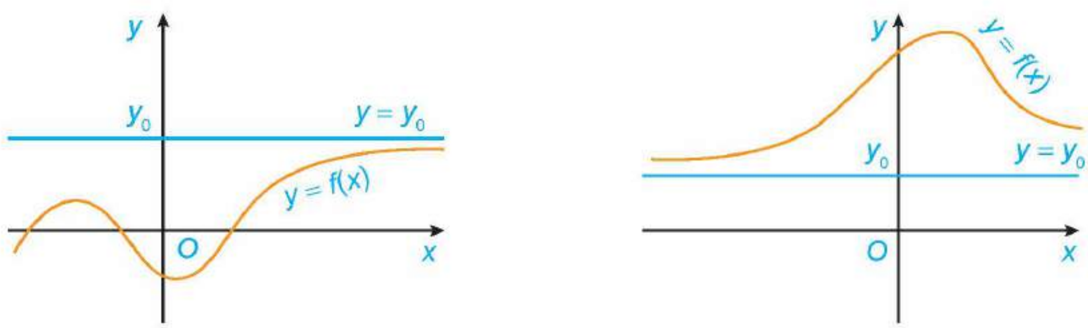
b) Có nhận xét gì về khoảng cách MH khi $x \to +\infty$?



Hình 1.19

Đường thẳng $y = y_0$ gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0.$$



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to +\infty$).

Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to -\infty$).

Hình 1.20

Ví dụ 1. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{3x-2}{x+1}$.

Giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-2}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} = 3$. Tương tự, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$.

Ví dụ 2. Tìm các tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Giải

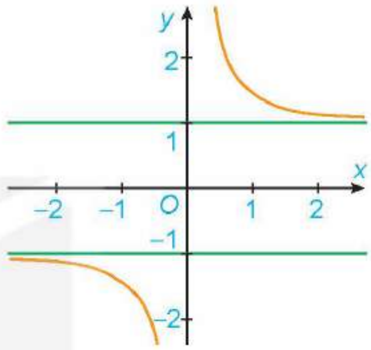
Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = -1.$$

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có hai tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$.

Nhận xét. Đồ thị hàm số $f(x)$ như Hình 1.21.



Hình 1.21

Luyện tập 1. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

Vận dụng 1. Giải bài toán trong *tình huống mở đầu.*

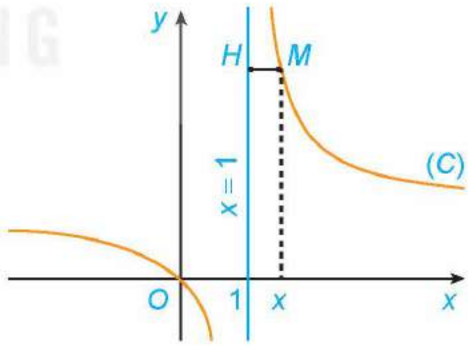
2. ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG

HĐ2. Nhận biết đường tiệm cận đứng

Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ có đồ thị (C). Với $x > 1$, xét điểm $M(x; f(x))$ thuộc (C). Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng $x = 1$ (H.1.22).

a) Tính khoảng cách MH.

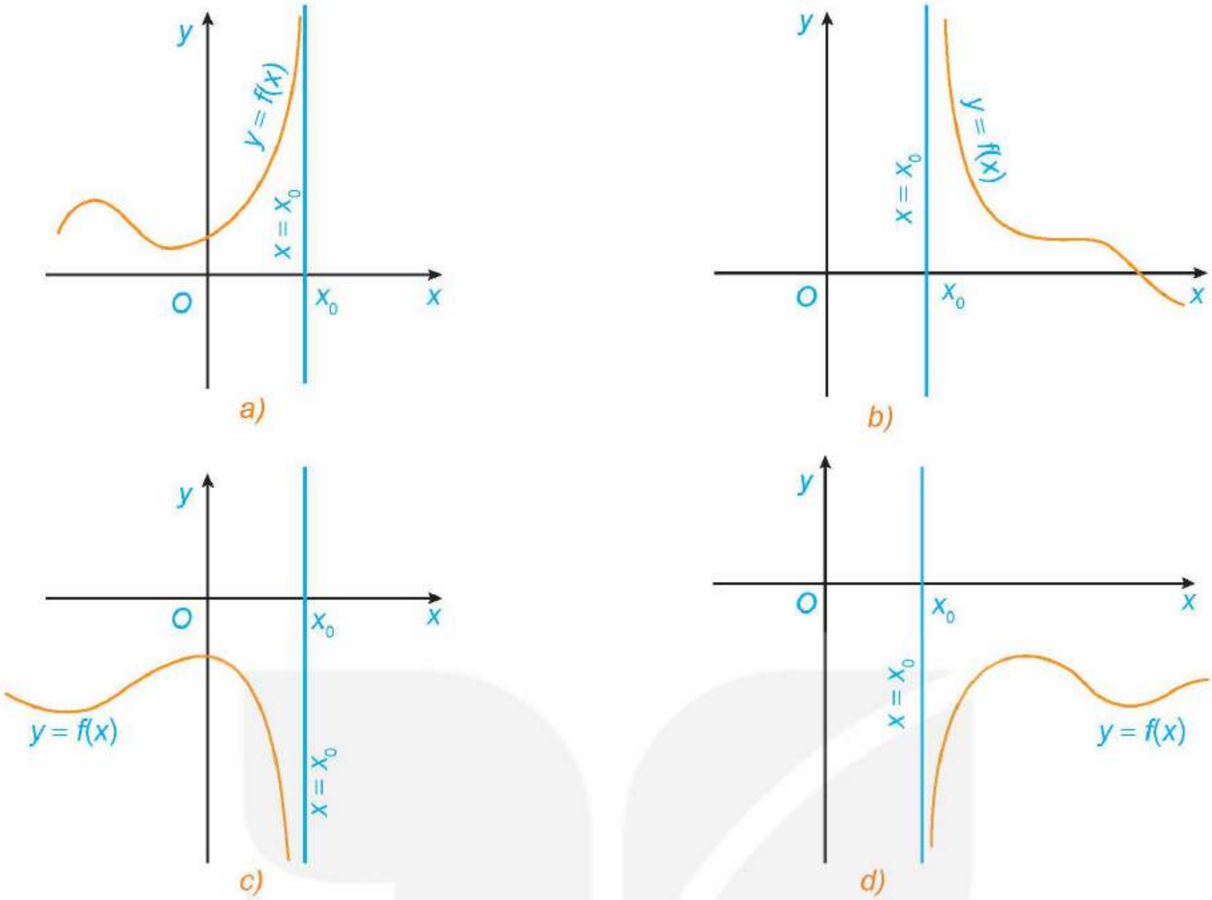
b) Khi M thay đổi trên (C) sao cho khoảng cách MH dần đến 0, có nhận xét gì về tung độ của điểm M?



Hình 1.22

Đường thẳng $x = x_0$ gọi là đường tiệm cận đứng (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty.$$



a) và c). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to x_0^-$).

b) và d). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to x_0^+$).

Hình 1.23

Ví dụ 3. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{3 - x}{x + 2}$.

Giải

Ta có: $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{3 - x}{x + 2} = +\infty$. Tương tự, $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$. Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$.

Ví dụ 4. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x}$.

Giải

Ta có: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 + 2}{x} = +\infty$. Tương tự, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$. Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 0$.

Luyện tập 2. Tìm các tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 4}$.

Vận dụng 2. Để loại bỏ p% một loài tảo độc khỏi một hồ nước, người ta ước tính chi phí bỏ ra là

$$C(p) = \frac{45p}{100 - p} \text{ (triệu đồng), với } 0 \le p < 100.$$

Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(p)$ và nêu ý nghĩa thực tiễn của đường tiệm cận này.

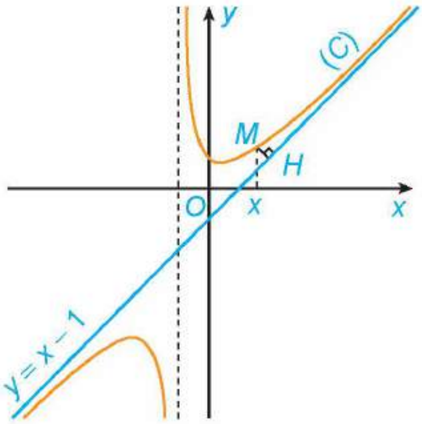
3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN XIÊN

HĐ3. Nhận biết đường tiệm cận xiên

Cho hàm số $y = f(x) = x - 1 + \dfrac{2}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $y = x - 1$ như Hình 1.24.

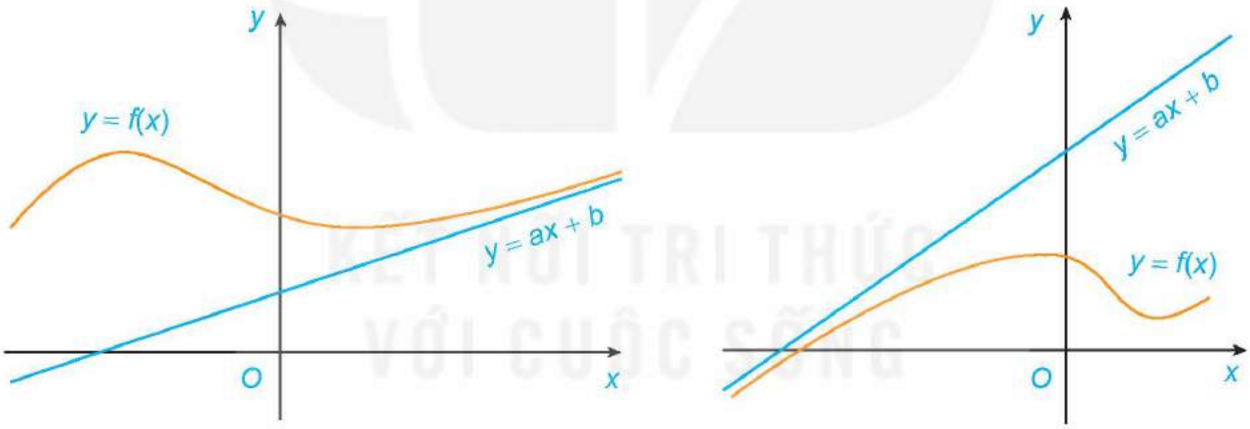
a) Với $x > -1$, xét điểm $M(x;\ f(x))$ thuộc (C). Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng $y = x - 1$. Có nhận xét gì về khoảng cách MH khi $x \to +\infty$?

b) Chứng tỏ rằng $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (x-1)\right] = 0$. Tính chất này thể hiện trên Hình 1.24 như thế nào?



Hình 1.24

> Đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ gọi là **đường tiệm cận xiên** (gọi tắt là tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu
>
> $$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0.$$



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to +\infty$).

Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to -\infty$).

Hình 1.25

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = f(x) = x + \dfrac{1}{x+2}$. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

Giải

Ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - x\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+2} = 0$. Tương tự $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - x\right] = 0$.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.

Chú ý. Ta biết rằng nếu đường thẳng $y = ax + b \ (a \neq 0)$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax + b)\right] = 0$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax + b)\right] = 0$.

Do đó $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax + b)\right] \cdot \dfrac{1}{x} = 0$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax + b)\right] \cdot \dfrac{1}{x} = 0$.

Từ đây suy ra $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ hoặc $a = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Khi đó, ta có $b = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - ax\right]$ hoặc $b = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - ax\right]$.

Ngược lại, với a và b xác định như trên, đường thẳng $y = ax + b \ (a \neq 0)$ là một tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Đặc biệt, nếu $a = 0$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận ngang.

Ví dụ 6. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x + 1}$.

Giải

Ta có:

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + x} = 1;$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - x\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x + 2}{x + 1} = -2.$$

(Tương tự, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - x\right] = -2$.)

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 2$.

Nhận xét. Trong thực hành, để tìm tiệm cận xiên của hàm phân thức trong Ví dụ 6, ta viết:

$$y = f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} = x - 2 + \frac{4}{x + 1}.$$

Ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (x - 2)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x + 1} = 0$;

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x + 1} = 0.$$

Do đó, đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 2$.

Luyện tập 3. Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{1 - x}$.

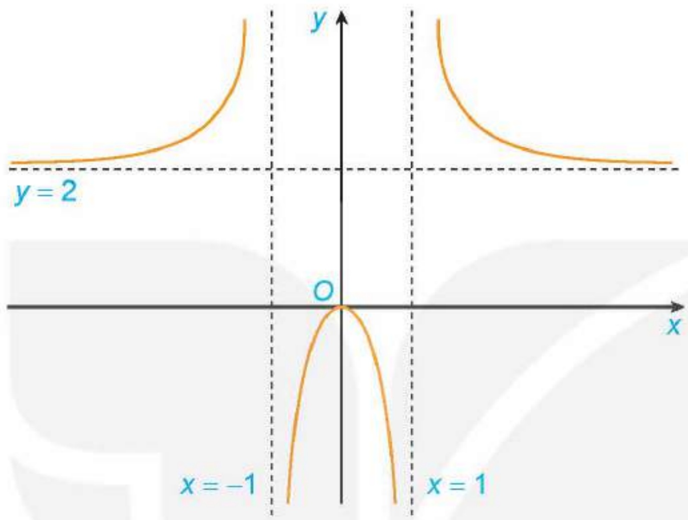
BÀI TẬP

1.16. Hình 1.26 là đồ thị của hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$.

Sử dụng đồ thị này, hãy:

a) Viết kết quả của các giới hạn sau: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$.

b) Chỉ ra các tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho.



Hình 1.26

1.17. Đường thẳng $x = 1$ có phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ không?

1.18. Tìm các tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{3 - x}{2x + 1}$; b) $y = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x + 2}$.

1.19. Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là

$$C(x) = 2x + 50 \text{ (triệu đồng)}.$$

Khi đó $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x)$ giảm và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$. Tính chất này nói lên điều gì?

1.20. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng 144 m^2. Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là x (m).

a) Viết biểu thức tính chu vi $P(x)$ (mét) của mảnh vườn.

b) Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $P(x)$.

Bài 4 KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

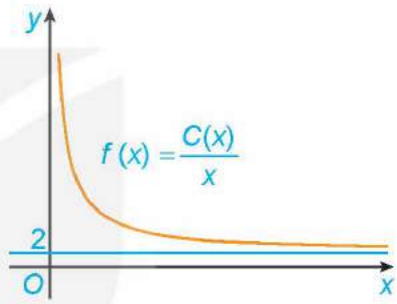
THUẬT NGỮ

- Chiều biến thiên
- Bảng biến thiên
- Cực trị
- Tiệm cận
- Đồ thị
- Tâm đối xứng
- Trục đối xứng

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Mô tả sơ đồ tổng quát để khảo sát hàm số (tìm tập xác định, xét chiều biến thiên, tìm cực trị, tìm tiệm cận, lập bảng biến thiên, vẽ đồ thị).
- Khảo sát tập xác định, chiều biến thiên, cực trị, tiệm cận, bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số: hàm bậc ba, hàm phân thức hữu tỉ đơn giản.
- Nhận biết tính đối xứng (trục đối xứng, tâm đối xứng) của đồ thị các hàm số trên.

Một đơn vị sản xuất hàng tiêu dùng ước tính chi phí để sản xuất x đơn vị sản phẩm là $C(x) = 2x + 45$ (triệu đồng). Khi đó, chi phí trung bình cho mỗi đơn vị sản phẩm là $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$. Hãy giải thích tại sao chi phí trung bình giảm theo x nhưng luôn lớn hơn 2 triệu đồng/sản phẩm. Điều này thể hiện trên đồ thị của hàm số $f(x)$ trong Hình 1.27 như thế nào?



Hình 1.27

1. SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

HĐ1. Làm quen với việc khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$. Thực hiện lần lượt các yêu cầu sau:

a) Tính y' và tìm các điểm tại đó $y' = 0$.

b) Xét dấu y' để tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến và cực trị của hàm số.

c) Tính $\lim\limits_{x \to -\infty} y$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y$ và lập bảng biến thiên của hàm số.

d) Vẽ đồ thị của hàm số và nhận xét về tính đối xứng của đồ thị.

Sơ đồ khảo sát hàm số $y = f(x)$:

1. Tìm tập xác định của hàm số.
2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số:
   - Tính đạo hàm y'. Tìm các điểm tại đó y' bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
   - Xét dấu y' để chỉ ra các khoảng đơn điệu của hàm số.
   - Tìm cực trị của hàm số.
   - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
   - Lập bảng biến thiên của hàm số.
3. Vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

Chú ý. Khi vẽ đồ thị, nên xác định thêm một số điểm đặc biệt của đồ thị, chẳng hạn tìm giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ (khi có và việc tìm không quá phức tạp). Ngoài ra, cần lưu ý đến tính đối xứng của đồ thị (đối xứng tâm, đối xứng trục).

2. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ ĐA THỨC BẬC BA

Trong mục này, ta sử dụng sơ đồ tổng quát ở Mục 1 để khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số bậc ba.

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Giải

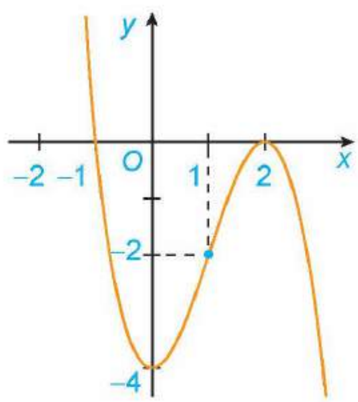
1. Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}$.
2. Sự biến thiên:

- Ta có: $y' = -3x^2 + 6x$. Vậy $y' = 0$ khi $x = 0$ hoặc $x = 2$.
- Trên khoảng $(0; 2)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến. Trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu $y_{CT} = -4$. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$, giá trị cực đại $y_{CĐ} = 0$.
- Giới hạn tại vô cực: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3\left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}\right) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3\left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}\right) = -\infty$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

3. Đồ thị (H.1.28):

- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $(0; -4)$.
- Ta có $y = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow -(x-2)^2(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$. Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $(-1; 0)$ và $(2; 0)$.
- Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $(1; -2)$.



Hình 1.28

Chú ý. Đồ thị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$:

- Có tâm đối xứng là điểm có hoành độ thoả mãn $y'' = 0$, hay $x = -\frac{b}{3a}$.
- Không có tiệm cận.

Ví dụ 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$.

Giải

1. Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên:

- Ta có: $y' = 3x^2 - 4x + 2$. Vậy $y' > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- Hàm số không có cực trị.
- Giới hạn tại vô cực: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3\left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right) = -\infty$;

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} x^3\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = +\infty.$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

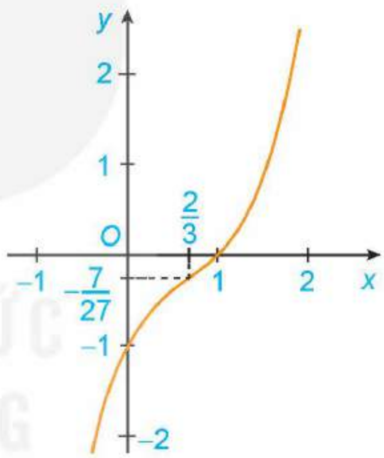
3. Đồ thị (H.1.29):

- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $(0; -1)$.
- Ta có $y = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $(1; 0)$.

- Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $\left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{7}{27}\right)$.



Hình 1.29

Luyện tập 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 - 5x$.

3. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ PHÂN THỨC HỮU TỈ

Trong mục này, ta sử dụng sơ đồ tổng quát ở Mục 1 để khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của một số hàm phân thức hữu tỉ đơn giản.

a) Hàm số phân thức $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$

Ví dụ 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$.

Giải

1. Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

2. Sự biến thiên:

- Ta có: $y' = -\dfrac{3}{(x-2)^2} < 0$ với mọi $x \neq 2$.
- Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
- Hàm số không có cực trị.
- Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to 2^-} y = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+1}{x-2} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} y = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{x-2} = +\infty$;

  $\lim\limits_{x\to +\infty} y = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+1}{x-2} = 1$; $\lim\limits_{x\to -\infty} y = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+1}{x-2} = 1$.

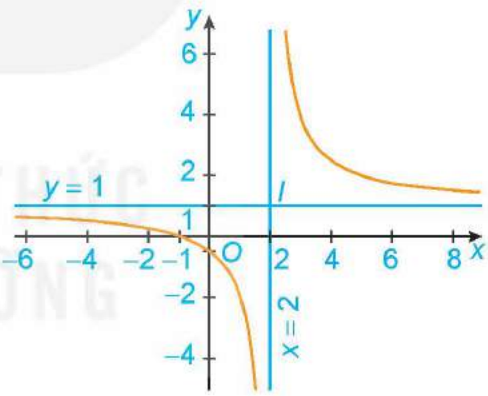
  Do đó, đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	1	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	1

3. Đồ thị (H.1.30):

- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0; -\dfrac{1}{2}\right)$.
- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $(-1; 0)$.
- Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2; 1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.



Hình 1.30

Chú ý. Đồ thị của hàm số phân thức $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$:

- Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng;
- Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

Luyện tập 2. Giải bài toán ở *tình huống mở đầu*, coi $f(x)$ là hàm số xác định với $x \geq 1$.

Vận dụng. Một bể chứa ban đầu có 200 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 40 lít nước, đồng thời cho vào bể 20 gam chất khử trùng (hoà tan).

a) Tính thể tích nước và khối lượng chất khử trùng có trong bể sau t phút. Từ đó tính nồng độ chất khử trùng (gam/lít) trong bể sau t phút.

b) Coi nồng độ chất khử trùng là hàm số $f(t)$ với $t \geq 0$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số này.

c) Hãy giải thích tại sao nồng độ chất khử trùng tăng theo t nhưng không vượt ngưỡng 0,5 gam/lít.

b) Hàm số phân thức $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ ($a \neq 0$, $p \neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

Ví dụ 4. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2}$.

Giải

1. Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

2. Sự biến thiên: Viết $y = x + 1 + \dfrac{1}{x - 2}$.

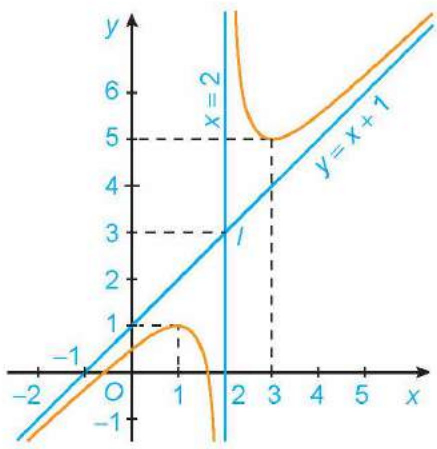
- Ta có: $y' = 1 - \dfrac{1}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$. Vậy $y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.
- Trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng này.

  Trên các khoảng $(1; 2)$ và $(2; 3)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng này.
- Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ với $y_{CĐ} = 1$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ với $y_{CT} = 5$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - 1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - 1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = +\infty$.
- Tiệm cận: $\lim\limits_{x \to 2^-} y = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(x + 1 + \dfrac{1}{x-2}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} y = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(x + 1 + \dfrac{1}{x-2}\right) = +\infty$;

  $\lim\limits_{x \to +\infty} [y - (x+1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x - 2} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} [y - (x+1)] = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x - 2} = 0$.

  Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 1$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	5	↗	$+\infty$



Hình 1.31

3. Đồ thị (H.1.31):

- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

- Ta có $y=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x-1}{x-2}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)$ và $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};0\right)$.
- Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2;\ 3)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

Ví dụ 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$.

Giải

1. Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
2. Sự biến thiên:

- Viết $y=x-\dfrac{2}{x+1}$, ta có $y'=1+\dfrac{2}{(x+1)^2}>0$ với mọi $x\neq-1$.
- Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;\ -1)$ và $(-1;\ +\infty)$.
- Hàm số không có cực trị.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=+\infty$.
- Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to-1^-} y=\lim\limits_{x\to-1^-}\left(x-\dfrac{2}{x+1}\right)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^+} y=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(x-\dfrac{2}{x+1}\right)=-\infty$;

$$\lim_{x\to+\infty}[y-x]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x+1}\right)=0;\ \lim_{x\to-\infty}[y-x]=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{2}{x+1}\right)=0.$$

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x$.

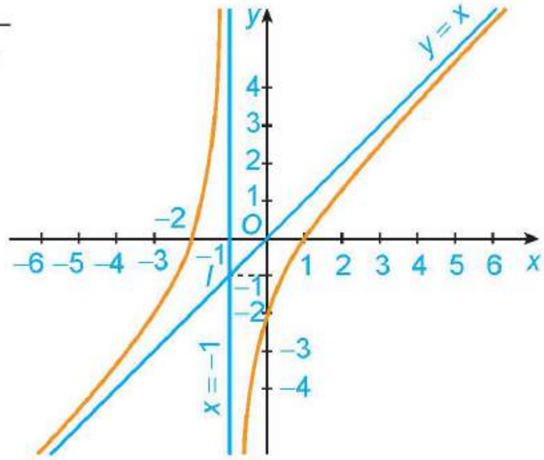
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Đồ thị (H.1.32):

- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $(0;\ -2)$.
- Ta có $y=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+x-2}{x+1}=0 \Leftrightarrow x=-2$ hoặc $x=1$.

Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $(-2;\ 0)$ và $(1;\ 0)$.



Hình 1.32

- Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-1; -1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

Chú ý. Đồ thị của hàm số phân thức $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ ($a \neq 0$, $p \neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu):

- Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng;
- Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

Luyện tập 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 3x - 1}{x - 2}$.

BÀI TẬP

1.21. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = -x^3 + 3x + 1$; b) $y = x^3 + 3x^2 - x - 1$.

1.22. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{2x + 1}{x + 1}$; b) $y = \dfrac{x + 3}{1 - x}$.

1.23. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{2x^2 - x + 4}{x - 1}$; b) $y = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 3}$.

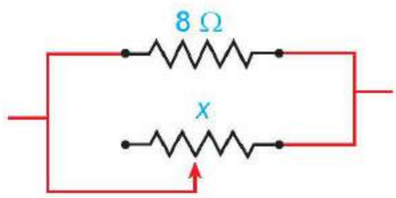
1.24. Một cốc chứa 30 ml dung dịch KOH (potassium hydroxide) với nồng độ 100 mg/ml. Một bình chứa dung dịch KOH khác với nồng độ 8 mg/ml được trộn vào cốc.

a) Tính nồng độ KOH trong cốc sau khi trộn x (ml) từ bình chứa, kí hiệu là $C(x)$.

b) Coi $C(x)$ là hàm số xác định với $x \geq 0$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số này.

c) Giải thích tại sao nồng độ KOH trong cốc giảm theo x nhưng luôn lớn hơn 8 mg/ml.

1.25. Trong Vật lí, ta biết rằng khi mắc song song hai điện trở R_1 và R_2 thì điện trở tương đương R của mạch điện được tính theo công thức $R = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$ (theo *Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016*).



Hình 1.33

Giả sử một điện trở 8 Ω được mắc song song với một biến trở như Hình 1.33. Nếu điện trở đó được kí hiệu là x (Ω) thì điện trở tương đương R là hàm số của x. Vẽ đồ thị của hàm số $y = R(x)$, $x > 0$ và dựa vào đồ thị đã vẽ, hãy cho biết:

a) Điện trở tương đương của mạch thay đổi thế nào khi x tăng.

b) Tại sao điện trở tương đương của mạch không bao giờ vượt quá 8 Ω.

Bài 5 ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN

THUẬT NGỮ

- Tốc độ thay đổi tức thời
- Bài toán tối ưu hoá

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

Vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết một số vấn đề liên quan đến thực tiễn.

Một đội bóng đá thi đấu trong một sân vận động có sức chứa 55 000 khán giả. Với giá mỗi vé là 100 nghìn đồng, số khán giả trung bình là 27 000 người. Qua thăm dò dư luận, người ta thấy rằng mỗi khi giá vé giảm thêm 10 nghìn đồng, sẽ có thêm khoảng 3 000 khán giả. Hỏi ban tổ chức nên đặt giá vé là bao nhiêu để doanh thu từ tiền bán vé là lớn nhất?

1. TỐC ĐỘ THAY ĐỔI CỦA MỘT ĐẠI LƯỢNG

Giả sử y là một hàm số của x và ta viết $y = f(x)$. Nếu x thay đổi từ x_1 đến x_2, thì sự thay đổi của x là

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

và sự thay đổi tương ứng của y là

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$

Tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ được gọi là *tốc độ thay đổi trung bình* của y đối với x trên đoạn $[x_1; x_2]$.

Giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x_2 \to x_1} \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ được gọi là *tốc độ thay đổi tức thời* của y đối với x tại điểm $x = x_1$.

Như vậy, đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu $s = s(t)$ là *hàm vị trí* của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị *vận tốc* tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là *gia tốc* tức thời của vật:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

- Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t, thì $C'(t)$ là *tốc độ phản ứng* tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t.
- Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t, thì $P'(t)$ biểu thị *tốc độ tăng trưởng* tức thời của quần thể tại thời điểm t.

- Nếu $C = C(x)$ là *hàm chi phí*, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là *chi phí biên*.
- Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x + 1$ (xem SGK *Toán 11 tập hai*, trang 87, bộ sách *Kết nối tri thức với cuộc sống*).

Ví dụ 1. Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 2 m với vận tốc ban đầu 24,5 m/s là $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$ (theo *Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016*).

a) Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.

b) Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?

c) Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

Giải

a) Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm, vận tốc của vật là $v = h'(t) = 24,5 - 9,8t$ (m/s).

Do đó, vận tốc của vật sau 2 giây là $v(2) = 24,5 - 9,8 \cdot 2 = 4,9$ (m/s).

b) Vì $h(t)$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = -4,9 < 0$ nên $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{24,5}{2 \cdot 4,9} = 2,5$ (giây). Khi đó, độ cao lớn nhất của vật là $h(2,5) = 32,625$ (m).

c) Vật chạm đất khi độ cao bằng 0, tức là $h = 2 + 24,5t - 4,9t^2 = 0$, hay $t \approx 5,08$ (giây).

Vận tốc của vật lúc chạm đất là $v(5,08) = 24,5 - 9,8 \cdot 5,08 = -25,284$ (m/s).

Vận tốc âm chứng tỏ chiều chuyển động của vật là ngược chiều dương (hướng lên trên) của trục đã chọn (khi lập phương trình chuyển động của vật).

Ví dụ 2. Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t) = \dfrac{a}{b + e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b. Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

Giải

Ta có: $P'(t) = \dfrac{0,75ae^{-0,75t}}{\left(b + e^{-0,75t}\right)^2}$, $t \geq 0$.

Theo đề bài, ta có: $P(0) = 20$ và $P'(0) = 12$. Do đó, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b+1} = 20 \\ \dfrac{0,75a}{(b+1)^2} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 20(b+1) \\ \dfrac{15}{b+1} = 12. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được $a = 25$ và $b = \dfrac{1}{4}$.

Khi đó, $P'(t)=\dfrac{18,75e^{-0,75t}}{\left(\dfrac{1}{4}+e^{-0,75t}\right)^2}>0, \forall t\geq 0$, tức là số lượng quần thể nấm men luôn tăng.

Tuy nhiên, do $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{25}{\dfrac{1}{4}+e^{-0,75t}}=100$ nên số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không vượt quá 100 tế bào.

Ví dụ 3. Giả sử chi phí $C(x)$ (nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị của một loại hàng hoá nào đó được cho bởi hàm số $C(x)=30\,000+300x-2,5x^2+0,125x^3$.

a) Tìm hàm chi phí biên.

b) Tìm $C'(200)$ và giải thích ý nghĩa.

c) So sánh $C'(200)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201.

Giải

a) Hàm chi phí biên là $C'(x)=300-5x+0,375x^2$.

b) Ta có: $C'(200)=300-5\cdot 200+0,375\cdot 200^2=14\,300$.

Chi phí biên tại $x=200$ là 14 300 nghìn đồng, nghĩa là chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo (đơn vị hàng hoá thứ 201) là khoảng 14 300 nghìn đồng.

c) Chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201 là

$$C(201)-C(200)=1\,004\,372,625-990\,000=14\,372,625 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Giá trị này xấp xỉ với chi phí biên $C'(200)$ đã tính ở câu b.

Ví dụ 4. Để loại bỏ x% chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là

$$C(x)=\frac{300x}{100-x} \text{ (triệu đồng)}, \ 0\leq x<100.$$

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=C(x)$. Từ đó, hãy cho biết:

a) Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?

b) Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

Giải

Xét hàm số $y=C(x)=\dfrac{300x}{100-x}$, $0\leq x<100$.

Ta có:

- $y'=\dfrac{30\,000}{(100-x)^2}>0$, với mọi $x\in[0;100)$.

  Do đó hàm số luôn đồng biến trên nửa khoảng $[0;100)$.

- $\lim\limits_{x\to100^-}C(x)=\lim\limits_{x\to100^-}\dfrac{300x}{100-x}=+\infty$, nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=100$.

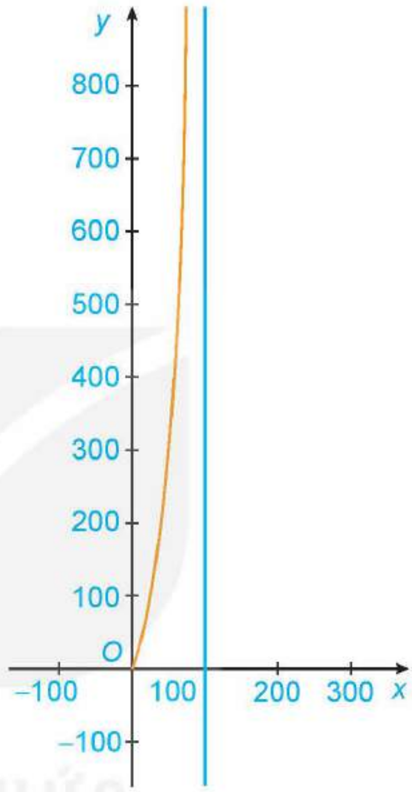
Bảng biến thiên:

x	0		100
$C'(x)$		$+$	
$C(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số như Hình 1.34.

a) Chi phí cần bỏ ra $C(x)$ sẽ luôn tăng khi x tăng.

b) Vì $\lim\limits_{x \to 100^-} C(x) = +\infty$ (hàm số $C(x)$ không xác định khi $x = 100$) nên nhà máy không thể loại bỏ 100% chất gây ô nhiễm không khí (dù bỏ ra chi phí là bao nhiêu đi chăng nữa).



Hình 1.34

Luyện tập 1. Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu P (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1},\ 0 \le t \le 10,$$

trong đó thời gian t được tính bằng giây. Tính tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim.

2. MỘT VÀI BÀI TOÁN TỐI ƯU HOÁ ĐƠN GIẢN

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí.

Khi giải những bài toán như vậy, khó khăn lớn nhất thường là việc chuyển đổi bài toán thực tế cho bằng lời thành bài toán tối ưu hoá toán học bằng cách thiết lập một hàm số phù hợp mà ta cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của nó, trên miền biến thiên phù hợp của biến số.

Quy trình giải một bài toán tối ưu hoá:

Bước 1. Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.

Bước 2. Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x, và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x. Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x. Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$.

Bước 3. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

Ví dụ 5. Một nhà sản xuất cần làm những hộp đựng hình trụ có thể tích 1 lít. Tìm các kích thước của hộp đựng để chi phí vật liệu dùng để sản xuất là nhỏ nhất (kết quả được tính theo centimét và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Giải

Đổi 1 lít = 1 000 cm^3.

Gọi r (cm) là bán kính đáy của hình trụ, h (cm) là chiều cao của hình trụ.

Diện tích toàn phần của hình trụ là: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

Do thể tích của hình trụ là 1 000 cm^3 nên ta có: $1\,000 = V = \pi r^2 h$, hay $h = \dfrac{1\,000}{\pi r^2}$.

Do đó, diện tích toàn phần của hình trụ là: $S = 2\pi r^2 + \dfrac{2\,000}{r}$, $r > 0$.

Ta cần tìm r sao cho S đạt giá trị nhỏ nhất. Ta có:

$$S' = 4\pi r - \frac{2\,000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2\,000}{r^2};\ S' = 0 \Leftrightarrow \pi r^3 = 500 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}.$$

Bảng biến thiên:

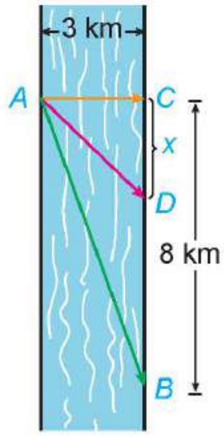
r	0		$\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$		$+\infty$
$S'(r)$		$-$	0	$+$	
$S(r)$	$+\infty$	$\searrow$	$S\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó: $h = \dfrac{1\,000}{\pi r^2} = \dfrac{1\,000}{\pi\sqrt[3]{\dfrac{250\,000}{\pi^2}}} = \dfrac{100}{\sqrt[3]{250\pi}}$.

Vậy cần sản xuất các hộp đựng hình trụ có bán kính đáy $r = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}} \approx 5,42$ (cm) và chiều cao $h = \dfrac{100}{\sqrt[3]{250\pi}} \approx 10,84$ (cm).

Chú ý. Từ lời giải Ví dụ 5 ta thấy: Nếu hình trụ có thể tích V không đổi thì diện tích bề mặt của hình trụ nhỏ nhất khi chiều cao bằng đường kính đáy.

Luyện tập 2. Anh An chèo thuyền từ điểm A trên bờ một con sông thẳng rộng 3 km và muốn đến điểm B ở bờ đối diện cách 8 km về phía hạ lưu càng nhanh càng tốt (H.1.35). Anh An có thể chèo thuyền trực tiếp qua sông đến điểm C rồi chạy bộ đến B, hoặc anh có thể chèo thuyền thẳng đến B, hoặc anh cũng có thể chèo thuyền đến một điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy bộ đến B. Nếu vận tốc chèo thuyền là 6 km/h và vận tốc chạy bộ là 8 km/h thì anh An phải chèo thuyền sang bờ ở điểm nào để đến được B càng sớm càng tốt? (Giả sử rằng vận tốc của nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An).



Hình 1.35

Nhắc lại rằng nếu $C(x)$ là *hàm chi phí*, tức là chi phí sản xuất x đơn vị của một sản phẩm nào đó, thì *chi phí biên* là tốc độ thay đổi của C đối với x, tức là đạo hàm $C'(x)$.

Gọi $p(x)$ là giá bán mỗi đơn vị mà công ty có thể tính nếu bán x đơn vị. Khi đó, p được gọi là *hàm cầu* (hay *hàm giá*) và chúng ta mong đợi đó là một hàm giảm của x. Nếu x đơn vị được bán và giá mỗi đơn vị là $p(x)$ thì tổng doanh thu là

$$R(x) = x \cdot p(x)$$

và $R(x)$ được gọi là *hàm doanh thu*. Đạo hàm $R'(x)$ của hàm doanh thu được gọi là *hàm doanh thu biên* và là tốc độ thay đổi của doanh thu đối với số lượng đơn vị sản phẩm bán ra.

Nếu x đơn vị được bán, thì tổng lợi nhuận là

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

và $P(x)$ được gọi là *hàm lợi nhuận*. *Hàm lợi nhuận biên* là đạo hàm $P'(x)$ của hàm lợi nhuận.

Ví dụ 6. Giải bài toán trong *tình huống mở đầu*.

Giải

Gọi p (nghìn đồng) là giá của mỗi vé; x là số khán giả mua vé. Ta cần xác định hàm cầu $p = p(x)$. Theo giả thiết, tốc độ thay đổi của x tỉ lệ với tốc độ thay đổi của p nên hàm số $p = p(x)$ là hàm số bậc nhất.

Giá vé $p_1 = 100$ ứng với $x_1 = 27\ 000$ và giá vé $p_2 = 90$ ứng với $x_2 = 27\ 000 + 3\ 000 = 30\ 000$.

Do đó, phương trình đường thẳng $p = ax + b$ đi qua hai điểm (27 000; 100) và (30 000; 90) là $p - 100 = \dfrac{100-90}{27\ 000 - 30\ 000}(x - 27\ 000)$, hay $p - 100 = -\dfrac{1}{300}(x - 27\ 000)$,

tức là $x = -300p + 57\ 000$.

Hàm doanh thu từ tiền bán vé là

$$R(p) = px = p(-300p + 57\ 000) = -300p^2 + 57\ 000p.$$

Ta cần tìm p sao cho R đạt giá trị lớn nhất. Ta có:

$$R'(p) = -600p + 57\ 000;\ R'(p) = 0 \Leftrightarrow p = 95.$$

Bảng biến thiên:

p	0		95		$+\infty$
$R'(p)$		$+$	0	$-$	
$R(p)$	0	$\nearrow$	$2\ 707\ 500$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy với giá vé là 95 nghìn đồng một vé thì doanh thu bán vé là lớn nhất.

Ví dụ 7. Một nhà phân tích thị trường làm việc cho một công ty sản xuất thiết bị gia dụng nhận thấy rằng nếu công ty sản xuất và bán x chiếc máy xay sinh tố hằng tháng thì lợi nhuận thu được (nghìn đồng) là

$$P(x) = -0{,}3x^3 + 36x^2 + 1\,800x - 48\ 000.$$

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = P(x)$, $x \geq 0$. Sử dụng đồ thị đã vẽ để trả lời các câu hỏi sau:

a) Khi chỉ sản xuất một vài máy xay sinh tố, công ty sẽ bị lỗ (vì lúc này lợi nhuận âm). Hỏi hằng tháng công ty phải sản xuất ít nhất bao nhiêu chiếc máy xay sinh tố để hoà vốn?

b) Lợi nhuận lớn nhất mà công ty có thể đạt được là bao nhiêu? Công ty có nên sản xuất 200 chiếc máy xay sinh tố hằng tháng hay không?

Giải

Xét hàm số $y = P(x) = -0{,}3x^3 + 36x^2 + 1\,800x - 48\ 000$, $x \geq 0$.

Ta có:

- $y' = P'(x) = -0{,}9x^2 + 72x + 1\,800$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 100$ (vì $x \geq 0$).

  $P'(x) > 0$ với mọi $x \in [0;100)$, $P'(x) < 0$ với mọi $x \in (100;+\infty)$.

  Do đó hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[0;\ 100)$ và nghịch biến trên khoảng $(100;\ +\infty)$.

  Tại $x = 100$, hàm số đạt cực đại và $y_{CĐ} = y(100) = 192\ 000$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = -\infty$.

Bảng biến thiên:

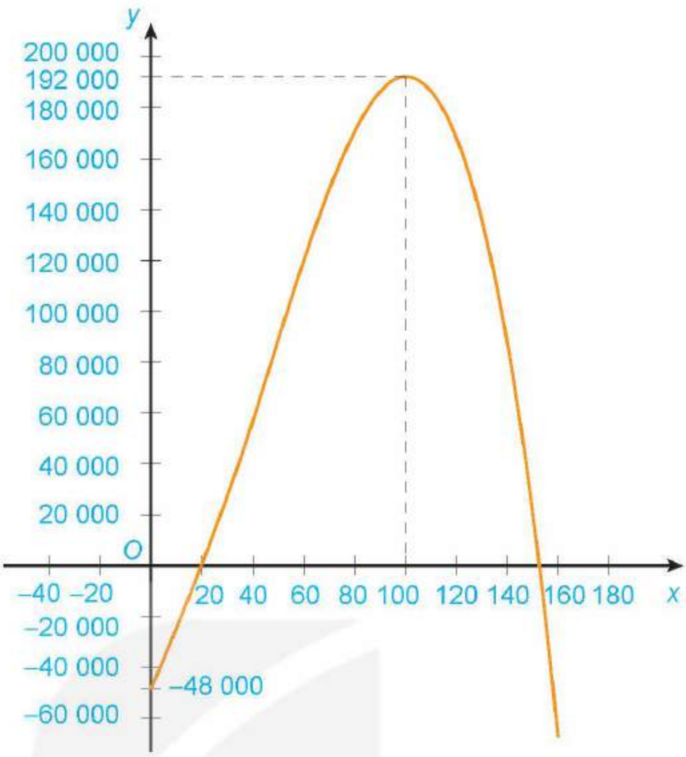
x	0		100		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	
$P(x)$	$-48\ 000$	$\nearrow$	$192\ 000$	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị hàm số như Hình 1.36 (ở đây ta lấy một đơn vị trên trục hoành bằng 1 000 đơn vị trên trục tung).

Từ đồ thị đã vẽ suy ra:

a) Đồ thị xuất phát từ điểm $(0; -48\,000)$, ở phía dưới trục hoành (tức là công ty đang bị lỗ), và giao với trục hoành tại điểm đầu tiên có hoành độ $x = 20$. Do đó, hằng tháng công ty cần sản xuất ít nhất 20 chiếc máy xay sinh tố để hoà vốn.

b) Từ đồ thị ta thấy khi sản xuất hơn 100 chiếc máy xay sinh tố mỗi tháng thì càng sản xuất nhiều lợi nhuận càng giảm. Do đó, công ty không nên sản xuất 200 chiếc máy xay sinh tố hằng tháng.



Hình 1.36

Lợi nhuận lớn nhất mà công ty có thể thu được là $y_{CĐ} = y(100) = 192\,000$ (nghìn đồng), tức là 192 triệu đồng, đạt được khi sản xuất đúng 100 chiếc máy xay sinh tố mỗi tháng.

Vận dụng. Một nhà sản xuất trung bình bán được 1 000 ti vi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 14 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng, số lượng ti vi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 ti vi mỗi tuần.

a) Tìm hàm cầu.

b) Công ty nên giảm giá bao nhiêu cho người mua để doanh thu là lớn nhất?

c) Nếu hàm chi phí hằng tuần là $C(x) = 12\,000 - 3x$ (triệu đồng), trong đó x là số ti vi bán ra trong tuần, nhà sản xuất nên đặt giá bán như thế nào để lợi nhuận là lớn nhất?

BÀI TẬP

1.26. Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho toạ độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y = t^3 - 12t + 3$, $t \geq 0$.

a) Tìm các hàm vận tốc và gia tốc.

b) Khi nào thì hạt chuyển động lên trên và khi nào thì hạt chuyển động xuống dưới?

c) Tìm quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 3$.

d) Khi nào hạt tăng tốc? Khi nào hạt giảm tốc?

1.27. Giả sử chi phí (tính bằng trăm nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị hàng hoá nào đó là:

$$C(x) = 23\,000 + 50x - 0,5x^2 + 0,00175x^3.$$

a) Tìm hàm chi phí biên.

b) Tìm $C'(100)$ và giải thích ý nghĩa của nó.

c) So sánh $C'(100)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 101.

1.28. Người quản lí của một khu chung cư có 100 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 8 triệu đồng một tháng. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lí nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất?

1.29. Giả sử hàm cầu đối với một loại hàng hoá được cho bởi công thức

$$p = \frac{354}{1 + 0,01x}, x \geq 0,$$

trong đó p là giá bán (nghìn đồng) của mỗi đơn vị sản phẩm và x là số lượng đơn vị sản phẩm đã bán.

a) Tìm công thức tính x như là hàm số của p. Tìm tập xác định của hàm số này. Tính số đơn vị sản phẩm đã bán khi giá bán của mỗi đơn vị sản phẩm là 240 nghìn đồng.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $x = x(p)$. Từ đồ thị đã vẽ, hãy cho biết:

– Số lượng đơn vị sản phẩm bán được sẽ thay đổi thế nào khi giá bán p tăng;

– Ý nghĩa thực tiễn của giới hạn $\lim\limits_{p \to 0^+} x(p)$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

A – TRẮC NGHIỆM

1.30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Phát biểu nào dưới đây là đúng?

A. Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi x thuộc $(a; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$.

B. Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc $(a; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0$ với mọi x thuộc $(a; b)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc $(a; b)$.

1.31. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = -x^3 + 3x^2 - 9x$.   B. $y = -x^3 + x + 1$.

C. $y = \dfrac{x-1}{x-2}$.   D. $y = 2x^2 + 3x + 2$.

1.32. Hàm số nào dưới đây không có cực trị?

A. $y = |x|$.   B. $y = x^4$.   C. $y = -x^3 + x$.   D. $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.

1.33. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^2 \ln x$ là

A. $\dfrac{1}{e}$.   B. $-\dfrac{1}{e}$.   C. $-\dfrac{1}{2e}$.   D. $\dfrac{1}{2e}$.

1.34. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = (x-2)^2 \cdot e^x$ trên đoạn $[1; 3]$ là

A. 0.   B. e^3.   C. e^4.   D. e.

1.35. Cho hàm số $y = f(x)$ thoả mãn: $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

B. Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

C. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

D. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

1.36. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{x + 2}$ là

A. $y = -2$.   B. $y = 1$.   C. $y = x + 2$.   D. $y = x$.

1.37. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$			1		2		3			$+\infty$
$f'(x)$		$-$		‖	$-$	0	$+$	‖		$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	‖	7 $\searrow$	5	$\nearrow$ $+\infty$	‖	-4	$\nearrow$	-1

Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

B. Đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

C. Đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

D. Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

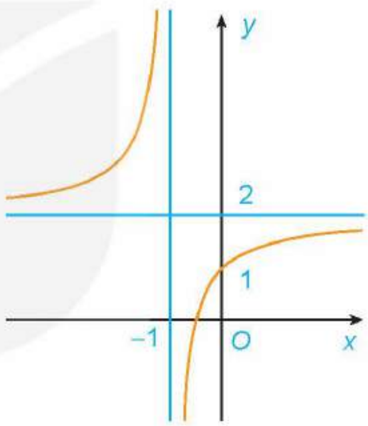
1.38. Đồ thị trong Hình 1.37 là đồ thị của hàm số:

A. $y = \dfrac{x+2}{x+1}$.

B. $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

C. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

D. $y = \dfrac{x+3}{1-x}$.



Hình 1.37

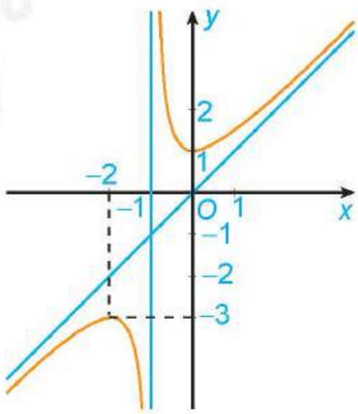
1.39. Đồ thị trong Hình 1.38 là đồ thị của hàm số:

A. $y = x - \dfrac{1}{x+1}$.

B. $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

C. $y = \dfrac{x^2-x+1}{x+1}$.

D. $y = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.



Hình 1.38

B – TỰ LUẬN

1.40. Xét chiều biến thiên và tìm các cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$;

b) $y = x^4 - 2x^2 - 1$;

c) $y = \dfrac{2x-1}{3x+1}$;

d) $y = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$.

1.41. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{2x+1}{3x-2}$ trên nửa khoảng $[2; +\infty)$;

b) $y = \sqrt{2-x^2}$.

1.42. Tìm các tiệm cận của mỗi đồ thị hàm số sau:

a) $y = \dfrac{3x-2}{x+1}$;

b) $y = \dfrac{x^2+2x-1}{2x-1}$.

1.43. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

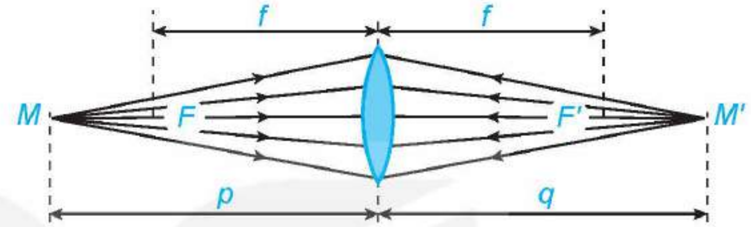
a) $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 12$;

b) $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$;

c) $y = \dfrac{x^2-2x}{x-1}$.

1.44. Xét một thấu kính hội tụ có tiêu cự f (H.1.39). Khoảng cách p từ vật đến thấu kính liên hệ với khoảng cách q từ ảnh đến thấu kính bởi hệ thức:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}.$$



Hình 1.39

a) Viết công thức tính $q = g(p)$ như một hàm số của biến $p \in (f; +\infty)$.

b) Tính các giới hạn $\lim\limits_{p \to +\infty} g(p)$; $\lim\limits_{p \to f^+} g(p)$ và giải thích ý nghĩa các kết quả này.

c) Lập bảng biến thiên của hàm số $q = g(p)$ trên khoảng $(f; +\infty)$.

1.45. Dân số của một quốc gia sau t (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức:

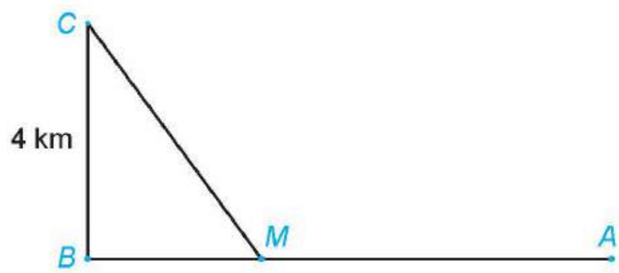
$$N(t) = 100e^{0,012t} \text{ (}N(t)\text{ được tính bằng triệu người, } 0 \le t \le 50\text{)}.$$

a) Ước tính dân số của quốc gia này vào các năm 2030 và 2035 (kết quả tính bằng triệu người, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).

b) Xem $N(t)$ là hàm số của biến số t xác định trên đoạn $[0; 50]$. Xét chiều biến thiên của hàm số $N(t)$ trên đoạn $[0; 50]$.

c) Đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vào năm nào tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm?

1.46. Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C như Hình 1.40. Khoảng cách từ C đến B là 4 km. Bờ biển chạy thẳng từ A đến B với khoảng cách là 10 km. Tổng chi phí lắp đặt cho 1 km dây điện trên biển là 50 triệu đồng, còn trên đất liền là 30 triệu đồng. Xác định vị trí điểm M trên đoạn AB (điểm nối dây từ đất liền ra đảo) để tổng chi phí lắp đặt là nhỏ nhất.



Hình 1.40

CHƯƠNG II
VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Vectơ trong mặt phẳng là một công cụ hữu hiệu để biểu diễn các đối tượng hình học và các đại lượng có hướng trong mặt phẳng. Với mục đích tương tự, người ta cũng đưa ra khái niệm vectơ trong không gian. Khái niệm này là cơ sở để xây dựng toạ độ trong không gian, từ đó cho phép đại số hoá các bài toán hình học không gian và giải quyết chúng bằng các biến đổi đại số.

Tờ tiền 200 Phờ-răng của Thuỵ Sĩ gợi lên hình ảnh về một hệ toạ độ trong không gian.

Bài 6 VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

THUẬT NGỮ

Vectơ trong không gian

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết vectơ trong không gian.
- Nhận biết và thực hiện các phép toán vectơ trong không gian.

Ở lớp 10, ta đã biết về vectơ trong mặt phẳng và biết sử dụng vectơ để biểu thị các đại lượng có hướng và độ lớn trong mặt phẳng, ví dụ như vận tốc hay lực. Đối với các đại lượng có hướng trong không gian, ta có thể sử dụng vectơ để biểu diễn chúng hay không? Các phép toán vectơ trong trường hợp này giống và khác như thế nào với các phép toán vectơ trong mặt phẳng?

Hình 2.1. Các mũi tên chỉ đường gợi lên hình ảnh về vectơ trong không gian.

1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

HĐ1. Nhận biết vectơ trong không gian

Trong Hình 2.2, lực căng dây (được tạo ra bởi sức nặng của kiện hàng) được thể hiện bởi các đoạn thẳng có mũi tên màu đỏ.

a) Các đoạn thẳng này cho biết gì về hướng và độ lớn của các lực căng dây?

b) Các đoạn thẳng này có cùng nằm trong một mặt phẳng không?

Hình 2.2

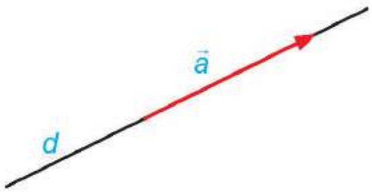
- Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.
- Độ dài của vectơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Hình 2.3 cho ta ví dụ về một số đại lượng có thể được biểu diễn bởi vectơ trong không gian. Hãy tìm thêm một số ví dụ tương tự.

Hình 2.3. Vận tốc gió và vận tốc của máy bay có thể được biểu diễn bởi vectơ trong không gian.

Chú ý. Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:

- Vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.
- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$,...
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.
- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó (H.2.4).



Hình 2.4. Đường thẳng d là giá của vectơ $\vec{a}$.

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 (H.2.5).

a) Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện?

b) Trong các vectơ tìm được ở câu a, những vectơ nào có giá nằm trong mặt phẳng (ABC)?

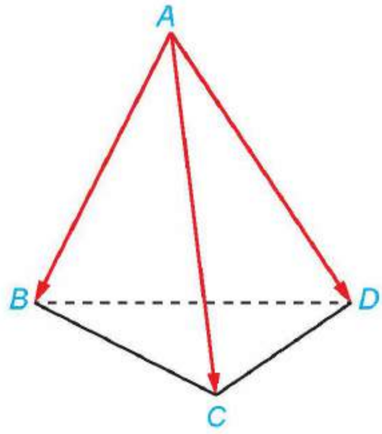
c) Tính độ dài của các vectơ tìm được ở câu a.

Giải

a) Có ba vectơ là $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.

b) Trong ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$ chỉ có hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ có giá nằm trong mặt phẳng (ABC).

c) Vì tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 nên $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = 1$.



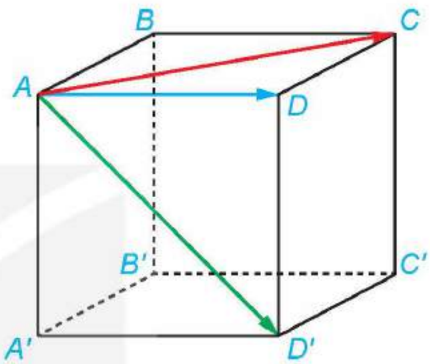
Hình 2.5

Luyện tập 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (H.2.6).

Trong các vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AD'}$:

a) Hai vectơ nào có giá cùng nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$?

b) Hai vectơ nào có cùng độ dài?



Hình 2.6

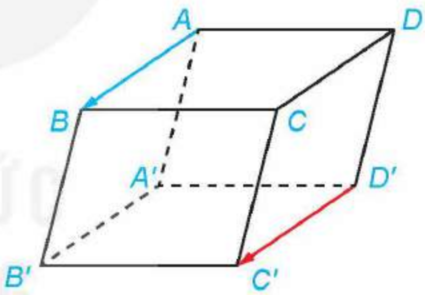
HĐ2. Hình thành khái niệm hai vectơ cùng phương, cùng hướng/ngược hướng, hai vectơ bằng nhau trong không gian

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (H.2.7).

a) So sánh độ dài của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$.

b) Nhận xét về giá của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$.

c) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$ có cùng phương không? Có cùng hướng không?



Hình 2.7

Tương tự như trường hợp của vectơ trong mặt phẳng, ta có các khái niệm sau đối với vectơ trong không gian:

- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

? Nếu hai vectơ cùng bằng một vectơ thứ ba thì hai vectơ đó có bằng nhau không?

Chú ý. Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, ta có tính chất và các quy ước sau đối với vectơ trong không gian:

– Trong không gian, với mỗi điểm O và vectơ $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.

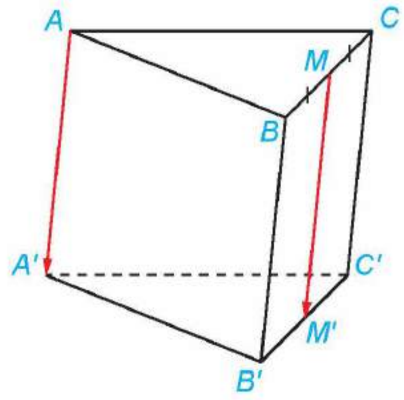
– Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$,... gọi là các vectơ-không.

– Ta quy ước vectơ-không có độ dài là 0, cùng hướng (và vì vậy cùng phương) với mọi vectơ. Do đó, các vectơ-không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.

Ví dụ 2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ (H.2.8).

a) Trong ba vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{B'B}$, vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$? Giải thích vì sao.

b) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$.



Hình 2.8

Giải

a) Hai đường thẳng AA' và BC chéo nhau nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương. Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ không bằng nhau.

Tứ giác $ACC'A'$ là hình bình hành nên $AA' \parallel CC'$ và $AA' = CC'$. Hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{CC'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên hai vectơ đó bằng nhau.

Tương tự, hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ không bằng nhau.

b) Gọi M' là trung điểm của cạnh $B'C'$. Vì tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành nên $MM' \parallel BB'$ và $MM' = BB'$. Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' \parallel BB'$ và $AA' = BB'$, suy ra $MM' \parallel AA'$ và $MM' = AA'$. Hai vectơ $\overrightarrow{MM'}$ và $\overrightarrow{AA'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$. Vậy trung điểm của cạnh $B'C'$ là điểm M' cần tìm.

Luyện tập 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

a) Trong ba vectơ $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DC}$, vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$?

b) Gọi M là một điểm thuộc cạnh AD. Xác định điểm N sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$.

Vận dụng 1. Một toà nhà có chiều cao của các tầng là như nhau. Một chiếc thang máy di chuyển từ tầng 15 lên tầng 22 của toà nhà, sau đó di chuyển từ tầng 22 lên tầng 29. Các vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của thang máy trong hai lần di chuyển đó có bằng nhau không? Giải thích vì sao.


Hình 2.9

2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

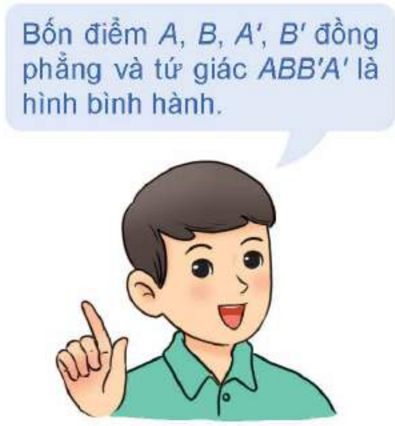
a) Tổng của hai vectơ trong không gian

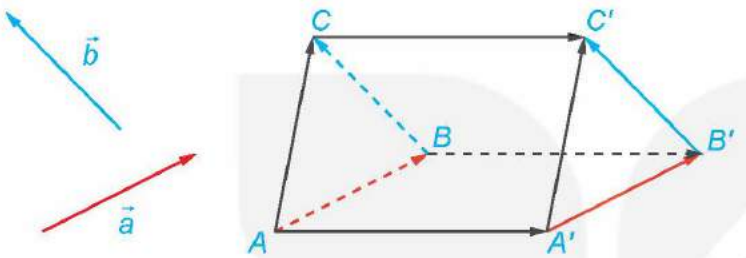
HĐ3. Hình thành khái niệm tổng của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Lấy điểm A và vẽ các vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Lấy điểm A' khác A và vẽ các vectơ $\overrightarrow{A'B'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{B'C'} = \vec{b}$ (H.2.10).

a) Giải thích vì sao $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ và $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.

b) Giải thích vì sao $AA'C'C$ là hình bình hành, từ đó suy ra $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.

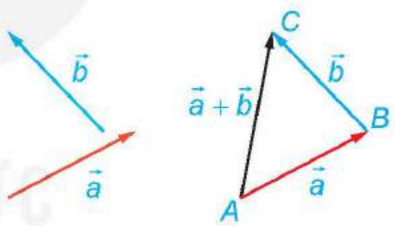




Hình 2.10

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A bất kì và các điểm B, C sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó, vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là phép cộng vectơ.



Hình 2.11

Nhận xét. Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành trong mặt phẳng vẫn đúng trong không gian:

– Nếu A, B, C là ba điểm bất kì thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;

– Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

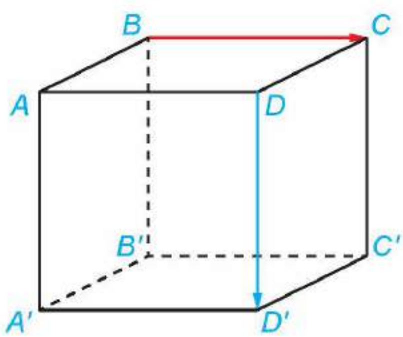
Ví dụ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 (H.2.12). Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'}$.

Giải

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Do đó $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD'}$.

Tứ giác $ADD'A'$ là hình vuông nên $AD' = \sqrt{AD^2 + DD'^2} = \sqrt{2}$, suy ra $\left|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'}\right| = \sqrt{2}$.



Hình 2.12

Luyện tập 3. Trong Ví dụ 3, hãy tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C'D'}$.

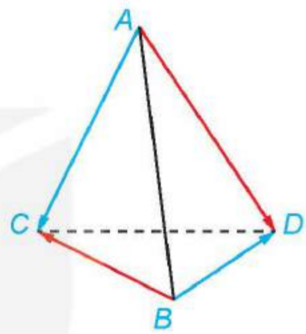
Chú ý. Tương tự như phép cộng vectơ trong mặt phẳng, phép cộng vectơ trong không gian có các tính chất sau:

- Tính chất giao hoán: Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ bất kì thì $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
- Tính chất kết hợp: Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ là ba vectơ bất kì thì $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.
- Tính chất cộng với vectơ $\vec{0}$: Nếu $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

Từ tính chất kết hợp của phép cộng vectơ trong không gian, ta có thể viết tổng của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ là $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ mà không cần sử dụng các dấu ngoặc. Tương tự đối với tổng của nhiều vectơ trong không gian.

Ví dụ 4. Cho tứ diện $ABCD$ (H.2.13). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

Giải



Hình 2.13

Theo quy tắc ba điểm trong không gian, ta có $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$.
Từ đó lần lượt áp dụng tính chất của phép cộng vectơ trong không gian, ta được:

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}\right)$$
$$=\overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}.$$

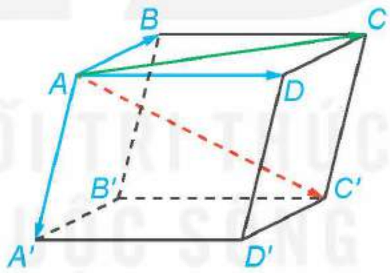
Luyện tập 4. Cho tứ diện $ABCD$ (H.2.13). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

HĐ4. Thiết lập quy tắc hình hộp

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (H.2.14).

a) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AC}$ có bằng nhau hay không?

b) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{AC'}$ có bằng nhau hay không?



Hình 2.14

Kết quả sau đây được gọi là *quy tắc hình hộp*.

> Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

? Trong Hình 2.14, hãy phát biểu quy tắc hình hộp với các vectơ có điểm đầu là B.

Ví dụ 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (H.2.14). Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

Giải

Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$. Áp dụng quy tắc hình hộp suy ra $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

Luyện tập 5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD'}$.

b) Hiệu của hai vectơ trong không gian

HĐ5. Nhận biết vectơ đối của một vectơ trong không gian

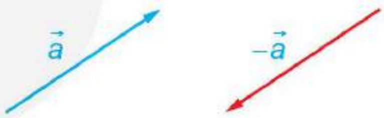
Hình 2.15 mô tả một lọ hoa được đặt trên bàn, trọng lượng của lọ hoa tạo nên một lực tác dụng lên mặt bàn và một phản lực từ mặt bàn lên lọ hoa. Có nhận xét gì về độ dài và hướng của các vectơ biểu diễn hai lực đó?

Hình 2.15

Trong không gian, vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$.

Chú ý

- Hai vectơ là đối nhau nếu và chỉ nếu tổng của chúng bằng $\vec{0}$.
- Vectơ $\overrightarrow{BA}$ là một vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$.
- Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.



Tương tự như hiệu của hai vectơ trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về hiệu của hai vectơ trong không gian:

Vectơ $\vec{a} + (-\vec{b})$ được gọi là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.

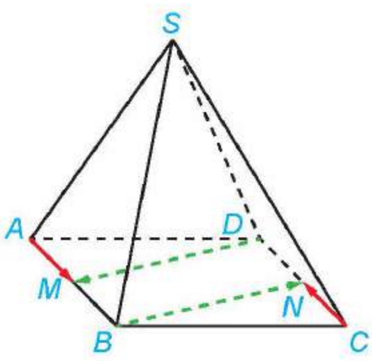
Trong không gian, phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.

Nhận xét. Với ba điểm O, A, B bất kì trong không gian, ta có $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD (H.2.16). Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CN}$ là hai vectơ đối nhau;

b) $\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SA}$.



Hình 2.16

Giải

a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AB = CD$ và $AB \parallel CD$, suy ra $AM = CN$ và $AM \parallel CN$. Hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CN}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên chúng là hai vectơ đối nhau.

b) Từ câu a, ta có $\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{AM}$.

Suy ra $\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SN} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SN} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{SA}$.

Luyện tập 6. Trong Ví dụ 6, chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{DM}$ là hai vectơ đối nhau;

b) $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{SC}$.

Vận dụng 2. Thang cuốn tại các trung tâm thương mại, siêu thị lớn hay nhà ga, sân bay thường có hai làn, trong đó có một làn lên và một làn xuống. Khi thang cuốn chuyển động, vectơ biểu diễn vận tốc của mỗi làn có là hai vectơ đối nhau hay không? Giải thích vì sao.

Tốc độ di chuyển của thang cuốn thường từ 0,5 m/s đến 0,75 m/s. Khi sử dụng thang cuốn cần giữ tay vịn, tránh để trang phục vướng vào thang và chú ý giám sát trẻ nhỏ đi cùng.

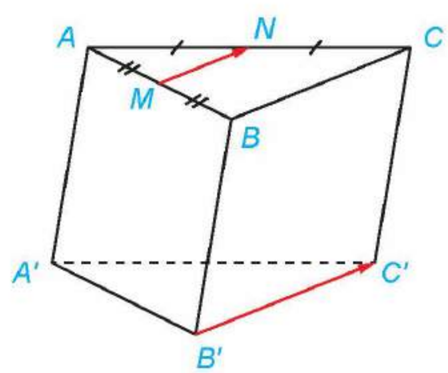
3. TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

HĐ6. Hình thành khái niệm tích của một số với một vectơ trong không gian

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC (H.2.17).

a) Hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ có cùng phương không? Có cùng hướng không?

b) Giải thích vì sao $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{B'C'}|$.



Hình 2.17

Tương tự như tích của một số với một vectơ trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về tích của một số với một vectơ trong không gian:

Trong không gian, tích của một số thực $k \neq 0$ với một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$; ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$;
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Trong không gian, phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là phép nhân một số với một vectơ.

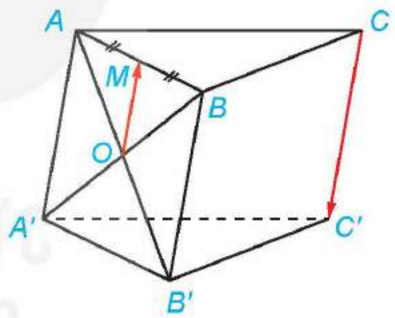
? Hai vectơ $1\vec{a}$ và $\vec{a}$ có bằng nhau không? Hai vectơ $(-1)\vec{a}$ và $-\vec{a}$ có bằng nhau không?

Chú ý

- Quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.
- Nếu $k\vec{a} = \vec{0}$ thì $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.
- Trong không gian, điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$ cùng phương là có một số thực k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

Ví dụ 7. Trong HĐ6, gọi O là giao điểm của AB' và $A'B$ (H.2.18).

Chứng minh rằng $\overrightarrow{CC'} = (-2)\overrightarrow{OM}$.



Hình 2.18

Giải

Vì O là trung điểm của AB' nên OM là đường trung bình của tam giác $AB'B$. Suy ra $B'B$ // OM và $B'B = 2OM$. Tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành nên $B'B$ // $C'C$ và $B'B = C'C$. Do đó $C'C$ // OM và $C'C = 2OM$. Vì hai vectơ $\overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{OM}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{CC'} = (-2)\overrightarrow{OM}$.

Luyện tập 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi E, F lần lượt là các điểm thuộc các cạnh SA, SB sao cho $SE = \frac{1}{3}SA$; $SF = \frac{1}{3}SB$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

Chú ý. Tương tự như phép nhân một số với một vectơ trong mặt phẳng, phép nhân một số với một vectơ trong không gian có các tính chất sau:

- Tính chất kết hợp: Nếu h, k là hai số thực và $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$.
- Tính chất phân phối: Nếu h, k là hai số thực và $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ bất kì thì $(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$ và $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.
- Tính chất nhân với 1 và −1: Nếu $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $1\vec{a} = \vec{a}$ và $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

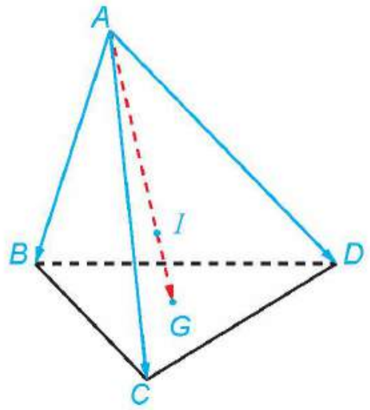
Ví dụ 8. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD (H.2.19). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

Giải

Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Do đó ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GD}$

$$=3\overrightarrow{AG}+\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=3\overrightarrow{AG}+\vec{0}=3\overrightarrow{AG}.$$



Hình 2.19

Chú ý. Tương tự như trong mặt phẳng, nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với điểm O tuỳ ý, ta có

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}.$$

Luyện tập 8. Trong Ví dụ 8, gọi I là điểm thuộc đoạn thẳng AG sao cho $\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{IG}$ (H.2.19). Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}.$$

Điểm I trong Luyện tập 8 được gọi là *trọng tâm* của tứ diện $ABCD$.

Vận dụng 3. Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của bốn lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học (H.2.20). Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900 km/h lên 920 km/h, trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc 900 km/h và 920 km/h lần lượt được biểu diễn bởi hai vectơ $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$. Hãy giải thích vì sao $\overrightarrow{F_1}=k\overrightarrow{F_2}$ với k là một số thực dương nào đó. Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Hình 2.20

4. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

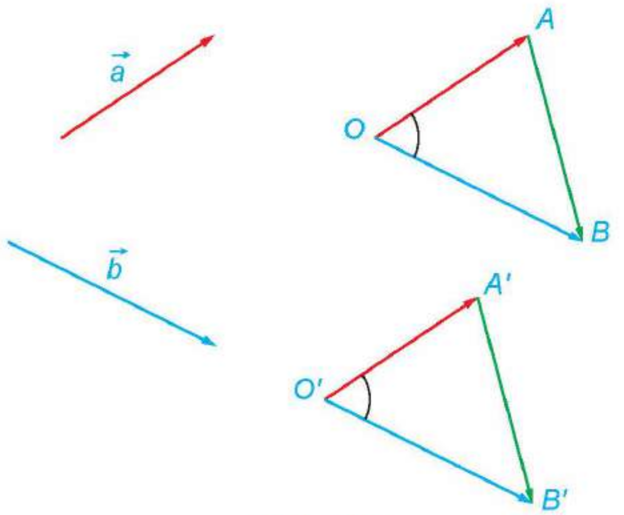
a) Góc giữa hai vectơ trong không gian

HĐ7. Hình thành khái niệm góc giữa hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy điểm O và vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Lấy điểm O' khác O và vẽ các vectơ $\overrightarrow{O'A'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{O'B'}=\vec{b}$ (H.2.21).

a) Giải thích vì sao $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$.

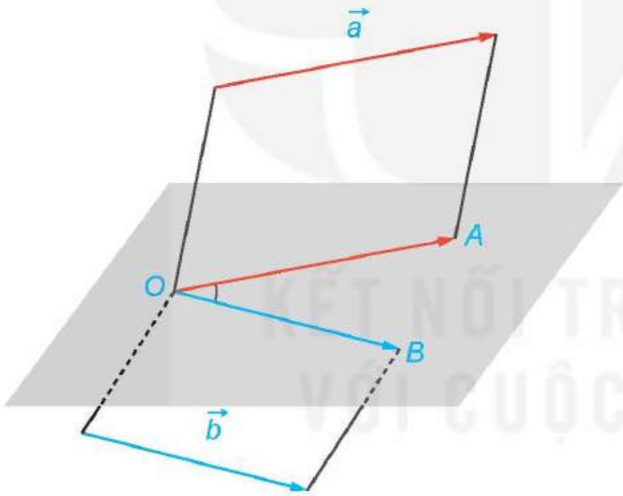
b) Áp dụng định lí côsin cho hai tam giác OAB và $O'A'B'$ để giải thích vì sao $\widehat{AOB}=\widehat{A'O'B'}$.



Hình 2.21

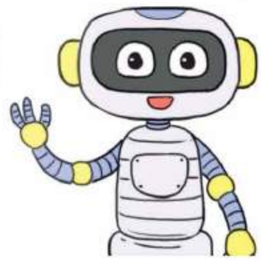
Áp dụng định lí côsin cho tam giác OAB, ta có:
$\cos\widehat{AOB} = \dfrac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB}$.

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O bất kì và gọi A, B là hai điểm sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó, góc $\widehat{AOB}$ $(0^\circ \leq \widehat{AOB} \leq 180^\circ)$ được gọi là **góc giữa hai vectơ** $\vec{a}$ **và** $\vec{b}$, kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$.



Hình 2.22

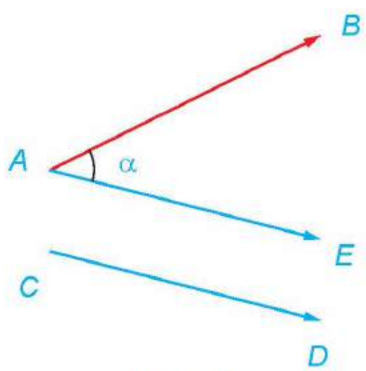
Nếu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là 90° thì ta nói hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau và kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.



Chú ý

– Để xác định góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ trong không gian ta có thể lấy điểm E sao cho $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$, khi đó $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \widehat{BAE}$ (H.2.23).

– Quy ước góc giữa một vectơ bất kì và $\vec{0}$ có thể nhận một giá trị tuỳ ý từ 0° đến 180°.

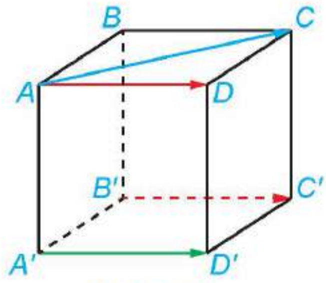


Hình 2.23

? Xác định góc giữa hai vectơ cùng hướng (và khác $\vec{0}$), góc giữa hai vectơ ngược hướng trong không gian.

Ví dụ 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (H.2.24). Tính góc giữa các cặp vectơ sau:

a) $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$;   b) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{A'D'}$.



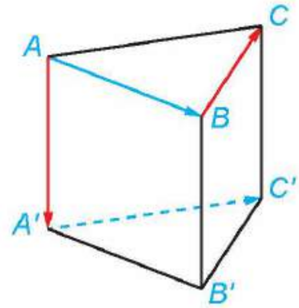
Hình 2.24

Giải

a) Hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ cùng hướng nên $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{B'C'}\right) = 0°$.

b) Vì tứ giác $ADD'A'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'}$. Do đó $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'D'}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \widehat{CAD}$. Tam giác ADC vuông cân tại D nên $\widehat{CAD} = 45°$, vì vậy $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'D'}\right) = 45°$.

Luyện tập 9. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ (H.2.25). Tính các góc $\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BC}\right)$ và $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}\right)$.



Hình 2.25

b) Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

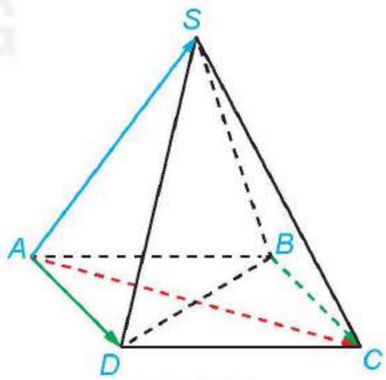
HĐ8. Nhận biết khái niệm tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

Hãy nhắc lại công thức xác định tích vô hướng của hai vectơ trong mặt phẳng.

> Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức:
>
> $$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right).$$

Chú ý

- Quy ước nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Khi đó: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.
- Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.



Hình 2.26

Ví dụ 10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a (H.2.26). Tính các tích vô hướng sau:

a) $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC}$;   b) $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Giải

a) Tam giác SAD có ba cạnh bằng nhau nên là tam giác đều, suy ra $\widehat{SAD} = 60°$. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, suy ra $\left(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AD}\right) = \widehat{SAD} = 60°$. Do đó $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{AS}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \cos 60° = a \cdot a \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{a^2}{2}$.

b) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông có độ dài mỗi cạnh là a nên độ dài đường chéo AC là $\sqrt{2}a$. Tam giác SAC có $SA = SC = a$ và $AC = \sqrt{2}a$ nên tam giác SAC vuông cân tại S, suy ra $\widehat{SAC} = 45^\circ$. Do đó $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AS}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos\widehat{SAC} = a \cdot \sqrt{2}a \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = a^2$.

Luyện tập 10. Trong Ví dụ 10, hãy tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{CD}$.

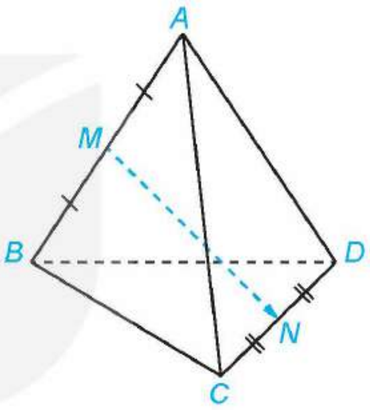
Nhận xét. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian cũng có các tính chất giống như các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ trong mặt phẳng. Cụ thể, nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là các vectơ trong không gian và k là một số thực thì ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$;
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Ví dụ 11. Cho tứ diện $ABCD$ có AC và BD cùng vuông góc với AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, CD (H.2.27). Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$;

b) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.



Hình 2.27

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}$.

Do đó $2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN})$.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN} = \vec{0}$.

Suy ra $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$, hay $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

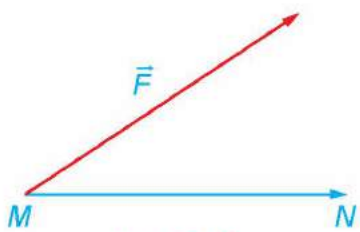
b) Từ giả thiết, ta có $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Vì vậy, $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Luyện tập 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{B'D'} = 0$.

Vận dụng 4. Như đã biết, nếu có một lực $\vec{F}$ tác động vào một vật tại điểm M và làm cho vật đó di chuyển một quãng đường MN thì công A sinh ra được tính theo công thức $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN}$, trong đó lực F có độ lớn tính bằng Newton, quãng đường MN tính bằng mét và công A tính bằng Jun (H.2.28). Do đó, nếu dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn không đổi để làm một vật di chuyển một quãng đường không đổi thì công sinh ra sẽ lớn nhất khi lực tác động cùng hướng với chuyển động của vật. Hãy giải thích vì sao.

Kết quả trên có thể được áp dụng như thế nào khi kéo (hoặc đẩy) các vật nặng?



Hình 2.28

BÀI TẬP

2.1. Trong không gian, cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ phân biệt và đều khác $\vec{0}$. Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

a) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

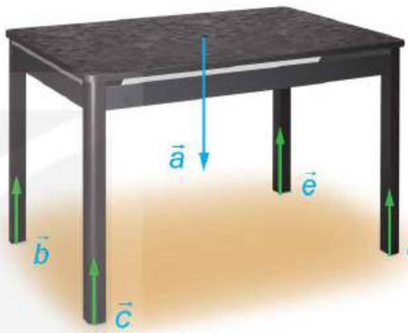
b) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

c) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

d) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

2.2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2$, $AD = 3$ và $AA' = 4$. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{BD'}$.

2.3. Một chiếc bàn cân đối hình chữ nhật được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt bàn song song với mặt sàn và bốn chân bàn vuông góc với mặt sàn như Hình 2.29. Trọng lực tác dụng lên bàn (biểu thị bởi vectơ $\vec{a}$) phân tán đều qua bốn chân bàn và gây nên các phản lực từ mặt sàn lên các chân bàn (biểu thị bởi các vectơ $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$).



Hình 2.29

a) Hãy chỉ ra mối quan hệ về phương và hướng của các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ và $\vec{e}$.

b) Giải thích vì sao các vectơ $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ đôi một bằng nhau.

2.4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{CC'}$; b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD'} - \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$; c) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{A'C}$.

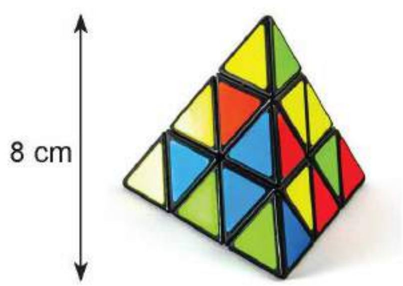
2.5. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ và $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy biểu diễn các vectơ sau qua các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

a) $\overrightarrow{AB'}$; b) $\overrightarrow{B'C}$; c) $\overrightarrow{BC'}$.

2.6. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu và chỉ nếu $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.

2.7. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh SA, lấy điểm M sao cho $SM = 2AM$. Trên cạnh BC, lấy điểm N sao cho $CN = 2BN$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{AB}$.

2.8. Trong Luyện tập 8, ta đã biết trọng tâm của tứ diện $ABCD$ là một điểm I thoả mãn $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{IG}$, ở đó G là trọng tâm của tam giác BCD. Áp dụng tính chất trên để tính khoảng cách từ trọng tâm của một khối rubik (đồng chất) hình tứ diện đều đến một mặt của nó, biết rằng chiều cao của khối rubik là 8 cm (H.2.30).



Hình 2.30

2.9. Ba sợi dây không giãn với khối lượng không đáng kể được buộc chung một đầu và được kéo căng về ba hướng khác nhau (H.2.31). Nếu các lực kéo làm cho ba sợi dây ở trạng thái đứng yên thì khi đó ba sợi dây nằm trên cùng một mặt phẳng. Hãy giải thích vì sao.

Hình 2.31

2.10. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh đáy bằng 1 và độ dài mỗi cạnh bên bằng 2. Hãy tính góc giữa các cặp vectơ sau đây và tính tích vô hướng của mỗi cặp vectơ đó:

a) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{C'C}$;   b) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$;   c) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'A'}$.

2.11. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai vectơ đó là 45°, hãy tính:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$;   b) $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$;   c) $(\vec{a}+\vec{b})^2$.

2.12. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng:

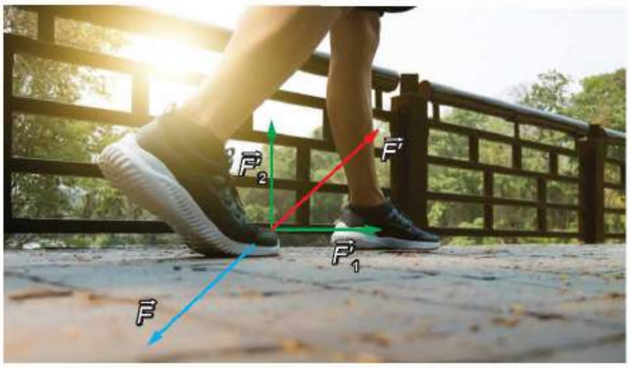
a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}$;

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

Em có biết?

Việc phân tích (hay biểu diễn) một vectơ trong không gian qua các vectơ cho trước có thể giúp giải thích một số hiện tượng trong cuộc sống. Ví dụ, khi đi bộ, chân tạo một lực tác động $\vec{F}$ lên mặt đất. Theo Định luật III Newton, từ mặt đất có một phản lực tác động ngược trở lại bàn chân là $\vec{F'}=-\vec{F}$. Lực $\vec{F'}$ có thể được phân tích thành $\vec{F'}=\vec{F'_1}+\vec{F'_2}$, ở đó $\vec{F'_1}$ có giá song song với mặt đất và $\vec{F'_2}$ có giá vuông góc với mặt đất (H.2.32). Vì vậy, chỉ có lực $\vec{F'_1}$ tạo nên chuyển động tiến về phía trước của người đi bộ. Có thể nhận thấy rằng nếu độ lớn của lực $\vec{F}$ là không đổi (và khi đó độ lớn của lực $\vec{F'}$ là không đổi) thì độ lớn của lực $\vec{F'_1}$ càng lớn nếu giá của lực $\vec{F}$ càng "gần" vị trí song song với mặt đất, tức là góc giữa giá của lực $\vec{F}$ và mặt đất càng nhỏ.

Nhận xét trên lí giải vì sao trong các cuộc thi điền kinh, khi chuẩn bị xuất phát, các vận động viên thường dùng bàn đạp (nếu được cho phép) để cẳng chân phát lực tạo với mặt đất góc nhỏ nhất, từ đó tạo được tốc độ xuất phát lớn nhất (H.2.33).



Hình 2.32

Hình 2.33

Bài 7 HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

THUẬT NGỮ
- Hệ trục toạ độ trong không gian
- Toạ độ của điểm trong không gian
- Toạ độ của vectơ trong không gian

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Nhận biết toạ độ của điểm, của vectơ đối với hệ trục toạ độ.
- Vận dụng toạ độ của vectơ để giải một số bài toán có liên quan đến thực tiễn.

Trong Hình 2.34, một chiếc bóng đèn được treo cách sàn nhà là 2 m, cách hai bức tường lần lượt là 1 m và 1,5 m. Kiến thức toán học nào giúp mô tả chính xác và ngắn gọn vị trí của chiếc bóng đèn trong không gian?

Hình 2.34

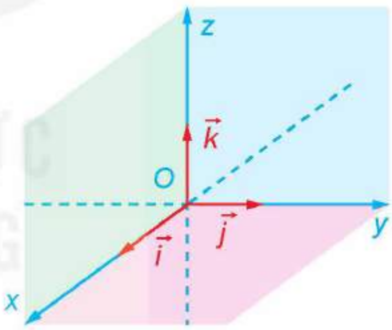
1. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

HĐ1. Hình thành khái niệm hệ trục toạ độ trong không gian

Trong không gian, xét ba trục Ox, Oy, Oz có chung gốc O và đôi một vuông góc với nhau. Gọi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên các trục đó (H.2.35).

a) Gọi tên các mặt phẳng toạ độ có trong Hình 2.35.

b) Các mặt phẳng toạ độ trong Hình 2.35 có đôi một vuông góc với nhau không?



Hình 2.35

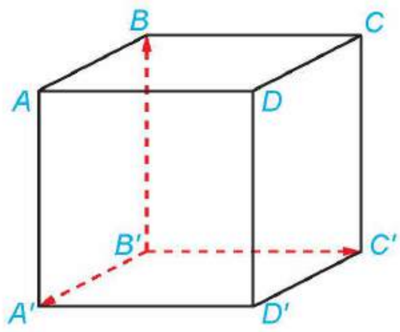
Trong không gian, ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc với nhau tại gốc O của mỗi trục. Gọi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz.

- Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục toạ độ Descartes vuông góc $Oxyz$, hay đơn giản là hệ toạ độ $Oxyz$.
- Điểm O được gọi là *gốc toạ độ*.
- Các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx) đôi một vuông góc với nhau được gọi là các *mặt phẳng toạ độ*.

Không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

Góc căn phòng trong Hình 2.34 có gợi lên hình ảnh về hệ toạ độ *Oxyz* trong không gian hay không? Nếu có, hãy mô tả gốc toạ độ và các mặt phẳng toạ độ trong hình ảnh đó.

Ví dụ 1. Cho hình lập phương *ABCD.A'B'C'D'* có độ dài mỗi cạnh bằng 1 (H.2.36). Có thể lập một hệ toạ độ *Oxyz* có gốc *O* trùng với đỉnh *B'* và các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các vectơ $\overrightarrow{B'A'}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{B'B}$ không? Giải thích vì sao.



Hình 2.36

Giải

Hình lập phương *ABCD.A'B'C'D'* có các cạnh *B'A'*, *B'C'* và *B'B* đôi một vuông góc với nhau.

Vì hình lập phương có độ dài mỗi cạnh bằng 1 nên các vectơ $\overrightarrow{B'A'}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{B'B}$ cùng có điểm đầu là *B'* và đều có độ dài bằng 1.

Từ các điều trên, suy ra có thể lập một hệ toạ độ *Oxyz* có gốc *O* trùng với đỉnh *B'* và các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các vectơ $\overrightarrow{B'A'}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{B'B}$.

Luyện tập 1. Cho hình hộp chữ nhật *ABCD.A'B'C'D'*. Có thể lập một hệ toạ độ *Oxyz* có gốc *O* trùng với đỉnh *C* và các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt cùng hướng với các vectơ $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CC'}$ không? Giải thích vì sao.

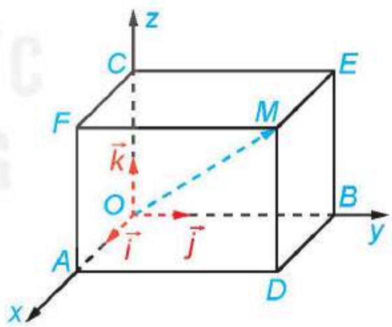
2. TOẠ ĐỘ CỦA ĐIỂM, TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

HĐ2. Hình thành khái niệm toạ độ của điểm trong không gian

Trong không gian *Oxyz*, cho một điểm *M* không thuộc các mặt phẳng toạ độ. Vẽ hình hộp chữ nhật *OADB.CFME* có ba đỉnh *A*, *B*, *C* lần lượt thuộc các tia *Ox*, *Oy*, *Oz* (H.2.37).

a) Hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ có bằng nhau hay không?

b) Giải thích vì sao có thể viết $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ với *x*, *y*, *z* là các số thực.



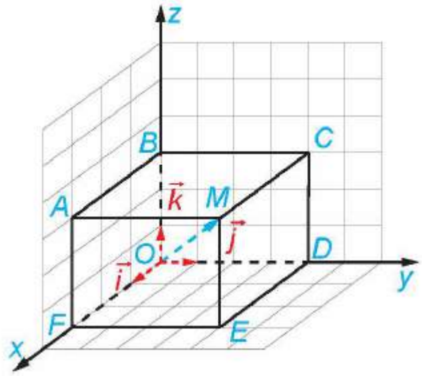
Hình 2.37

Người ta chứng minh được rằng với điểm *M* tuỳ ý, bộ ba số (*x*; *y*; *z*) trong HĐ2 là duy nhất. Ngược lại nếu $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ thì điểm *M* xác định duy nhất.

> Trong không gian *Oxyz*, cho một điểm *M* tuỳ ý. Bộ ba số (*x*; *y*; *z*) duy nhất sao cho $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ được gọi là toạ độ của điểm *M* đối với hệ toạ độ *Oxyz*. Khi đó, ta viết $M=(x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$, trong đó *x* là hoành độ, *y* là tung độ và *z* là cao độ của *M*.

Hãy tìm toạ độ của gốc *O*.

Ví dụ 2. Hình 2.38 minh hoạ một hệ toạ độ $Oxyz$ trong không gian cùng với các hình vuông có cạnh bằng 1 đơn vị. Tìm toạ độ của điểm M.



Hình 2.38

Giải

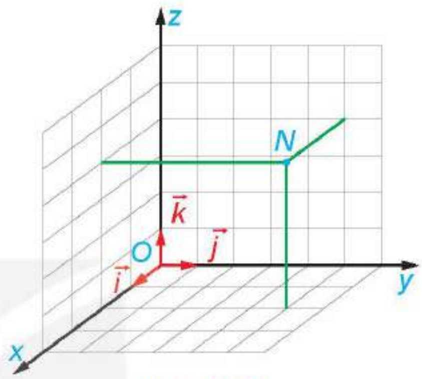
Trong Hình 2.38, $ABCM.FODE$ là hình hộp chữ nhật.

Áp dụng quy tắc hình hộp suy ra

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Vì vậy, toạ độ của điểm M là $(3; 4; 3)$.

Luyện tập 2. Tìm toạ độ của điểm N trong Hình 2.39.



Hình 2.39

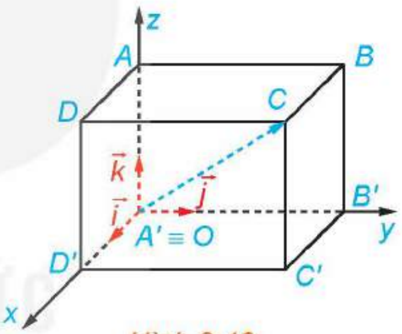
Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A' trùng với gốc O và các đỉnh D', B', A lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz (H.2.40). Giả sử đỉnh C có toạ độ là $(2; 3; 5)$ đối với hệ toạ độ $Oxyz$, hãy tìm toạ độ của các đỉnh D', B', A đối với hệ toạ độ đó.

Giải

Vì đỉnh D' thuộc tia Ox nên hai vectơ $\overrightarrow{OD'}$ và $\vec{i}$ cùng phương, suy ra có số thực m sao cho $\overrightarrow{OD'} = m\vec{i}$. Tương tự, có các số thực n, p sao cho $\overrightarrow{OB'} = n\vec{j}$ và $\overrightarrow{OA} = p\vec{k}$. Theo quy tắc hình hộp, suy ra $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OA} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ và do đó điểm C có toạ độ là $(m; n; p)$.

Mặt khác, đỉnh C có toạ độ là $(2; 3; 5)$ nên $m = 2$, $n = 3$, $p = 5$, tức là $\overrightarrow{OD'} = 2\vec{i}$, $\overrightarrow{OB'} = 3\vec{j}$ và $\overrightarrow{OA} = 5\vec{k}$.

Từ đây suy ra $D'(2; 0; 0)$, $B'(0; 3; 0)$ và $A(0; 0; 5)$.



Hình 2.40

Luyện tập 3. Trong Ví dụ 3, hãy xác định toạ độ của các điểm B, D và C'.

Nhận xét. Nếu điểm M có toạ độ $(x; y; z)$ đối với hệ toạ độ $Oxyz$ thì:

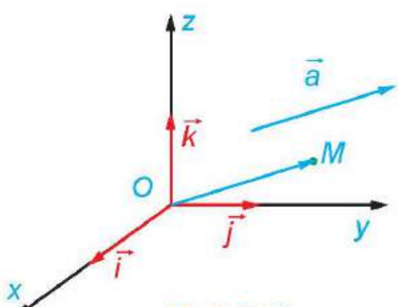
– Hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox, Oy và Oz có toạ độ lần lượt là $(x; 0; 0)$, $(0; y; 0)$ và $(0; 0; z)$.

– Hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng (Oxy), (Oyz) và (Ozx) có toạ độ lần lượt là $(x; y; 0)$, $(0; y; z)$ và $(x; 0; z)$.

Vận dụng 1. Trong *tình huống mở đầu*, hãy chọn một hệ toạ độ phù hợp và xác định toạ độ của chiếc bóng đèn đối với hệ toạ độ đó.

HĐ3. Hình thành khái niệm toạ độ của vectơ trong không gian

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$ tuỳ ý (H.2.41). Lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ và giải thích vì sao có bộ ba số $(x; y; z)$ sao cho $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.



Hình 2.41

Người ta chứng minh được rằng bộ ba số $(x; y; z)$ trong HĐ3 là duy nhất.

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$ tuỳ ý. Bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất sao cho $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là **toạ độ của vectơ** $\vec{a}$ đối với hệ toạ độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $\vec{a} = (x; y; z)$ hoặc $\vec{a}(x; y; z)$.

Nhận xét

– Toạ độ của vectơ $\vec{a}$ cũng là toạ độ của điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.

– Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$. Khi đó, $\vec{a} = \vec{b}$ nếu và chỉ nếu $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z'. \end{cases}$

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, hãy tìm toạ độ của các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$ và $\vec{k}$.

Giải

Vì $\vec{i} = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$ nên $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

Vì $\vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$ nên $\vec{j} = (0; 1; 0)$.

Vì $\vec{k} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k}$ nên $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Luyện tập 4. Trong không gian $Oxyz$, hãy xác định toạ độ của vectơ $\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

HĐ4. Thiết lập toạ độ của vectơ theo toạ độ hai đầu mút

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(x; y; z)$ và $N(x'; y'; z')$.

a) Hãy biểu diễn hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON}$ qua các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$ và $\vec{k}$.

b) Xác định toạ độ của vectơ $\overrightarrow{MN}$.

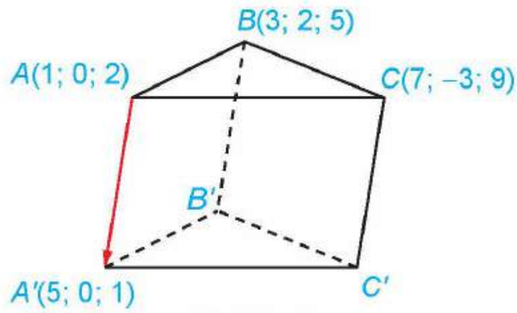
Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và $N(x_N; y_N; z_N)$. Khi đó:

$$\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M; y_N - y_M; z_N - z_M).$$

Ví dụ 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $A(1; 0; 2)$, $B(3; 2; 5)$, $C(7; -3; 9)$ và $A'(5; 0; 1)$.

a) Tìm toạ độ của $\overrightarrow{AA'}$.

b) Tìm toạ độ của các điểm B', C'.



Hình 2.42

Giải (H.2.42)

a) Ta có: $\overrightarrow{AA'} = (x_{A'} - x_A; y_{A'} - y_A; z_{A'} - z_A) = (4; 0; -1)$.

b) Gọi toạ độ của điểm B' là $(x; y; z)$ thì $\overrightarrow{BB'} = (x - 3; y - 2; z - 5)$. Vì $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ nên $ABB'A'$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.

Do đó $\begin{cases} x-3=4 \\ y-2=0 \\ z-5=-1 \end{cases}$ hay $x=7$, $y=2$ và $z=4$. Vậy $B'(7; 2; 4)$.

Lập luận tương tự suy ra $C'(11; -3; 8)$.

Luyện tập 5. Trong Ví dụ 5, xác định toạ độ của các điểm D và D' sao cho $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp.

Vận dụng 2. Để theo dõi hành trình của một chiếc máy bay, ta có thể lập hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí của trung tâm kiểm soát không lưu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (được coi là phẳng) với trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (H.2.43). Sau khi cất cánh và đạt độ cao nhất định, chiếc máy bay duy trì hướng bay về phía nam với tốc độ không đổi là 890 km/h trong nửa giờ. Xác định toạ độ của vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của chiếc máy bay trong nửa giờ đó đối với hệ toạ độ đã chọn, biết rằng đơn vị đo trong không gian $Oxyz$ được lấy theo kilômét.

Hình 2.43

BÀI TẬP

2.13. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đều khác $\vec{0}$ và có giá đôi một vuông góc. Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

a) Có thể lập một hệ toạ độ $Oxyz$ có các trục toạ độ lần lượt song song với giá của các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

b) Có thể lập một hệ toạ độ $Oxyz$ có các trục toạ độ lần lượt trùng với giá của các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

c) Có thể lập một hệ toạ độ $Oxyz$ có các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt bằng các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

d) Có thể lập một hệ toạ độ $Oxyz$ có các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt cùng phương các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2.14. Hãy mô tả hệ toạ độ $Oxyz$ trong căn phòng ở Hình 2.44 sao cho gốc O trùng với góc trên của căn phòng, khung tranh nằm trong mặt phẳng (Oxy) và mặt trần nhà trùng với mặt phẳng (Oxz).

Hình 2.44

2.15. Trong không gian *Oxyz*, xác định toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $A(0; 0; 0)$ và $B(4; 2; -5)$;

b) $A(1; -3; 7)$ và $B(1; -3; 7)$;

c) $A(5; 4; 9)$ và $B(-5; 7; 2)$.

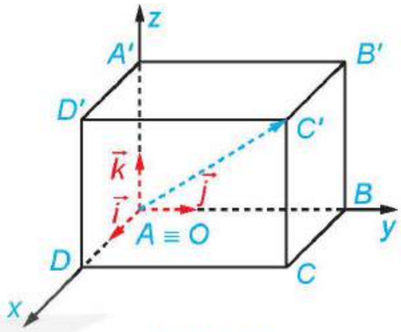
2.16. Trong không gian *Oxyz*, xác định toạ độ của điểm *A* trong mỗi trường hợp sau:

a) *A* trùng với gốc toạ độ;

b) *A* nằm trên tia *Ox* và $OA = 2$;

c) *A* nằm trên tia đối của tia *Oy* và $OA = 3$.

2.17. Trong không gian *Oxyz*, cho hình hộp chữ nhật *ABCD.A'B'C'D'* có đỉnh *A* trùng với gốc *O* và các đỉnh *D*, *B*, *A'* có toạ độ lần lượt là $(2; 0; 0)$, $(0; 4; 0)$, $(0; 0; 3)$ (H.2.45). Xác định toạ độ của các đỉnh còn lại của hình hộp chữ nhật.



Hình 2.45

2.18. Trong không gian *Oxyz*, cho hình hộp *OABC.O'A'B'C'* có $A(1; 1; -1)$, $B(0; 3; 0)$, $C'(2; -3; 6)$.

a) Xác định toạ độ của điểm *C*.

b) Xác định toạ độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

2.19. Trong Vận dụng 2, hãy giải thích vì sao tại mỗi thời điểm chiếc máy bay di chuyển trên đường băng thì toạ độ của nó luôn có dạng $(x; y; 0)$ với *x*, *y* là hai số thực nào đó.

Em có biết?

Tên gọi "toạ độ Descartes" được lấy theo tên của nhà toán học người Pháp, René Descartes, nhằm ghi nhớ những đóng góp của ông trong Hình học Giải tích. Như đã biết, toạ độ Descartes xác định duy nhất vị trí của một điểm trong không gian.

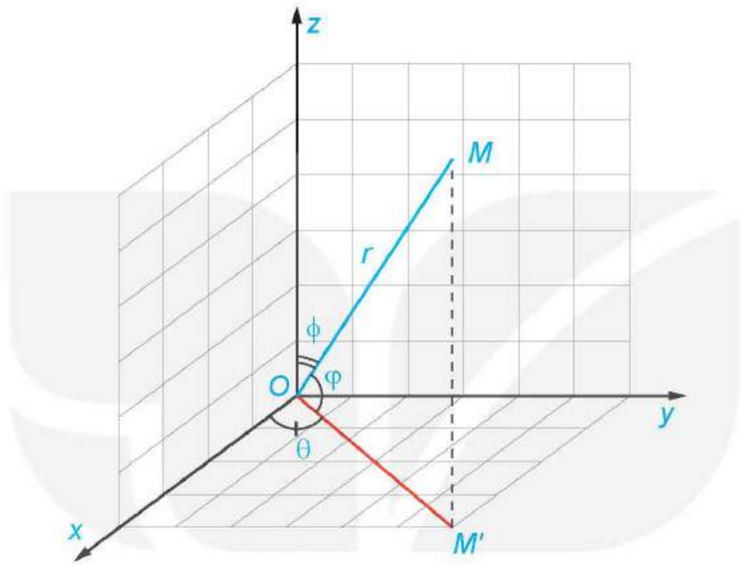
Bên cạnh toạ độ Descartes, toạ độ cầu với vai trò tương tự cũng thường được sử dụng và được định nghĩa như sau:

Với mỗi điểm *M* trong không gian *Oxyz*, gọi *M'* là hình chiếu vuông góc của *M* trên mặt phẳng (*Oxy*). Gọi *r* là khoảng cách từ *O* đến *M*, gọi θ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ là số đo của góc lượng giác (trong mặt phẳng (*Oxy*)) có tia đầu là *Ox*, tia cuối là *OM'* và gọi ϕ $(0 \le \phi \le \pi)$ là số đo của góc tạo bởi hai tia *OM* và *Oz* (H.2.46). Bộ ba $(r; \theta; \phi)$ được gọi là *toạ độ cầu* của điểm *M*, trong đó *r* là *bán kính*, θ là *góc phương vị* hay *góc kinh độ* và ϕ là *góc cực* của *M*.

René Descartes (1596 – 1650), nhà triết học, toán học người Pháp

Toạ độ cầu $(r;\theta;\phi)$ và toạ độ Descartes $(x;\ y;\ z)$ của M liên hệ với nhau qua các công thức:

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x} \\ \cos\phi=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x=r\cos\theta\sin\phi \\ y=r\sin\theta\sin\phi \\ z=r\cos\phi. \end{cases}$$



Hình 2.46

Trong một số trường hợp, người ta thay góc cực ϕ bởi *góc nâng* (hay *góc vĩ độ*) $\varphi=\dfrac{\pi}{2}-\phi\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\right)$. Khi đó toạ độ cầu $(r;\ \theta;\ \varphi)$ và toạ độ Descartes $(x;\ y;\ z)$ cũng được liên hệ với nhau bởi các công thức tương tự như trên.

Toạ độ cầu thuận tiện cho việc tính toán trên mặt cầu và trên một số đối tượng có tính đối xứng, do đó, được sử dụng phổ biến trong toán học, vật lí, địa lí và thiên văn. Cơ quan Hàng không và Vũ trụ Hoa Kỳ NASA (National Aeronautics and Space Administration) sử dụng toạ độ địa hình (Topodetic coordinates), một dạng tương tự của toạ độ cầu, trong việc xác định vị trí của vật thể trong không gian.

Bài 8 BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ trong không gian, thể hiện các phép toán vectơ theo toạ độ, xác định độ dài của một vectơ khi biết toạ độ hai đầu mút.
- Vận dụng biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ để giải một số bài toán có liên quan đến thực tiễn.

Những căn nhà gỗ trong Hình 2.47a được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác *OAB.O'A'B'* như trong Hình 2.47b. Với hệ trục toạ độ *Oxyz* thể hiện như Hình 2.47b (đơn vị đo lấy theo centimét), hai điểm *A'* và *B'* có toạ độ lần lượt là (240; 450; 0) và (120; 450; 300). Từ những thông tin trên, có thể tính được kích thước mỗi chiều của những căn nhà gỗ hay không?

a) b)

Hình 2.47

1. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA PHÉP CỘNG HAI VECTƠ, PHÉP TRỪ HAI VECTƠ, PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

HĐ1. Hình thành biểu thức toạ độ của phép cộng hai vectơ, phép trừ hai vectơ, phép nhân một số với một vectơ trong không gian

Trong không gian *Oxyz*, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 0; 5)$ và $\vec{b} = (1; 3; 9)$.

a) Biểu diễn hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ qua các vectơ đơn vị $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

b) Biểu diễn hai vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ và $2\vec{a}$ qua các vectơ đơn vị $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, từ đó xác định toạ độ của hai vectơ đó.

Trong không gian *Oxyz*, cho hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$. Ta có:

- $\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y'; z + z')$;
- $\vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y'; z - z')$;
- $k\vec{a} = (kx; ky; kz)$ với *k* là một số thực.

? Nếu toạ độ của vectơ $\vec{a}$ là $(x; y; z)$ thì toạ độ của vectơ đối của $\vec{a}$ là gì?

Nhận xét. Vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ cùng phương với vectơ $\vec{b} = (x'; y'; z') \neq \vec{0}$ khi và chỉ khi tồn tại số thực k sao cho $\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \\ z = kz'. \end{cases}$

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 1; 5)$ và $\vec{b} = (2; 2; 1)$. Tìm toạ độ của mỗi vectơ sau:

a) $\vec{a} - \vec{b}$; b) $3\vec{a} + 2\vec{b}$.

Giải

a) Vì $\vec{a} = (2; 1; 5)$ và $\vec{b} = (2; 2; 1)$ nên $\vec{a} - \vec{b} = (2-2; 1-2; 5-1) = (0; -1; 4)$.

b) Ta có $3\vec{a} = (3 \cdot 2; 3 \cdot 1; 3 \cdot 5) = (6; 3; 15)$ và $2\vec{b} = (2 \cdot 2; 2 \cdot 2; 2 \cdot 1) = (4; 4; 2)$.

Do đó $3\vec{a} + 2\vec{b} = (6+4; 3+4; 15+2) = (10; 7; 17)$.

Luyện tập 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{u} = (1; 8; 6)$, $\vec{v} = (-1; 3; -2)$ và $\vec{w} = (0; 5; 4)$. Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$.

HĐ2. Thiết lập toạ độ trung điểm đoạn thẳng, toạ độ trọng tâm tam giác

Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ và $C(x_C; y_C; z_C)$.

a) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Tìm toạ độ của M theo toạ độ của A và B.

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tìm toạ độ của G theo toạ độ của A, B và C.

Ta đã biết:
$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$;
$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ và $C(x_C; y_C; z_C)$. Khi đó:

– Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng AB là $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$;

– Toạ độ trọng tâm của tam giác ABC là $\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$.

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 3)$, $B(3; 2; 1)$ và $C(2; -1; 5)$. Tìm toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB và toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải

Vì M là trung điểm của đoạn thẳng AB nên toạ độ của điểm M là $\left(\frac{1+3}{2}; \frac{2+2}{2}; \frac{3+1}{2}\right)$, suy ra $M(2; 2; 2)$.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên toạ độ của điểm G là $\left(\frac{1+3+2}{3}; \frac{2+2+(-1)}{3}; \frac{3+1+5}{3}\right)$, suy ra $G(2; 1; 3)$.

Luyện tập 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 9; -1)$, $B(9; 4; 5)$ và $G(3; 0; 4)$. Tìm toạ độ điểm C sao cho tam giác ABC nhận G là trọng tâm.

2. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

HĐ3. Thiết lập biểu thức toạ độ của tích vô hướng trong không gian

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$.

a) Giải thích vì sao $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ và $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$.

b) Sử dụng biểu diễn $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ để tính các tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{i}$, $\vec{a} \cdot \vec{j}$ và $\vec{a} \cdot \vec{k}$.

c) Sử dụng biểu diễn $\vec{b} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ để tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$ được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy' + zz'.$$

Nhận xét

– Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau nếu và chỉ nếu $xx' + yy' + zz' = 0$.

– Nếu $\vec{a} = (x; y; z)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

– Nếu $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 4; 2)$ và $\vec{b} = (-4; 1; 0)$.

a) Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$ và cho biết hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có vuông góc với nhau hay không.

b) Tính độ dài của vectơ $\vec{a}$.

Giải

a) Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-4) + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0$. Do đó, hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau.

b) Độ dài của vectơ $\vec{a}$ là $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{21}$.

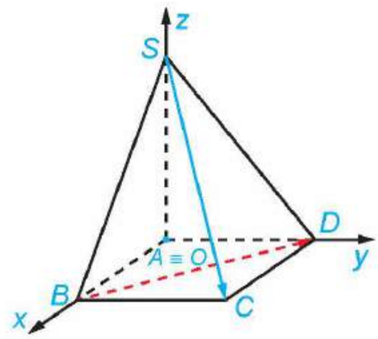
Luyện tập 3. Trong Ví dụ 3, tính $(\vec{a} + \vec{b})^2$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Giả sử $SA = 2$, $AB = 3$, $AD = 4$. Xét hệ toạ độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AS (H.2.48).

a) Xác định toạ độ của các điểm S, A, B, C, D.

b) Tính BD và SC.

c) Tính $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC})$.



Hình 2.48

Giải

a) Vì A trùng gốc toạ độ nên $A(0; 0; 0)$. Vì B thuộc tia Ox và $AB = 3$ nên $B(3; 0; 0)$. Vì D thuộc tia Oy và $AD = 4$ nên $D(0; 4; 0)$. Vì S thuộc tia Oz và $AS = 2$ nên $S(0; 0; 2)$. Vì hình chiếu của C lên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là B, D, A nên $C(3; 4; 0)$.

b) Ta có $\overrightarrow{BD}=(0-3;\ 4-0;\ 0-0)=(-3;\ 4;\ 0)$, suy ra $BD=|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{(-3)^2+4^2+0^2}=5.$

Ta có $\overrightarrow{SC}=(3-0;\ 4-0;\ 0-2)=(3;\ 4;\ -2)$, suy ra $SC=|\overrightarrow{SC}|=\sqrt{3^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{29}.$

c) Ta có $\cos\left(\overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{SC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{SC}}{|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{SC}|}=\dfrac{(-3)\cdot 3+4\cdot 4+0\cdot(-2)}{5\sqrt{29}}=\dfrac{7}{5\sqrt{29}}$, suy ra $\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC}\right)\approx 74{,}9^\circ$.

Chú ý. Nếu $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$ và $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$ thì $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

Đặc biệt, khi B trùng O ta nhận được công thức $OA=\sqrt{{x_A}^2+{y_A}^2+{z_A}^2}$.

Luyện tập 4. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;\ 2;\ 1)$, $B(3;\ -2;\ 1)$ và $C(-2;\ 5;\ 7)$.

a) Tính chu vi của tam giác ABC.

b) Tính $\widehat{BAC}$.

3. VẬN DỤNG TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN

Ví dụ 5. Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;\ 500;\ 7)$ đến điểm $B\ (940;\ 550;\ 8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là gì?

Hình 2.49

Giải (H.2.49)

Gọi $C(x;\ y;\ z)$ là vị trí của máy bay sau 5 phút tiếp theo. Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng. Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B gấp đôi thời gian bay từ B đến C nên $AB=2BC$.

Do đó $\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{940-800}{2};\ \dfrac{550-500}{2};\ \dfrac{8-7}{2}\right)=(70;\ 25;\ 0{,}5)$.

Mặt khác, $\overrightarrow{BC}=(x-940;\ y-550;\ z-8)$ nên $\begin{cases}x-940=70\\ y-550=25\\ z-8=0{,}5.\end{cases}$

Từ đó $\begin{cases}x=1\,010\\ y=575\\ z=8{,}5\end{cases}$ và vì vậy $C(1\,010;\ 575;\ 8{,}5)$.

Vậy toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $(1\,010;\ 575;\ 8{,}5)$.

Luyện tập 5. Với các giả thiết như trong Ví dụ 5, hãy xác định toạ độ của chiếc máy bay sau 10 phút tiếp theo (tính từ thời điểm máy bay ở điểm B).

Ví dụ 6. Hãy trả lời câu hỏi trong *tình huống mở đầu*.

Giải. Vì điểm A' có toạ độ là $(240;\ 450;\ 0)$ nên khoảng cách từ A' đến các trục Ox, Oy lần lượt là 450 cm và 240 cm. Suy ra $A'A = 450$ cm và $A'O' = 240$ cm. Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{A'B'} = (-120;\ 0;\ 300)$, do đó $A'B' = \left|\overrightarrow{A'B'}\right| = \sqrt{(-120)^2 + 0^2 + 300^2} = 60\sqrt{29} \approx 323$ (cm).

Vì $O'O = A'A = 450$ cm và O' nằm trên trục Oy nên toạ độ của điểm O' là $(0;\ 450;\ 0)$.

Do đó $\overrightarrow{O'B'} = (120;\ 0;\ 300)$ và $O'B' = \left|\overrightarrow{O'B'}\right| = \sqrt{120^2 + 0^2 + 300^2} = 60\sqrt{29} \approx 323$ (cm).

Vậy mỗi căn nhà gỗ có chiều dài là 450 cm, chiều rộng là 240 cm, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là 323 cm.

Luyện tập 6. Trong *tình huống mở đầu*, hãy tính độ lớn của góc α.

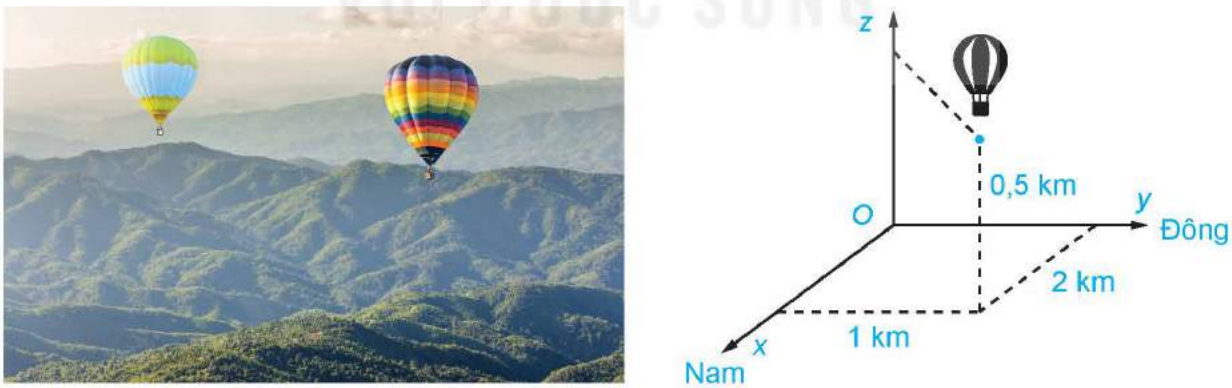
Góc α chính là góc giữa mặt bên của căn nhà gỗ và mặt đất.

Ví dụ 7. Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km.

Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (H.2.50), đơn vị đo lấy theo kilômét.

a) Tìm toạ độ của mỗi chiếc khinh khí cầu đối với hệ toạ độ đã chọn.

b) Xác định khoảng cách giữa hai khinh khí cầu (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Hình 2.50

Giải

a) Chiếc khinh khí cầu thứ nhất và thứ hai có toạ độ lần lượt là $(2;\ 1;\ 0{,}5)$ và $(-1;\ -1{,}5;\ 0{,}8)$.

b) Khoảng cách giữa hai chiếc khinh khí cầu là

$$\sqrt{(-1-2)^2 + (-1{,}5-1)^2 + (0{,}8-0{,}5)^2} = \sqrt{15{,}34} \approx 3{,}92 \text{ (km)}.$$

Luyện tập 7. Trong Ví dụ 7, khinh khí cầu thứ nhất hay thứ hai ở xa điểm xuất phát hơn? Giải thích vì sao.

BÀI TẬP

2.20. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (3; 1; 2)$, $\vec{b} = (-3; 0; 4)$ và $\vec{c} = (6; -1; 0)$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ và $2\vec{a} - 3\vec{b} - 5\vec{c}$.

b) Tính các tích vô hướng $\vec{a} \cdot (-\vec{b})$ và $(2\vec{a}) \cdot \vec{c}$.

2.21. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(-4; 3; 3)$, $N(4; -4; 2)$ và $P(3; 6; -1)$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$, từ đó chứng minh rằng ba điểm M, N, P không thẳng hàng.

b) Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP}$, từ đó suy ra toạ độ của điểm Q sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

c) Tính chu vi của hình bình hành $MNPQ$.

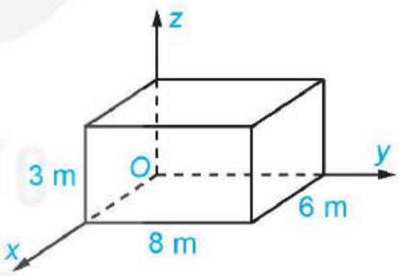
2.22. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 0; 1)$, $B(0; -3; 1)$ và $C(4; -1; 4)$.

a) Tìm toạ độ trọng tâm của tam giác ABC.

b) Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

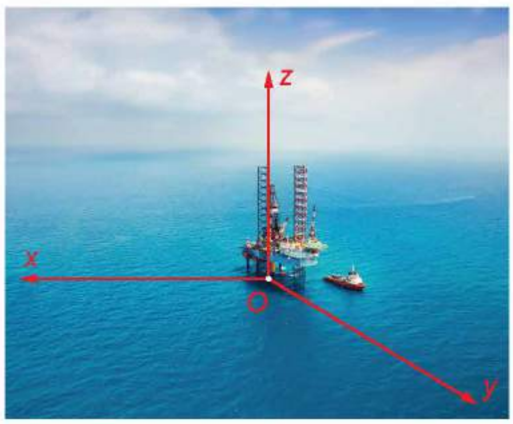
c) Tính $\widehat{ABC}$.

2.23. Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8 m, chiều rộng là 6 m và chiều cao là 3 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét (H.2.51). Hãy tìm toạ độ của điểm treo đèn.



Hình 2.51

2.24. Trong không gian, xét hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí của một giàn khoan trên biển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt biển (được coi là phẳng) với trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (H.2.52). Đơn vị đo trong không gian $Oxyz$ lấy theo kilômét. Một chiếc ra đa đặt tại giàn khoan có phạm vi theo dõi là 30 km. Hỏi ra đa có thể phát hiện được một chiếc tàu thám hiểm có toạ độ là $(25; 15; -10)$ đối với hệ toạ độ nói trên hay không? Hãy giải thích vì sao.



Hình 2.52

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

A – TRẮC NGHIỆM

2.25. Cho tứ diện *ABCD*. Lấy *G* là trọng tâm của tam giác *BCD*. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG}=\vec{0}$.

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

C. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{BG}$.

D. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

2.26. Cho hình hộp *ABCD.A'B'C'D'*. Lấy *M* là trung điểm của đoạn thẳng *CC'*. Vectơ $\overrightarrow{AM}$ bằng

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.

D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

2.27. Cho hình hộp *ABCD.A'B'C'D'*. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB'}$.

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

C. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AD'}$.

D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}$.

2.28. Cho tứ diện đều *ABCD* có độ dài cạnh bằng *a*, gọi *M* là trung điểm của đoạn thẳng *CD*. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$ bằng

A. $\frac{a^2}{4}$.

B. $\frac{a^2}{2}$.

C. $\frac{a^2}{3}$.

D. a^2.

2.29. Trong không gian *Oxyz*, cho $\vec{a}=(1;-2;2)$, $\vec{b}=(-2;0;3)$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $\vec{a}+\vec{b}=(-1;-2;5)$.

B. $\vec{a}-\vec{b}=(3;-2;-1)$.

C. $3\vec{a}=(3;-2;2)$.

D. $2\vec{a}+\vec{b}=(0;-4;7)$.

2.30. Trong không gian *Oxyz*, cho hình bình hành *ABCD* có *A*(–1; 0; 3), *B*(2; 1; –1) và *C*(3; 2; 2). Toạ độ của điểm *D* là

A. (2; –1; 0).

B. (0; –1; –6).

C. (0; 1; 6).

D. (–2; 1; 0).

2.31. Trong không gian *Oxyz*, cho *A*(1; 0; –1), *B*(0; –1; 2) và *G*(2; 1; 0). Biết tam giác *ABC* có trọng tâm là điểm *G*. Toạ độ của điểm *C* là

A. (5; 4; –1).

B. (–5; –4; 1).

C. (1; 2; –1).

D. (–1; –2; 1).

2.32. Trong không gian *Oxyz*, cho $\vec{a}=(2;1;-3)$, $\vec{b}=(-2;-1;2)$. Tích vô hướng $\vec{a}\cdot\vec{b}$ bằng

A. –2.

B. –11.

C. 11.

D. 2.

2.33. Trong không gian *Oxyz*, cho $\vec{a}=(2;1;-2)$, $\vec{b}=(0;-1;1)$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng

A. 60°.

B. 135°.

C. 120°.

D. 45°.

2.34. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-2; 2; 2)$, $\vec{b} = (1; -1; -2)$. Côsin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng

A. $\frac{-2\sqrt{2}}{3}$.   B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.   C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.   D. $\frac{-\sqrt{2}}{3}$.

B – TỰ LUẬN

2.35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}.$$

2.36. Cho tứ diện $ABCD$, lấy hai điểm M, N thoả mãn $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MA} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{DN}$.

Hãy biểu diễn $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$.

2.37. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, gọi G là trọng tâm của tam giác BDA'.

a) Biểu diễn $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AA'}$.

b) Từ câu a, hãy chứng tỏ ba điểm A, G và C' thẳng hàng.

2.38. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; -1)$ và $C(-1; 0; 2)$.

a) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

b) Tìm toạ độ điểm M thuộc trục Oz sao cho đường thẳng BM vuông góc với đường thẳng AC.

2.39. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ và các điểm $A(2; 3; 1)$, $C(-1; 2; 3)$ và $O'(1; -2; 2)$. Tìm toạ độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

2.40. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (-2; 1; 2)$, $\vec{b} = (1; 1; -1)$.

a) Xác định toạ độ của vectơ $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

b) Tính độ dài vectơ $\vec{u}$.

c) Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

2.41. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(4; 2; -1)$, $B(1; -1; 2)$ và $C(0; -2; 3)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ và tính độ dài đoạn thẳng AB.

b) Tìm toạ độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

c) Tìm toạ độ điểm N thuộc mặt phẳng (Oxy), sao cho A, B, N thẳng hàng.

2.42. Hình 2.53 minh hoạ một chiếc đèn được treo cách trần nhà là 0,5 m, cách hai tường lần lượt là 1,2 m và 1,6 m. Hai bức tường vuông góc với nhau và cùng vuông góc với trần nhà. Người ta di chuyển chiếc đèn đó đến vị trí mới cách trần nhà là 0,4 m, cách hai tường đều là 1,5 m.

a) Lập một hệ trục toạ độ $Oxyz$ phù hợp và xác định toạ độ của bóng đèn lúc đầu và sau khi di chuyển.

b) Vị trí mới của bóng đèn cách vị trí ban đầu là bao nhiêu mét? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Hình 2.53

CHƯƠNG III
CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Ở lớp 11, chúng ta đã được giới thiệu về các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu ghép nhóm. Trong chương này, chúng ta tiếp tục tìm hiểu về các số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu dạng này.

"Khả năng làm việc với dữ liệu để xử lí dữ liệu, trích xuất dữ liệu, trực quan hoá dữ liệu, truyền đạt dữ liệu sẽ là kĩ năng cực kì quan trọng trong những thập kỉ tới".
Hal Varian – Trưởng phòng kinh tế của Google
(Theo forbes.com)

Bài 9 KHOẢNG BIẾN THIÊN VÀ KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ

THUẬT NGỮ
- Khoảng biến thiên
- Khoảng tứ phân vị

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.
- Hiểu ý nghĩa, vai trò của khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị trong việc đo mức độ phân tán.

Thống kê số ngày trong tháng Sáu năm 2021 và năm 2022 theo nhiệt độ cao nhất trong ngày tại Hà Nội, người ta thu được bảng sau:

Nhiệt độ (°C)	[28; 30)	[30; 32)	[32; 34)	[34; 36)	[36; 38)	[38; 40)
Số ngày trong tháng 6/2021	0	2	8	5	6	9
Số ngày trong tháng 6/2022	2	3	4	11	8	2

(Theo *accuweather.com*)

Hỏi tháng Sáu năm nào ở Hà Nội nhiệt độ cao nhất trong ngày biến đổi nhiều hơn?

Để biết tháng Sáu năm nào ở Hà Nội nhiệt độ cao nhất trong ngày biến đổi nhiều hơn, ta cần tính và so sánh các số đặc trưng đo mức độ phân tán của hai mẫu số liệu ghép nhóm trên. Chúng ta cùng tìm hiểu vấn đề này!

1. KHOẢNG BIẾN THIÊN

HĐ1. Trong *tình huống mở đầu*, gọi $x_1, x_2, \ldots, x_{30}$ là nhiệt độ cao nhất trong ngày của 30 ngày tháng Sáu năm 2021 (mẫu số liệu gốc).

a) Có thể tính chính xác khoảng biến thiên cho mẫu số liệu gốc hay không?

b) Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất x_i có thể nhận là gì?

c) Hãy đưa ra một giá trị xấp xỉ cho khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.

Cho mẫu số liệu ghép nhóm:

Nhóm	$[a_1; a_2)$	...	$[a_i; a_{i+1})$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	m_1	...	m_i	...	m_k

Bảng 3.1. Mẫu số liệu ghép nhóm

trong đó các tần số $m_1 > 0$, $m_k > 0$ và $n = m_1 + \ldots + m_k$ là cỡ mẫu.

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là $R = a_{k+1} - a_1$.

Chỉ ra rằng khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trong Bảng 3.1 lớn hơn khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.

Ý nghĩa. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc. Khoảng biến thiên được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm. Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

Ví dụ 1. Thống kê thời gian sử dụng mạng xã hội trong ngày của các bạn Tổ 1, Tổ 2 lớp 12A, được kết quả như bảng sau:

Thời gian sử dụng (phút)	[0; 10)	[10; 30)	[30; 60)	[60; 90)
Số học sinh Tổ 1	2	4	3	1
Số học sinh Tổ 2	5	1	3	0

Tìm khoảng biến thiên cho thời gian sử dụng mạng xã hội của học sinh mỗi tổ và giải thích ý nghĩa.

Giải

Gọi R_1, R_2 tương ứng là khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian sử dụng mạng xã hội trong ngày của các bạn Tổ 1 và Tổ 2.

Ta có: $R_1 = 90 - 0 = 90$ và $R_2 = 60 - 0 = 60$.

Do $R_1 > R_2$ nên ta có thể kết luận rằng thời gian sử dụng mạng xã hội trong ngày của các bạn Tổ 1 phân tán hơn thời gian sử dụng mạng xã hội của các bạn Tổ 2.

Luyện tập 1. Thời gian hoàn thành bài kiểm tra môn Toán của các bạn trong lớp 12C được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Số học sinh	8	16	4	2

a) Tính khoảng biến thiên R cho mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Nếu biết học sinh hoàn thành bài kiểm tra sớm nhất mất 27 phút và muộn nhất mất 43 phút thì khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc là bao nhiêu?

2. KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ

HĐ2. Trong *tình huống mở đầu*, gọi $y_1, y_2, \ldots, y_{30}$ là nhiệt độ cao nhất trong ngày của 30 ngày tháng Sáu năm 2022 (mẫu số liệu gốc).

a) Có thể tính chính xác khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc hay không?

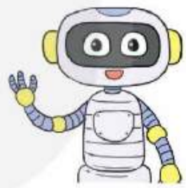
b) Tìm tứ phân vị thứ nhất Q_1 và tứ phân vị thứ ba Q_3 cho mẫu số liệu ghép nhóm.

c) Hãy đưa ra một giá trị xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc.

Tứ phân vị thứ r là

$$Q_r = a_p + \frac{\frac{r \cdot n}{4} - (m_1 + \ldots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p),$$

trong đó $[a_p; a_{p+1})$ là nhóm chứa tứ phân vị thứ r với $r = 1, 2, 3$.



Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi Bảng 3.1.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là Δ_Q, là hiệu số giữa tứ phân vị thứ ba Q_3 và tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu đó, tức là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$.

Ý nghĩa. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc. Khoảng tứ phân vị cũng được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm. Khoảng tứ phân vị càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

Nhận xét. Do khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm chỉ phụ thuộc vào nửa giữa của mẫu số liệu, nên không bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường và có thể dùng đại lượng này để loại giá trị bất thường.

Ví dụ 2. Thời gian chờ khám bệnh của các bệnh nhân tại phòng khám X được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)
Số bệnh nhân	3	12	15	8

a) Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này.

b) Từ một mẫu số liệu về thời gian chờ khám bệnh của các bệnh nhân tại phòng khám Y người ta tính được khoảng tứ phân vị bằng 9,23. Hỏi thời gian chờ của bệnh nhân tại phòng khám nào phân tán hơn?

Giải

a) Cỡ mẫu là $n = 3 + 12 + 15 + 8 = 38$. Gọi $x_1, \ldots, x_{38}$ là thời gian chờ khám bệnh của 38 bệnh nhân này và giả sử rằng dãy số liệu gốc này đã được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là x_{10} nên nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là nhóm [5; 10) và ta có:

$$Q_1 = 5 + \left[\frac{\frac{38}{4} - 3}{12}\right] \cdot 5 \approx 7,71.$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là x_{29} nên nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là nhóm [10; 15) và ta có:

$$Q_3 = 10 + \left[\frac{\frac{3 \cdot 38}{4} - 15}{15}\right] \cdot 5 = 14,5.$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 \approx 14,5 - 7,71 = 6,79$.

b) Do $\Delta_Q = 6,79 < 9,23$ nên thời gian chờ của bệnh nhân tại phòng khám Y phân tán hơn thời gian chờ của bệnh nhân tại phòng khám X.

Luyện tập 2. Một người ghi lại thời gian đàm thoại của một số cuộc gọi cho kết quả như bảng sau:

Thời gian t (phút)	Số cuộc gọi
$0 \le t < 1$	8
$1 \le t < 2$	17
$2 \le t < 3$	25
$3 \le t < 4$	20
$4 \le t < 5$	10

Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Vận dụng. Hãy giải bài toán trong *tình huống mở đầu* bằng cách sử dụng khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

BÀI TẬP

3.1. Thống kê số thẻ vàng của mỗi câu lạc bộ trong giải ngoại hạng Anh mùa giải 2021 – 2022 cho kết quả như sau:

101 79 79 78 75 73 68 67 67 63
63 61 60 59 57 55 55 50 47 42.

(Theo *premierleague.com*)

a) Hãy ghép nhóm dãy số liệu trên thành các nhóm có độ dài bằng nhau với nhóm đầu tiên là [40; 50).

b) Tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và mẫu số liệu ghép nhóm thu được ở câu a. Giá trị nào là giá trị chính xác? Giá trị nào là giá trị xấp xỉ?

3.2. Thu nhập theo tháng (đơn vị: triệu đồng) của người lao động ở hai nhà máy như sau:

Thu nhập	[5; 8)	[8; 11)	[11; 14)	[14; 17)	[17; 20)
Số người của nhà máy A	20	35	45	35	20
Số người của nhà máy B	17	23	30	23	17

Tính mức thu nhập trung bình của người lao động ở hai nhà máy trên. Dựa vào khoảng tứ phân vị, hãy xác định xem mức thu nhập của người lao động ở nhà máy nào biến động nhiều hơn.

3.3. Bảng sau đây cho biết chiều cao của các học sinh lớp 12A và 12B.

Chiều cao (cm)	[145; 150)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số học sinh của lớp 12A	1	0	15	12	10	5
Số học sinh của lớp 12B	0	0	17	10	9	6

a) Tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị cho các mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của học sinh lớp 12A, 12B.

b) Để so sánh độ phân tán về chiều cao của học sinh hai lớp này ta nên dùng khoảng biến thiên hay khoảng tứ phân vị? Vì sao?

Bài 10

PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

THUẬT NGỮ
- Phương sai
- Độ lệch chuẩn

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Tính phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm.
- Hiểu ý nghĩa, vai trò của phương sai, độ lệch chuẩn trong việc đo mức độ phân tán.

Để xác định độ ổn định của một máy đo độ ẩm không khí, người ta dùng máy này để đo 20 lần. Nếu độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đo lớn hơn 0,15 thì người ta sẽ đưa máy đo đi sửa chữa. Trong một lần lấy mẫu, kĩ thuật viên có được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Độ ẩm (%)	[52; 52,1)	[52,1; 52,2)	[52,2; 52,3)	[52,3; 52,4)	[52,4; 52,5)
Tần số	1	5	8	4	2

Liệu có cần đưa máy đo này đi sửa chữa hay không?

1. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

HĐ1. Trở lại bài toán trong *tình huống mở đầu*. Gọi $x_1, \ldots, x_{20}$ là các kết quả đo (mẫu số liệu gốc).

a) Có thể tính được chính xác phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc hay không?

b) Thảo luận và đề xuất ước lượng cho phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc.

Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi Bảng 3.1.

- Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là s^2, là một số được tính theo công thức sau:

$$s^2 = \frac{m_1\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + m_k\left(x_k - \overline{x}\right)^2}{n};$$

trong đó, $n = m_1 + \ldots + m_k$; $x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$ với $i = 1, 2, \ldots, k$ là giá trị đại diện cho nhóm $\left[a_i; a_{i+1}\right)$ và $\overline{x} = \frac{m_1x_1 + \ldots + m_kx_k}{n}$ là số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm.

- Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là s, là căn bậc hai số học của phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, tức là $s = \sqrt{s^2}$.

Nhận xét. Ta có thể tính phương sai theo công thức: $s^2 = \frac{1}{n}\left(m_1 \cdot x_1^2 + \ldots + m_k \cdot x_k^2\right) - \left(\overline{x}\right)^2$.

Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.

Ý nghĩa. Phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là các xấp xỉ cho phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc. Chúng được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm xung quanh số trung bình của mẫu số liệu đó. Phương sai, độ lệch chuẩn càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

Chú ý. Người ta còn sử dụng các đại lượng sau để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm:

$$\hat{s}^2 = \frac{m_1(x_1 - \overline{x})^2 + \ldots + m_k(x_k - \overline{x})^2}{n-1}, \ \hat{s} = \sqrt{\hat{s}^2}.$$

Ví dụ 1. Người ta theo dõi sự thay đổi cân nặng, được tính bằng hiệu cân nặng trước và sau ba tháng áp dụng chế độ ăn kiêng của một số người cho kết quả như sau:

Thay đổi cân nặng (kg)	[–1; 0)	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)
Số người nam	2	3	5	3	2
Số người nữ	2	7	12	7	2

Tính số trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn và nhận xét về sự thay đổi cân nặng của người nam, người nữ sau ba tháng áp dụng chế độ ăn kiêng.

Giải

Chọn giá trị đại diện cho các nhóm số liệu, ta có:

Giá trị đại diện	–0,5	0,5	1,5	2,5	3,5
Số người nam	2	3	5	3	2
Số người nữ	2	7	12	7	2

Tổng số người nam là: $n_1 = 2 + 3 + 5 + 3 + 2 = 15$.

Tổng số người nữ là: $n_2 = 2 + 7 + 12 + 7 + 2 = 30$.

Thay đổi cân nặng trung bình của người nam là:

$$\overline{x}_1 = \frac{1}{15}\left[2\cdot(-0{,}5) + 3\cdot 0{,}5 + 5\cdot 1{,}5 + 3\cdot 2{,}5 + 2\cdot 3{,}5\right] = 1{,}5 \text{ (kg)}.$$

Thay đổi cân nặng trung bình của người nữ là:

$$\overline{x}_2 = \frac{1}{30}\left[2\cdot(-0{,}5) + 7\cdot 0{,}5 + 12\cdot 1{,}5 + 7\cdot 2{,}5 + 2\cdot 3{,}5\right] = 1{,}5 \text{ (kg)}.$$

Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu về thay đổi cân nặng của người nam là:

$$s_1^2 = \frac{1}{15}\left[2\cdot(-0{,}5)^2 + 3\cdot 0{,}5^2 + 5\cdot 1{,}5^2 + 3\cdot 2{,}5^2 + 2\cdot 3{,}5^2\right] - 1{,}5^2 \approx 1{,}21^2;\ s_1 \approx 1{,}21.$$

Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu về thay đổi cân nặng của người nữ là:

$$s_2^2 = \frac{1}{30}\left[2\cdot(-0{,}5)^2 + 7\cdot 0{,}5^2 + 12\cdot 1{,}5^2 + 7\cdot 2{,}5^2 + 2\cdot 3{,}5^2\right] - 1{,}5^2 \approx 2{,}06^2;\ s_2 \approx 2{,}06.$$

Như vậy, sau ba tháng áp dụng chế độ ăn kiêng này, về trung bình sự thay đổi cân nặng của nam và nữ là như nhau. Tuy nhiên, sự biến động về thay đổi cân nặng của nữ nhiều hơn so với của nam.

Luyện tập 1. Một vận động viên luyện tập chạy cự li 100 m đã ghi lại kết quả luyện tập như sau:

Thời gian (giây)	[10,2; 10,4)	[10,4; 10,6)	[10,6; 10,8)	[10,8; 11)
Số vận động viên	3	7	8	2

Tìm phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm này. Phương sai và độ lệch chuẩn cho biết điều gì?

Vận dụng. Hãy tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm cho bài toán trong *tình huống mở đầu* và cho biết có cần đưa máy đi sửa chữa hay không.

2. SỬ DỤNG PHƯƠNG SAI, ĐỘ LỆCH CHUẨN ĐO ĐỘ RỦI RO

Trong tài chính, người ta có nhiều cách để đo độ rủi ro của một phương án đầu tư. Một trong các cách đó là sử dụng độ lệch chuẩn của lợi nhuận thu được theo phương án đầu tư. Độ lệch chuẩn càng lớn thì phương án đầu tư càng rủi ro.

Ví dụ 2. Anh An đầu tư số tiền bằng nhau vào hai lĩnh vực kinh doanh A, B. Anh An thống kê số tiền thu được mỗi tháng trong vòng 60 tháng theo mỗi lĩnh vực cho kết quả như sau:

Số tiền (triệu đồng)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
Số tháng đầu tư vào lĩnh vực A	5	10	30	10	5
Số tháng đầu tư vào lĩnh vực B	20	5	10	5	20

So sánh giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của số tiền thu được mỗi tháng khi đầu tư vào mỗi lĩnh vực A, B. Đầu tư vào lĩnh vực nào "rủi ro" hơn?

Giải

Chọn giá trị đại diện cho các nhóm số liệu ta có:

Giá trị đại diện	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
Số tháng đầu tư vào lĩnh vực A	5	10	30	10	5
Số tháng đầu tư vào lĩnh vực B	20	5	10	5	20

Số tiền trung bình thu được khi đầu tư vào các lĩnh vực A, B tương ứng là:

$$\overline{x}_A = \frac{1}{60}(5 \cdot 7,5 + \ldots + 5 \cdot 27,5) = 17,5 \text{ (triệu đồng)};$$

$$\overline{x}_B = \frac{1}{60}(20 \cdot 7,5 + \ldots + 20 \cdot 27,5) = 17,5 \text{ (triệu đồng)}.$$

Như vậy, về trung bình đầu tư vào các lĩnh vực A, B số tiền thu được hàng tháng như nhau.

Độ lệch chuẩn của số tiền thu được hàng tháng khi đầu tư vào các lĩnh vực A, B tương ứng là:

$$s_A = \sqrt{\frac{1}{60}(5 \cdot 7,5^2 + \ldots + 5 \cdot 27,5^2) - (17,5)^2} = 5;$$

$$s_B = \sqrt{\frac{1}{60}(20 \cdot 7,5^2 + \ldots + 20 \cdot 27,5^2) - (17,5)^2} \approx 8,42.$$

Như vậy, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu về số tiền thu được hàng tháng khi đầu tư vào lĩnh vực B cao hơn khi đầu tư vào lĩnh vực A. Người ta nói rằng, đầu tư vào lĩnh vực B là "rủi ro" hơn.

Ví dụ sau cho thấy không phải lúc nào ta cũng có thể dùng độ lệch chuẩn của lợi nhuận thu được để so sánh độ rủi ro của các phương án đầu tư.

Ví dụ 3. Thống kê lợi nhuận hàng tháng (đơn vị: triệu đồng) trong 20 tháng của hai nhà đầu tư được cho như sau:

Lợi nhuận	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)
Số tháng	2	4	8	4	2

Bảng 3.2. Lợi nhuận theo tháng của nhà đầu tư nhỏ

Lợi nhuận	[510; 520)	[520; 530)	[530; 540)	[540; 550)	[550; 560)
Số tháng	4	3	6	3	4

Bảng 3.3. Lợi nhuận theo tháng của nhà đầu tư lớn

Tính độ lệch chuẩn của hai mẫu số liệu ghép nhóm trên. Có nên dựa vào độ lệch chuẩn để so sánh độ rủi ro của hai nhà đầu tư này không?

Giải

Chọn điểm đại diện cho các nhóm số liệu ta tính được các số đặc trưng như sau:

Lợi nhuận trung bình một tháng của các nhà đầu tư tương ứng là:

$\overline{x}_A = \frac{1}{20}(2 \cdot 15 + \ldots + 2 \cdot 55) = 35$ (triệu đồng); $\overline{x}_B = \frac{1}{20}(4 \cdot 515 + \ldots + 4 \cdot 555) = 535$ (triệu đồng).

Độ lệch chuẩn của lợi nhuận hàng tháng của hai nhà đầu tư tương ứng là:

$$s_A = \sqrt{\frac{1}{20}\left(2 \cdot 15^2 + \ldots + 2 \cdot 55^2\right) - (35)^2} \approx 10{,}95;$$

$$s_B = \sqrt{\frac{1}{20}\left(4 \cdot 515^2 + \ldots + 4 \cdot 555^2\right) - (535)^2} \approx 13{,}78.$$

Độ lệch chuẩn cho lợi nhuận hàng tháng của nhà đầu tư lớn cao hơn của nhà đầu tư nhỏ. Lợi nhuận trung bình của hai nhà đầu tư khác nhau rất nhiều, do đó ta không nên dùng độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro của hai nhà đầu tư này.

Nhận xét. Ta không nên dùng phương sai hay độ lệch chuẩn để so sánh độ rủi ro của hai phương án đầu tư khi lợi nhuận trung bình của hai phương án đầu tư này khác nhau rất nhiều.

Em có biết?

Để so sánh độ phân tán của hai mẫu số liệu khi đơn vị đo trên hai mẫu số liệu khác nhau hoặc giá trị trung bình của hai mẫu số liệu này khác nhau rất nhiều người ta dùng hệ số biến thiên CV (Coefficient of Variation). Hệ số biến thiên được tính theo công thức:

$$CV = \frac{s}{\overline{x}},$$

trong đó s là độ lệch chuẩn và $\overline{x}$ là số trung bình của mẫu số liệu.

BÀI TẬP

3.4. Kiểm tra khối lượng của 30 bao xi măng (đơn vị: kg) được chọn ngẫu nhiên trước khi xuất xưởng cho kết quả như sau:

49,5	51,1	50,8	50,2	48,7	49,6	51,3	51,4	50,1	50,5
48,9	49,3	50,7	48,8	49,8	48,8	51,2	50,4	50,0	51,2
51,4	48,7	51,2	50,6	50,9	49,2	50,7	51,1	48,6	49,6.

a) Thay dấu "?" bằng số thích hợp để hoàn thiện mẫu số liệu ghép nhóm sau.

Nhóm số liệu	[48,5; 49)	[49; 49,5)	[49,5; 50)	[50; 50,5)	[50,5; 51)	[51; 51,5)
Số bao xi măng	?	?	?	?	?	?

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc và mẫu số liệu ghép nhóm. Giá trị nào là giá trị chính xác? Giá trị nào là giá trị xấp xỉ?

3.5. Tuổi thọ của một số linh kiện điện tử (đơn vị: năm) được sản xuất bởi hai phân xưởng được cho như sau:

Tuổi thọ (năm)	[1,5; 2)	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	[3,5; 4)
Số linh kiện của phân xưởng 1	4	9	13	8	6
Số linh kiện của phân xưởng 2	2	8	20	7	3

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mỗi mẫu số liệu ghép nhóm và nhận xét về độ phân tán của tuổi thọ các linh kiện điện tử được sản xuất bởi mỗi phân xưởng.

3.6. Một nhóm 20 học sinh dùng một thiết bị đo đường kính của một nhân tế bào cho kết quả như sau:

Kết quả đo (μm)	[4,5; 5)	[5; 5,5)	[5,5; 6)	[6; 6,5)
Số học sinh	3	8	7	2

a) Tính số trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Số trung bình và độ lệch chuẩn cho biết thông tin gì?

3.7. Thời gian chạy tập luyện cự li 100 m của hai vận động viên được cho trong bảng sau:

Thời gian (giây)	[10; 10,3)	[10,3; 10,6)	[10,6; 10,9)	[10,9; 11,2)
Số lần chạy của A	2	10	5	3
Số lần chạy của B	3	7	9	6

Dựa trên độ lệch chuẩn của các mẫu số liệu ghép nhóm, hãy cho biết vận động viên nào có thành tích luyện tập ổn định hơn.

3.8. Có nên dùng phương sai (hoặc độ lệch chuẩn) để so sánh độ phân tán của hai mẫu số liệu ghép nhóm trong mỗi trường hợp sau không? Tại sao?

a) Các mẫu số liệu ghép nhóm về điểm thi tốt nghiệp môn Toán của học sinh hai trường trung học phổ thông có chất lượng tương đương.

b) Các mẫu số liệu ghép nhóm về doanh thu của 100 cửa hàng bán lẻ và doanh thu của 100 siêu thị.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

A – TRẮC NGHIỆM

Sử dụng dữ kiện sau để trả lời câu hỏi trong các bài tập từ 3.9 đến 3.13.

Một vườn thú ghi lại tuổi thọ (đơn vị: năm) của 20 con hổ và thu được kết quả như sau:

Tuổi thọ	[14; 15)	[15; 16)	[16; 17)	[17; 18)	[18; 19)
Số con hổ	1	3	8	6	2

3.9. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm này là

A. 3. B. 4.

C. 5. D. 6.

3.10. Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là

A. [14; 15). B. [15; 16).

C. [16; 17). D. [17; 18).

3.11. Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là

A. [15; 16). B. [16; 17).

C. [17; 18). D. [18; 19).

3.12. Số đặc trưng nào **không** sử dụng thông tin của nhóm số liệu đầu tiên và nhóm số liệu cuối cùng?

A. Khoảng biến thiên.

B. Khoảng tứ phân vị.

C. Phương sai.

D. Độ lệch chuẩn.

3.13. Nếu thay tất cả các tần số trong mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng 4 thì số đặc trưng nào sau đây không thay đổi?

A. Khoảng biến thiên.

B. Khoảng tứ phân vị.

C. Phương sai.

D. Độ lệch chuẩn.

B – TỰ LUẬN

3.14. Để đánh giá chất lượng một loại pin điện thoại mới, người ta ghi lại thời gian nghe nhạc liên tục của điện thoại được sạc đầy pin cho đến khi hết pin cho kết quả như sau:

Thời gian (giờ)	[5; 5,5)	[5,5; 6)	[6; 6,5)	[6,5; 7)	[7; 7,5)
Số chiếc điện thoại (tần số)	2	8	15	10	5

Tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

3.15. Người ta ghi lại tiền lãi (đơn vị: triệu đồng) của một số nhà đầu tư (với số tiền đầu tư như nhau), khi đầu tư vào hai lĩnh vực A, B cho kết quả như sau:

Tiền lãi	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
Số nhà đầu tư vào lĩnh vực A	2	5	8	6	4
Số nhà đầu tư vào lĩnh vực B	8	4	2	5	6

a) Về trung bình, đầu tư vào lĩnh vực nào đem lại tiền lãi cao hơn?

b) Tính độ lệch chuẩn cho các mẫu số liệu về tiền lãi của các nhà đầu tư ở hai lĩnh vực này và giải thích ý nghĩa của các số thu được.

3.16. Thành tích môn nhảy cao của các vận động viên tại một giải điền kinh dành cho học sinh trung học phổ thông như sau:

Mức xà (cm)	[170; 172)	[172; 174)	[174; 176)	[176; 180)
Số vận động viên	3	10	6	1

a) Tính các số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Độ phân tán của mẫu số liệu cho biết điều gì?

3.17. Trong bài thực hành đo hiệu điện thế của mạch điện, An và Bình đã dùng hai vôn kế khác nhau để đo, mỗi bạn tiến hành đo 10 lần cho kết quả như sau:

Hiệu điện thế đo được (Vôn)	[3,85; 3,90)	[3,90; 3,95)	[3,95; 4,00)	[4,00; 4,05)
Số lần An đo	1	6	2	1
Số lần Bình đo	1	3	4	2

Tính độ lệch chuẩn của các mẫu số liệu ghép nhóm cho kết quả đo của An và Bình. Từ đó kết luận xem vôn kế của bạn nào cho kết quả đo ổn định hơn.

HOẠT ĐỘNG
THỰC HÀNH TRẢI NGHIỆM

KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ VỚI PHẦN MỀM GEOGEBRA

MỤC TIÊU

Sử dụng phần mềm GeoGebra để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số, đặc biệt đối với những hàm số phức tạp.

Khởi động phần mềm GeoGebra, chọn Complex Adaptive System (CAS) để thực hiện tính toán đạo hàm, tìm cực trị, tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số; chọn Graphics 2 để vẽ đồ thị của hàm số.

1. TÍNH ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ

a) Tính đạo hàm của hàm số trên một khoảng

Để tính đạo hàm của hàm số trên một khoảng, ta dùng lệnh Derivative (<hàm số>), kết quả sẽ được hiển thị ngay bên dưới.

1	Derivative$(x^5 - 4x^3 + 2x - 3)$
	$\rightarrow$ $\mathbf{5x^4 - 12x^2 + 2}$

b) Tính đạo hàm của hàm số tại một điểm

Trước tiên, ta dùng lệnh Derivative (<hàm số>) để tính đạo hàm của hàm số trên tập xác định của hàm số đó.

Nhấn nút ở đầu lệnh, lúc này tên của hàm số được phần mềm đặt tự động. Sau đó, để tính đạo hàm của hàm số tại một điểm xác định, ta thay giá trị của biến vào hàm đạo hàm của hàm số đó, kết quả sẽ được hiển thị ngay bên dưới.

1	$f(x) :=$ Derivative$(x^5 - 4x^3 + 2x - 3)$
	$\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := 5x^4 - 12x^2 + 2}$
2	$f(2)$
	$\rightarrow$ $\mathbf{34}$

c) Tính đạo hàm cấp cao của hàm số

Để tính đạo hàm cấp n của hàm số trên một khoảng xác định, ta dùng lệnh Derivative (<hàm số>, <số cấp>), kết quả sẽ được hiển thị ngay bên dưới.

1 Derivative$(x^5 - 4x^3 + 2x - 3, 3)$

→ $\mathbf{60x^2 - 24}$

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp $n - 1$, kí hiệu là $f^{(n-1)}(x)$ $(n \in \mathbb{N}, n > 1)$. Nếu $f^{(n-1)}(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của $f(x)$, kí hiệu là $f^{(n)}(x)$.

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

2. TÌM CỰC TRỊ, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT (NẾU CÓ) CỦA HÀM SỐ

a) Tìm cực trị của hàm số

Để tìm cực trị của hàm số, ta dùng lệnh Extremum (<hàm số>), kết quả sẽ được hiển thị ngay bên dưới, dưới dạng toạ độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số.

1 Extremum$(2x^3 + 3x^2 - 36x - 10)$

→ $\{(-3, 71), (2, -54)\}$

Ngoài ra ta có thể dùng lệnh Extremum (<hàm số>, <giá trị của a>, <giá trị của b>) để tìm cực trị của hàm số đã cho trên đoạn $[a; b]$.

1 Extremum$(x^4 + 2x^2 - 3, -5, 7)$

→ $(0, -3)$

1 Extremum$(x^4 + 2x^2 - 3, -5, 0)$

→ $(?, ?)$

Kết quả bên có nghĩa: hàm số đã cho không có cực trị nào trên khoảng $(-5; 0)$.

Chú ý. Ta có thể quan sát kênh hình để có hình ảnh trực quan bằng cách chọn View → Graphics 2.

Để xác định cực trị là cực đại hay cực tiểu, ta có thể dùng đồ thị hàm số để kết luận điểm cực trị là điểm cực đại hay điểm cực tiểu.

b) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số (trên khoảng, đoạn, tập xác định)

Để tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên một đoạn $[a; b]$ cho trước, ta dùng lệnh Max (<hàm số>, <a>, <b>); kết quả trả về sẽ là toạ độ của một điểm, tung độ của điểm đó chính là giá trị lớn nhất cần tìm.

1 Max$(x^4 - 3x^2 + 2, 0, 3)$

→ $(3, 56)$

Kết quả bên có nghĩa: Hàm số đã cho có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; 3]$ là 56, đạt tại $x = 3$.

Tương tự, để tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn $[a; b]$ cho trước, ta dùng lệnh Min (<hàm số>, <a>, <b>); kết quả trả về sẽ là toạ độ của một điểm, tung độ của điểm đó chính là giá trị nhỏ nhất cần tìm.

1	$\mathrm{Min}(x^4 - 3x^2 + 2, 0, 3)$
	$\rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}, \dfrac{-1}{4}\right)$

3. TÌM CÁC ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Để tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho, ta dùng lệnh Asymptote (<hàm số>); kết quả sẽ được hiển thị ngay bên dưới.

1	$\mathrm{Asymptote}\left(\dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 3}\right)$
	$\rightarrow \{y = x - 1, x = 3\}$

Kết quả bên có nghĩa: Hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận là tiệm cận xiên $y = x - 1$ và tiệm cận đứng $x = 3$.

1	$\mathrm{Asymptote}\left((x - 2) \cdot \dfrac{x^2}{x - 2}\right)$
	$\rightarrow \{\}$

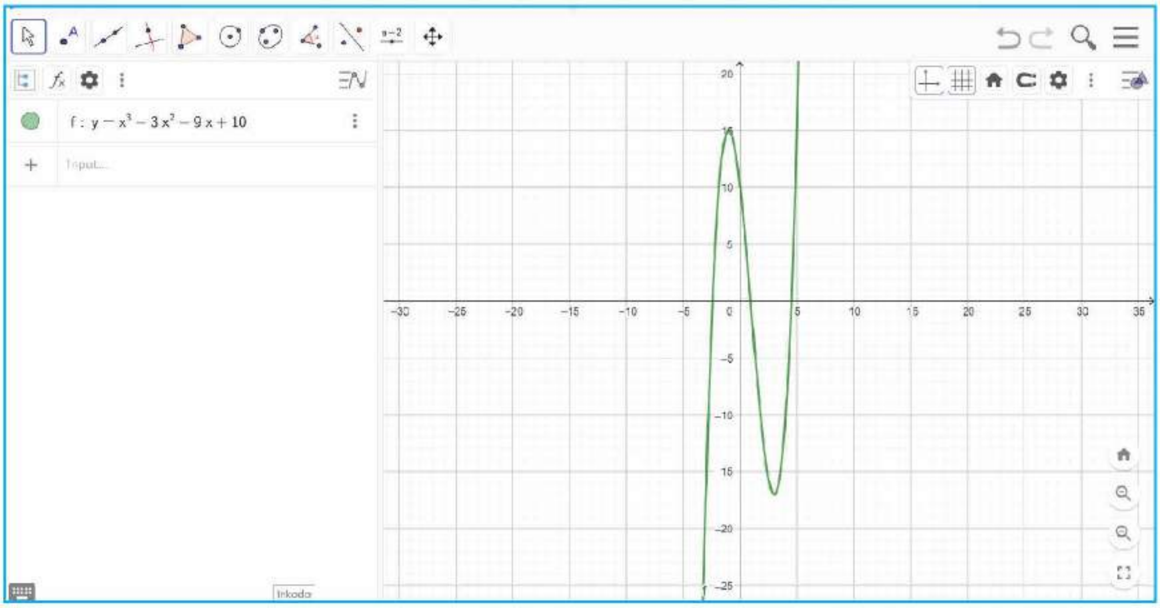
Kết quả bên có nghĩa: Hàm số đã cho không có đường tiệm cận.

4. VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Khởi động GeoGebra và chọn View → Graphics 2 để vẽ đồ thị của hàm số. Khi đó, màn hình hiển thị sẵn hệ trục toạ độ dạng lưới ô vuông.

a) Vẽ đồ thị của hàm đa thức (không cần vẽ tiệm cận)

Nhập hàm số vào ô lệnh, màn hình sẽ hiển thị đồ thị của hàm số cần vẽ (H.T.1).

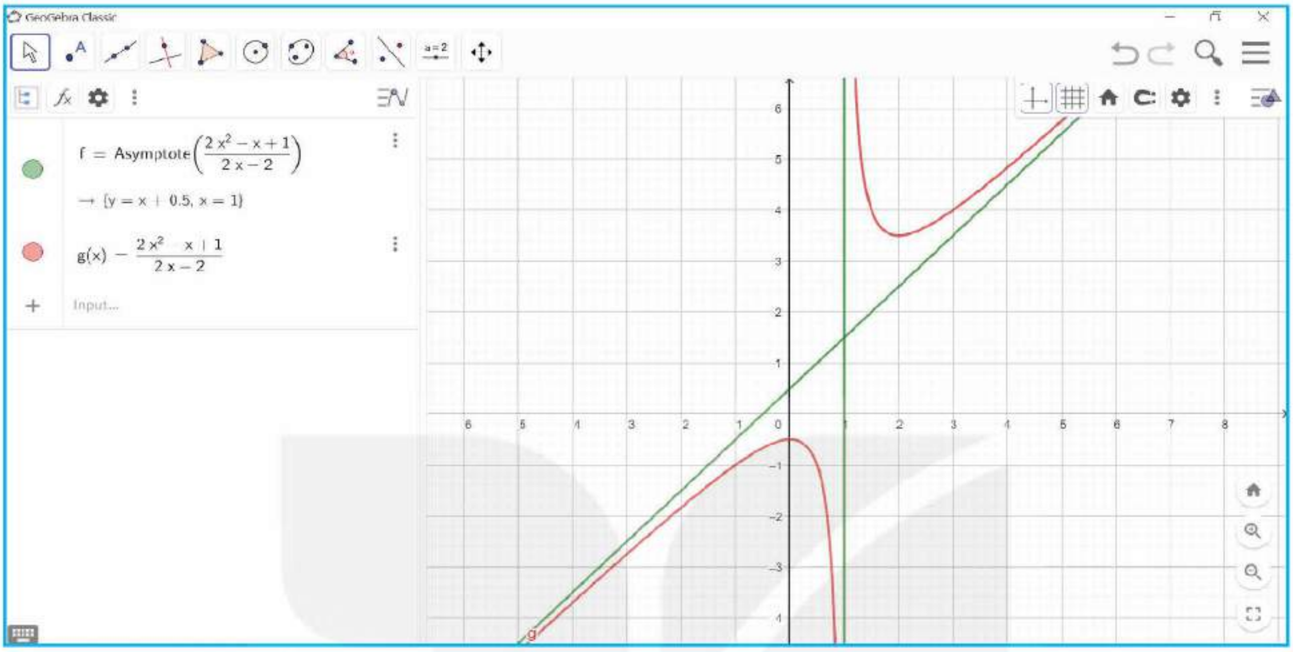


Hình T.1

b) Vẽ đồ thị của hàm phân thức

– *Bước 1.* Vẽ tiệm cận của đồ thị hàm phân thức bằng cách sử dụng câu lệnh đã được giới thiệu trong Mục 3.

– *Bước 2.* Vẽ đồ thị hàm phân thức bằng cách nhập hàm số vào ô lệnh (H.T.2).

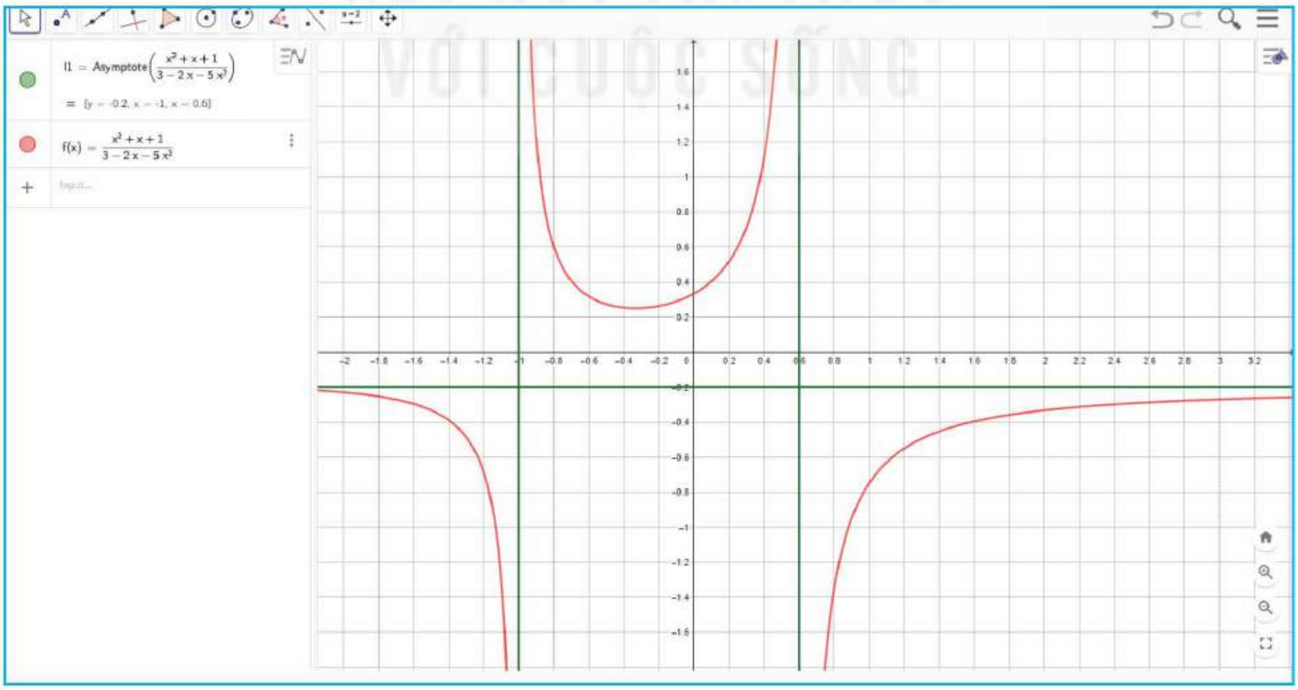


Hình T.2

• Vẽ đồ thị của các hàm số khác

– *Bước 1.* Vẽ tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có) bằng cách sử dụng câu lệnh đã được giới thiệu ở Mục 3.

– *Bước 2.* Vẽ đồ thị của hàm số bằng cách nhập hàm số vào ô lệnh (H.T.3).



Hình T.3

Chú ý. Nếu muốn sử dụng giao diện tiếng Việt, sau khi khởi động GeoGebra, chọn Options → Language → Vietnamese/Tiếng Việt. Khi đó, thay vì cú pháp lệnh tiếng Anh như trình bày ở trên, ta dùng cú pháp lệnh tiếng Việt tương ứng như trong bảng sau:

Lệnh	Cú pháp lệnh tiếng Anh	Cú pháp lệnh tiếng Việt
Tính đạo hàm cấp 1 của hàm số	Derivative (<*hàm số*>)	DaoHam (<*hàm số*>)
Tính đạo hàm cấp cao của hàm số	Derivative (<*hàm số*>, <*số cấp*>)	DaoHam (<*hàm số*>, <*số cấp*>)
Tìm cực trị của hàm số	Extremum (<*hàm số*>)	CucTri (<*hàm số*>)
Tìm cực trị của hàm số trên đoạn $[a; b]$	Extremum (<*hàm số*>, <*giá trị của a*>, <*giá trị của b*>)	CucTri (<*hàm số*>, <*giá trị của a*>, <*giá trị của b*>)
Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[a; b]$	Max (<*hàm số*>, <*a*>, <*b*>)	GTLN (<*hàm số*>, <*a*>, <*b*>)
Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[a; b]$	Min (<*hàm số*>, <*a*>, <*b*>)	GTNN (<*hàm số*>, <*a*>, <*b*>)
Tìm đường tiệm cận của đồ thị hàm số	Asymptote (<*hàm số*>)	TiemCan (<*hàm số*>)

THỰC HÀNH

Sử dụng phần mềm GeoGebra thực hiện các yêu cầu sau:

1. Cho các hàm số đa thức sau:

(1) $y = 3x^2 + \sqrt{3}x + 1$; (2) $y = x^3 - 6x^2 + 9$; (3) $y = x^4 - 4x^2 + 3$.

a) Tìm đạo hàm cấp một và đạo hàm cấp hai của các hàm số trên.

b) Tìm tất cả các điểm cực trị của các hàm số trên.

c) Vẽ đồ thị của các hàm số trên.

2. Cho các hàm số phân thức hữu tỉ sau:

(1) $y = \dfrac{x}{x + \sqrt{2}}$; (2) $y = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$; (3) $y = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 1}$; (4) $y = 5x + 1 + \dfrac{3}{2x - 3}$.

a) Tìm đạo hàm cấp một của các hàm số trên.

b) Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số trên.

c) Vẽ đồ thị của các hàm số trên.

3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4; 4]$; b) $y = -3x^4 + 4x^2 + \sqrt{2}$ trên đoạn $[-1; 1]$;

c) $y = x + \dfrac{\sqrt{5}}{x}$ trên đoạn $[1; 10]$; d) $y = \sin 2x - x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

VẼ VECTƠ TỔNG CỦA BA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN BẰNG PHẦN MỀM GEOGEBRA

MỤC TIÊU

Sử dụng phần mềm GeoGebra, vẽ vectơ tổng của ba vectơ cho trước.

Hoạt động: Lấy bốn điểm *A*, *B*, *C*, *D* trong không gian ba chiều và vẽ vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

Hướng dẫn thực hiện:

Bước 1. Mở phần mềm GeoGebra, vào mục **Phối cảnh\Vẽ đồ hoạ 3D** (H.T.4).

Bấm chuột trái, chọn "Hiển thị hệ trục toạ độ" để tắt phần hiển thị hệ trục toạ độ (H.T.5).

Hình T.4

Hình T.5

Bước 2. Chọn công cụ "Điểm mới" để vẽ các điểm *A*, *B*, *C*, *D* trên mặt phẳng màu xám (H.T.6).

Hình T.6

Chú ý. Ta có thể di chuyển các điểm bằng cách kích chuột phải vào điểm để hiện ra các mũi tên di chuyển 4 chiều và 2 chiều, sau đó di chuyển điểm theo hướng tương ứng với chiều mũi tên.

Bước 3. Sử dụng công cụ vẽ vectơ qua 2 điểm (H.T.7) để vẽ ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

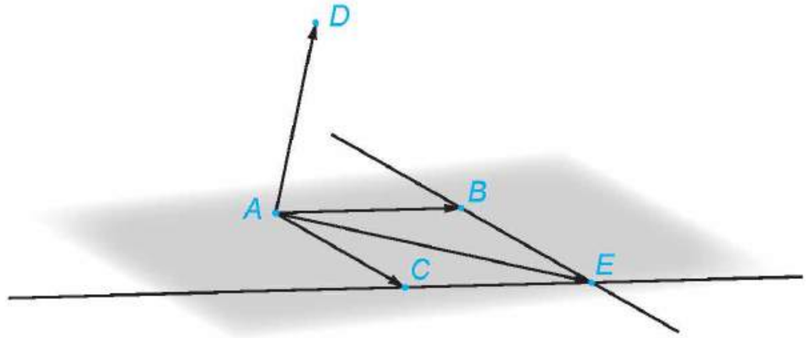
Bước 4. Sử dụng công cụ "Đường song song" (H.T.8) để vẽ các đường thẳng song song với các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Hình T.8

Hình T.7

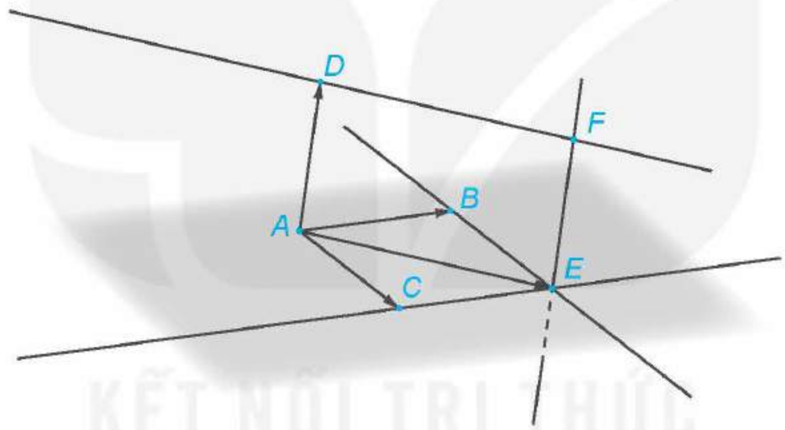
Xác định giao điểm E của hai đường thẳng đó bằng công cụ "Giao điểm của 2 đối tượng". Vẽ vectơ $\overrightarrow{AE}$.

Theo nguyên tắc hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.



Hình T.9

Bước 5. Sử dụng công cụ vẽ đường thẳng song song để vẽ các đường thẳng song song với các vectơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ và xác định giao điểm F của hai đường thẳng đó.

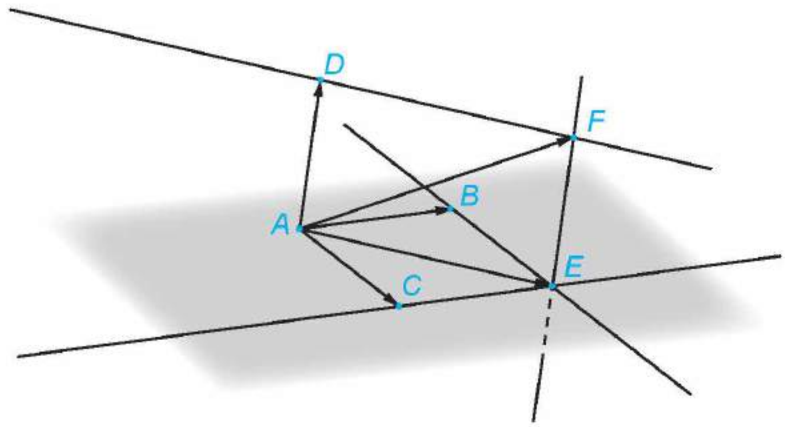


Hình T.10

Bước 6. Vẽ vectơ $\overrightarrow{AF}$.

Theo nguyên tắc hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

Vậy $\overrightarrow{AF}$ chính là vectơ $\vec{u}$ cần dựng.



Hình T.11

ĐỘ DÀI GANG TAY
(GANG TAY CỦA BẠN DÀI BAO NHIÊU?)

MỤC TIÊU

Thực hiện thu thập và phân tích dữ liệu để so sánh độ dài gang tay của hai nhóm học sinh nam và học sinh nữ trong lớp học.

Độ dài gang tay là một số đo của cơ thể. Các nhà sản xuất găng tay căn cứ vào đó để sản xuất các sản phẩm với kích thước khác nhau dùng trong y tế, thể thao, lao động,... Liệu chiều dài gang tay của nam giới có khác biệt so với nữ giới? Phân bố của chiều dài gang tay như thế nào?

Trong bài này, chúng ta sẽ thực hiện một phân tích nhỏ trong phạm vi lớp học để so sánh chiều dài gang tay của các bạn nam và các bạn nữ. Ta sẽ thu thập dữ liệu trên hai nhóm và so sánh thông qua tính toán những số đo thống kê mô tả đã học.

1. THU THẬP DỮ LIỆU

Chuẩn bị:

- Thước kẻ có vạch chia centimét;
- Bút, giấy.

Thực hiện:

a) Cách đo độ dài gang tay như sau:

– Đặt thước trên bàn;

– Đưa ngón tay cái và ngón tay út của bàn tay phải lên phía trên thước;

– Đặt ngón cái tại điểm đánh dấu 0 cm;

– Dãn ngón út tối đa và xác định vị trí của đầu ngón út trên thước.

b) Thu thập dữ liệu theo mẫu phiếu sau:

Khảo sát về độ dài gang tay

Giới tính của bạn

○ Nữ
○ Nam

Độ dài gang tay (đơn vị: cm) của bạn thuộc phạm vi nào sau đây?

○ [16; 17)
○ [17; 18)
○ [18; 19)
○ [19; 20)
○ [20; 21)
○ [21,22)
○ [22; 23)
○ [23; 24)

Phiếu khảo sát có thể tạo trên Google biểu mẫu (Google form).

HĐ1. Lưu dữ liệu thu được vào bảng theo mẫu sau:

Chiều dài gang tay (cm)	Nữ	Nam
[16; 17)		
[17; 18)		
[18; 19)	\	
[19; 20)	\	
[20; 21)		\
[21; 22)		
[22; 23)		\
[23; 24)		

Bảng T.1. Kết quả đo gang tay của hai nhóm học sinh nữ và nam

2. TÓM TẮT VÀ PHÂN TÍCH DỮ LIỆU

HĐ2. Lập bảng tần số ghép nhóm cho dữ liệu thu được trên từng nhóm theo mẫu sau đây và minh hoạ bằng biểu đồ tần số.

Chiều dài gang tay (cm)	[16; 17)	[17; 18)	[18; 19)	[19; 20)	[20; 21)	[21; 22)	[22; 23)	[23; 24)
Số học sinh nam	?	?	?	?	?	?	?	?
Số học sinh nữ	?	?	?	?	?	?	?	?

HĐ3. Sử dụng bảng tần số thu được ở HĐ2, em hãy:

a) Tính độ dài gang tay trung bình của các học sinh nữ, học sinh nam trong lớp và so sánh.

b) Tính phương sai, độ lệch chuẩn và từ đó tính hệ số biến thiên của độ dài gang tay của hai nhóm học sinh và so sánh.

HĐ4. Bảng tần số sau đây là dữ liệu thu được trên một lớp học. Hãy thực hiện HĐ3 cho mẫu số liệu này.

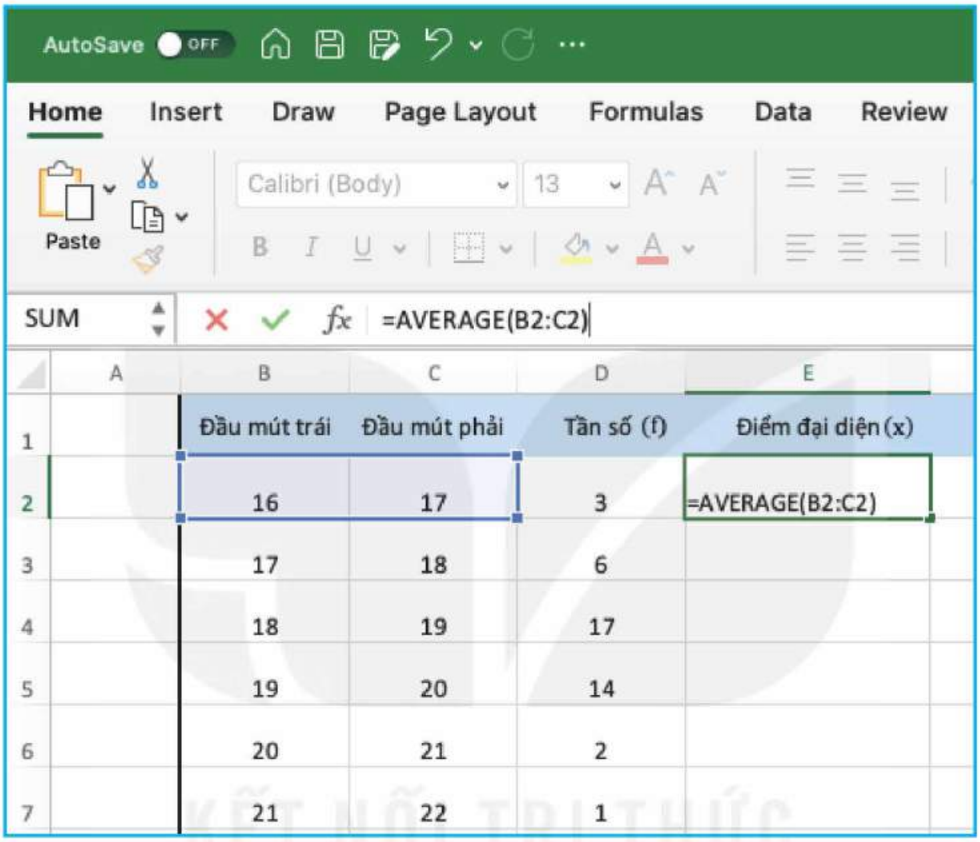
Chiều dài gang tay (cm)	Số học sinh nữ	Số học sinh nam
[16; 17)	3	0
[17; 18)	6	0
[18; 19)	17	1
[19; 20)	14	4
[20; 21)	2	8
[21; 22)	1	6
[22; 23)	0	3
[23; 24)	0	2

Bảng T.2

HĐ5. Góc công nghệ thông tin

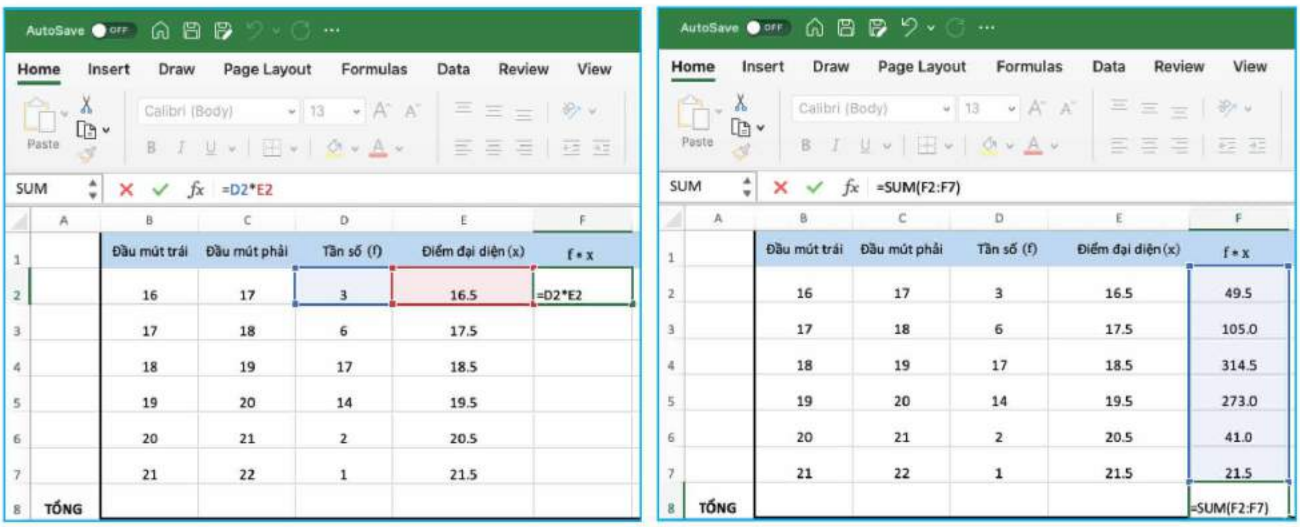
Việc tính số trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu được cho trong bảng tần số ghép nhóm có thể thực hiện trên phần mềm bảng tính Excel. Sau đây là minh hoạ việc tính trên mẫu số liệu thu được của học sinh nữ trong bảng cho trong HĐ4.

Bước 1. Nhập các đầu mút trái, các đầu mút phải, tần số của các nhóm tương ứng vào các cột. Sau đó xác định điểm đại diện của từng nhóm (H.T.12).



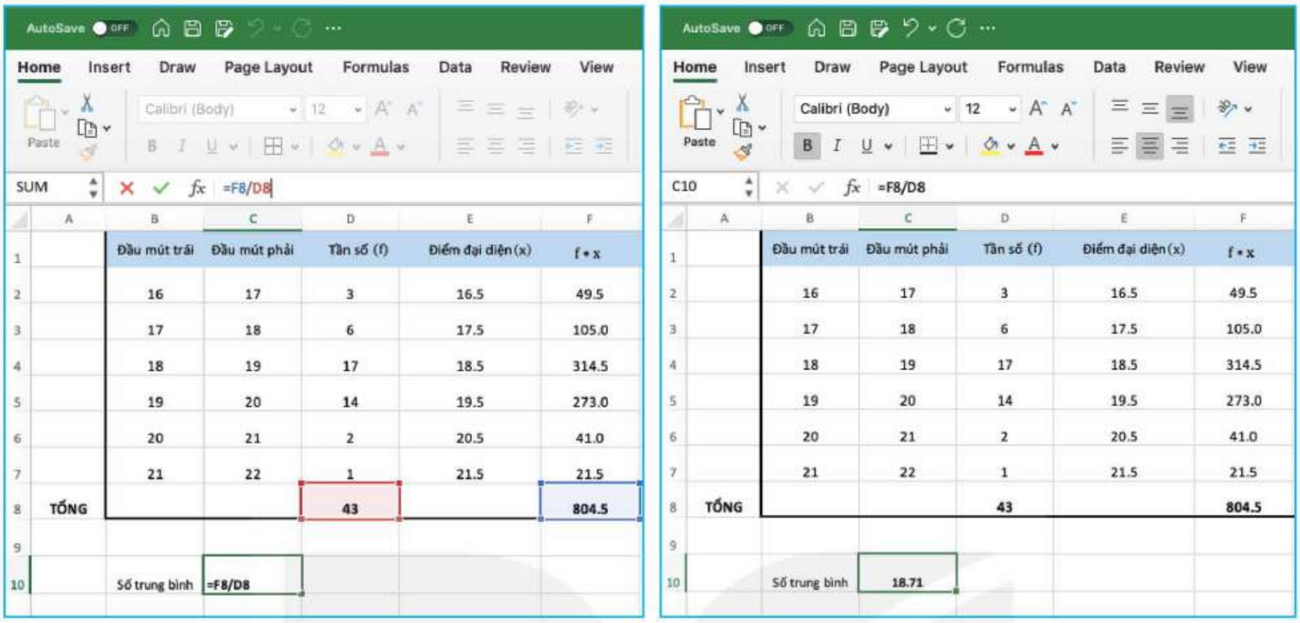
Hình T.12

Bước 2. Nhân tần số với điểm đại diện của từng nhóm và tính tổng bằng cách dùng hàm SUM (H.T.13).



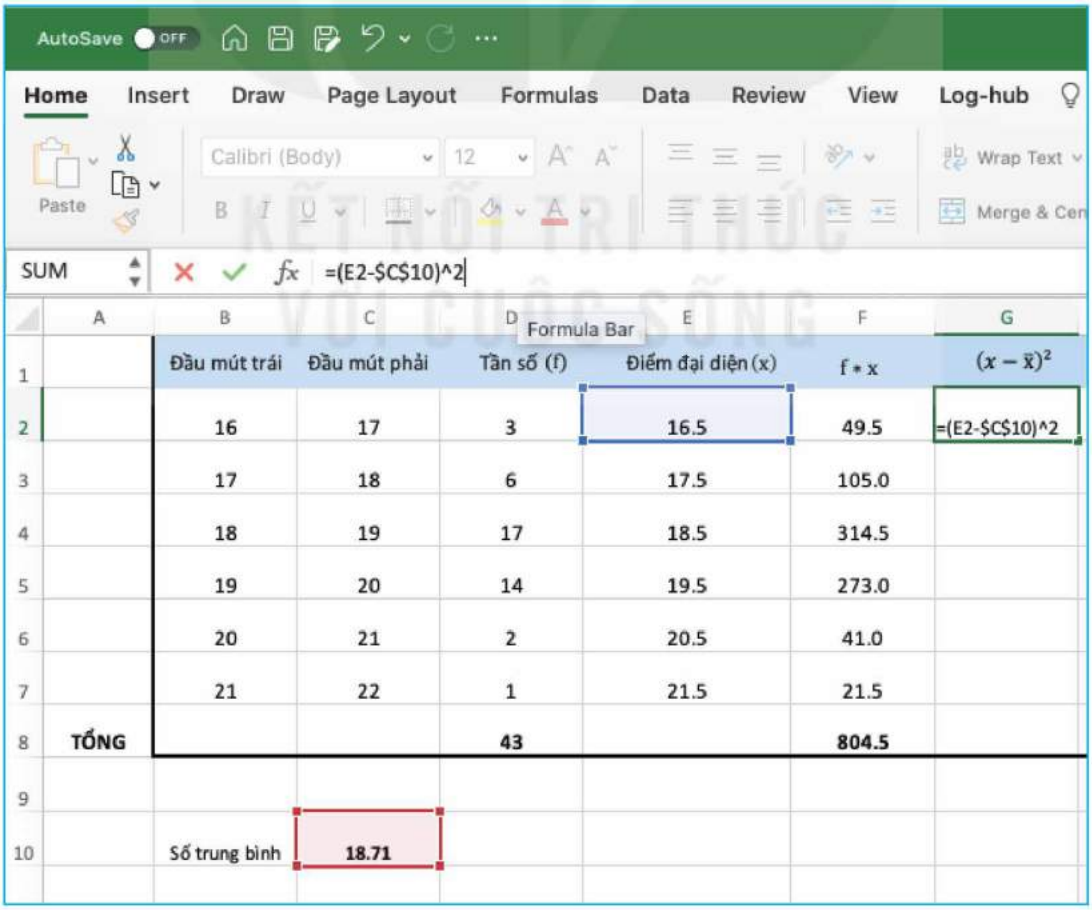
Hình T.13

Bước 3. Tính tổng các tần số và thực hiện tính số trung bình. Kết quả thu được số trung bình bằng 18,71 (H.T.14).



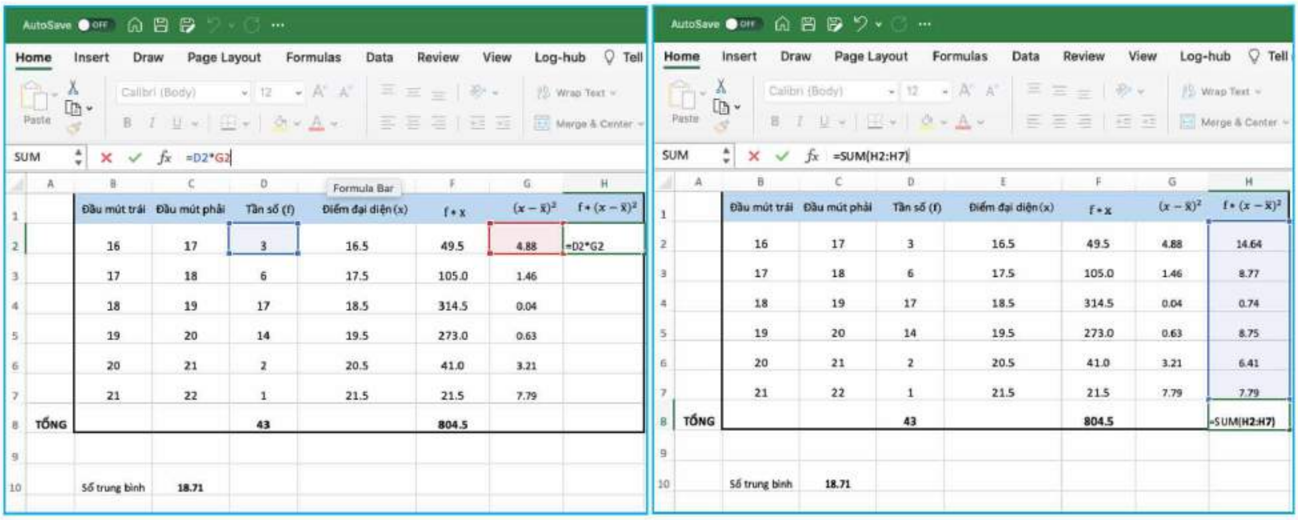
Hình T.14

Bước 4. Để tính phương sai, độ lệch chuẩn, ta lần lượt lấy các điểm đại diện trừ đi số trung bình và bình phương kết quả (H.T.15).



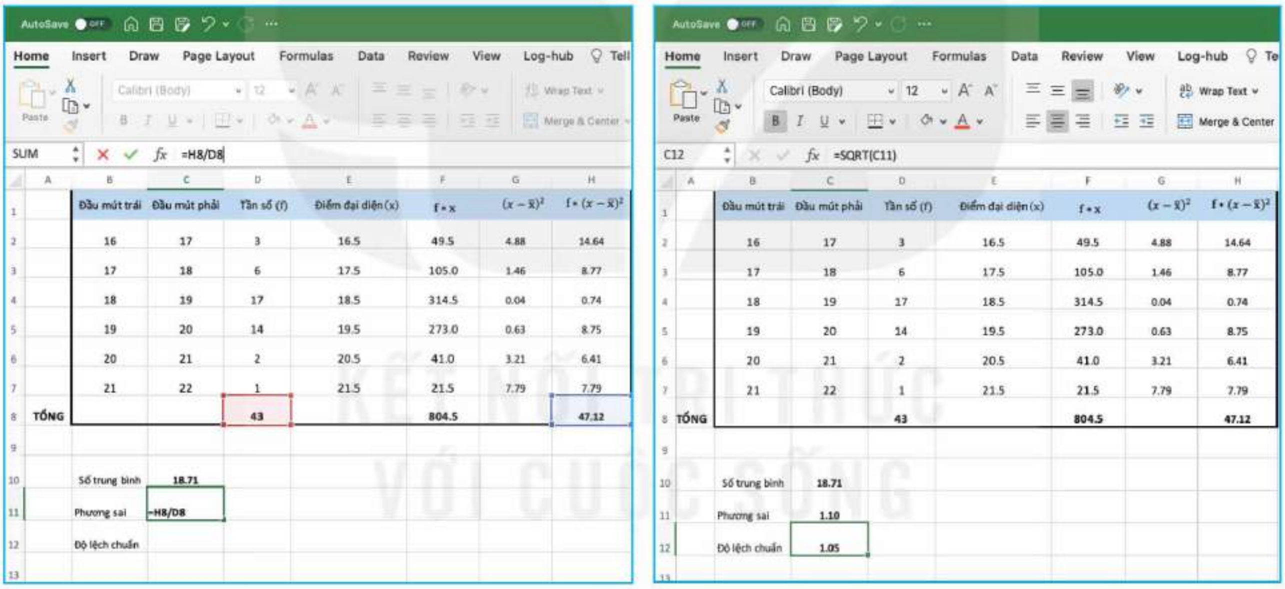
Hình T.15

Bước 5. Lần lượt lấy tần số nhân với các bình phương vừa tạo ra ở Bước 4, rồi lấy tổng các kết quả thu được (H.T.16).



Hình T.16

Bước 6. Tính phương sai, độ lệch chuẩn (H.T.17).



Hình T.17

Kết quả thu được, phương sai của mẫu số liệu là 1,10 và độ lệch chuẩn là 1,05.

Em có biết?

Vào những năm 1990, Christopher Donison và David Steinbuhler đã lần đầu tiên giới thiệu loại bàn phím piano 7/8 và 15/16 giúp những người có độ dài gang tay nhỏ có trải nghiệm chơi đàn piano tốt hơn. Hai loại bàn phím này có độ dài mỗi quãng tám là 5,5 và 6,0 (inches) tương ứng (nhỏ hơn so với 6,5 inches của những chiếc đàn phổ biến lúc đó) và chúng được kí hiệu là DS5.5 và DS6.0. Ngoài ra họ còn giới thiệu bàn phím DS5.1 dành cho trẻ em. Việc này đã tạo ra tiêu chuẩn mới cho việc sản xuất bàn phím piano hiện đại.

(Theo *dsstandardfoundation.org*)

BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

Thuật ngữ	Giải thích
Cực trị của hàm số	Giá trị cực đại hoặc giá trị cực tiểu của hàm số
Điểm cực trị của đồ thị hàm số	Điểm $(x_0; f(x_0))$, trong đó x_0 là điểm cực trị của hàm số $f(x)$
Điểm cực trị của hàm số	Điểm cực trị của hàm số là giá trị của biến số mà tại đó hàm số đạt cực trị
Giá trị lớn nhất của hàm số	Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \leq M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$
Giá trị nhỏ nhất của hàm số	Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \geq m$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$
Góc giữa hai vectơ trong không gian	Góc $\widehat{AOB}$, trong đó $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ là hai vectơ chung gốc và lần lượt bằng hai vectơ khác $\vec{0}$ đã cho
Hệ toạ độ trong không gian	Hệ gồm ba trục vuông góc với nhau từng đôi một với ba vectơ đơn vị trên ba trục
Khảo sát hàm số	Việc tìm tập xác định, xét chiều biến thiên, tìm cực trị, tìm các giới hạn đặc biệt của hàm số đó và thể hiện các kết quả này trong bảng biến thiên
Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm	Hiệu số giữa giá trị lớn nhất có thể và giá trị nhỏ nhất có thể của các giá trị trong mẫu số liệu
Quy tắc hình hộp	Tổng của ba vectơ là ba cạnh cùng xuất phát từ một đỉnh của hình hộp bằng vectơ đường chéo của hình hộp xuất phát từ đỉnh đó
Tiệm cận đứng	Đường thẳng $x = x_0$ gọi là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu một trong các điều kiện sau được thoả mãn: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$
Tiệm cận ngang	Đường thẳng $y = y_0$ gọi là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_0$
Tiệm cận xiên	Đường thẳng $y = ax + b\ (a \neq 0)$ gọi là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$
Vectơ đơn vị (của trục)	Vectơ có hướng trùng với hướng của trục và có độ dài bằng 1

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: HOÀNG THỊ THANH – LƯU THẾ SƠN
Biên tập mĩ thuật: NGUYỄN BÍCH LA
Thiết kế sách: NGUYỄN BÁ HOÀN
Trình bày bìa: NGUYỄN BÍCH LA
Minh hoạ: BÙI VIỆT DUY
Sửa bản in: VŨ THỊ THANH TÂM – TẠ THỊ HƯỜNG
Chế bản: CTCP MĨ THUẬT VÀ TRUYỀN THÔNG

TOÁN 12 – TẬP MỘT

Mã số: ...
In ... bản, (QĐ ...) khổ 19 x 26,5 cm.
Đơn vị in: ...
Cơ sở in: ...
Số ĐKXB: .../CXBIPH/.../GD.
Số QĐXB: .../QĐ - GD - HN ngày ... tháng ...năm ...
In xong và nộp lưu chiểu tháng ... năm 20...
Mã số ISBN: Tập một: 978-604-0-...
Tập hai: 978-604-0-...

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 12 – KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

1. Ngữ văn 12, tập một
2. Ngữ văn 12, tập hai
3. Chuyên đề học tập Ngữ văn 12
4. Toán 12, tập một
5. Toán 12, tập hai
6. Chuyên đề học tập Toán 12
7. Lịch sử 12
8. Chuyên đề học tập Lịch sử 12
9. Địa lí 12
10. Chuyên đề học tập Địa lí 12
11. Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 12
12. Chuyên đề học tập Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 12
13. Vật lí 12
14. Chuyên đề học tập Vật lí 12
15. Hoá học 12
16. Chuyên đề học tập Hoá học 12
17. Sinh học 12
18. Chuyên đề học tập Sinh học 12
19. Công nghệ 12 – Công nghệ Điện – Điện tử
20. Chuyên đề học tập Công nghệ 12 – Công nghệ Điện – Điện tử
21. Công nghệ 12 – Lâm nghiệp – Thuỷ sản
22. Chuyên đề học tập Công nghệ 12 – Lâm nghiệp – Thuỷ sản
23. Tin học 12 – Định hướng Tin học ứng dụng
24. Chuyên đề học tập Tin học 12 – Định hướng Tin học ứng dụng
25. Tin học 12 – Định hướng Khoa học máy tính
26. Chuyên đề học tập Tin học 12 – Định hướng Khoa học máy tính
27. Mĩ thuật 12 – Thiết kế mĩ thuật đa phương tiện
28. Mĩ thuật 12 – Thiết kế đồ hoạ
29. Mĩ thuật 12 – Thiết kế thời trang
30. Mĩ thuật 12 – Thiết kế mĩ thuật sân khấu, điện ảnh
31. Mĩ thuật 12 – Lí luận và lịch sử mĩ thuật
32. Mĩ thuật 12 – Điêu khắc
33. Mĩ thuật 12 – Kiến trúc
34. Mĩ thuật 12 – Hội hoạ
35. Mĩ thuật 12 – Đồ hoạ (tranh in)
36. Mĩ thuật 12 – Thiết kế công nghiệp
37. Chuyên đề học tập Mĩ thuật 12
38. Âm nhạc 12
39. Chuyên đề học tập Âm nhạc 12
40. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 12
41. Giáo dục thể chất 12 – Bóng chuyền
42. Giáo dục thể chất 12 – Bóng đá
43. Giáo dục thể chất 12 – Cầu lông
44. Giáo dục thể chất 12 – Bóng rổ
45. Giáo dục quốc phòng và an ninh 12
46. Tiếng Anh 12 – Global Success – Sách học sinh

Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

Sách điện tử: http://hanhtrangso.nxbgd.vn