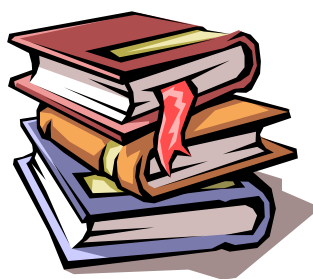


Tailieumontoan.com



[Điện thoại \(Zalo\) 039.373.2038](tel:039.373.2038)



TÁCH ĐỀ HỌC SINH GIỎI TOÁN 6 NĂM HỌC 2023

[\(Liệu hệ tài liệu word và có đáp án SĐT \(zalo\) : 039.373.2038\)](#)



Tài liệu sưu tầm, ngày 20 tháng 9 năm 2024

CHỦ ĐỀ: TẬP HỢP SỐ TỰ NHIÊN A. PHẦN NỘI DUNG

I. Cấu tạo số tự nhiên

Dạng 1: Phân tích cấu tạo số

Bài 1: Tích của hai số là 6210. Nếu giảm một thừa số đi 7 đơn vị thì tích mới là 5265. Tìm các thừa số của tích.

Trích đề HSG huyện Ứng Hòa năm 2022 - 2023

Lời giải

Gọi thừa số được giảm là a , thừa số còn lại là b , theo đề bài ta có:

$$a.b = 6210$$

$$(a - 7).b = 5265$$

$$\Rightarrow a.b - 7.b = 5265$$

$$\Rightarrow 6210 - 7.b = 5265$$

$$\Rightarrow 7.b = 6210 - 5265$$

$$\Rightarrow 7.b = 945$$

$$\Rightarrow b = 945 : 7 = 135$$

$$\Rightarrow a = 6210 : 135 = 46$$

Vậy hai thừa số cần tìm là 46;135.

Bài 2: Viết thêm chữ số y vào bên phải của một số có 5 chữ số thì được số lớn gấp 3 lần số có được do viết thêm chữ số y vào bên trái số đó. Tìm chữ số y và số có 5 chữ số đó.

Trích đề HSG huyện Đoàn Hùng năm 2018 - 2019

Lời giải

Gọi số cần tìm là \overline{abcde} ($a \neq 0; a, b, c, d, e \in \mathbb{N}, a; b; c; d; e \leq 9$)

ta có: $\overline{abcdey} = 3.\overline{yabcde}$

Đặt $\overline{abcde} = x$, ta có:

$$10x + y = 3.(100000y + x)$$

$$7x + y = 300000y \Rightarrow 7x = 299999y \Rightarrow x = 42857y$$

Vì x là số có 5 chữ số nên y chỉ nhận hai giá trị $y = 1; y = 2$

Nếu $y = 1$ thì $x = 42857$

Nếu $y = 2$ thì $x = 85714$

Bài 3: Tìm một số có 3 chữ số, biết rằng khi viết thêm chữ số 5 vào bên phải số đó thì nó tăng thêm 1112 đơn vị.

Trích đề HSG Trường THCS Quảng Tiến năm 2019 -2020

Lời giải

Gọi số phải tìm là \overline{abc} . Khi viết thêm chữ số 5 vào bên phải ta được số $\overline{abc5}$, theo bài ta có:

$$\overline{abc5} = \overline{abc} + 1112 \Rightarrow 10\overline{abc} + 5 = \overline{abc} + 1112$$

$$\Leftrightarrow 10\overline{abc} - \overline{abc} = 1112 - 5$$

$$\Rightarrow 9\overline{abc} = 1107 \Rightarrow \overline{abc} = 123$$

Vậy số phải tìm là 123.

Bài 4: Tổng của hai số tự nhiên là 109. Nếu thêm chữ số 1 vào bên phải số bé rồi cộng với số lớn ta được tổng mới là 335. Số lớn là:

A. 43

B. 54

C. 60

D. 84

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 -2019

Bài 1: Tích của hai số là 6210. Nếu giảm một thừa số đi 7 đơn vị thì tích mới là 5265. Tìm các thừa số của tích.

Trích đề HSG huyện Ứng Hòa năm 2022 - 2023

Lời giải

Gọi thừa số được giảm là a , thừa số còn lại là b , theo đề bài ta có:

$$a.b = 6210$$

$$(a-7).b = 5265$$

$$a.b - 7.b = 5265$$

$$6210 - 7.b = 5265$$

$$7.b = 6210 - 5265$$

$$7.b = 945$$

$$b = 945 : 7 = 135$$

$$a = 6210 : 135 = 46$$

Vậy hai thừa số cần tìm là 46 ; 135.

Bài 1: Tìm ba số nguyên dương biết rằng tổng của ba số ấy bằng nửa tích của chúng

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2018-2019

Lời giải

Giả sử $a \leq b \leq c$ thì $a + b + c \leq 3c$, do đó: $\frac{abc}{2} \leq 3c \Rightarrow ab \leq 6$

Có các trường hợp sau:

*) $ab = 6 \Rightarrow c = 3, 5$ (loại)

*) $ab = 5 \Rightarrow a = 1, b = 5, c = 4$ (ktm)

*) $ab = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 1, b = 4, c = 5 \text{ (tm)} \\ a = 2, b = 2, c = 4 \text{ (tm)} \end{cases}$

*) $ab = 2$ (ktm)

*) $ab = 3 \Rightarrow a = 1, b = 3, c = 8$ (tm)

*) $ab = 1 \Rightarrow (ktm)$

Vậy bộ ba số cần tìm 1;4;5 hoặc 2; 2; 4 hoặc 1; 3; 8.

Bài 1: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị.

A. 30. B. 40. C. 45. D. 55.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: C. 45.

Bài 3: Tổng của hai số tự nhiên là 102. Nếu thêm chữ số 0 vào bên phải số bé rồi cộng với số lớn ta được tổng mới là 417. Khi đó số lớn là:

A. 43. B. 54. C. 60. D. 67.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: D. 67

Bài 3: Số nhà của hai bạn An và Bình đều là số tự nhiên có bốn chữ số dạng $\overline{a53b}$ và chia hết cho cả 5 và 9. Tìm số nhà của hai bạn biết số nhà của bạn An lớn hơn số nhà của bạn Bình.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Lời giải

+ Với $b=0$, do số $\overline{a53b}:9$ nên $a+5+3+b = a+5+3+0$ chia hết cho 9

Suy ra $a=1$.

+ Với $b=5$, do số $\overline{a53b}:9$ nên $a+5+3+b = a+5+3+5$ chia hết cho 9

Suy ra $a=5$.

Vậy số nhà bạn An là 5535, số nhà bạn Bình là 1530.

Bài 4: Tích của hai số là 6210. Nếu giảm một thừa số đi 7 đơn vị thì tích mới là 5265. Tìm các thừa số của tích.

Trích đề HSG huyện Ứng Hòa năm 2022 - 2023

Lời giải

Gọi thừa số được giảm là a , thừa số còn lại là b , theo đề bài ta có:

$$a.b = 6210$$

$$(a-7).b = 5265$$

$$a.b - 7.b = 5265$$

$$6210 - 7.b = 5265$$

$$7.b = 6210 - 5265$$

$$7.b = 945$$

$$b = 945 : 7 = 135$$

$$a = 6210 : 135 = 46$$

Vậy hai thừa số cần tìm là 46;135.

Bài 5: Tìm tất cả các số tự nhiên khác 0, sao cho khi viết thêm chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị thì số đó được gấp lên 9 lần.

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

Lời giải

Gọi số cần tìm là \overline{Abc} với A là số tự nhiên; b, c là chữ số.

Khi viết thêm chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị ta có số $\overline{Ab0c}$

Theo đề ta có

$$\overline{Ab0c} = 9.\overline{Abc}$$

$$100.\overline{Ab} + c = 9.(\overline{Ab.10} + c)$$

$$100.\overline{Ab} + c = 90.\overline{Ab} + 9c$$

$$10.\overline{Ab} = 8c$$

$$5.\overline{Ab} = 4c$$

Suy ra $c : 5$ nên $c \in \{0 ; 5\}$

+ Nếu $c = 0$ thì $\overline{Ab} = 0$ (loại).

+ Nếu $c = 5$ thì $\overline{Ab} = 4$ nên $A = 0; b = 4$ (loại).

Vậy số cần tìm là 45.

Bài 6: Số nhà của hai bạn An và Bình đều là số tự nhiên có bốn chữ số dạng $\overline{a53b}$ và chia hết cho cả 5 và 9. Tìm số nhà của hai bạn biết số nhà của bạn An lớn hơn số nhà của bạn Bình.

Trích đề HSG huyện Chí Linh năm 2021 – 2022

Lời giải

Vì $\overline{a53b}$ chia hết cho 5 nên b bằng 0 hoặc 5

+ Với $b = 0$, do số $\overline{a53b} : 9$ nên $a + 5 + 3 + b = a + 5 + 3 + 0$ chia hết cho 9

Suy ra $a = 1$

+ Với $b = 5$, do số $\overline{a53b} : 9$ nên $a + 5 + 3 + b = a + 5 + 3 + 5$ chia hết cho 9

Suy ra $a = 5$

Vậy số nhà bạn An là 5535, số nhà bạn Bình là 1530

Bài 9: Tìm một số tự nhiên có 6 chữ số tận cùng là chữ số 4. Biết rằng khi chuyển chữ số 4 đó lên đầu còn các chữ số khác giữ nguyên thì ta được số mới gấp 4 lần số cũ

Trích đề HSG Trường THCS Trần Phú năm 2018-2019

Lời giải

Gọi số cần tìm là $\overline{abcde4}$, ta có: $\overline{abcde4}.4 = \overline{4abcde}$

Đặt $\overline{abcde} = x$ suy ra $\overline{abcde4} = \overline{x4}$

Ta có:

$$\overline{x4}.4 = 400000 + x$$

$$(10x + 4).4 = 400000 + x$$

$$40x + 16 = 400000 + x$$

$$39x = 399984$$

$$x = 10256$$

Vậy số cần tìm là 10256.

Bài 10: Tìm tất cả các số tự nhiên n , biết rằng $n + S(n) = 2014$, trong đó $S(n)$ là tổng các chữ số của n

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019

Lời giải

Nếu n là số có ít hơn 4 chữ số thì $n \leq 999$ và $S(n) \leq 27$

Suy ra $n + S(n) \leq 999 + 27 = 1026 < 2014$ (ktm)

Mặt khác $n \leq n + S(n) = 2014$ nên n là số có ít hơn 5 chữ số. Vậy n là số có 4 chữ số, suy ra $S(n) \leq 9.4 = 36$. Do vậy $n \geq 2014 - 36 = 1978$

Vì $1978 \leq n \leq 2014$ suy ra $n = \overline{19ab}$ hoặc $n = \overline{20cd}$

Suy ra chữ số tận cùng bằng 3

Vậy số 57^{2011} có chữ số tận cùng là 3.

b) Tìm chữ số tận cùng của số 93^{1999}

Xét 3^{1999} ; ta có: $3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3^3 = 81^{499} \cdot 27 = \overline{\dots 1} \cdot 27 = \overline{\dots 7}$

Suy ra chữ số tận cùng bằng 7

Vậy số 3^{1999} có chữ số tận cùng là 7.

Dạng 4: Tính tổng các chữ số của dãy.

Bài 1: Tính giá trị biểu thức: $C = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \dots + 1225$

Trích đề HSG huyện Liên trường năm 2021-2022

Lời giải

$$\begin{aligned} C &= 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \dots + 1225 \\ &= \frac{1.2}{2} + \frac{2.3}{2} + \frac{3.4}{2} + \frac{4.5}{2} + \frac{5.6}{2} + \dots + \frac{49.50}{2} = \frac{1}{2}(1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 49.50) \end{aligned}$$

Đặt $F = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 49.50$ suy ra $3F = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + \dots + 49.50.3$

$$\begin{aligned} 3F &= 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + 49.50.(51-48) \\ &= 1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + \dots + 49.50.51 - 48.49.50 \\ &= 49.50.51 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } F = \frac{49.50.51}{3} = 41650. \quad \text{Vậy } C = \frac{1}{2} \cdot 41650 = 20825$$

II. Phép đếm

Dạng 1: Tìm số phần tử của tập hợp

Bài 1: Tập hợp $A = \{1; 5; 9; 13; \dots; 2017\}$ có bao nhiêu phần tử

- A. 504 B. 505 C. 2016 D. 2017

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 2: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị

- A. 90 B. 110 C. 45 D. 55

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 3: Tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} / x:12; x:21; x:28, 167 < x < 300\}$ có bao nhiêu phần tử.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 4: Số 2016 có bao nhiêu ước?

- A. 8 B. 10 C. 18 D. 36

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 5: Tập hợp M có 255 tập hợp con khác rỗng. Hỏi M có bao nhiêu phần tử?

A. 10

B. 7

C. 8

D. 9

*Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022***Bài 6:** Gọi M là tập hợp các số tự nhiên lẻ có 3 chữ số. Tập hợp M có bao nhiêu phần tử?*Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 - 2022***Lời giải**

Các số tự nhiên lẻ có 3 chữ số là: 101; 103; 105; ...; 999

Số phần tử của tập hợp M là: $(999 - 101) : 2 + 1 = 450$ (phần tử)**Bài 7:** Các số tự nhiên từ 10 đến 1000 có bao nhiêu số chia hết cho 3.*Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 - 2022***Lời giải**

Các số tự nhiên từ 10 đến 1000 chia hết cho 3 là: 12; 15; 18; ...; 999

Số các số tự nhiên từ 10 đến 1000 chia hết cho 3 là: $(999 - 12) : 3 + 1 = 330$ (số)**Bài 1:** Số $(\overline{9x})^8$ với $x \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}$ viết trong hệ thập phân có bao nhiêu chữ số ?*Trích đề HSG huyện Tam Dương năm 2016 -2017***Lời giải**Ta có: $(\overline{9x})^8 < 100^8 = 10^{16}$ (1)Ta cần chứng minh : $90^8 > 10^{15} \Rightarrow 9^8 > 10^7$ (2)Thật vậy, ta có: $9^8 = 81^4 > 80^4 = 10^4 \cdot 8^4 = 10^4 \cdot 16^3 > 10^4 \cdot 10^3 = 10^7$ Từ (1) và (2) suy ra : $10^{15} < (\overline{9x})^8 < 10^{16}$ với mọi $x \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}$ nên số $(\overline{9x})^8$ viết trong hệ thập phân có 16 chữ số.**Bài 1:** Tìm số phần tử của tập hợp sau: $A = \{3; 6; 9; 12; \dots; 2022\}$.*Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022***Lời giải**Số phần tử của tập hợp A là: $\frac{2022 - 3}{3} + 1 = 674$ (phần tử).**Bài 2:** Tìm số phần tử của tập hợp sau: $A = \{3; 6; 9; 12; \dots; 2022\}$ *Trích đề HSG huyện Chí Linh năm 2021-2022***Lời giải**Tìm số phần tử của tập hợp sau: $A = \{3; 6; 9; 12; \dots; 2022\}$ Số phần tử của tập hợp A là $\frac{2022 - 3}{3} + 1 = 674$ **Bài 3:** Số phần tử của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} / -6 \leq x < 6 \text{ và } x:3\}$ là:*Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022***Lời giải**

$A = \{-6; -3; 0; 3\}$. Vậy tập hợp A có 4 phần tử

Dạng 2: Tìm số các số theo điều kiện cho trước, số phần tử của tập hợp

Bài 1: Cho ba chữ số a, b, c với $0 < a < b < c$.

a) Viết tập hợp A các chữ số có ba chữ số, mỗi số gồm cả ba chữ số trên.

b) Biết rằng tổng hai chữ số nhỏ nhất trong tập hợp A bằng 499. Tìm tổng các chữ số $a+b+c$.

Trích đề HSG huyện Ngọc Lặc 2018-2019

Lời giải

a) Tập hợp $A = \{\overline{abc}; \overline{acb}; \overline{bac}; \overline{bca}; \overline{cab}; \overline{cba}\}$

b) Hai số lớn nhất trong tập A là $\overline{cab}, \overline{cba}$. Ta có: $\overline{abc} + \overline{acb} = 499$

Suy ra $200a + 11b + 11c = 499 (*)$

Nếu $a \geq 3$ thì vế trái của (*) lớn hơn 499, vô lý, do đó $a \in \{1; 2\}$

Với $a=1$ nên $c+b=499:11$ không là số tự nhiên

Với $a=2$ nên $c+b=99:11=9$.

Vậy $a+b+c=11$.

Bài 1: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị.

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Lời giải

Nếu chữ số hàng chục là 9 thì có 9 cách chọn chữ số hàng đơn vị thỏa mãn đầu bài. Theo quy tắc nhân có $1.9=9$ số.

Nếu chữ số hàng chục là 8 thì có 8 cách chọn chữ số hàng đơn vị thỏa mãn đầu bài. Theo quy tắc nhân có $1.8=8$ số.

Nếu chữ số hàng chục là 7 thì có 7 cách chọn chữ số hàng đơn vị thỏa mãn đầu bài. Theo quy tắc nhân có $1.7=7$ số.

.....
Nếu chữ số hàng chục là 1 thì có 1 cách chọn chữ số hàng đơn vị thỏa mãn đầu bài (là 0). Theo quy tắc nhân có $1.1=1$ số.

Vậy số các số tự nhiên có hai chữ số mà các chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là:

$$1+2+3+ \dots +7+8+9=45.$$

Bài 2: Có 9 miếng bánh chưng cần ráng vàng cả hai mặt. Thời gian ráng mỗi mặt cần 3 phút. Nếu dùng một chiếc chảo mỗi lần chỉ ráng được nhiều nhất 6 miếng thì cần thời gian ít nhất là bao lâu để ráng xong 9 miếng bánh chưng đó

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Lời giải

Thời gian cần ít nhất là bao lâu để ráng xong 9 miếng bánh chưng đó là: $3.2+3.2=12$ (phút)

Bài 1: Cho A là tập hợp các số tự nhiên chẵn không vượt quá 100. Tổng tất cả các phần tử của A là:

- A. 2450. B. 2500. C. 2550. D. Kết quả khác.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2022 - 2023

Lời giải

Đáp án: C. 2550.

B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

(copy đề bài ở các dạng trên để làm phiếu phô tô cho HS)

I. Cấu tạo số tự nhiên

Dạng 1: Phân tích cấu tạo số

Bài 1: Tích của hai số là 6210. Nếu giảm một thừa số đi 7 đơn vị thì tích mới là 5265. Tìm các thừa số của tích.

Trích đề HSG huyện Ứng Hòa năm 2022 - 2023

Bài 2: Viết thêm chữ số y vào bên phải của một số có 5 chữ số thì được số lớn gấp 3 lần số có được do viết thêm chữ số y vào bên trái số đó. Tìm chữ số y và số có 5 chữ số đó.

Trích đề HSG huyện Đoan Hùng năm 2018 - 2019

Bài 3: Tìm một số có 3 chữ số, biết rằng khi viết thêm chữ số 5 vào bên phải số đó thì nó tăng thêm 1112 đơn vị.

Trích đề HSG Trường THCS Quảng Tiến năm 2019 -2020

Bài 4: Tổng của hai số tự nhiên là 109. Nếu thêm chữ số 1 vào bên phải số bé rồi cộng với số lớn ta được tổng mới là 335. Số lớn là:

A. 43

B. 54

C. 60

D. 84

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 -2019

Bài 1: Tích của hai số là 6210. Nếu giảm một thừa số đi 7 đơn vị thì tích mới là 5265. Tìm các thừa số của tích.

Trích đề HSG huyện Ứng Hòa năm 2022 – 2023

Bài 1: Tìm ba số nguyên dương biết rằng tổng của ba số ấy bằng nửa tích của chúng

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2018-2019

Bài 1: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị.

A. 30.

B. 40.

C. 45.

D. 55.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Bài 3: Tổng của hai số tự nhiên là 102. Nếu thêm chữ số 0 vào bên phải số bé rồi cộng với số lớn ta được tổng mới là 417. Khi đó số lớn là:

A. 43.

B. 54.

C. 60.

D. 67.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Bài 3: Số nhà của hai bạn An và Bình đều là số tự nhiên có bốn chữ số dạng $\overline{a53b}$ và chia hết cho cả 5 và 9. Tìm số nhà của hai bạn biết số nhà của bạn An lớn hơn số nhà của bạn Bình.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Bài 4: Tích của hai số là 6210. Nếu giảm một thừa số đi 7 đơn vị thì tích mới là 5265. Tìm các thừa số của tích.

Trích đề HSG huyện Ứng Hòa năm 2022 - 2023

Bài 5: Tìm tất cả các số tự nhiên khác 0, sao cho khi viết thêm chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị thì số đó được gấp lên 9 lần.

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

Bài 6: Số nhà của hai bạn An và Bình đều là số tự nhiên có bốn chữ số dạng $\overline{a53b}$ và chia hết cho cả 5 và 9. Tìm số nhà của hai bạn biết số nhà của bạn An lớn hơn số nhà của bạn Bình.

Trích đề HSG huyện Chí Linh năm 2021 - 2022

Bài 9: Tìm một số tự nhiên có 6 chữ số tận cùng là chữ số 4. Biết rằng khi chuyển chữ số 4 đó lên đầu còn các chữ số khác giữ nguyên thì ta được số mới gấp 4 lần số cũ

Trích đề HSG Trường THCS Trần Phú năm 2018-2019

Bài 10: Tìm tất cả các số tự nhiên n , biết rằng $n + S(n) = 2014$, trong đó $S(n)$ là tổng các chữ số của n

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019

Dạng 2: Tìm số chữ số của dãy số tự nhiên

Bài 1: Cho $A = 1 - 5 + 9 - 13 + 17 - 21 + \dots$. Biết $A = 2013$. Hỏi A có bao nhiêu số hạng? Giá trị của số hạng cuối cùng?

Trích đề HSG huyện Quế Sơn năm 2018-2019

Bài 1: Bạn Tâm đánh số trang của một cuốn vở có 110 trang bằng cách viết dãy số tự nhiên: 1, 2, 3, ..., 110. Bạn Tâm phải viết bao nhiêu chữ số

Trích đề HSG Cấp trường năm 2018-2019

Dạng 3: Tìm chữ số thứ n trong dãy

Bài 1: Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a) 57^{2011}

b) 93^{1999} .

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2010 -2011

Dạng 4: Tính tổng các chữ số của dãy.

Bài 1: Tính giá trị biểu thức: $C = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \dots + 1225$

Trích đề HSG huyện Liên trường năm 2021-2022

II. Phép đếm

Dạng 1: Tìm số phần tử của tập hợp

Bài 1: Tập hợp $A = \{1; 5; 9; 13; \dots; 2017\}$ có bao nhiêu phần tử

A. 504

B. 505

C. 2016

D. 2017

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 2: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị

A. 90

B.110

C. 45

D. 55

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 3: Tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} / x:12; x:21; x:28, 167 < x < 300\}$ có bao nhiêu phần tử.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 4: Số 2016 có bao nhiêu ước?

A. 8

B. 10

C. 18

D.36

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 5: Tập hợp M có 255 tập hợp con khác rỗng. Hỏi M có bao nhiêu phần tử?

A. 10

B. 7

C. 8

D.9

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 6: Gọi M là tập hợp các số tự nhiên lẻ có 3 chữ số. Tập hợp M có bao nhiêu phần tử?

Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 - 2022

Bài 7: Các số tự nhiên từ 10 đến 1000 có bao nhiêu số chia hết cho 3.

Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 – 2022

Bài 1: Số $(\overline{9x})^8$ với $x \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}$ viết trong hệ thập phân có bao nhiêu chữ số ?

Trích đề HSG huyện Tam Dương năm 2016 -2017

Bài 1: Tìm số phần tử của tập hợp sau: $A = \{3; 6; 9; 12; \dots; 2022\}$.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 – 2022

Bài 2: Tìm số phần tử của tập hợp sau: $A = \{3; 6; 9; 12; \dots; 2022\}$

Trích đề HSG huyện Chí linh năm 2021-2022

Bài 3: Số phần tử của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} / -6 \leq x < 6 \text{ và } x:3\}$ là:

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022

Dạng 2: Tìm số các số theo điều kiện cho trước, số phần tử của tập hợp

Bài 1: Cho ba chữ số a, b, c với $0 < a < b < c$.

a) Viết tập hợp A các chữ số có ba chữ số, mỗi số gồm cả ba chữ số trên.

b) Biết rằng tổng hai chữ số nhỏ nhất trong tập hợp A bằng 499. Tìm tổng các chữ số $a+b+c$.

Trích đề HSG huyện Ngọc Lặc 2018-2019

Dạng 2: Tìm số các số theo điều kiện cho trước, số phần tử của tập hợp

Bài 1: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị.

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 2: Có 9 miếng bánh chưng cần ráng vàng cả hai mặt. Thời gian ráng mỗi mặt cần 3 phút. Nếu dùng một chiếc chảo mỗi lần chỉ ráng được nhiều nhất 6 miếng thì cần thời gian ít nhất là bao lâu để ráng xong 9 miếng bánh chưng đó

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019



Bài 1: Cho A là tập hợp các số tự nhiên chẵn không vượt quá 100. Tổng tất cả các phần tử của A là:
A. 2450. B. 2500. C. 2550. D. Kết quả khác.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2022 - 2023



C. SỬU TÀM CÁC BÀI TRONG CÁC ĐỀ CỦA NHỮNG NĂM TRƯỚC ĐÓ

(Phần này lấy các câu từ những năm trước, trước năm 2020-2021, tối thiểu 10 bài)

Bài 1: Tìm một số có bốn chữ số, trong đó chữ số đầu tiên là chữ số 7. Biết rằng nếu chuyển chữ số 7 đó về cuối thì được một số mới kém số ban đầu là 1413 đơn vị.

Trích đề HSG huyện Hiệp Hòa, năm 2019- 2020

Lời giải

Gọi số cần tìm có dạng là $\overline{7abc}$ ($0 < a \leq 9, 0 \leq b, c \leq 9$)

Số mới là: $\overline{abc7}$

Bằng việc phân tích cấu tạo số ta có thể giải bài toán theo cách phân tích cấu tạo số theo \overline{abc} ta được $\overline{abc} = 620$. Vậy số cần tìm là 7620.

Bài 2: Tìm một số tự nhiên có bốn chữ số, sao cho khi nhân số đó với 8 ta được số mới gồm các chữ số của số ấy nhưng viết theo thứ tự ngược lại.

Trích đề HSG huyện Hiệp Hòa, năm 2020- 2021

Lời giải

Gọi số cần tìm có dạng là \overline{abcd} ($0 < a, d \leq 9, 0 \leq b, c \leq 9$)

Số mới là: \overline{dcba}

Bằng việc phân tích cấu tạo số ta có thể giải bài toán

Bài 3: Khi viết số 2^{100} dưới dạng một số tự nhiên thì số đó có bao nhiêu chữ số?

Trích đề HSG huyện Tam Dương, năm 2011- 2012

Lời giải

$$2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} > 1000^{10} = 10^{30}$$

$$2^{100} = 2^{31} \cdot 2^6 \cdot 2^{63} = 2^{31} \cdot 64 \cdot 512^7 < 2^{31} \cdot 125 \cdot 625^7$$

$$2^{100} = 2^{31} \cdot 5^3 \cdot (5^4)^7 = 2^{31} \cdot 5^{31} = 10^{31}$$

$$\Rightarrow 10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$$

Vậy khi viết số 2^{100} dưới dạng một số tự nhiên thì số đó có 31 chữ số

Bài 4: Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5?

Trích đề HSG huyện Xuân trường, năm 2015- 2016

Lời giải

Số lớn nhất có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5 là 9975

Số nhỏ nhất có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5 là 1005

Ta có dãy số: 1005 ; 1035; 1065;; 9975

Khoảng cách của dãy là 30

=> Số số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5 là:

$$(9975 - 1005) : 30 + 1 = 300 \text{ số}$$

Bài 5: Cho số $M = 1978(1979^9 + 1979^8 + \dots + 1979^2 + 1980) + 1$

Hãy rút gọn M và tìm chữ số hàng đơn vị của M

Trích đề HSG huyện Giao Thủy, năm 2015- 2016

Lời giải

$$M = 1978(1979^9 + 1979^8 + \dots + 1979^2 + 1980) + 1$$

$$M = (1979 - 1)(1979^9 + 1979^8 + \dots + 1979^2 + 1979 + 1) + 1$$

$$M = 1979^{10} + 1979^9 + \dots + 1979^2 + 1979 - (1979^9 + 1979^8 + \dots + 1979^2 + 1979 + 1) + 1$$

$$M = 1979^{10}$$

có chữ số tận cùng là 9 có chữ số tận cùng là 9 nếu số mũ lẻ, có chữ số tận cùng là 1 nếu số mũ chẵn nên M có chữ số tận cùng là 1

Bài 6: Tìm chữ số a biết rằng $\overline{20a20a20a}$ chia hết cho 7

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } n = \overline{20a20a20a} &= \overline{20a20a} \cdot 1000 + \overline{20a} = (\overline{20a} \cdot 1000 + \overline{20a}) \cdot 1000 + \overline{20a} \\ &= 1001 \cdot \overline{20a} \cdot 1000 + \overline{20a} \end{aligned}$$

Theo đề bài n chia hết cho 7 mà 1001 chia hết cho 7 nên $\overline{20a}$ chia hết cho 7.

Ta có: $\overline{20a} = 196 + (4 + a)$ chia hết cho 7 nên $4 + a$ chia hết cho 7.

Vậy $n = 3$.

Bài 7: Để đánh số trang của một cuốn sách, người ta viết dãy số tự nhiên bắt đầu từ 1 và phải dùng tất cả 1998 chữ số.

Hỏi cuốn sách có bao nhiêu trang?

Lời giải

Ta có: Từ trang 1 đến trang 9 phải dùng 9 chữ số (viết tất chữ số).

Từ trang 10 đến trang 99 phải dùng $(99 - 10) + 1 = 90$ số có 2 chữ số nên từ trang 10 đến trang 99 phải dùng 180 chữ số.

Vì còn các trang gồm các số có 3 chữ số.

=> Còn lại: $1998 - (180 + 9) = 1809$ chữ số là đánh dấu các trang có 3 chữ số.

=> Có: $1809 : 3 = 603$ số có 3 chữ số.

=> Cuốn sách đó có: $603 + 99 = 702$ (vì trang 1 → 99 có 99 trang).

Cuốn sách có 702 trang.

Bài 8: Tìm số có hai chữ số, biết rằng số đó cộng với tổng các chữ số của nó bằng 84.

Gọi số cần tìm là \overline{ab} (a, b là các chữ số, $a \neq 0$)

Theo bài ra ta có: $\overline{ab} + a + b = 84$

$$10a + b + a + b = 84$$

$$11a + 2b = 84 (*)$$

$$\Rightarrow 11a : 2 \Rightarrow a : 2$$

Lại có: $11a < 84 \Rightarrow a < 8$

$$11a \geq 84 - 2.9 = 66 \Rightarrow a \geq 6$$

Nhận thấy: $a : 2; 6 \leq a < 8 \Rightarrow a = 6$

Thay $a = 6$ vào (*) ta được:

$$11.6 + 2.b = 84$$

$$66 + 2.b = 84 \Rightarrow 2.b = 18 \Rightarrow b = 9(TM)$$

Vậy số phải tìm là 69.

Bài 9: Cho A là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số chia hết cho 5.

- Hỏi A có bao nhiêu phần tử?
- Tính tổng các phần tử của tập hợp A.

Lời giải

a) Tập hợp $A = \{100; 105; 110; \dots; 990; 995\}$

Số phần tử của tập hợp A là $(995 - 100) : 5 + 1 = 895 : 5 + 1 = 179 + 1 = 180$

b) Tổng các phần tử của tập hợp A là: $(995 + 100).180 : 2 = 98550$

Bài 10: Trong các số tự nhiên từ 1 từ đến 1000, có bao nhiêu số:

- Chia hết cho ít nhất một trong các số 2; 3; 5?
- Không chia hết cho tất cả các số tự nhiên từ 2 đến 5?

Lời giải

a) Chia hết cho ít nhất một trong các số 2; 3; 5

Gọi A, B, C, D, E, G, H là tập hợp các số từ 1 đến 1000 mà theo thứ tự chia hết cho 2, chia hết cho 3, chia hết cho 5, chia hết cho 2 và 3, chia hết cho 2 và 5, chia hết cho 3 và 5, chia hết cho cả 3 số, số phần tử của các tập hợp đó theo thứ tự bằng $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7$.

Ta có:

$$s_1 = 1000:2 = 500$$

$$s_2 = [1000:3] = 333$$

$$s_3 = 1000:5 = 200$$

$$s_4 = [1000:6] = 166$$

$$s_5 = 1000:10 = 100$$

$$s_6 = [1000:15] = 66$$

$$s_7 = [1000:30] = 33$$

Các số phải tìm gồm: $s_1 + s_2 + s_3 - s_4 - s_5 - s_6 + s_7 = 734$ số.

b) Không chia hết cho tất cả các số tự nhiên từ 2 đến 5 ?

Còn lại $1000 - 734 = 266$ số.

Bài 11: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, biết rằng nếu xoá chữ số hàng nghìn thì số ấy giảm 9 lần.

Lời giải

Gọi số cần tìm là \overline{abcd} ($a, b, c, d \in \mathbb{N}; a \neq 0; a, b, c, d < 10$)

Xoá chữ số hàng trăm ta có số \overline{bcd}

Ta có: $\overline{abcd} = 9\overline{bcd} \Rightarrow 1000a + \overline{bcd} = 9\overline{bcd} \Rightarrow 8\overline{bcd} = 1000a \Rightarrow \overline{bcd} = 1000a : 8 = 125a$

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
\overline{bcd}	125	250	375	500	625	750	875	1000 (loại)	1125 (loại)

Vậy số cần tìm là 1125; 2250; 3375; 4500; 5625; 6750; 7875.

Bài 12: Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số \overline{abcd} , trong đó $b - a = 1$; $d - c = 1$?

Lời giải

Chữ số a ($0 \leq a \leq 9, a \neq 0$) có 8 cách chọn (1, 2, ..., 8).

Chữ số b ($0 \leq b \leq 9$) có 1 cách chọn ($b = a + 1$).

Chữ số c ($0 \leq c \leq 9$) có 9 cách chọn (0, 1, 2, ..., 8).

Chữ số d ($0 \leq d \leq 9$) có 1 cách chọn ($d = c + 1$).

Tất cả có: $8.1.9.1 = 72$ (số).

Bài 13: Có bao nhiêu số chẵn có ba chữ số, các chữ số khác nhau?

Lời giải:

Các số phải đếm có dạng \overline{abc} ($0 \leq a, b, c \leq 9, a \neq 0$).

Nếu $c = 0$ thì a có 9 cách chọn (từ 1 đến 9), b có 8 cách chọn (từ 1 đến 9, khác a).

Nếu $c = 2, 4, 6, 8$ thì a có 8 cách chọn (từ 1 đến 9, khác c), b có 8 cách chọn (từ 0 đến 9, khác a và c).

Vậy có: $9.8 + 8.8.4 = 328$ (số).

Bài 14: Trong các số tự nhiên có ba chữ số, có bao nhiêu số:

a) Chứa đúng một chữ số 4?

b) Chứa đúng hai chữ số 4?

c) Chia hết cho 5, có chứa chữ số 5?

d) Chia hết cho 3, không chứa chữ số 3?

Lời giải

a) Chứa đúng một chữ số 4?

Các số phải đếm có 3 dạng:

- Dạng $\overline{4bc}$ ($0 \leq c, b \leq 9, c \neq 4, b \neq 4$) có $9.9 = 81$ (số).

- Dạng $\overline{a4c}$ ($0 \leq a, c \leq 9, a \neq 4, c \neq 4, a \neq 0$) có $8.9 = 72$ (số).

- Dạng $\overline{ab4}$ ($0 \leq a, b \leq 9, a \neq 4, b \neq 4, a \neq 0$) có $8.9 = 72$ (số).

Tất cả có: $81 + 72 + 72 = 225$ (số).

b) Chứa đúng hai chữ số 4?

Các số phải đếm gồm 3 dạng:

- Dạng $\overline{44c}$ ($0 \leq c \leq 9, c \neq 4$) có 9 (số).

- Dạng $\overline{a44}$ ($0 \leq a \leq 9, a \neq 4, a \neq 0$) có 8 (số).

- Dạng $\overline{4b4}$ ($0 \leq b \leq 9, b \neq 4$) có 9 (số).

Tất cả có: $9 + 8 + 9 = 26$ (số).

c) Chia hết cho 5, có chứa chữ số 5?

Số có ba chữ số, chia hết cho 5 gồm 180 số, trong đó số không chứa chữ số 5 có dạng \overline{abc} ($0 \leq a, b, c \leq 9, a \neq 5, b \neq 5, c \neq 5, a \neq 0$), a có 8 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 1 cách chọn (là 0) gồm $8.9 = 72$ (số).

Vậy có $180 - 72 = 108$ (số) phải đếm.

d) Chia hết cho 3, không chứa chữ số 3?

Số phải tìm có dạng \overline{abc} ($0 \leq a, b, c \leq 9, a \neq 3, b \neq 3, c \neq 3, a \neq 0$), a có 8 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 3 cách chọn (nếu $a + b = 3k$ thì $c = 0; 6; 9$, nếu $a + b = 3k + 1$ thì $c = 2; 5; 8$, nếu $a + b = 3k + 2$ thì $c = 1; 4; 7$) có $8.9.3 = 216$ (số).

Bài 15: Bạn Tâm đánh số trang của một cuốn vở có 110 trang bằng cách viết dãy số tự nhiên $1, 2, 3, \dots, 110$. Bạn Tâm phải viết tất cả bao nhiêu chữ số?

Lời giải:

Ta có: Từ trang 1 đến trang 9 có 9 trang, phải dùng 9 chữ số.

Từ trang 10 đến trang 99 có $(99 - 10) + 1 = 90$ (trang), phải dùng 180 (chữ số).

Từ trang 100 đến trang 110 có $(110 - 100) + 1 = 11$ (trang), phải dùng $11.3 = 33$ (chữ số).

Vậy bạn Tâm phải viết tất cả: $9 + 180 + 33 = 222$ (chữ số).

Bài 16: Cho ba chữ số a, b, c đôi một khác nhau và khác 0. Tổng của tất cả các số có hai chữ số được lập từ ba chữ số a, b, c bằng 627. Tính tổng $a + b + c$.

Lời giải:

Ta có các số có hai chữ số được lập thành từ ba chữ số a, b, c là:

$$\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ba} + \overline{bc} + \overline{cb} + \overline{ca} + \overline{aa} + \overline{bb} + \overline{cc}$$

$$\text{Theo đầu bài ta có: } \overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ba} + \overline{bc} + \overline{cb} + \overline{ca} + \overline{aa} + \overline{bb} + \overline{cc} = 627 \Leftrightarrow 33(a + b + c) = 627$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = 19$$

Vậy $a + b + c = 19$.

Bài 17: Tìm một số tự nhiên có hai chữ số biết rằng khi viết thêm số 12 vào bên trái số đó ta được số mới lớn gấp 26 lần số phải tìm.

Lời giải:

Gọi số cần tìm là: \overline{ab} ($a \neq 0; a, b < 10; a, b \in \mathbb{N}$)

Viết thêm số 12 vào bên trái số đó ta được: $\overline{12ab}$

$$\text{Theo bài ra ta có: } \overline{12ab} = \overline{ab}.26$$

$$1200 + \overline{ab} = \overline{ab}.26$$

$$\overline{ab}.26 - \overline{ab} = 1200$$

$$\overline{ab}.(26 - 1) = 1200$$

$$\overline{ab}.25 = 1200$$

$$\overline{ab} = 48$$

Thử lại ta thấy $1248 : 48 = 26$.

Vậy số tự nhiên cần tìm là 1248.

Bài 18: Cho số có hai chữ số. Nếu lấy số đó chia cho hiệu của chữ số hàng chục và hàng đơn vị của nó thì được thương là 18 và dư 4. Tìm số đã cho.

Lời giải

Gọi số phải tìm là: \overline{ab} ($a \neq 0; a, b \in \mathbb{N}; a, b < 10$)

Theo bài ra ta có: $\overline{ab} = (a - b).18 + 4$

$$10a + b = 18a - 18b + 4$$

$$19b = 8a + 4$$

Vì $8a + 4$ là số chẵn, suy ra b chẵn. Vậy $b \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$

Với $b = 0 \Rightarrow 8a + 4 = 0$ (vô lý)

Tương tự với các trường hợp b còn lại : ta có $b = 4; a = 9$ thỏa mãn bài toán

Vậy số cần tìm là 94.

Bài 19: Tìm một số tự nhiên có ba chữ số biết rằng khi viết thêm chữ số 2 vào bên phải số đó thì nó tăng thêm 4106 đơn vị.

Lời giải

Gọi số cần tìm là \overline{abc} ($a, b, c \in \mathbb{N}; a \neq 0; a, b, c < 10$)

Viết thêm chữ số 2 vào bên phải số đó, ta được: $\overline{abc2}$

Theo đề bài ta có: $\overline{abc2} = \overline{abc} + 4106$

$$\overline{abc}.10 + 2 = \overline{abc} + 4106 \text{ (phân tích } \overline{abc2} \text{ theo cấu tạo số)}$$

Ta có: $\overline{abc}.10 - \overline{abc} = 4106 - 2$

$$\overline{abc}.(10 - 1) = 4106$$

$$9\overline{abc} = 4104 \Leftrightarrow \overline{abc} = 456$$

Thử lại: $4562 - 456 = 4106$ (đúng)

Vậy số tự nhiên cần tìm là 456.

Bài 20: Tìm số tự nhiên có ba chữ số \overline{abc} biết $\overline{abc} = (a + b + c)^3$.

Trích đề HSG huyện năm 2021 - 2022

Lời giải

Tìm số tự nhiên có 3 chữ số \overline{abc} biết $\overline{abc} = (a + b + c)^3$

Vì \overline{abc} là số tự nhiên có 3 chữ số nên a, b, c là chữ số, $a \neq 0$

$$\overline{abc} = (a+b+c)^3$$

$$100a+10b+c = (a+b+c)^3$$

$$a+99a+b+9b+c = (a+b+c)^3$$

$$(a+b+c)+9(11a+b) = (a+b+c)^3 \quad (1)$$

Đặt $a+b+c = m \quad (m \in \mathbb{N}^*)$

Khi đó (1) trở thành $m+9(11a+b) = m^3$

$$9(11a+b) = m^3 - m$$

$$9(11a+b) = m(m-1)(m+1)$$

$$m(m-1)(m+1):9$$

Ta có $100 \leq \overline{abc} < 1000 \Rightarrow 4^3 < m^3 < 10^3$

Do đó $4 < m < 10 \quad (1)$

Lập luận suy ra bài toán có 3 trường hợp

+) TH1: Khi $m-1$ chia hết cho 9

Mà $4 < m < 10 \Rightarrow 3 < m-1 < 9$

Do đó không tìm được $m-1$ chia hết cho 9 suy ra không tìm được m

+) TH2: Khi m chia hết cho 9

Do $4 < m < 10$ mà $m:9 \Rightarrow m=9 \quad (1)$

Với $m=9$ ta có $m^3 = 9^3 = 729 \Rightarrow \overline{abc} = 729 \Rightarrow a=7, b=2, c=9$

$$\Rightarrow a+b+c = 7+2+9 = 18 \Rightarrow m=18 \text{ do đó mâu thuẫn với } (1)$$

Suy ra không tìm được m

+) TH3: $m+1$ chia hết cho 9

Do $4 < m < 10 \Rightarrow 5 < m+1 < 11$ mà $\Rightarrow m+1:9 \Rightarrow m=8$

Với $m=8 \Rightarrow m^3 = 8^3 = 512 = \overline{abc} = 512 \Rightarrow a=5, b=1, c=2 \Rightarrow a+b+c = 5+1+2 = 8 \Rightarrow m=8$ thoả mãn (2)

Xác định số $\overline{abc} = 512$

Vậy $\overline{abc} = 512$

Bài 21: Cho tập hợp $S = \{1; 4; 7; 10; 13; 16; \dots\}$. Hỏi số 2023 có là phần tử của S hay không?

Lời giải

Tập hợp S gồm các số tự nhiên chia 3 dư 1
 Ta có: 2003 chia 3 dư 1
 Vậy 2003 là phần tử của S .

Bài 1: Tính giá trị của các biểu thức sau

$$C = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots + 2018 - 2019 - 2020.$$

$$D = 1.2 + 3.4 + 4.5 + \dots + 98.99 + 99.100.$$

Trích đề HSG huyện Quảng Xương năm 2011 -2012

Lời giải

$$C = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots + 2018 - 2019 - 2020$$

$$C = 1 + (2 - 3) + (-4 + 5) + (6 - 7) + (-8 + 9) + \dots + (2018 - 2019) - 2020$$

$$C = 1 + (2 - 3) + (-4 + 5) + (6 - 7) + (-8 + 9) + \dots + (2018 - 2019) - 2020$$

$$C = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \dots + (-1) - 2020.$$

$$C = -2020.$$

$$D = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + 98.99 + 99.100$$

$$3D = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + 4.5.3 + \dots + 98.99.3 + 99.100.3$$

$$3D = 1.2.(3-0) + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + 4.5.(6-3) + \dots + 98.99.(100-97) + 99.100.(101-98)$$

$$3D = 1.2.3 - 0 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + \dots + 98.99.100 - 97.98.99 + 99.100.101 - 98.99.100$$

$$3D = 98.99.100$$

$$D = \frac{98.99.100}{3}.$$

$$D = 326700.$$

Bài 2: Thực hiện phép tính.

$$A = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \dots + 2023 - 2024.$$

Trích đề HSG huyện Thanh Hà năm 2012 -2013

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \dots + 2023 - 2024$$

$$A = (-1) + (-1) + (-1) + \dots + (-1)$$

$$A = -1012.$$

Bài 3: Thực hiện phép tính.

$$\text{Tính tổng } A = 1.100 + 2.99 + 3.98 + \dots + 99.2 + 100.1.$$

Lời giải

Ta biến đổi các số từ 99 đến 1 thành hiệu của 100 với các số từ 1 đến 99

$$\begin{aligned}
 A &= 1.100 + 2.(100-1) + 3(100-2) + \dots + 99.(100-98) + 100.(100-99) \\
 &= 1.100 + 2.100 - 2.1 + 3.100 - 3.2 + \dots + 99.100 - 98.99 + 100.100 - 99.100 \\
 &= 100.(1+2+3+\dots+99+100) - (1.2 + 2.3 + \dots + 98.99 + 99.100) \\
 &= (100.5050) - (99.100.101) : 3 \\
 &= 50.100.101 - 100.101.33. \\
 &= 100.101(50-33) \\
 &= 10100.17 \\
 &= 171700.
 \end{aligned}$$

Bài 3: Tính tổng: $S = 7 + 9 + 11 + \dots + 97 + 99$.

a) Tính tổng S trên .

b) Tìm số hạng thứ 33 của tổng trên .

Lời giải

a) S có số số hạng được tính bằng cách: $(99 - 7) : 2 + 1 = 47$

Tổng S có giá trị là : $S = (99 + 7) . 47 : 2 = 2491$

b) Xét tổng $S = 7 + 9 + 11 + \dots + 97 + 99$

Áp dụng công thức tìm số hạng trong một dãy số

$Số\ cuối = (số\ số\ hạng - 1) . khoảng\ cách + số\ đầu$

($số\ cuối$ là số hạng cần tìm trong tổng các dãy số tự nhiên cách đều)

Số hạng thứ 33 của tổng trên là : $(33 - 1) . 2 + 7 = 71$.

Bài 4: Tính tổng : $B = 1 + 5 + 9 + \dots + 2005 + 2009$.

Lời giải

Số số hạng của B là : $(2009 - 1) : 4 + 1 = 503$

Tổng $B = (2009 + 1) . 503 : 2 = 505515$.

Bài 5: Tính giá trị của A biết:

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2014.$$

Lời giải

Dãy số A có số số hạng là: $(2014 - 1) : 1 + 1 = 2014$ (số hạng)

Giá trị của A là: $(2014 + 1) . 2014 : 2 = 2029105$.

Bài 6: Cho dãy số: 2; 4; 6 ; 8 ; 10; 12; Tìm số hạng thứ 2014 của dãy số trên ?

Lời giải

Số hạng thứ 2014 của dãy số trên là: $(2014 - 1) . 2 + 2 = 4028$.

Bài 7: Tính tổng 50 số lẻ liên tiếp biết số lẻ lớn nhất trong dãy đó là 2013?

Lời giải

Số hạng bé nhất trong dãy số đó là: $2013 - (50 - 1) \cdot 2 = 1915$.

Tổng của 50 số lẻ cần tìm là: $(2013 + 1915) \cdot 50 : 2 = 98200$.

Bài 8: Một dãy phố có 15 nhà. Số nhà của 15 nhà đó được đánh là các số lẻ liên tiếp, biết tổng của 15 số nhà của dãy phố đó bằng 915. Hãy cho biết số nhà đầu tiên của dãy phố đó là số nào?

Lời giải

Hiệu giữa số nhà cuối và số nhà đầu là: $(15 - 1) \cdot 2 = 28$.

Tổng của số nhà cuối và số nhà đầu là: $915 : 2 = 457,5$.

Số nhà đầu tiên trong dãy phố đó là: $(457,5 - 28) : 2 = 214,75$.

Bài 9: Bạn Lâm đánh số trang một cuốn sách dày 284 trang bằng dãy số chẵn 2; 4; 6; 8;

Lời giải

Chữ số 300 của dãy số trên là chữ số nào?

Viết dãy số chẵn từ 2 đến 98 phải dùng: $4 + 90 = 94$ (chữ số), còn lại $300 - 94 = 206$ (chữ số) để viết các số chẵn có ba chữ số kể từ 100.

Ta thấy: $206 : 3 = 68$ dư 2. Số chẵn thứ 68 kể từ 100 là: $100 + (68 - 1) \cdot 2 = 234$.

Hai chữ số tiếp theo là 2 và 3 thuộc số 236.

Vậy chữ số thứ 300 của dãy là chữ số 3 thuộc số 236.

Bài 10: Người ta viết liền nhau dãy các số tự nhiên 12345....Hỏi chữ số chỉ đơn vị của số:

- 53 đứng ở hàng thứ mấy?
- 328 đứng ở hàng thứ mấy?
- 1587 đứng ở hàng thứ mấy?

Lời giải

a) Từ số 1 đến số 53 (kể cả 53). Có: $9 + (53 - 10 + 1) \cdot 2 = 97$ chữ số. Vậy 3 ở hàng thứ 97.

b) Vậy 8 ở hàng thứ 876.

c) Vậy 7 ở hàng thứ 5241.

Bài 1: Tìm số có hai chữ số, biết rằng số mới viết theo thứ tự ngược lại nhân với số phải tìm được 3154, số nhỏ trong hai số đó thì lớn hơn tổng các chữ số của nó là 27.

Lời giải

Gọi số phải tìm là \overline{ab} ($a \neq 0; a, b \leq 9; a, b \in N$) \Rightarrow số sau là \overline{ba} , giả sử $\overline{ab} > \overline{ba}$ ta có:

$$\overline{ba} - (b + a) = 27$$

$$10b + a - b = 27$$

$$b = 3$$

$$\text{Mà } \overline{a33a} = 3154$$

Suy ra $\overline{3a}$ có tận cùng là 8, suy ra $a = 8$

Thử lại: $83.38 = 3154$ và $38 - (3 + 8) = 27$ (chọn)

Vậy số cần tìm là 38 và 83.

Bài 2: Một số có 3 chữ số, tận cùng bằng chữ số 7. Nếu chuyển chữ số 7 đó lên đầu thì ta được một số mới mà khi chia cho số cũ thì được thương là 2 dư 21. Tìm số đó.

Lời giải

Gọi $\overline{ab7}$ số tự nhiên có chữ số 7 là hàng đơn vị.

$\overline{7ab}$ số tự nhiên có chữ số 7 là số hàng trăm.

Theo đề bài ta có: $\overline{7ab} : \overline{ab7} = 2$ dư 21

Hay: $\overline{7ab} = 2.\overline{ab7} + 21$

Ta có: $\overline{ab} = 10a + b; \overline{abc} = 100a + 10b + c$

$$700 + \overline{ab} = 2(10\overline{ab} + 7) + 21$$

$$700 + \overline{ab} = 20\overline{ab} + 14 + 21$$

$$700 - 14 - 21 = 20\overline{ab} - \overline{ab}$$

$$665 = 19\overline{ab}$$

$$\overline{ab} = 35.$$

Vậy số tự nhiên có ba chữ số đó là: 357.

Bài 3: Tìm số tự nhiên có 4 chữ số, chữ số hàng đơn vị là 1, nếu chuyển chữ số hàng đơn vị lên đầu thì ta được số mới nhỏ hơn số đã cho 2889 đơn vị. Tìm số ban đầu.

Lời giải

Gọi số cần tìm là $\overline{abc1}$ ($0 \leq a, b, c \leq 9; a \neq 0$)

Theo bài ra ta có: $\overline{abc1} = \overline{1abc} + 2889$

$$10.\overline{abc} + 1 = 1000 + \overline{abc} + 2889$$

$$9.\overline{abc} = 3889$$

$$\overline{abc} = 432$$

Vậy số cần tìm là 4321.

Bài 4: Cho số có 4 chữ số, có chữ số hàng đơn vị là 8. Nếu chuyển chữ số hàng đơn vị lên đầu thì sẽ được số mới lớn hơn số đã cho 4059 đơn vị. Tìm số đã cho.

Lời giải

Gọi số cần tìm là $\overline{abc8}$ ($0 \leq a, b, c \leq 9; a \neq 0$)

Theo bài ra ta có: $\overline{8abc} = \overline{abc8} + 4059$

$$8000 + \overline{abc} = 10.\overline{abc} + 8 + 4059$$

$$9.\overline{abc} = 3933$$

$$\overline{abc} = 437$$

Vậy số cần tìm là 4378.

Bài 5: Tìm số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 5 và 27, biết rằng hai số giữa của nó là 97.

Lời giải

Gọi số cần tìm là $\overline{a97b}$ với $a, b \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}, a \neq 0$.

Vì $\overline{a97b} : 5$ nên $\begin{cases} b = 0 \\ b = 5 \end{cases}$

TH1: Với $b = 0$ ta có $\overline{a970} : 27$ hay $a + 9 + 7 + 0 = a + 16 : 9$ nên $a = 2$ (thỏa mãn).

TH2: Với $b=5$ ta có $\overline{a970}:27$ hay $a+9+7+5=a+21:9$ nên $a=6$ (loại).

Bài 6: Tìm số có ba chữ số biết số đó chia cho 11 được thương bằng tổng các chữ số của số đó.

Lời giải

Gọi số cần tìm là: \overline{abc} , ($a, b, c \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}$, $a \neq 0$).

$$\overline{abc} = 11(a+b+c)$$

$$100a+10b+c=11a+11b+11c$$

$$89a=b+10c$$

$$89a=\overline{cb}$$

Vì \overline{cb} là số có hai chữ số nên $0 < a < 2$ suy ra $a=1$.

Khi đó $89=\overline{cb}$ suy ra $\overline{bc}=98$ do đó $\overline{abc}=198$.

Bài 7: Tìm số tự nhiên có ba chữ số \overline{abc} , thỏa mãn $\overline{abc}=(a+b+c)^3$

Lời giải

Điều kiện: $0 < a \leq 9; 0 \leq b, c \leq 9; a, b, c \in \mathbb{N}$

Nhận thấy: $100 \leq \overline{abc} \leq 999$

$$100 \leq (a+b+c)^3 \leq 999$$

$$5^3 \leq (a+b+c)^3 \leq 9^3$$

$$5 \leq a+b+c \leq 9$$

$$(a+b+c) \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

Nếu $a+b+c=5$ thì $(a+b+c)^3=125$. Thử lại $(1+2+5)^3=512$ (không thỏa mãn).

Nếu $a+b+c=6$ thì $(a+b+c)^3=216$. Thử lại $(2+1+6)^3=729$ (không thỏa mãn).

Nếu $a+b+c=7$ thì $(a+b+c)^3=343$. Thử lại $(3+4+3)^3=1000$ (không thỏa mãn).

Nếu $a+b+c=8$ thì $(a+b+c)^3=512$. Thử lại $(5+1+2)^3=512$ (thỏa mãn).

Nếu $a+b+c=9$ thì $(a+b+c)^3=729$. Thử lại $(7+2+9)^3=5832$ (không thỏa mãn).

Vậy số tự nhiên cần tìm là 512.

Bài 8: Hiệu của hai số là 4. Nếu tăng một số gấp ba lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng 60. Tìm hai số đó.

Lời giải

Gọi hai số đó là a, b ($a > b; a, b \in \mathbb{N}$)

Theo bài ra ta có: $a-b=4$ hay $b=a-4$ (1)

Nếu tăng một số gấp ba lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng 60 thì $3a-b=60$ (2)

Thay (1) vào (2) ta có $3a-(a-4)=60$

$$3a-a+4=60$$

$$2a=56$$

$$a=28$$

$$\text{Suy ra } b=24$$

Vậy số cần tìm là 24;28.

Bài 9: Tính tổng sau: $S=1^2+2^2+3^2+\dots+50^2$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 49.50 + 50.51 \\ &= 1(1+1) + 2(2+1) + 3(3+1) + \dots + 49(49+1) + 50(50+1) \\ &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2) + (1 + 2 + 3 + \dots + 50) \\ &= P + (1 + 2 + 3 + \dots + 50) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } P = S - (1 + 2 + 3 + \dots + 50)$$

$$\text{Lại có } S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 49.50 + 50.51 = \frac{50.51.52}{3} = 44200$$

$$(1 + 2 + 3 + \dots + 50) = \frac{(50+1).50}{2} = 1275$$

$$\text{Vậy } P = 44200 - 1275 = 42925.$$

Bài 10: Tính tổng $S = 1.4 + 4.7 + 7.10 + \dots + 2017.2020$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} 9S &= 1.4.9 + 4.7.9 + 7.10.9 + \dots + 2017.2020.9 \\ &= 1.4.(7+2) + 4.7.(10-1) + 7.10.(13-4) + \dots + 2017.2020.(2023-2014) \\ &= 1.4.7 + 1.4.2 + 4.7.10 - 1.4.7 + 7.10.13 - 4.7.10 \dots + 2017.2020.2023 - 2014.2017.2020 \\ &= 8 + 2017.2020.2023 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } S = \frac{8 + 2017.2020.2023}{9} = 915821092$$

$$\text{Vậy } S = 915821092.$$

Bài 11: Tìm tất cả các số tự nhiên có 3 chữ số \overline{abc} sao cho $\overline{abc} = n^2 - 1$ và $\overline{cba} = (n-2)^2$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = n^2 - 1 \quad (1)$$

$$\overline{cba} = 100c + 10b + a = n^2 - 4n + 4 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } 99(a-c) = 4n-5 \text{ nên } 44n-5 \vdots 99$$

$$\text{Mặt khác: } 100.(n^2 - 1) = 999$$

$$\text{suy ra } 4n-5 = 99 \text{ nên } n = 26.$$

$$\text{Vậy } \overline{abc} = 675.$$

Bài 12: Tìm a, b, c biết: $\overline{2009abc} \vdots 315$

Lời giải

$$315 = 5.7.9. \text{ Mà } (5; 7; 9) = 1 \Rightarrow \overline{2009abc} \vdots \text{BCNN}(5; 7; 9)$$

$$\overline{2009abc} = 2009000 + \overline{abc} = 315.6377 + 245 + \overline{abc}$$

$$\Rightarrow (245 + \overline{abc}) \vdots 315$$

$$\Rightarrow 315 \in \{(245 + \overline{abc})\}$$

$$\text{Mà } 100 \leq \overline{abc} \leq 999$$

$$\Rightarrow 345 \leq 245 + \overline{abc} \leq 1244$$

$$\Rightarrow 245 + \overline{abc} \in \{630; 945\}$$

$$\Rightarrow \overline{abc} \in \{385; 700\}$$

Bài 13: Tìm số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 5 và 27, biết rằng hai số giữa của nó là 97.

Lời giải

Gọi số cần tìm là $\overline{a97b}$ với $a, b \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}, a \neq 0$.

$$\text{Vì } \overline{a97b} : 5 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 5 \end{cases}$$

TH1: Với $b = 0 \Rightarrow \overline{a970} : 27$

$$\Rightarrow a + 9 + 7 + 0 = a + 16 : 9$$

$$\Rightarrow a = 2 \text{ (thỏa mãn).}$$

TH2: Với $b = 5 \Rightarrow \overline{a975} : 27$

$$\Rightarrow a + 9 + 7 + 5 = a + 21 : 9$$

$$\Rightarrow a = 6 \text{ (loại).}$$

Bài 14: Tìm a, b biết: $\overline{5a6b2} : 3$ và $a - b = 4$.

Lời giải

$$\overline{5a6b2} : 3$$

$$\Rightarrow 5 + a + 6 + b + 2 = a + b + 13 : 3$$

$$\Rightarrow a + b + 1 : 3$$

Do $a, b \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}$

$$\Rightarrow a + b = 2, a + b = 5, a + b = 8, a + b = 11, a + b = 14, a + b = 17.$$

Kết hợp với $a - b = 4$.

Bài 15: Tìm a, b biết: $(\overline{14a3} + \overline{35b2}) : 9$ và $a - b = 3$.

Lời giải

$$\overline{14a3} + \overline{35b2} : 9$$

$$\Rightarrow 1 + 4 + a + 3 + 3 + 5 + b + 2 = a + b + 18 : 9$$

$$\Rightarrow a + b : 9$$

Do $a, b \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}$

$$\Rightarrow a + b = 0, a + b = 9, a + b = 18.$$

Kết hợp với $a - b = 3$.

Bài 16: Tìm 1 số có ba chữ số biết số đó chia cho 11 được thương bằng tổng các chữ số của số đó

Lời giải

Gọi số cần tìm là: \overline{abc} , ($a, b, c \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}, a \neq 0$).

$$\overline{abc} = 11(a + b + c)$$

$$\Rightarrow 100a + 10b + c = 11a + 11b + 11c$$

$$\Rightarrow 89a = b + 10c$$

$$\Rightarrow 89a = \overline{cb}$$

Vì \overline{cb} là số có hai chữ số nên $0 < a < 2 \Rightarrow a = 1$.

Khi đó $89 = \overline{cb}$

$$\Rightarrow \overline{bc} = 98$$

$$\Rightarrow \overline{abc} = 198.$$

Bài 17: Cho tổng $S = 1 + 4 + 7 + \dots + 199$

- a) Tìm số hạng thứ 50 của tổng
b) Tính S .

Lời giải

Cho tổng $S = 1 + 4 + 7 + \dots + 199$

a) Số hạng thứ 50 của tổng là:

$$1 + (50 - 1) \cdot 3 = 148$$

b) Số số hạng của tổng là:

$$(199 - 1) : 3 + 1 = 67 \text{ (số hạng)}$$

$$S = 1 + 4 + 7 + \dots + 199 = (199 + 1) \cdot 67 : 2 = 6700$$

Bài 18: Cho tổng $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 101$

- a) Tìm số hạng thứ 25 của tổng
b) Tính S .

Lời giải

Cho tổng $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 101$

a) Số hạng thứ 25 của tổng là:

$$1 + (25 - 1) \cdot 2 = 49$$

b) Số số hạng của tổng là:

$$(101 - 1) : 2 + 1 = 51 \text{ (số hạng)}$$

$$S = 1 + 3 + 5 + \dots + 101 = (101 + 1) \cdot 51 : 2 = 2601$$

Bài 19: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số? Tính tổng của chúng.

Lời giải

Các số tự nhiên có hai chữ số là 10; 11; 12; ...; 99

Số các số này là: $99 - 10 + 1 = 90$ (số)

Ta có: $A = 10 + 11 + 12 + \dots + 99$ (1)

$$A = 99 + 98 + \dots + 11 + 10$$
 (2)

Cộng (1) với (2) và áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng ta được:

$$A + A = (10 + 99) + (11 + 98) + \dots + (98 + 11) + (99 + 10) = 109 + 109 + \dots + 109 + 109$$

$$\text{Nên } 2A = 109 \cdot 90 \Rightarrow A = 109 \cdot 90 : 2 = 45 \cdot 109 = 4905$$

Bài 20: Tính tổng của dãy số:

- a) $A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$
b) $B = 6 + 7 + 8 + \dots + 245$

Lời giải

a) $A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$

Số số hạng của tổng là: $(100 - 1) : 1 + 1 = 100$ (số hạng)

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 = (100 + 1) \cdot 100 : 2 = 5050$$

b) $B = 6 + 7 + 8 + \dots + 245$

Số số hạng của tổng là: $(245 - 6) : 1 + 1 = 240$ (số hạng)

$$B = 6 + 7 + 8 + \dots + 245 = (245 + 6) \cdot 240 : 2 = 30120$$

Bài 21: Cho bốn chữ số 0; 3; 8; 9.

- a) Tìm số lớn nhất, số nhỏ nhất có 4 chữ số khác nhau được viết từ 4 chữ số đã cho.

b) Tìm số lẻ lớn nhất, số chẵn nhỏ nhất có 4 chữ số khác nhau được viết từ 4 chữ số đã cho.

Lời giải:

a) Số lớn nhất có 4 chữ số khác nhau được viết từ 4 chữ số đã cho phải có chữ số hàng nghìn là chữ số lớn nhất. Vậy chữ số hàng nghìn phải tìm là 9.

Chữ số hàng trăm phải là chữ số lớn nhất trong 3 chữ số còn lại. Vậy chữ số hàng trăm phải tìm là 8.

Chữ số hàng chục là chữ số lớn nhất trong 2 chữ số còn lại. Vậy chữ số hàng chục là 3.

Vậy số cần tìm là 9830.

Tương tự số nhỏ nhất có bốn chữ số khác nhau từ 4 chữ số trên là 3089.

b) Tương tự số lẻ lớn nhất thỏa mãn điều kiện đầu bài là 9803.

Số chẵn nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện đầu bài là 3098.

Bài 22: Tìm số tự nhiên có ba chữ số \overline{abc} , thỏa mãn $\overline{abc} = (a+b+c)^3$

Lời giải:

Điều kiện: $0 < a \leq 9; 0 \leq b, c \leq 9; a, b, c \in \mathbb{N}$

Nhận thấy: $100 \leq \overline{abc} \leq 999 \Rightarrow 100 \leq (a+b+c)^3 \leq 999 \Leftrightarrow 5^3 \leq (a+b+c)^3 \leq 9^3$

$\Leftrightarrow 5 \leq a+b+c \leq 9 \Rightarrow (a+b+c) \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$

Nếu $a+b+c=5$ thì $(a+b+c)^3 = 125$. Thử lại $(1+2+5)^3 = 512$ (không thỏa mãn)

Nếu $a+b+c=6$ thì $(a+b+c)^3 = 216$. Thử lại $(2+1+6)^3 = 729$ (không thỏa mãn)

Nếu $a+b+c=7$ thì $(a+b+c)^3 = 343$. Thử lại $(3+4+3)^3 = 1000$ (không thỏa mãn)

Nếu $a+b+c=8$ thì $(a+b+c)^3 = 512$. Thử lại $(5+1+2)^3 = 512$ (thỏa mãn)

Nếu $a+b+c=9$ thì $(a+b+c)^3 = 729$. Thử lại $(7+2+9)^3 = 5832$ (không thỏa mãn)

Vậy số tự nhiên cần tìm là 512.

Bài 23: Tìm hai số, biết rằng tổng của chúng gấp 5 lần hiệu của chúng, tích của chúng gấp 24 lần hiệu của chúng.

Phân tích: Bài toán có thể giải bằng “số phần” bằng cách biểu thị hiệu là 1 phần thì tổng là 5 phần và tích là 24 phần. Từ đó tính được số lớn ứng với bao nhiêu phần, số bé ứng với bao nhiêu phần.

Lời giải

Theo đầu bài. Nếu biểu thị hiệu là 1 phần thì tổng là 5 phần và tích là 24 phần.

Số lớn là: $(5+1) : 2 = 3$ (phần).

Số bé là: $5 - 3 = 2$ (phần)

Vậy tích sẽ bằng 12 lần số bé.

Ta có: Tích = Số lớn \times Số bé

$$\text{Tích} = 12 \times \text{Số bé}$$

Số lớn là 12.

Số bé là: $12 : 3 \cdot 2 = 8$

Vậy hai số tự nhiên cần tìm là 12; 8.

Bài 24: Tìm thương của một phép chia, biết rằng nếu thêm 15 vào số bị chia và thêm 5 vào số chia thì thương và số dư không đổi.

Phân tích: Thực hiện biểu diễn số bị chia theo số chia, số thương và số dư, từ đó thiết lập được hai đẳng thức liên quan giữa số thương, số chia, và số dư. Cuối cùng tìm được thương.

Lời giải

Gọi số bị chia, số chia, thương và số dư lần lượt là a, b, c, d ($a, b, c, d \in \mathbb{N}, b \neq 0; d < b$). Ta có:

$$a : b = c \text{ (dư } d) \Rightarrow a = c.b + d$$

$$\text{Theo đề ta có: } (a+15) : (b+5) = c \text{ (dư } d) \Rightarrow a+15 = c.(b+5) + d$$

$$\text{Hay } a+15 = c.b + c.5 + d$$

$$\text{Mà } a = c.b + d \text{ nên } a+15 = c.b + c.5 + d = c.b + d + 15 = c.b + c.5 + d$$

$$\text{Suy ra } 15 = c.5. \text{ Vậy } c = 3.$$

Bài 25: Hiệu của hai số là 4. Nếu tăng một số gấp ba lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng 60. Tìm hai số đó.

Lời giải

Gọi 2 số đó là $a, b (a > b; a, b \in \mathbb{N})$

$$\text{Theo bài ra ta có: } a - b = 4 \Rightarrow b = a - 4 \quad (1)$$

$$\text{Nếu tăng một số gấp ba lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng } 60 \Rightarrow 3a - b = 60 \quad (2)$$

$$\text{Thay (1) vào (2) ta có } 3a - (a - 4) = 60 \Rightarrow 3a - a + 4 = 60 \Rightarrow 2a = 56 \Rightarrow a = 28 \Rightarrow b = 24$$

Vậy số cần tìm là 24; 28.

Bài 26: Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 4 gồm bốn chữ số, chữ số tận cùng bằng 2?

Phân tích: Đây là bài toán đếm số tự nhiên có liên quan tới dấu hiệu chia hết cho 4. Trước hết ta cần viết số tự nhiên cần tìm dưới dạng $\overline{abc2}$, sau đó đếm số cách chọn mỗi chữ số tập hợp $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Việc thực hiện số cách chọn các chữ số a, b, c có sự ràng buộc lẫn nhau. Do đó nếu chữ số a có m cách chọn, chữ số b có n cách chọn, chữ số c có k cách chọn thì ta sẽ có $m.n.k$ số có bốn chữ số thỏa mãn bài toán. Việc chọn chữ số c phải thỏa mãn điều kiện chi chia hết cho 4 là $\overline{c2} : 4$.

Lời giải:

Các số phải đếm có dạng: $\overline{abc2} (a \neq 0, 0 \leq a, b, c \leq 9)$.

Chữ số a có 9 cách chọn.

Với mỗi cách chọn a , chữ số b có 10 cách chọn.

Với mỗi cách chọn a, b chữ số c có 5 cách chọn (1, 3, 5, 7, 9) để tạo với chữ số 2 tận cùng làm thành số chia hết cho 4.

$$\text{Tất cả có: } 9.10.5 = 450 \text{ (số).}$$

Bài 27: Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 5?

Phân tích: Số tự nhiên có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 5, ta cần hiểu chữ số 5 có thể là chữ số hàng đơn vị, chữ số hàng chục, chữ số hàng trăm nên ta cần chia ra ba loại số có 3 chữ số thỏa mãn là: $\overline{5ab}; \overline{a5b}; \overline{ab5}$. Ở mỗi loại số ta thực hiện đếm số cách chọn mỗi chữ số từ tập hợp $\{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ giống như bài 2.

Lời giải:

Ta chia ra 3 loại số:

Số đếm có dạng $\overline{5ab} (0 \leq a, b \leq 9, a \neq 5, b \neq 5)$: chữ số a có 9 cách chọn, chữ số b có 9 cách chọn các số thuộc loại này có: $9.9 = 81$ (số).

Số đếm có dạng $\overline{a5b} (0 \leq a, b \leq 9, a \neq 5, b \neq 5, a \neq 0)$: chữ số a có 8 cách chọn, chữ số b có 9 cách chọn, các số thuộc loại này có: $8.9 = 72$ (số).

Số đếm có dạng $\overline{ab5} (0 \leq a, b \leq 9, a \neq 5, b \neq 5, a \neq 0)$: các số thuộc loại này có: $8.9 = 72$ (số).

Vậy số tự nhiên có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 5 là $81 + 72 + 72 = 225$ (số).

Bài 28: Trong các số tự nhiên có ba chữ số, có bao nhiêu số:

a) Chứa đúng một chữ số 4?

b) Chứa đúng hai chữ số 4?

- c) Chia hết cho 5, có chứa chữ số 5?
 d) Chia hết cho 3, không chứa chữ số 3?

Lời giải:

- a) Chứa đúng một chữ số 4?

Các số phải đếm có 3 dạng:

- Dạng $\overline{4bc}$ ($0 \leq c, b \leq 9, c \neq 4, b \neq 4$) có $9 \cdot 9 = 81$ (số).
- Dạng $\overline{a4c}$ ($0 \leq a, c \leq 9, a \neq 4, c \neq 4, a \neq 0$) có $8 \cdot 9 = 72$ (số).
- Dạng $\overline{ab4}$ ($0 \leq a, b \leq 9, a \neq 4, b \neq 4, a \neq 0$) có $8 \cdot 9 = 72$ (số).

Tất cả có: $81 + 72 + 72 = 225$ (số).

- b) Chứa đúng hai chữ số 4?

Các số phải đếm gồm 3 dạng:

- Dạng $\overline{44c}$ ($0 \leq c \leq 9, c \neq 4$) có 9 (số).
- Dạng $\overline{a44}$ ($0 \leq a \leq 9, a \neq 4, a \neq 0$) có 8 (số).
- Dạng $\overline{4b4}$ ($0 \leq b \leq 9, b \neq 4$) có 9 (số).

Tất cả có: $9 + 8 + 9 = 26$ (số).

- c) Chia hết cho 5, có chứa chữ số 5?

Số có ba chữ số, chia hết cho 5 gồm 180 số, trong đó số không chứa chữ số 5 có dạng \overline{abc} ($0 \leq a, b, c \leq 9, a \neq 5, b \neq 5, c \neq 5, a \neq 0$), a có 8 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 1 cách chọn (là 0) gồm $8 \cdot 9 = 72$ (số).

Vậy có $180 - 72 = 108$ (số) phải đếm.

- d) Chia hết cho 3, không chứa chữ số 3?

Số phải tìm có dạng \overline{abc} ($0 \leq a, b, c \leq 9, a \neq 3, b \neq 3, c \neq 3, a \neq 0$), a có 8 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 3 cách chọn (nếu $a + b = 3k$ thì $c = 0; 6; 9$, nếu $a + b = 3k + 1$ thì $c = 2; 5; 8$, nếu $a + b = 3k + 2$ thì $c = 1; 4; 7$) có $8 \cdot 9 \cdot 3 = 216$ (số).

Bài 29: Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5?

Phân tích: Những số có tận cùng bằng 5 luôn cách nhau 10 đơn vị, tuy nhiên bài toán đòi hỏi số tự nhiên có 4 chữ số và chia hết cho 3. Do đó ta cần xác định: Số nhỏ nhất có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5. Khoảng cách trong dãy này sẽ là 30. Từ đó vận dụng công thức “Số số hạng = (số cuối – số đầu): Khoảng cách + 1”.

Lời giải:

Số lớn nhất có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5 là 9975

Số nhỏ nhất có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5 là 1005

Ta có dãy số: 1005; 1035; 1065;.....; 9975

Khoảng cách của dãy là 30

⇒ Số số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5 là: $(9975 - 1005) : 30 + 1 = 300$

Vậy có 300 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 30: Trong các số tự nhiên từ 1 đến 100, có bao nhiêu số:

- a) Chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3?
 b) Chia hết cho ít nhất một trong hai số 2 và 3?
 c) Không chia hết cho 2 và không chia hết cho 3?

Lời giải:

- a) Chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3?

Các số chia hết cho 2 là: 2; 4; 6;.....; 100

Số các số chia hết cho 2 là:

$$\frac{(100-2)}{2} + 1 = 50 \text{ (số)}$$

Các số chia hết cho 2 và 3: 6;12;18;24;...;96

Số các số chia hết cho cả 2 và 3 là:

$$\frac{(96-6)}{6} + 1 = 16 \text{ (số)}$$

Vậy từ 1 đến 100 có $50 - 16 = 34$ số chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3.

b) Chia hết cho ít nhất một trong hai số 2 và 3?

Các số chia hết cho 3 là: 3;6;9;12;15;...;99

Số các số chia hết cho 3 là:

$$\frac{(99-3)}{3} + 1 = 33 \text{ (số)}$$

Vậy các số chia cho ít nhất một trong hai số 2 và 3 là:

$$50 + 33 - 16 = 67 \text{ (số)}$$

c) Không chia hết cho 2 và không chia hết cho 3?

Số các số không chia hết cho 2 và cho 3 là:

$$100 - 67 = 33 \text{ (số)}$$

Bài 31: Cho bốn chữ số 0;3;8;9.

a) Tìm số lớn nhất, số nhỏ nhất có 4 chữ số khác nhau được viết từ 4 chữ số đã cho.

b) Tìm số lẻ lớn nhất, số chẵn nhỏ nhất có 4 chữ số khác nhau được viết từ 4 chữ số đã cho.

Lời giải:

a) Số lớn nhất có 4 chữ số khác nhau được viết từ 4 chữ số đã cho phải có chữ số hàng nghìn là chữ số lớn nhất. Vậy chữ số hàng nghìn phải tìm là 9.

Chữ số hàng trăm phải là chữ số lớn nhất trong 3 chữ số còn lại. Vậy chữ số hàng trăm phải tìm là 8.

Chữ số hàng chục là chữ số lớn nhất trong 2 chữ số còn lại. Vậy chữ số hàng chục là 3.

Vậy số cần tìm là 9830.

Tương tự số nhỏ nhất có bốn chữ số khác nhau từ 4 chữ số trên là .

b) Tương tự số lẻ lớn nhất thỏa mãn điều kiện đầu bài là 9803.

Số chẵn nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện đầu bài là 3098.

Bài 32: Tìm số tự nhiên có ba chữ số \overline{abc} , thỏa mãn $\overline{abc} = (a+b+c)^3$

Lời giải:

Điều kiện: $0 < a \leq 9; 0 \leq b, c \leq 9; a, b, c \in \mathbb{N}$

Nhận thấy: $100 \leq \overline{abc} \leq 999$ suy ra $100 \leq (a+b+c)^3 \leq 999$ suy ra $5^3 \leq (a+b+c)^3 \leq 9^3$

Suy ra $5 \leq a+b+c \leq 9$ suy ra $(a+b+c) \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$

Nếu $a+b+c=5$ thì $(a+b+c)^3 = 125$. Thử lại $(1+2+5)^3 = 512$ (không thỏa mãn)

Nếu $a+b+c=6$ thì $(a+b+c)^3 = 216$. Thử lại $(2+1+6)^3 = 729$ (không thỏa mãn)

Nếu $a+b+c=7$ thì $(a+b+c)^3 = 343$. Thử lại $(3+4+3)^3 = 1000$ (không thỏa mãn)

Nếu $a+b+c=8$ thì $(a+b+c)^3 = 512$. Thử lại $(5+1+2)^3 = 512$ (thỏa mãn)

Nếu $a+b+c=9$ thì $(a+b+c)^3 = 729$. Thử lại $(7+2+9)^3 = 5832$ (không thỏa mãn)

Vậy số tự nhiên cần tìm là 512.

Bài 33: Tìm hai số, biết rằng tổng của chúng gấp 5 lần hiệu của chúng, tích của chúng gấp 24 lần hiệu của chúng.

Phân tích: Bài toán có thể giải bằng “số phần” bằng cách biểu thị hiệu là 1 phần thì tổng là 5 phần và tích là 24 phần. Từ đó tính được số lớn ứng với bao nhiêu phần, số bé ứng với bao nhiêu phần.

Lời giải:

Theo đầu bài. Nếu biểu thị hiệu là 1 phần thì tổng là 5 phần và tích là 24 phần.

Số lớn là: $(5+1):2=3$ (phần).

Số bé là: $5-3=2$ (phần)

Vậy tích sẽ bằng 12 lần số bé.

Ta có: Tích = Số lớn \times Số bé

$$\text{Tích} = 12 \times \text{Số bé}$$

Số lớn là 12.

Số bé là: $12:3.2=8$

Vậy hai số tự nhiên cần tìm là 12;8.

Bài 34: Tìm thương của một phép chia, biết rằng nếu thêm 15 vào số bị chia và thêm 5 vào số chia thì thương và số dư không đổi.

Lời giải:

Gọi số bị chia, số chia, thương và số dư lần lượt là a, b, c, d ($a, b, c, d \in \mathbb{N}, b \neq 0; d < b$). Ta có:

$$a:b=c \text{ (dư } d) \text{ suy ra } a=cb+d$$

Theo đề ta có: $(a+15):(b+5)=c$ (dư d) suy ra $a+15=c.(b+5)+d$

$$\text{Hay } a+15=cb+c.5+d$$

$$\text{Mà } a=cb+d \text{ nên } a+15=cb+c.5+d=cb+d+15=cb+c.5+d$$

Suy ra $15=c.5$. Vậy $c=3$.

Bài 35: Hiệu của hai số là 4. Nếu tăng một số gấp ba lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng 60. Tìm hai số đó.

Lời giải:

Gọi 2 số đó là a, b ($a > b; a, b \in \mathbb{N}$)

Theo bài ra ta có: $a-b=4 \Rightarrow b=a-4$ (1)

Nếu tăng một số gấp ba lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng 60 suy ra $3a-b=60$ (2)

Thay (1) vào (2) ta có $3a-(a-4)=60$

suy ra

$$3a-a+4=60$$

$$2a=56$$

$$a=28$$

$$b=24$$

Vậy số cần tìm là 24;28.

Bài 36: Tìm hai số biết rằng tổng của chúng gấp 5 lần hiệu của chúng và tích của chúng gấp 4008 lần hiệu của chúng.

Lời giải:

Coi hiệu của hai số là 1 phần thì tổng của chúng là 5 phần.

Do đó số lớn là $(5+1):2=3$ (phần).

Số bé là: $5-3=2$ (phần).

Tích của hai số là: $2.3=6$ (phần)

Mà tích hai số là 4008 nên giá trị một phần là: $4008 : 6 = 668$.

Số bé là: $668.2 = 1336$

Số lớn là: $668.3 = 2004$.

Vậy hai số cần tìm là 2004 và 1336 .

Bài 37: Tìm hai số biết rằng tổng của chúng gấp 3 lần hiệu của chúng và tích của chúng gấp 124 lần hiệu của chúng.

Lời giải:

Coi hiệu của hai số là 1 phần thì tổng của chúng là 3 phần.

Do đó số lớn là $(3+1) : 2 = 2$ (phần).

Số bé là: $2-1=1$ (phần).

Tích của hai số là: $2.1=2$ (phần)

Mà tích hai số là 124 nên giá trị một phần là: $124 : 2 = 62$.

Số bé là: $62.1=62$

Số lớn là: $62.2=124$.

Vậy hai số cần tìm là 62 và 124.

Bài 38: Tổng của hai số tự nhiên gấp ba hiệu của chúng. Tìm thương của hai số tự nhiên ấy.

Lời giải:

Gọi hai số đó là a và b ($a, b \in \mathbb{N}$)

Ta có $(a+b) = 3(a-b)$ suy ra $a+b = 3a-3b$ suy ra $4b = 2a$

Suy ra $a = 2b$ do đó $a : b = 2$

Vậy thương hai số tự nhiên cần tìm là 2 .

Bài 39: Hiệu của hai số là 4 . Nếu tăng một số gấp ba lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng 60 . Tìm hai số đó.

Lời giải:

Gọi số bị trừ là a , số trừ là b ($a, b \in \mathbb{N}$)

Theo đề bài ta có : $a-b = 4$ (1)

Tăng số bị trừ lên 3 lần và giữ nguyên số chia vì hiệu của chúng bằng 60 nên : $3a-b = 60$ (2)

Từ (1) ta có $b = a-4$ thay vào (2) ta được : $2a = 56$ suy ra $a = 28$ suy ra $b = 24$.

Vậy hai số tự nhiên cần tìm là 24; 28.

Bài 40: Tìm hai số, biết rằng tổng của chúng gấp 7 lần hiệu của chúng, tích của chúng gấp 192 lần hiệu của chúng.

Lời giải:

Coi hiệu của hai số là 1 phần thì tổng của chúng là 7 phần.

Do đó số lớn là $(7+1) : 2 = 4$ (phần).

Số bé là: $7-4=3$ (phần).

Tích của hai số là: $3.4=12$ (phần)

Mà tích hai số là 192 nên giá trị một phần là: $192 : 12 = 16$.

Số bé là: $16.3=48$

Số lớn là: $16.4=64$.

Vậy hai số tự nhiên cần tìm là 64; 48.



Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
<https://www.vn teach.com>

CHỦ ĐỀ: TẬP HỢP SỐ TỰ NHIÊN
A. PHẦN NỘI DUNG

I. Cấu tạo số tự nhiên

Dạng 1: Phân tích cấu tạo số

Bài 1: Tích của hai số là 6210. Nếu giảm một thừa số đi 7 đơn vị thì tích mới là 5265. Tìm các thừa số của tích.

Trích đề HSG huyện Ứng Hòa năm 2022 - 2023

Lời giải

Gọi thừa số được giảm là a , thừa số còn lại là b , theo đề bài ta có:

$$a.b = 6210$$

$$(a - 7).b = 5265$$

$$a.b - 7.b = 5265$$

$$6210 - 7.b = 5265$$

$$7.b = 6210 - 5265$$

$$7.b = 945$$

$$b = 945 : 7 = 135$$

$$a = 6210 : 135 = 46.$$

Vậy hai thừa số cần tìm là 46;135.

Bài 2: Tìm các số tự nhiên có 3 chữ số chia hết cho 7 và tổng các chữ số của nó cũng chia hết cho 7.

Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021 -2022

Lời giải

Gọi số đó là \overline{abc} ($0 \leq b; c \leq 9; 0 < a \leq 9$)

Ta có: $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 98a + 7b + 2a + 3b + c = 7(14a + b) + (2a + 3b + c)$

Vì $\overline{abc} : 7$ nên $(2a + 3b + c) : 7$

Mà $(a + b + c) : 7$ suy ra $2(a + b + c) : 7$

$$2a + 3b + c = 2.(a + b + c) + (b - c) : 7 \text{ suy ra } (b - c) : 7$$

Mà $b; c$ là chữ số nên $b - c \in \{-7; 0; 7\}$

Nếu $b - c = 7$ thì $c = b + 7$ suy ra $a + b + c = (a + 2b + 7) : 7$ suy ra $(a + 2b) : 7$

Do đó: $\overline{abc} \in \{707; 518; 329\}$

Nếu $b - c = 0$ thì $b = c$ suy ra $a + b + c = (a + 2c) : 7$

Do đó: $\overline{abc} \in \{770; 581; 392\}$

Nếu $b - c = 0$ thì $b = c$ suy ra $a + b + c = (a + 2b) : 7$.

Suy ra: $\overline{abc} \in \{133; 322; 511; 700; 266; 455; 644; 833; 399; 588; 777; 966\}$.

Vậy các số cần tìm là:

$$\{707; 518; 329; 707; 581; 329; 133; 322; 511; 700; 266; 455; 644; 833; 399; 777; 966\}$$

Bài 3: Tìm 1 số tự nhiên có 2 chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 9 vào bên trái số đó ta được 1 số lớn gấp 13 lần số đã cho.

Trích đề HSG huyện Tiên Du năm 2021 -2022

Lời giải

Gọi số phải tìm là \overline{ab} . Với $a; b$ là các chữ số và $a \neq 0$.

Viết thêm chữ số 9 vào bên trái ta được số $\overline{9ab}$.

Theo bài ra ta có :

$$\overline{9ab} = \overline{13ab}$$

$$900 + ab = ab.13$$

$$900 = 13ab - ab$$

$$900 = 12ab$$

$$ab = 900 : 12$$

$$ab = 75.$$

Vậy số phải tìm là 75.

Bài 4: Tìm các chữ số a, b, c khác nhau sao cho $\overline{a, bc} : (a + b + c) = 0,25$.

Trích đề HSG đề xuất năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có $\overline{a, bc} : (a + b + c) = 0,25$ (a, b, c là các chữ số khác nhau)

$$\Rightarrow \overline{a, bc} = 0,25.(a + b + c)$$

$$\Rightarrow \overline{abc} = 25.(a + b + c) \quad (1)$$

Vì a, b, c là các chữ số khác nhau $\Rightarrow \overline{abc}; a + b + c \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Nên } \overline{abc} : 25 \Rightarrow \overline{bc} \in \{00; 25; 50; 75\}$$

$$\text{Mà } b, c \text{ là các chữ số khác nhau } \Rightarrow \overline{bc} \in \{25; 50; 75\}$$

- Với $\overline{bc} = 25 \Rightarrow b = 2; c = 5$.

$$\text{Thay } b = 2; c = 5 \text{ vào (1) ta được } \Rightarrow \overline{a25} = 25.(a + 2 + 5)$$

Tìm được $a = 2$ (loại vì a khác b)

- Với $\overline{bc} = 50 \Rightarrow b = 5; c = 0$

$$\text{Thay } b = 5; c = 0 \text{ vào (1) ta được } \Rightarrow \overline{a50} = 25.(a + 5 + 0)$$

Tìm được $a = 1$ (thỏa mãn)

- Với $\overline{bc} = 75 \Rightarrow b = 7; c = 5$

$$\text{Thay } b = 7; c = 5 \text{ vào (1) ta được } \Rightarrow \overline{a75} = 25.(a + 7 + 5)$$

Tìm được $a = 3$ (thỏa mãn)

$$\text{Vậy } (a = 3; b = 7; c = 5), (a = 1; b = 5; c = 0)$$

Bài 5: Tích của hai số là 6210. Nếu giảm một thừa số đi 7 đơn vị thì tích mới là 5265. Tìm các thừa số của tích.

Trích đề HSG huyện Ứng Hòa năm 2022 - 2023

Lời giải

Gọi thừa số được giảm là a , thừa số còn lại là b , theo đề bài ta có:

$$a.b = 6210$$

$$(a - 7).b = 5265$$

$$\Rightarrow ab - 7b = 5265$$

$$\Rightarrow 6210 - 7b = 5265$$

$$\Rightarrow 7b = 6210 - 5265$$

$$\Rightarrow 7b = 945$$

$$\Rightarrow b = 945 : 7 = 135$$

$$\Rightarrow a = 6210 : 135 = 46$$

Vậy hai thừa số cần tìm là 46;135.

Dạng 2: Tìm số chữ số của dãy số tự nhiên

Không có dạng này trong đề

Dạng 3: Tìm chữ số thứ n trong dãy

Không có dạng này trong đề

Dạng 4: Tính tổng các chữ số của dãy.

Không có dạng này trong đề

II. Phép đếm

Dạng 1: Tìm số phần tử của tập hợp

Không có dạng này trong đề

Dạng 2: Tìm số các số theo điều kiện cho trước, số phần tử của tập hợp

Bài 1: Tìm tập hợp các số nguyên x biết rằng:

$$4\frac{5}{9} : 2\frac{5}{18} - 7 < x < \left(3\frac{1}{5} : 3,2 + 4,5 \cdot 1\frac{31}{45}\right) : \left(-21\frac{1}{2}\right)$$

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021- 2022

Lời giải

Ta có: $4\frac{5}{9} : 2\frac{5}{18} - 7 = \frac{41}{9} \cdot \frac{18}{41} - 7 = 2 - 7 = -5.$

Lại có: $\left(3\frac{1}{5} : 3,2 + 4,5 \cdot 1\frac{31}{45}\right) : \left(-21\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{16}{5} \cdot \frac{5}{16} + \frac{9}{2} \cdot \frac{76}{45}\right) : \left(-\frac{43}{2}\right) = \left(1 + \frac{38}{5}\right) \cdot \frac{-2}{43} = \frac{43}{5} \cdot \frac{-2}{43} = \frac{-2}{5}$

Do đó: $-5 < x < \frac{-2}{5}$ mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-4; -3; -2; -1\}.$

Bài 2: Tìm các giá trị nguyên của x biết: $4\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{24} - \frac{7}{14}\right) \leq x \leq \frac{20}{30} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{6}{12} - \frac{3}{4}\right)$

Trích đề HSG huyện Lý Nhân Nam năm 2021 - 2022

Lời giải

$$4\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{24} - \frac{7}{14}\right) \leq x \leq \frac{20}{30} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{6}{12} - \frac{3}{4}\right)$$

$$\frac{13}{3} \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{6}\right) \leq x \leq \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{12} + \frac{6}{12} - \frac{9}{12}\right)$$

$$\frac{13}{3} \cdot \frac{-2}{6} \leq x \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{12}$$

$$\frac{-13}{9} \leq x \leq \frac{1}{18}$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ suy ra $x \in \{-1; 0\}.$

Vậy $x \in \{-1; 0\}.$

B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

I. Cấu tạo số tự nhiên

Dạng 1: Phân tích cấu tạo số

Bài 1: Tích của hai số là 6210. Nếu giảm một thừa số đi 7 đơn vị thì tích mới là 5265. Tìm các thừa số của tích.

Trích đề HSG huyện Ứng Hòa năm 2022 - 2023

Bài 2: Tìm các số tự nhiên có 3 chữ số chia hết cho 7 và tổng các chữ số của nó cũng chia hết cho 7.

Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021 - 2022

Bài 3: Tìm 1 số tự nhiên có 2 chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 9 vào bên trái số đó ta được 1 số lớn gấp 13 lần số đã cho.

Trích đề HSG huyện Tiên Du năm 2021 - 2022

Bài 3: Tìm các chữ số a, b, c khác nhau sao cho $\overline{abc} : (a + b + c) = 0,25$.

Trích đề HSG đề xuất năm 2021 - 2022

Bài 4: Tích của hai số là 6210. Nếu giảm một thừa số đi 7 đơn vị thì tích mới là 5265. Tìm các thừa số của tích.

Trích đề HSG huyện Ứng Hòa năm 2022 - 2023

Dạng 2: Tìm số chữ số của dãy số tự nhiên

Dạng 3: Tìm chữ số thứ n trong dãy

Dạng 4: Tính tổng các chữ số của dãy.

II. Phép đếm

Dạng 1: Tìm số phần tử của tập hợp

Không có dạng này trong đề

Dạng 2: Tìm số các số theo điều kiện cho trước, số phần tử của tập hợp

Bài 1: Tìm tập hợp các số nguyên x biết rằng:

$$4\frac{5}{9} : 2\frac{5}{18} - 7 < x < \left(3\frac{1}{5} : 3,2 + 4,5 \cdot 1\frac{31}{45}\right) : \left(-21\frac{1}{2}\right)$$

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021 - 2022

Bài 2: Tìm các giá trị nguyên của x biết: $4\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{24} - \frac{7}{14}\right) \leq x \leq \frac{20}{30} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{6}{12} - \frac{3}{4}\right)$

Trích đề HSG huyện Lý Nhân Nam năm 2021 - 2022

C. SỬU TÀM CÁC BÀI TRONG CÁC ĐỀ CỦA NHỮNG NĂM TRƯỚC ĐÓ

I. Cấu tạo số tự nhiên

Dạng 1: Phân tích cấu tạo số

Bài 1: Tìm một số tự nhiên có hai chữ số biết rằng khi viết thêm số 12 vào bên trái số đó ta được số mới lớn gấp 26 lần số phải tìm.

Lời giải

Gọi số cần tìm là: \overline{ab} ($a \neq 0; a, b < 10; a, b \in \mathbb{N}$)

Viết thêm số 12 vào bên trái số đó ta được: $\overline{12ab}$

Theo bài ra ta có: $\overline{12ab} = \overline{ab} \cdot 26$

Suy ra $1200 + \overline{ab} = \overline{ab} \cdot 26$

Suy ra $\overline{ab} \cdot 26 - \overline{ab} = 1200$

Suy ra $\overline{ab} \cdot (26 - 1) = 1200$

Suy ra $\overline{ab} \cdot 25 = 1200$

Suy ra $\overline{ab} = 48$.

Thử lại ta thấy $1248 : 48 = 26$.

Vậy: Số tự nhiên cần tìm là 1248.

Bài 2: Cho số có hai chữ số. Nếu lấy số đó chia cho hiệu của chữ số hàng chục và hàng đơn vị của nó thì được thương là 18 và dư 4. Tìm số đã cho.

Lời giải

Gọi số phải tìm là: \overline{ab} ($a \neq 0; a, b \in \mathbb{N}; a, b < 10$)

Theo bài ra ta có:

$$\overline{ab} = (a - b) \cdot 18 + 4$$

Suy ra $10a + b = 18a - 18b + 4$

Suy ra $19b = 8a + 4$

Vì $8a + 4$ là số chẵn suy ra b chẵn suy ra $b \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$.

Với $b = 0$ suy ra $8a + 4 = 0$ (vô lý)

Tương tự với các trường hợp b còn lại : ta có $b = 4; a = 9$ thỏa mãn bài toán.

Vậy số cần tìm là 94.

Bài 3: Tìm một số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng số đó gấp 5 lần tích các chữ số của nó.

Lời giải

Gọi số phải tìm là: \overline{abc} ($0 < a \leq 9; 0 \leq b; c \leq 9; a, b, c \in \mathbb{N}$)

$$\overline{abc} = 5 \cdot a \cdot b \cdot c \text{ suy ra } a, b, c \neq 0$$

Nếu $c = 0$ thì $\overline{abc} = 0$ không thỏa mãn bài toán.

$$\text{Nếu } c = 5 \text{ thì } \overline{ab5} = 25\overline{ab} \quad (1)$$

Số có ba chữ số chia hết cho 25 khi $\overline{b5} : 25$ suy ra $b = 2$ hoặc $b = 7$.

Ta có: vế trái (1) là một số tự nhiên lẻ nên vế phải cũng là một số tự nhiên lẻ suy ra $b = 2$ (loại).

Do đó $b = 7$ suy ra $\overline{a75} = 25.a.7 = 175a$ suy ra $a = 1$.

Vậy số tự nhiên cần tìm là 175.

Bài 4: Tìm các chữ số $a; b; c$ thỏa mãn:

a) $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = \overline{abc}$

b) $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 4321$

Lời giải

Điều kiện: $0 < a \leq 9; 0 \leq b; c \leq 9; a; b; c \in \mathbb{N}$

a) Ta có $\overline{abc} = 11(a + b + c)$ suy ra $100a + 10b + c = 11a + 11b + 11c$ suy ra $b + 10c = 89a \leq 99$

suy ra $a = 1$ suy ra $b = 9; c = 8$ (do $b + 10c \leq 99$)

b) Ta có: $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 1111.a + 111.b + 11.c + d$

Vậy $1111.a + 111.b + 11.c + d = 4321$

Nếu $a < 3$ thì $111.b + 11.c + d > 2098$ (vô lý vì $b, c, d < 10$)

Nếu $a > 3$ thì vế trái lớn hơn 4321 (không thỏa mãn)

Vậy $a = 3$.

Suy ra $111.b + 11.c + d = 988$

Nếu $b < 8$ thì $11.c + d > 210$ (vô lý vì $c, d < 10$)

Nếu $b > 8$ thì vế trái lớn hơn 988 (không thỏa mãn)

Vậy $b = 8$. Suy ra $11.c + d = 100$.

+ Nếu $c < 9$ thì $d > 11$ (vô lý vì $d < 10$)

Do đó $c = 9; d = 1$.

Vậy $a = 3, b = 8, c = 9, d = 1$ thỏa mãn $3891 + 389 + 38 + 3 = 4321$.

Bài 5: Tìm số tự nhiên có năm chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 2 vào đằng sau số đó thì được số lớn gấp ba lần số có được bằng cách viết thêm chữ số 2 vào đằng trước số đó.

Lời giải

Gọi số cần tìm là: \overline{abcde} ($0 < a \leq 9; 0 \leq b; c; d; e \leq 9; a; b; c; d; e \in \mathbb{N}$)

Theo bài ra ta có:

$$\overline{abcde2} = 3.\overline{2abcde}$$

$$\text{Suy ra } 10.\overline{abcde} + 2 = 3.200000 + 3.\overline{abcde}$$

$$\text{Suy ra } 7.\overline{abcde} = 599998$$

$$\text{Suy ra } \overline{abcde} = 85714.$$

$$\text{Thử lại: } 857142 = 3.285714$$

Vậy số cần tìm là 857142.

Bài 6: Tìm số tự nhiên có tận cùng bằng 3, biết rằng nếu xóa chữ số hàng đơn vị thì số đó giảm đi 1992 đơn vị.

Lời giải

Vì rằng nếu xóa chữ số hàng đơn vị thì số đó giảm đi 1992 đơn vị nên số tự nhiên cần tìm có 4 chữ số.

Gọi số tự nhiên cần tìm là $\overline{abc3}$ ($0 < a \leq 9; 0 \leq b, c \leq 9; a; b; c \in \mathbb{N}$)

$$\text{Theo bài ra ta có: } \overline{abc3} - 1992 = \overline{abc}$$

$$\text{Suy ra } 10.\overline{abc} + 3 - 1992 = \overline{abc}$$

$$\text{Suy ra } 9.\overline{abc} = 1989$$

$$\text{Suy ra } \overline{abc} = 221.$$

Vậy số cần tìm là 2213.

Bài 7: Tìm ba chữ số khác nhau và khác 0, biết rằng nếu dùng cả ba chữ số này lập thành các số tự nhiên có ba chữ số thì hai số lớn nhất có tổng bằng 1444.

Lời giải

Gọi ba chữ số cần tìm là a, b, c ($0 < a < b < c < 9; a, b, c \in \mathbb{N}$).

Theo bài ra ta có:

$$\overline{abc} + \overline{acb} = 1444$$

$$100a + 10b + c + 100a + 10c + b = 1444$$

$$200a + 11b + 11c = 1444$$

$$200a + 11(b + c) = 1400 + 11.4$$

$$a = 7; b = 3; c = 1.$$

Vậy 3 số cần tìm là: 1; 3; 7.

Bài 8: Cho ba chữ số $a; b; c$ đôi một khác nhau và khác 0. Tổng của tất cả các số có hai chữ số được lập từ ba chữ số $a; b; c$ bằng 627. Tính tổng $a + b + c$.

Lời giải

Ta có các số có hai chữ số được lập thành từ ba chữ số $a; b; c$ là:

$$\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ba} + \overline{bc} + \overline{cb} + \overline{ca} + \overline{aa} + \overline{bb} + \overline{cc}$$

Theo đầu bài ta có:

$$\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ba} + \overline{bc} + \overline{cb} + \overline{ca} + \overline{aa} + \overline{bb} + \overline{cc} = 627$$

$$33(a + b + c) = 627$$

$$a + b + c = 19$$

Vậy $a + b + c = 19$.

Bài 9: Nếu xen vào giữa các chữ số của một số có hai chữ số của chính số đó, ta được một số mới có bốn chữ số và bằng 99 lần số đầu tiên. Tìm số đó

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là \overline{ab} ($0 < a \leq 9; 0 \leq b \leq 9; a, b \in \mathbb{N}$)

Theo bài ra, ta có:

$$\overline{aabb} = 99.\overline{ab} \text{ suy ra } 1100a + 11b = 990a + 99b \text{ suy ra } 110a - 88b = 0 \text{ suy ra } 5a - 4b = 0$$

$$\text{suy ra } 5a = 4b \text{ suy ra } \frac{a}{b} = \frac{4}{5}.$$

Mà a, b là các số có 1 chữ số $\Rightarrow a = 4, b = 5$.

Vậy số tự nhiên cần tìm là 45.

Bài 10: Cho hai số có 4 chữ số và 2 chữ số mà tổng của hai số đó bằng 2750. Nếu cả hai số được viết theo thứ tự ngược lại thì tổng của hai số này bằng 8888. Tìm hai số đã cho.

Lời giải

Gọi 2 số cần tìm là: \overline{abcd} và \overline{xy} ($a, b, c, d, x, y \in \mathbb{N}; a; x \neq 0; a; b; c; d; x; y < 10$)

Theo đề ta có:

$$\overline{abcd} + \overline{xy} = 2750 \quad (1)$$

$$\overline{dcba} + \overline{yx} = 8888 \quad (2)$$

Cả 2 phép cộng đều không nhớ sang hàng nghìn nên từ (1) ta có $a = 2$ và từ (2) ta có $d = 8$.

Cũng từ (1) ta có $d + y$ có tận cùng bằng 0, mà $d = 8$ nên $y = 2$.

Từ (2) ta có $a + x$ có tận cùng bằng 8, mà $a = 2$ nên $x = 6$.

Từ (1) ta có $c + x + 1$ (vì có nhớ 1) có tận cùng bằng 5, mà $x = 6$ nên $c = 8$.

Từ (2) ta có $b + y$ có tận cùng bằng 8, mà $y = 2$ nên $b = 6$.

Vậy hai số đó là 2688 và 62.

Bài 11: Tìm số tự nhiên có ba chữ số \overline{abc} sao cho $\overline{abc} = n^2 - 1$ và $\overline{cba} = (n - 2)^2$ ($n \in \mathbb{N}, n > 2$).

Trích đề HSG Vũng Tàu năm 2009 - 2010

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overline{abc} - \overline{cba} = n^2 - 1 - (n - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow 99(a - c) = 4n - 5$$

$$\Leftrightarrow 4n - 5 : 99 \quad (1)$$

$$\text{Vì } n^2 = \overline{abc} + 1 \text{ nên } 101 \leq n^2 \leq 1000$$

$$\Rightarrow 10 < n < 32$$

$$\Rightarrow 35 < 4n - 5 < 123 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $4n - 5 = 99 \Rightarrow n = 26$.

Thử lại: $\overline{cba} = (26 - 2)^2$ là đúng. Vậy $\overline{abc} = 675$.

Bài 12: Tìm số tự nhiên có ba chữ số \overline{abc} sao cho $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{6b3}$.

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2018-2019

Lời giải

Số tự nhiên có ba chữ số cần tìm là \overline{abc} ($a, b, c \in \mathbb{N}^*, a, b, c \leq 9$).

$$\text{Ta có: } \overline{abc} - \overline{cba} = \overline{6b3}$$

$$\Rightarrow 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = \overline{6b3}$$

$$\Rightarrow 99(a - c) = \overline{6b3}$$

$$\Rightarrow \overline{6b3} : 99$$

$$\Rightarrow b = 9$$

$$\Rightarrow a - c = 693 : 99 = 7 \Rightarrow a = 7 + c$$

Do $0 < a \leq 9 \Rightarrow 0 < 7 + c \leq 9 \Rightarrow c = 1$ hoặc $c = 2$.

Với $c = 1 \Rightarrow a = 8$.

Với $c = 2 \Rightarrow a = 9$.

Vậy có hai số cần tìm là 891 và 992.

Bài 13: Tìm số có 2 chữ số \overline{ab} , biết $\overline{ab} = 15 \cdot (a - b) + 2$

Trích đề đề xuất HSG trường năm 2022-2023

Lời giải

$$\overline{ab} = 15 \cdot (a - b) + 2$$

$$10a + b = 15a - 15b + 2$$

$$\Rightarrow 16b = 5a + 2$$

$$\Rightarrow 5a = 16b - 2 : 5$$

$$\Rightarrow 16b \text{ chia cho } 5 \text{ dư } 2$$

$$\Rightarrow b \in \{2; 7\}$$

$$+ b = 2 \Rightarrow a = 6 \text{ (TM)}$$

$$+ b = 7 \Rightarrow a = 22 \text{ (loại)}$$

$$\text{Vậy } \overline{ab} = 62.$$

Dạng 2: Tìm số chữ số của dãy số tự nhiên

Bài 1: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số? Tính tổng của chúng.

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2019 - 2020

Lời giải:

Các số tự nhiên có hai chữ số là 10; 11; 12; ...; 99

Số các số này là: $99 - 10 + 1 = 90$ (số)

Ta có: $A = 10 + 11 + 12 + \dots + 99$ (1)

$A = 99 + 98 + \dots + 11 + 10$ (2)

Cộng (1) với (2) và áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng ta được:

$$A + A = (10 + 99) + (11 + 98) + \dots + (98 + 11) + (99 + 10) = 109 + 109 + \dots + 109 + 109$$

Nên $2A = 109 \cdot 90$ suy ra $A = 109 \cdot 90 : 2 = 45 \cdot 109 = 4905$.

Bài 2: Tính tổng các số tự nhiên có hai chữ số?

Lời giải

Cách 1:

Các số tự nhiên có hai chữ số là 10; 11; 12; ...; 99.

Số các số này là: $99 - 10 + 1 = 90$ số.

Ta có:

$$A = 10 + 11 + 12 + \dots + 99 \quad (1)$$

$$A = 99 + 98 + \dots + 11 + 10 \quad (2)$$

Cộng (1) với (2) và áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng ta được:

$$A + A = (10 + 99) + (11 + 98) + \dots + (98 + 11) + (99 + 10) = 109 + 109 + \dots + 109 + 109$$

Nên $2A = 109 \cdot 90$ suy ra $A = 109 \cdot 90 : 2 = 45 \cdot 109 = 4905$.

Cách 2:

$$\text{Số số hạng của dãy: } \frac{(99 - 10)}{1} + 1 = 90.$$

(khoảng cách 2 số hạng liên tiếp của dãy là 1, số hạng đầu của dãy là 10, số hạng cuối của dãy là 99)

$$\text{Tổng của dãy: } A = \frac{99 + 10}{2} \cdot 90 = 4905.$$

Bài 3: Tính tổng: $S = 5 + 10 + 15 + \dots + 2015 + 2020$

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2016 - 2017

Lời giải

Số số hạng của dãy là $(2020 - 5) : 5 + 1 = 404$.

Tổng $S = (5 + 2020) \cdot 404 : 2 = 409050$.

Bài 4: Tính tổng $S = 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \dots + \frac{4039}{2} + 2020$.

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2017 - 2018

Lời giải

Số số hạng của dãy là $(2020 - 1) : \frac{1}{2} + 1 = 4039$.

Tổng $S = (1 + 2020) \cdot 4039 : 2 = 4081409,5$.

Bài 5: Tính tổng $S = 10,11 + 11,12 + 12,13 + \dots + 98,99 + 100$.

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2018 - 2019

Lời giải

Số số hạng của dãy là $(100 - 10,11) : 1,01 + 1 = 90$.

Tổng $S = (10,11 + 100) \cdot 90 : 2 = 4954,95$.

Bài 6: Tính tổng: $B = 1.3 + 3.5 + 5.7 + \dots + 99.101$.

Trích đề HSG huyện Đông Sơn năm 2018 - 2019

Lời giải

Ta có: $6B = 1.3.6 + 3.5.6 + 5.7.6 + \dots + 99.101.6$

$6B = 1.3.(5+1) + 3.5.(7-1) + 5.7.(9-3) + \dots + 99.101.(103-97)$

$= (1.3.1 + 1.3.5 + 3.5.7 + 5.7.9 + \dots + 97.99.101 + 99.101.103) - (1.3.5 + 3.5.7 + \dots + 97.99.101)$

$= 3 + 99.101.103 = 1029900$.

Suy ra: $B = \frac{1029900}{6} = 171650$.

Bài 7: Tính tổng: $S = 1.200 + 2.199 + 3.198 + 4.197 + \dots + 199.2 + 200.1$

Trích đề HSG huyện Đông Sơn năm 2019 - 2020

Lời giải

Ta có $S = 1.200 + 2.199 + 3.198 + 4.197 + \dots + 199.2 + 200.1$

$= 1.200 + 2(200 - 1) + 3(200 - 2) + 4(200 - 3) + \dots + 199(200 - 198) + 200(200 - 199)$

$= (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 200) \cdot 200 - (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 198.199 + 199.200)$

$= \frac{200 \cdot 201}{2} - \frac{199 \cdot 200 \cdot 201}{3} = 1353400$.

Vậy $S = 1353400$.

Bài 8: Tính tổng $B = 1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 70 + 73$.

Lời giải:

$B = 1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 70 + 73$

$6B = 1.6 + 4.6 + 7.6 + 10.6 + \dots + 70.6 + 73.6$

$6B = 1.(4+2) + 4.(7-1) + 7.(10-4) + \dots + 73.(76-70)$

$6B = 1.4 + 1.2 + 4.7 - 1.4 + 7.10 - 7.4 + \dots + 73.76 - 73.70$

$6B = 2 + 73.76$

$6B = 5550$

$$B = 925.$$

$$\text{Vậy } B = 925.$$

Dạng 3: Tìm chữ số thứ n trong dãy

Bài 1: Cho dãy số $2; 7; 12; \dots; 22; \dots$

- Nêu quy luật của dãy số trên.
- Viết tập hợp B gồm 5 số hạng liên tiếp của dãy số đó, bắt đầu từ số hạng thứ năm.
- Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của dãy số.

Lời giải:

Xét dãy số $2; 7; 12; \dots; 22; \dots$

a) Quy luật: Dãy số cách đều với khoảng cách 5.

$$b) B = \{22; 27; 32; 37; 42\}$$

c) Gọi số hạng thứ 100 của dãy là x , ta có: $(x - 2) : 5 + 1 = 100 \Rightarrow x = 497$.

Do vậy tổng 100 số hạng đầu của dãy là: $(2 + 497) \cdot 100 : 2 = 24950$.

Bài 2: Người ta viết liên nhau các số tự nhiên 123456....

- Hỏi các chữ số đơn vị của các số 53; 328; 1587 đứng ở hàng thứ bao nhiêu?
- Chữ số viết ở hàng thứ 427 là chữ số nào?

Lời giải:

Viết liên nhau các số tự nhiên 123456....

a) 9 chữ số đầu tiên: $1; 2; \dots; 9$.

44 số có hai chữ số tiếp theo: $10, 11, \dots, 53$.

Chữ số hàng đơn vị của số 53 ở hàng số: $9 + 44 \cdot 2 = 97$.

Tương tự, chữ số hàng đơn vị của số 328 ở hàng số $9 + 90 \cdot 2 + 229 \cdot 3 = 876$

Chữ số hàng đơn vị của số 1587 ở hàng số $9 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 588 \cdot 4 = 5241$.

b) Ta có: $427 = 9 + 90 \cdot 2 + 79 \cdot 3$ dư 1

Khi đó số thứ 81 có 3 chữ số là: 179.

Chữ số viết ở hàng thứ 427 là chữ số 1.

Dạng 4: Tính tổng các chữ số của dãy số

Bài 1: Viết dãy số tự nhiên từ 1 đến 999 ta được một số tự nhiên A .

- Số A có bao nhiêu chữ số?
- Tính tổng các chữ số của số A ?
- Chữ số 1 được viết bao nhiêu lần?

Lời giải:

a)

Từ 1 đến 9 có 9 số gồm: 9 (chữ số)

Từ 10 đến 99 số có 90 số gồm: $90 \cdot 2 = 180$ (chữ số)

Từ 100 đến 999 có 900 số gồm: $900 \cdot 3 = 2700$ (chữ số)

Số A có: $9 + 180 + 2700 = 2889$ (chữ số).

b)

Giả sử ta viết số B là các số tự nhiên từ 000 đến 999 (mỗi số đều viết bởi 3 chữ số), thế thì tổng các chữ số của B cũng bằng tổng các chữ số của A . B có: $3.1000 = 3000$ chữ số, mỗi chữ số từ 0 đến 9 đều có mặt: $3000:100 = 300$ (lần)

Tổng các chữ số của B (cũng là của A): $(0+1+2+\dots+9).300 = 45.300 = 13500$ (chữ số)

c) Cần đếm số chữ số 1 trong 11 dãy: 1; 2; 3; ...; 999 (1)

Ta xét dãy: 000, 001, 002, ..., 999 (2)

Số chữ số 1 trong hai dãy như nhau. Ở đây dãy (2) có 1000 số, mỗi số gồm 3 chữ số, số lượng mỗi chữ số từ 1 đến 9 đều như nhau. Mỗi chữ số (từ 1 đến 9) đều có mặt: $3.1000:10 = 300$ (lần). Vậy ở đây (1) chữ số 1 cũng được viết 300 lần.

Bài 2: Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ có ba chữ số?

Lời giải:

Số lẻ có ba chữ số là 101; 103; 105; ...; 999, khoảng cách giữa các số lẻ là 2.

Vậy tất cả có: $(999 - 101) : 2 + 1 = 450$ số lẻ có ba chữ số.

II. Phép đếm

Dạng 1: Tìm số phần tử của tập hợp

Bài 1: Viết các tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử và cho biết số phần tử của mỗi tập hợp.

a) Tập hợp A các số tự nhiên có hai chữ số, trong đó chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2.

b) Tập hợp B các số tự nhiên có ba chữ số mà tổng các chữ số bằng 3.

Lời giải:

a) Tập hợp A các số tự nhiên có hai chữ số, trong đó chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2 là $A = \{20; 31; 42; 53; 64; 75; 86; 97\}$.

Tập hợp A có 8 phần tử.

b) Tập hợp B các số tự nhiên có ba chữ số mà tổng các chữ số bằng 3 là

$B = \{102; 120; 111; 201; 210; 300\}$.

Tập hợp B có 6 phần tử.

Bài 2: Hãy tính số phần tử của các tập hợp sau:

a) Tập hợp $A = \{1; 2; 3; \dots; 2020; 2021\}$.

b) Tập hợp B các số tự nhiên chẵn có 2 chữ số.

c) Tập hợp C các số tự nhiên lẻ có 3 chữ số.

d) Tập hợp D các số 2; 5; 8; 11; ...; 2015; 2018; 2021.

Lời giải

a) Tập hợp A có $(2021 - 1) : 1 + 1 = 2021$ phần tử.

b) Tập hợp B có $(98 - 10) : 2 + 1 = 45$ phần tử.

c) Tập hợp C có $(999 - 101) : 2 + 1 = 450$ phần tử.

d) Tập hợp D có $(2021 - 2) : 3 + 1 = 674$ phần tử.

Dạng 2: Tìm các số theo điều kiện cho trước, số phần tử của tập hợp

Bài 1: Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 4 gồm bốn chữ số, chữ số tận cùng bằng 2?

Lời giải:

Các số phải đếm có dạng: $\overline{abc2}$ ($a \neq 0, 0 \leq a; b; c \leq 9; a, b, c \in \mathbb{N}$).

Chữ số a có 9 cách chọn.

Với mỗi cách chọn a , chữ số b có 10 cách chọn.

Với mỗi cách chọn a, b chữ số c có 5 cách chọn (1,3,5,7,9) để tạo với chữ số 2 tận cùng làm thành số chia hết cho 4.

Tất cả có: $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ (số).

Bài 2: Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 5?

Trích đề HSG huyện Đông Sơn năm 2020 – 2021

Lời giải:

Ta chia ra 3 loại số:

Số đếm có dạng $\overline{5ab}$ ($0 \leq a, b \leq 9, a \neq 5, b \neq 5$): chữ số a có 9 cách chọn, chữ số b có 9 cách chọn các số thuộc loại này có: $9 \cdot 9 = 81$ (số).

Số đếm có dạng $\overline{a5b}$ ($0 \leq a, b \leq 9, a \neq 5, b \neq 5, a \neq 0$): chữ số a có 8 cách chọn, chữ số b có 9 cách chọn, các số thuộc loại này có: $8 \cdot 9 = 72$ (số).

Số đếm có dạng $\overline{ab5}$ ($0 \leq a; b \leq 9; a \neq 5; b \neq 5; a \neq 0$): các số thuộc loại này có: $8 \cdot 9 = 72$ (số).

Vậy số tự nhiên có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 5 là $81 + 72 + 72 = 225$ (số).

Bài 3: Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số. Hỏi tập hợp A có bao nhiêu phần tử?

Lời giải:

Ta có: $A = \{100; 101; \dots; 999\}$

Tập hợp A có: $(999 - 100) + 1 = 900$ phần tử.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

CHỦ ĐỀ: TẬP HỢP SỐ TỰ NHIÊN

A. PHẦN NỘI DUNG

I. Cấu tạo số tự nhiên

Dạng 1: Phân tích cấu tạo số

Bài 1: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị.

- A. 30. B. 40. C. 45. D. 55.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: C. 45.

Bài 2: Tổng của hai số tự nhiên là 102. Nếu thêm chữ số 0 vào bên phải số bé rồi cộng với số lớn ta được tổng mới là 417. Khi đó số lớn là:

- A. 43. B. 54. C. 60. D. 67.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: D. 67

Bài 3: Số nhà của hai bạn An và Bình đều là số tự nhiên có bốn chữ số dạng $\overline{a53b}$ và chia hết cho cả 5 và 9. Tìm số nhà của hai bạn biết số nhà của bạn An lớn hơn số nhà của bạn Bình.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Lời giải

+ Với $b=0$, do số $\overline{a53b}:9$ nên $a+5+3+b = a+5+3+0$ chia hết cho 9

Suy ra $a=1$.

+ Với $b=5$, do số $\overline{a53b}:9$ nên $a+5+3+b = a+5+3+5$ chia hết cho 9

Suy ra $a=5$.

Vậy số nhà bạn An là 5535, số nhà bạn Bình là 1530.

Bài 4: Tìm tất cả các số tự nhiên khác 0, sao cho khi viết thêm chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị thì số đó được gấp lên 9 lần.

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

Lời giải

Gọi số cần tìm là \overline{Abc} với A là số tự nhiên; b, c là chữ số.

Khi viết thêm chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị ta có số $\overline{Ab0c}$

Theo đề ta có

$$\overline{Ab0c} = 9 \cdot \overline{Abc}$$

$$100 \cdot \overline{Ab} + c = 9 \cdot (\overline{Ab} \cdot 10 + c)$$

$$100 \cdot \overline{Ab} + c = 90 \cdot \overline{Ab} + 9c$$

$$10 \cdot \overline{Ab} = 8c$$

$$5 \cdot \overline{Ab} = 4c$$

Suy ra $c : 5$ nên $c \in \{0; 5\}$

+ Nếu $c=0$ thì $\overline{Ab}=0$ (loại).

+ Nếu $c=5$ thì $\overline{Ab}=4$ nên $A=0; b=4$ (loại).

Vậy số cần tìm là 45.

Bài 5: Số nhà của hai bạn An và Bình đều là số tự nhiên có bốn chữ số dạng $\overline{a53b}$ và chia hết cho cả 5 và 9. Tìm số nhà của hai bạn biết số nhà của bạn An lớn hơn số nhà của bạn Bình.

Trích đề HSG huyện Chí Linh năm 2022 - 2023

Lời giải

Vì $\overline{a53b}$ chia hết cho 5 nên b bằng 0 hoặc 5

+ Với $b=0$, do số $\overline{a53b}:9$ nên $a+5+3+b=a+5+3+0$ chia hết cho 9

Suy ra $a=1$

+ Với $b=5$, do số $\overline{a53b}:9$ nên $a+5+3+b=a+5+3+5$ chia hết cho 9

Suy ra $a=5$

Vậy số nhà bạn An là 5535, số nhà bạn Bình là 1530

Bài 6: Tìm một số tự nhiên có 6 chữ số tận cùng là chữ số 4. Biết rằng khi chuyển chữ số 4 đó lên đầu còn các chữ số khác giữ nguyên thì ta được số mới gấp 4 lần số cũ

Trích đề HSG Trường THCS Trần Phú năm 2018-2019

Lời giải

Gọi số cần tìm là $\overline{abcde4}$, ta có: $\overline{abcde4}.4 = \overline{4abcde}$

Đặt $\overline{abcde} = x$ suy ra $\overline{abcde4} = \overline{x4}$

Ta có:

$$\overline{x4}.4 = 400000 + x$$

$$(10x+4).4 = 400000 + x$$

$$40x+16 = 400000 + x$$

$$39x = 399984$$

$$x = 10256$$

Vậy số cần tìm là 10256.

Bài 7: Tìm tất cả các số tự nhiên n , biết rằng $n + S(n) = 2014$, trong đó $S(n)$ là tổng các chữ số của n

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019

Lời giải

Nếu n là số có ít hơn 4 chữ số thì $n \leq 999$ và $S(n) \leq 27$

Suy ra $n + S(n) \leq 999 + 27 = 1026 < 2014$ (ktm)

Mặt khác $n \leq n + S(n) = 2014$ nên n là số có ít hơn 5 chữ số. Vậy n là số có 4 chữ số, suy ra $S(n) \leq 9.4 = 36$. Do vậy $n \geq 2014 - 36 = 1978$

Vì $1978 \leq n \leq 2014$ suy ra $n = \overline{19ab}$ hoặc $n = \overline{20cd}$

*Nếu $n = \overline{19ab}$. Ta có: $\overline{19ab} + (1+9+a+b) = 2014$ ta có:

$$1910 + 11a + 2b = 2014 \text{ suy ra } 11a + 2b = 104 \text{ suy ra } a:2$$

$$\text{và } 11a = 104 - 2b \geq 104 - 2.9 = 86$$

$$\text{suy ra } 8 \leq 10 < a, a:2$$

$$\text{suy ra } a = 8; b = 8$$

$$\text{suy ra } n = 1988(\text{tm})$$

*Nếu $n = \overline{20cd}$ suy ra $\overline{20cd} + (2+0+c+d) = 2014$

$$\text{Suy ra } 2002 + 11c + 2d = 2014 \text{ suy ra } 11c + 2d = 12 \Rightarrow c:2$$

$$\text{Và } 11c \leq 12 \text{ suy ra } c = 0 \Rightarrow d = 6, n = 2006(\text{tm}) \text{ hoặc } c = 1 \text{ suy ra } 2d = 1(\text{tm})$$

$$\text{Vậy } n \in \{1988; 2006\}$$

Bài 8: Tìm các chữ số a, b, c khác nhau sao cho $\overline{a, bc} : (a+b+c) = 0,25$.

Trích đề HSG đề xuất năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có $\overline{a, bc} : (a+b+c) = 0.25$ (a, b, c là các chữ số khác nhau)

$$\Rightarrow \overline{a, bc} = 0,25.(a+b+c)$$

$$\Rightarrow \overline{abc} = 25.(a+b+c) \quad (1)$$

Vì a, b, c là các chữ số khác nhau $\Rightarrow \overline{abc}; a+b+c \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Nên } \overline{abc} : 25 \Rightarrow \overline{bc} \in \{00; 25; 50; 75\}$$

$$\text{Mà } b, c \text{ là các chữ số khác nhau } \Rightarrow \overline{bc} \in \{25; 50; 75\}$$

- Với $\overline{bc} = 25 \Rightarrow b = 2; c = 5$.

$$\text{Thay } b = 2; c = 5 \text{ vào (1) ta được } \Rightarrow \overline{a25} = 25.(a+2+5)$$

Tìm được $a = 2$ (loại vì a khác b)

- Với $\overline{bc} = 50 \Rightarrow b = 5; c = 0$

$$\text{Thay } b = 5; c = 0 \text{ vào (1) ta được } \Rightarrow \overline{a50} = 25.(a+5+0)$$

Tìm được $a = 1$ (thỏa mãn)

- Với $\overline{bc} = 75 \Rightarrow b = 7; c = 5$

$$\text{Thay } b = 7; c = 5 \text{ vào (1) ta được } \Rightarrow \overline{a75} = 25.(a+7+5)$$

Tìm được $a = 3$ (thỏa mãn)

$$\text{Vậy } (a = 3; b = 7; c = 5), (a = 1; b = 5; c = 0)$$

Bài 9: Tích của hai số là 6210. Nếu giảm một thừa số đi 7 đơn vị thì tích mới là 5265. Tìm các thừa số của tích.

Trích đề HSG huyện Ứng Hòa năm 2022 - 2023

Lời giải

Gọi thừa số được giảm là a , thừa số còn lại là b , theo đề bài ta có:

$$a.b = 6210$$

$$(a-7).b = 5265$$

$$\Rightarrow a.b - 7.b = 5265$$

$$\Rightarrow 6210 - 7.b = 5265$$

$$\Rightarrow 7.b = 6210 - 5265$$

$$\Rightarrow 7.b = 945$$

$$\Rightarrow b = 945 : 7 = 135$$

$$\Rightarrow a = 6210 : 135 = 46$$

Vậy hai thừa số cần tìm là 46; 135.

Bài 10: Viết thêm chữ số y vào bên phải của một số có 5 chữ số thì được số lớn gấp 3 lần số có được do viết thêm chữ số y vào bên trái số đó. Tìm chữ số y và số có 5 chữ số đó.

Trích đề HSG huyện Đoàn Hùng năm 2018 - 2019

Lời giải

Gọi số cần tìm là \overline{abcde} ($a \neq 0; a, b, c, d, e \in \mathbb{N}; a; b; c; d; e \leq 9$)

ta có: $\overline{abcdey} = 3 \cdot \overline{abcde}$

Đặt $\overline{abcde} = x$, ta có:

$$10x + y = 3 \cdot (100000y + x)$$

$$7x + y = 300000y \Rightarrow 7x = 299999y \Rightarrow x = 42857y$$

Vì x là số có 5 chữ số nên y chỉ nhận hai giá trị $y = 1; y = 2$

Nếu $y = 1$ thì $x = 42857$

Nếu $y = 2$ thì $x = 85714$

Bài 11: Tìm một số có 3 chữ số, biết rằng khi viết thêm chữ số 5 vào bên phải số đó thì nó tăng thêm 1112 đơn vị.

Trích đề HSG Trường THCS Quảng Tiến năm 2019 -2020

Lời giải

Gọi số phải tìm là \overline{abc} . Khi viết thêm chữ số 5 vào bên phải ta được số $\overline{abc5}$, theo bài ta có:

$$\overline{abc5} = \overline{abc} + 1112 \Rightarrow 10\overline{abc} + 5 = \overline{abc} + 1112$$

$$\Leftrightarrow 10\overline{abc} - \overline{abc} = 1112 - 5$$

$$\Rightarrow 9\overline{abc} = 1107 \Rightarrow \overline{abc} = 123$$

Vậy số phải tìm là 123.

Bài 12: Tổng của hai số tự nhiên là 109. Nếu thêm chữ số 1 vào bên phải số bé rồi cộng với số lớn ta được tổng mới là 335. Số lớn là:

A. 43

B. 54

C. 60

D. 84

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 -2019

Bài 13: Tìm ba số nguyên dương biết rằng tổng của ba số ấy bằng nửa tích của chúng

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2018-2019

Lời giải

Giả sử $a \leq b \leq c$ thì $a + b + c \leq 3c$, do đó: $\frac{abc}{2} \leq 3c \Rightarrow ab \leq 6$

Có các trường hợp sau:

*) $ab = 6 \Rightarrow c = 3, 5$ (loại)

*) $ab = 5 \Rightarrow a = 1, b = 5, c = 4$ (ktm)

*) $ab = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 1, b = 4, c = 5 \text{ (tm)} \\ a = 2, b = 2, c = 4 \text{ (tm)} \end{cases}$

*) $ab = 2$ (ktm)

*) $ab = 3 \Rightarrow a = 1, b = 3, c = 8$ (tm)

*) $ab = 1 \Rightarrow$ (ktm)

Vậy bộ ba số cần tìm 1;4;5 hoặc 2; 2; 4 hoặc 1; 3; 8.

5 **Bài 14:** Tìm ba số nguyên dương biết rằng tổng của ba số ấy bằng nửa tích của chúng

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2018-2019

Lời giải

Giả sử $a \leq b \leq c$ thì $a + b + c \leq 3c$, do đó: $\frac{abc}{2} \leq 3c \Rightarrow ab \leq 6$

Có các trường hợp sau:

*) $ab = 6 \Rightarrow c = 3, 5$ (loại)

*) $ab = 5 \Rightarrow a = 1, b = 5, c = 4$ (ktm)

*) $ab = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 1, b = 4, c = 5 \text{ (tm)} \\ a = 2, b = 2, c = 4 \text{ (tm)} \end{cases}$

*) $ab = 2$ (ktm)

*) $ab = 3 \Rightarrow a = 1, b = 3, c = 8$ (tm)

*) $ab = 1 \Rightarrow$ (ktm)

Vậy bộ ba số cần tìm 1;4;5 hoặc 2; 2; 4 hoặc 1; 3; 8.

Bài 15: Tìm các số tự nhiên có 3 chữ số chia hết cho 7 và tổng các chữ số của nó cũng chia hết cho 7.

Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021 -2022

Lời giải

Gọi số đó là \overline{abc} ($0 \leq b; c \leq 9; 0 < a \leq 9$)

Ta có: $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 98a + 7b + 2a + 3b + c = 7(14a + b) + (2a + 3b + c)$

Vì $\overline{abc} : 7$ nên $(2a + 3b + c) : 7$

Mà $(a + b + c) : 7$ suy ra $2(a + b + c) : 7$

$2a + 3b + c = 2.(a + b + c) + (b - c) : 7$ suy ra $(b - c) : 7$

Mà $b; c$ là chữ số nên $b - c \in \{-7; 0; 7\}$

Nếu $b - c = 7$ thì $c = b + 7$ suy ra $a + b + c = (a + 2b + 7) : 7$ suy ra $(a + 2b) : 7$

Do đó: $\overline{abc} \in \{707; 518; 329\}$

Nếu $b - c = 0$ thì $b = c$ suy ra $a + b + c = a + 2c + 7$ suy ra $(a + 2c) : 7$

Do đó: $\overline{abc} \in \{770; 581; 392\}$

Nếu $b - c = -7$ thì $b = c - 7$ suy ra $a + b + c = (a + 2b) : 7$.

Suy ra: $\overline{abc} \in \{133; 322; 511; 700; 266; 455; 644; 833; 399; 588; 777; 966\}$.

Vậy các số cần tìm là:

$\{707; 518; 329; 707; 581; 329; 133; 322; 511; 700; 266; 455; 644; 833; 399; 777; 966\}$

Bài 16: Tìm 1 số tự nhiên có 2 chữ số ,biết rằng nếu viết thêm chữ số 9 vào bên trái số đó ta được 1 số lớn gấp 13 lần số đã cho.

Trích đề HSG huyện Tiên Du năm 2021 -2022

Lời giải

Gọi số phải tìm là \overline{ab} . Với $a; b$ là các chữ số và $a \neq 0$.

Viết thêm chữ số 9 vào bên trái ta được số $\overline{9ab}$.

Theo bài ra ta có :

$$\overline{9ab} = \overline{13ab}$$

$$900 + ab = ab.13$$

7. Vậy số 57^{2011} có chữ số tận cùng là 3.

b) Tìm chữ số tận cùng của số 93^{1999}

Xét 3^{1999} ; ta có: $3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3^3 = 81^{499} \cdot 27 = \overline{\dots 1.27} = \overline{\dots 7}$

Suy ra chữ số tận cùng bằng 7

Vậy số 3^{1999} có chữ số tận cùng là 7.

Dạng 4: Tính tổng các chữ số của dãy.

Bài 1: Tính giá trị biểu thức: $C = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \dots + 1225$

Trích đề HSG huyện Liên trường năm 2021-2022

Lời giải

$$C = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \dots + 1225$$

$$= \frac{1.2}{2} + \frac{2.3}{2} + \frac{3.4}{2} + \frac{4.5}{2} + \frac{5.6}{2} + \dots + \frac{49.50}{2} = \frac{1}{2}(1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 49.50)$$

Đặt $F = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 49.50$ suy ra $3F = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + \dots + 49.50.3$

$$3F = 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + 49.50.(51-48)$$

$$= 1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + \dots + 49.50.51 - 48.49.50$$

$$= 49.50.51$$

Suy ra $F = \frac{49.50.51}{3} = 41650$. Vậy $C = \frac{1}{2} \cdot 41650 = 20825$

II. Phép đếm

Dạng 1: Tìm số phần tử của tập hợp

Bài 1: Tập hợp $A = \{1; 5; 9; 13; \dots; 2017\}$ có bao nhiêu phần tử

- A. 504 B. 505 C. 2016 D. 2017

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 2: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị

- A. 90 B. 110 C. 45 D. 55

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 3: Tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} / x:12; x:21; x:28, 167 < x < 300\}$ có bao nhiêu phần tử.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 4: Số 2016 có bao nhiêu ước?

- A. 8 B. 10 C. 18 D. 36

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 5: Tập hợp M có 255 tập hợp con khác rỗng. Hỏi M có bao nhiêu phần tử?

- A. 10 B. 7 C. 8 D. 9

Lời giải

Nếu chữ số hàng chục là 9 thì có 9 cách chọn chữ số hàng đơn vị thỏa mãn đầu bài. Theo quy tắc nhân có $1.9 = 9$ số.

Nếu chữ số hàng chục là 8 thì có 8 cách chọn chữ số hàng đơn vị thỏa mãn đầu bài. Theo quy tắc nhân có $1.8=8$ số.

Nếu chữ số hàng chục là 7 thì có 7 cách chọn chữ số hàng đơn vị thỏa mãn đầu bài. Theo quy tắc nhân có $1.7=7$ số.

.....

Nếu chữ số hàng chục là 1 thì có 1 cách chọn chữ số hàng đơn vị thỏa mãn đầu bài (là 0). Theo quy tắc nhân có $1.1=1$ số.

Vậy số các số tự nhiên có hai chữ số mà các chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là:

$$1+2+3+ \dots +7+8+9 = 45.$$

Bài 3: Có 9 miếng bánh chưng cần ráng vàng cả hai mặt. Thời gian ráng mỗi mặt cần 3 phút. Nếu dùng một chiếc chảo mỗi lần chỉ ráng được nhiều nhất 6 miếng thì cần thời gian ít nhất là bao lâu để ráng xong 9 miếng bánh chưng đó

Lời giải

Thời gian cần ít nhất là bao lâu để ráng xong 9 miếng bánh chưng đó là: $3.2+3.2=12$ (phút)

Bài 4: Cho ba chữ số a, b, c với $0 < a < b < c$.

a) Viết tập hợp A các chữ số có ba chữ số, mỗi số gồm cả ba chữ số trên.

b) Biết rằng tổng hai chữ số nhỏ nhất trong tập hợp A bằng 499. Tìm tổng các chữ số $a+b+c$.

Lời giải

a) Tập hợp $A = \{ \overline{abc} ; \overline{acb} ; \overline{bac} ; \overline{bca} ; \overline{cab} ; \overline{cba} \}$

b) Hai số lớn nhất trong tập A là $\overline{cab}, \overline{cba}$. Ta có: $\overline{abc} + \overline{acb} = 499$

$$\text{Suy ra } 200a + 11b + 11c = 499 (*)$$

Nếu $a \geq 3$ thì vế trái của (*) lớn hơn 499, vô lý, do đó $a \in \{1 ; 2\}$

Với $a = 1$ nên $c + b = 499 : 11$ không là số tự nhiên

Với $a = 2$ nên $c + b = 99 : 11 = 9$.

Vậy $a + b + c = 11$.

Bài 5: Tìm tập hợp các số nguyên x biết rằng:

$$4\frac{5}{9} : 2\frac{5}{18} - 7 < x < \left(3\frac{1}{5} : 3,2 + 4,5 \cdot 1\frac{31}{45} \right) : \left(-21\frac{1}{2} \right)$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 4\frac{5}{9} : 2\frac{5}{18} - 7 = \frac{41}{9} \cdot \frac{18}{41} - 7 = 2 - 7 = -5.$$

$$\text{Lại có: } \left(3\frac{1}{5} : 3,2 + 4,5 \cdot 1\frac{31}{45} \right) : \left(-21\frac{1}{2} \right) = \left(\frac{16}{5} \cdot \frac{5}{16} + \frac{9}{2} \cdot \frac{76}{45} \right) : \left(-\frac{43}{2} \right) = \left(1 + \frac{38}{5} \right) \cdot \frac{-2}{43} = \frac{43}{5} \cdot \frac{-2}{43} = \frac{-2}{5}$$

Do đó: $-5 < x < \frac{-2}{5}$ mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-4; -3; -2; -1\}$.

Bài 6: Tìm các giá trị nguyên của x biết: $4\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{24} - \frac{7}{14}\right) \leq x \leq \frac{20}{30} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{6}{12} - \frac{3}{4}\right)$

Trích đề HSG huyện Lý Nhân Nam năm 2021 - 2022

Lời giải

$$4\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{24} - \frac{7}{14}\right) \leq x \leq \frac{20}{30} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{6}{12} - \frac{3}{4}\right)$$

$$\frac{13}{3} \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{6}\right) \leq x \leq \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{12} + \frac{6}{12} - \frac{9}{12}\right)$$

$$\frac{13}{3} \cdot \frac{-2}{6} \leq x \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{12}$$

$$\frac{-13}{9} \leq x \leq \frac{1}{18}$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ suy ra $x \in \{-1; 0\}$.

Vậy $x \in \{-1; 0\}$.

B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

(copy đề bài ở các dạng trên để làm phiếu phô tô cho HS)

I. Cấu tạo số tự nhiên

Dạng 1: Phân tích cấu tạo số

Bài 1: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị.

- A. 30. B. 40. C. 45. D. 55.

*Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022***Bài 2:** Tổng của hai số tự nhiên là 102. Nếu thêm chữ số 0 vào bên phải số bé rồi cộng với số lớn ta được tổng mới là 417. Khi đó số lớn là:

- A. 43. B. 54. C. 60. D. 67.

*Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022***Bài 3:** Số nhà của hai bạn An và Bình đều là số tự nhiên có bốn chữ số dạng $\overline{a53b}$ và chia hết cho cả 5 và 9. Tìm số nhà của hai bạn biết số nhà của bạn An lớn hơn số nhà của bạn Bình.*Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022***Bài 4:** Tìm tất cả các số tự nhiên khác 0, sao cho khi viết thêm chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị thì số đó được gấp lên 9 lần.*Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022***Bài 5:** Số nhà của hai bạn An và Bình đều là số tự nhiên có bốn chữ số dạng $\overline{a53b}$ và chia hết cho cả 5 và 9. Tìm số nhà của hai bạn biết số nhà của bạn An lớn hơn số nhà của bạn Bình.*Trích đề HSG huyện Chí Linh năm 2022 - 2023***Bài 6:** Tìm một số tự nhiên có 6 chữ số tận cùng là chữ số 4. Biết rằng khi chuyển chữ số 4 đó lên đầu còn các chữ số khác giữ nguyên thì ta được số mới gấp 4 lần số cũ*Trích đề HSG Trường THCS Trần Phú năm 2018-2019***Bài 7:** Tìm tất cả các số tự nhiên n , biết rằng $n + S(n) = 2014$, trong đó $S(n)$ là tổng các chữ số của n *Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019***Bài 8:** Tìm các chữ số a, b, c khác nhau sao cho $\overline{a, bc} : (a + b + c) = 0,25$.*Trích đề HSG đề xuất năm 2021 - 2022***Bài 9:** Tích của hai số là 6210. Nếu giảm một thừa số đi 7 đơn vị thì tích mới là 5265. Tìm các thừa số của tích.*Trích đề HSG huyện Ứng Hòa năm 2022 - 2023***Bài 10:** Viết thêm chữ số y vào bên phải của một số có 5 chữ số thì được số lớn gấp 3 lần số có được do viết thêm chữ số y vào bên trái số đó. Tìm chữ số y và số có 5 chữ số đó.*Trích đề HSG huyện Đoàn Hùng năm 2018 - 2019***Bài 11:** Tìm một số có 3 chữ số, biết rằng khi viết thêm chữ số 5 vào bên phải số đó thì nó tăng thêm 1112 đơn vị.*Trích đề HSG Trường THCS Quảng Tiến năm 2019 - 2020***Bài 12:** Tổng của hai số tự nhiên là 109. Nếu thêm chữ số 1 vào bên phải số bé rồi cộng với số lớn ta được tổng mới là 335. Số lớn là:

- A. 43 B. 54 C. 60 D. 84

*Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019***Bài 13:** Tìm ba số nguyên dương biết rằng tổng của ba số ấy bằng nửa tích của chúng*Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2018-2019*

13 **Bài 5:** Tập hợp M có 255 tập hợp con khác rỗng. Hỏi M có bao nhiêu phần tử?

- A. 10 B. 7 C. 8 D. 9

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 6: Gọi M là tập hợp các số tự nhiên lẻ có 3 chữ số. Tập hợp M có bao nhiêu phần tử?

Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 - 2022

Bài 7: Các số tự nhiên từ 10 đến 1000 có bao nhiêu số chia hết cho 3.

Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 - 2022

Bài 8: Số $(\overline{9x})^8$ với $x \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}$ viết trong hệ thập phân có bao nhiêu chữ số ?

Trích đề HSG huyện Tam Dương năm 2016 -2017

Bài 9: Tìm số phần tử của tập hợp sau: $A = \{3; 6; 9; 12; \dots; 2022\}$.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Bài 10: Tính số phần tử của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} / -6 \leq x < 6 \text{ và } x:3\}$.

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022

Dạng 2: Tìm số các số theo điều kiện cho trước, số phần tử của tập hợp

Bài 1: Cho A là tập hợp các số tự nhiên chẵn không vượt quá 100. Tổng tất cả các phần tử của A là:

- A. 2450. B. 2500. C. 2550. D. Kết quả khác.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2022 - 2023

Bài 2: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị.

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 3: Có 9 miếng bánh chưng cần ráng vàng cả hai mặt. Thời gian ráng mỗi mặt cần 3 phút. Nếu dùng một chiếc chảo mỗi lần chỉ ráng được nhiều nhất 6 miếng thì cần thời gian ít nhất là bao lâu để ráng xong 9 miếng bánh chưng đó

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 4: Cho ba chữ số a, b, c với $0 < a < b < c$.

- a) Viết tập hợp A các chữ số có ba chữ số, mỗi số gồm cả ba chữ số trên.
b) Biết rằng tổng hai chữ số nhỏ nhất trong tập hợp A bằng 499. Tìm tổng các chữ số $a + b + c$.

Trích đề HSG huyện Ngọc Lặc 2018-2019

Bài 5: Tìm tập hợp các số nguyên x biết rằng:

$$4\frac{5}{9} : 2\frac{5}{18} - 7 < x < \left(3\frac{1}{5} : 3, 2 + 4, 5 \cdot 1\frac{31}{45}\right) : \left(-21\frac{1}{2}\right)$$

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021- 2022

Bài 6: Tìm các giá trị nguyên của x biết: $4\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{24} - \frac{7}{14}\right) \leq x \leq \frac{20}{30} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{6}{12} - \frac{3}{4}\right)$

Trích đề HSG huyện Lý Nhân Nam năm 2021 - 2022

C. SƯU TẦM CÁC BÀI TRONG CÁC ĐỀ CỦA NHỮNG NĂM TRƯỚC ĐÓ

(Phần này lấy các câu từ những năm trước, trước năm 2020-2021, tối thiểu 10 bài)

Bài 1: Tìm số tự nhiên có ba chữ số \overline{abc} sao cho $\overline{abc} = n^2 - 1$ và $\overline{cba} = (n-2)^2$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 2$).*Trích đề HSG Vũng Tàu năm 2009 - 2010***Lời giải**

Ta có: $\overline{abc} - \overline{cba} = n^2 - 1 - (n-2)^2$

$$\Leftrightarrow 99(a-c) = 4n-5$$

$$\Leftrightarrow 4n-5 : 99 \quad (1)$$

Vì $n^2 = \overline{abc} + 1$ nên $101 \leq n^2 \leq 1000$

$$\Rightarrow 10 < n < 32$$

$$\Rightarrow 35 < 4n-5 < 123 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $4n-5 = 99 \Rightarrow n = 26$.

Thử lại: $\overline{cba} = (26-2)^2$ là đúng. Vậy $\overline{abc} = 675$.

Bài 2: Tìm số tự nhiên có ba chữ số \overline{abc} sao cho $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{6b3}$.*Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2018-2019***Lời giải**Số tự nhiên có ba chữ số cần tìm là \overline{abc} ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$, $a, b, c \leq 9$).

Ta có: $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{6b3}$

$$\Rightarrow 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = \overline{6b3}$$

$$\Rightarrow 99(a-c) = \overline{6b3}$$

$$\Rightarrow \overline{6b3} : 99$$

$$\Rightarrow b = 9$$

$$\Rightarrow a - c = \overline{693} : 99 = 7 \Rightarrow a = 7 + c$$

Do $0 < a \leq 9 \Rightarrow 0 < 7 + c \leq 9 \Rightarrow c = 1$ hoặc $c = 2$.

Với $c = 1 \Rightarrow a = 8$.

Với $c = 2 \Rightarrow a = 9$.

Vậy có hai số cần tìm là 891 và 992.

Bài 3: Tìm số có 2 chữ số \overline{ab} , biết $\overline{ab} = 15 \cdot (a-b) + 2$ *Trích đề đề xuất HSG trường năm 2022-2023***Lời giải**

$$\overline{ab} = 15 \cdot (a-b) + 2$$

$$10a + b = 15a - 15b + 2$$

$$\Rightarrow 16b = 5a + 2$$

$$\Rightarrow 5a = 16b - 2 : 5$$

$$\Rightarrow 16b \text{ chia cho } 5 \text{ dư } 2$$

$$\Rightarrow b \in \{2; 7\}$$

+ $b = 2 \Rightarrow a = 6$ (TM)

+ $b = 7 \Rightarrow a = 22$ (loại)

Vậy $\overline{ab} = 62$.

15 **Bài 4:** Tìm một số có bốn chữ số, trong đó chữ số đầu tiên là chữ số 7. Biết rằng nếu chuyển chữ số 7 đó về cuối thì được một số mới kém số ban đầu là 1413 đơn vị.

Trích đề HSG huyện Hiệp Hòa, năm 2019- 2020

Lời giải

Gọi số cần tìm có dạng là $\overline{7abc}$ ($0 < a \leq 9, 0 \leq b, c \leq 9$)

Số mới là: $\overline{abc7}$

Bằng việc phân tích cấu tạo số ta có thể giải bài toán theo cách phân tích cấu tạo số theo \overline{abc} ta được $\overline{abc} = 620$. Vậy số cần tìm là 7620.

Bài 5: Tìm một số tự nhiên có bốn chữ số, sao cho khi nhân số đó với 8 ta được số mới gồm các chữ số của số ấy nhưng viết theo thứ tự ngược lại.

Trích đề HSG huyện Hiệp Hòa, năm 2020- 2021

Lời giải

Gọi số cần tìm có dạng là \overline{abcd} ($0 < a, d \leq 9, 0 \leq b, c \leq 9$)

Số mới là: \overline{dcba}

Bằng việc phân tích cấu tạo số ta có thể giải bài toán

Bài 6: Khi viết số 2^{100} dưới dạng một số tự nhiên thì số đó có bao nhiêu chữ số?

Trích đề HSG huyện Tam Dương, năm 2011- 2012

Lời giải

$$2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} > 1000^{10} = 10^{30}$$

$$2^{100} = 2^{31} \cdot 2^6 \cdot 2^{63} = 2^{31} \cdot 64 \cdot 512^7 < 2^{31} \cdot 125 \cdot 625^7$$

$$2^{100} = 2^{31} \cdot 5^3 \cdot (5^4)^7 = 2^{31} \cdot 5^{31} = 10^{31}$$

$$\Rightarrow 10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$$

Vậy khi viết số 2^{100} dưới dạng một số tự nhiên thì số đó có 31 chữ số

Bài 7: Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5?

Trích đề HSG huyện Xuân trường, năm 2015- 2016

Lời giải

Số lớn nhất có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5 là 9975

Số nhỏ nhất có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5 là 1005

Ta có dãy số: 1005 ; 1035; 1065;; 9975

Khoảng cách của dãy là 30

=> Số số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5 là:

$$(9975 - 1005) : 30 + 1 = 300 \text{ số}$$

Bài 8: Cho số $M = 1978(1979^9 + 1979^8 + \dots + 1979^2 + 1980) + 1$

16 Hãy rút gọn M và tìm chữ số hàng đơn vị của M

Trích đề HSG huyện Giao Thủy, năm 2015- 2016

Lời giải

$$M = 1978(1979^9 + 1979^8 + \dots + 1979^2 + 1980) + 1$$

$$M = (1979 - 1)(1979^9 + 1979^8 + \dots + 1979^2 + 1979 + 1) + 1$$

$$M = 1979^{10} + 1979^9 + \dots + 1979^2 + 1979 - (1979^9 + 1979^8 + \dots + 1979^2 + 1979 + 1) + 1$$

$$M = 1979^{10}$$

số tận cùng là 9 có chữ số tận cùng là 9 nếu số mũ lẻ, có chữ số tận cùng là 1 nếu số mũ chẵn nên M có chữ số tận cùng là 1

Bài 9: Tìm chữ số a biết rằng $\overline{20a20a20a}$ chia hết cho 7

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } n = \overline{20a20a20a} &= \overline{20a20a} \cdot 1000 + \overline{20a} = (\overline{20a} \cdot 1000 + \overline{20a}) \cdot 1000 + \overline{20a} \\ &= 1001 \cdot \overline{20a} \cdot 1000 + \overline{20a} \end{aligned}$$

Theo đề bài n chia hết cho 7 mà 1001 chia hết cho 7 nên $\overline{20a}$ chia hết cho 7.

Ta có: $\overline{20a} = 196 + (4 + a)$ chia hết cho 7 nên $4 + a$ chia hết cho 7.

Vậy $n = 3$.

Bài 10: Để đánh số trang của một cuốn sách, người ta viết dãy số tự nhiên bắt đầu từ 1 và phải dùng tất cả 1998 chữ số.

Hỏi cuốn sách có bao nhiêu trang?

Lời giải

Ta có: Từ trang 1 đến trang 9 phải dùng 9 chữ số (viết tắt chữ số).

Từ trang 10 đến trang 99 phải dùng $(99 - 10) + 1 = 90$ số có 2 chữ số nên từ trang 10 đến trang 99 phải dùng 180 chữ số.

Vì còn các trang gồm các số có 3 chữ số.

\Rightarrow Còn lại: $1998 - (180 + 9) = 1809$ chữ số là đánh dấu các trang có 3 chữ số.

\Rightarrow Có: $1809 : 3 = 603$ số có 3 chữ số.

\Rightarrow Cuốn sách đó có: $603 + 99 = 702$ (vì trang 1 \rightarrow 99 có 99 trang).

Cuốn sách có 702 trang.

Bài 11: Tìm số có hai chữ số, biết rằng số đó cộng với tổng các chữ số của nó bằng 84.

Gọi số cần tìm là \overline{ab} (a, b là các chữ số, $a \neq 0$)

Theo bài ra ta có: $\overline{ab} + a + b = 84$

$$10a + b + a + b = 84$$

$$11a + 2b = 84 (*)$$

$$\Rightarrow 11a : 2 \Rightarrow a : 2$$

17 Lại có: $11a < 84 \Rightarrow a < 8$

$$11a \geq 84 - 2.9 = 66 \Rightarrow a \geq 6$$

Nhận thấy: $a:2; 6 \leq a < 8 \Rightarrow a = 6$

Thay $a = 6$ vào (*) ta được:

$$11.6 + 2.b = 84$$

$$66 + 2.b = 84 \Rightarrow 2.b = 18 \Rightarrow b = 9(TM)$$

Vậy số phải tìm là 69.

Bài 12: Cho A là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số chia hết cho 5.

a) Hỏi A có bao nhiêu phần tử?

b) Tính tổng các phần tử của tập hợp A.

Lời giải

a) Tập hợp $A = \{100; 105; 110; \dots; 990; 995\}$

Số phần tử của tập hợp A là $(995 - 100) : 5 + 1 = 895 : 5 + 1 = 179 + 1 = 180$

b) Tổng các phần tử của tập hợp A là: $(995 + 100).180 : 2 = 98550$

Bài 13: Trong các số tự nhiên từ 1 từ đến 1000, có bao nhiêu số:

a) Chia hết cho ít nhất một trong các số 2; 3; 5?

b) Không chia hết cho tất cả các số tự nhiên từ 2 đến 5?

Lời giải

a) Chia hết cho ít nhất một trong các số 2; 3; 5

Gọi A, B, C, D, E, G, H là tập hợp các số từ 1 đến 1000 mà theo thứ tự chia hết cho 2, chia hết cho 3, chia hết cho 5, chia hết cho 2 và 3, chia hết cho 2 và 5, chia hết cho 3 và 5, chia hết cho cả 3 số, số phần tử của các tập hợp đó theo thứ tự bằng $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7$.

Ta có:

$$s_1 = 1000 : 2 = 500$$

$$s_2 = [1000 : 3] = 333$$

$$s_3 = 1000 : 5 = 200$$

$$s_4 = [1000 : 6] = 166$$

$$s_5 = 1000 : 10 = 100$$

$$s_6 = [1000 : 15] = 66$$

$$s_7 = [1000 : 30] = 33$$

Các số phải tìm gồm: $s_1 + s_2 + s_3 - s_4 - s_5 - s_6 + s_7 = 734$ số.

b) Không chia hết cho tất cả các số tự nhiên từ 2 đến 5?

Còn lại $1000 - 734 = 266$ số.

Bài 14: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, biết rằng nếu xoá chữ số hàng nghìn thì số ấy giảm 9 lần.

Lời giải

Gọi số cần tìm là \overline{abcd} ($a, b, c, d \in \mathbb{N}; a \neq 0; a, b, c, d < 10$)

18 Xóa chữ số hàng trăm ta có số \overline{bcd}

Ta có: $\overline{abcd} = 9\overline{bcd} \Rightarrow 1000a + \overline{bcd} = 9\overline{bcd} \Rightarrow 8\overline{bcd} = 1000a \Rightarrow \overline{bcd} = 1000a : 8 = 125a$

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
\overline{bcd}	125	250	375	500	625	750	875	1000 (loại)	1125 (loại)

Vậy số cần tìm là 1125; 2250; 3375; 4500; 5625; 6750; 7875.

Bài 15: Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số \overline{abcd} , trong đó $b - a = 1$; $d - c = 1$?

Lời giải

Chữ số a ($0 \leq a \leq 9, a \neq 0$) có 8 cách chọn (1, 2, ..., 8).

Chữ số b ($0 \leq b \leq 9$) có 1 cách chọn ($b = a + 1$).

Chữ số c ($0 \leq c \leq 9$) có 9 cách chọn (0, 1, 2, ..., 8).

Chữ số d ($0 \leq d \leq 9$) có 1 cách chọn ($d = c + 1$).

Tất cả có: $8.1.9.1 = 72$ (số).

Bài 16: Có bao nhiêu số chẵn có ba chữ số, các chữ số khác nhau?

Lời giải:

Các số phải đếm có dạng \overline{abc} ($0 \leq a, b, c \leq 9, a \neq 0$).

Nếu $c = 0$ thì a có 9 cách chọn (từ 1 đến 9), b có 8 cách chọn (từ 1 đến 9, khác a).

Nếu $c = 2, 4, 6, 8$ thì a có 8 cách chọn (từ 1 đến 9, khác c), b có 8 cách chọn (từ 0 đến 9, khác a và c).

Vậy có: $9.8 + 8.8.4 = 328$ (số).

Bài 17: Trong các số tự nhiên có ba chữ số, có bao nhiêu số:

a) Chứa đúng một chữ số 4?

b) Chứa đúng hai chữ số 4?

c) Chia hết cho 5, có chứa chữ số 5?

d) Chia hết cho 3, không chứa chữ số 3?

Lời giải

a) Chứa đúng một chữ số 4?

Các số phải đếm có 3 dạng:

- Dạng $\overline{4bc}$ ($0 \leq c, b \leq 9, c \neq 4, b \neq 4$) có $9.9 = 81$ (số).

- Dạng $\overline{a4c}$ ($0 \leq a, c \leq 9, a \neq 4, c \neq 4, a \neq 0$) có $8.9 = 72$ (số).

- Dạng $\overline{ab4}$ ($0 \leq a, b \leq 9, a \neq 4, b \neq 4, a \neq 0$) có $8.9 = 72$ (số).

Tất cả có: $81 + 72 + 72 = 225$ (số).

b) Chứa đúng hai chữ số 4?

Các số phải đếm gồm 3 dạng:

- Dạng $\overline{44c}$ ($0 \leq c \leq 9, c \neq 4$) có 9 (số).

- Dạng $\overline{a44}$ ($0 \leq a \leq 9, a \neq 4, a \neq 0$) có 8 (số).

- Dạng $\overline{4b4}$ ($0 \leq b \leq 9, b \neq 4$) có 9 (số).

Tất cả có: $9 + 8 + 9 = 26$ (số).

c) Chia hết cho 5, có chứa chữ số 5?

Số có ba chữ số, chia hết cho 5 gồm 180 số, trong đó số không chứa chữ số 5 có dạng \overline{abc} ($0 \leq a, b, c \leq 9, a \neq 5, b \neq 5, c \neq 5, a \neq 0$), a có 8 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 1 cách chọn (là 0) gồm $8.9 = 72$ (số).

Vậy có $180 - 72 = 108$ (số) phải đếm.

d) Chia hết cho 3, không chứa chữ số 3?

Số phải tìm có dạng \overline{abc} ($0 \leq a, b, c \leq 9, a \neq 3, b \neq 3, c \neq 3, a \neq 0$), a có 8 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 3 cách chọn (nếu $a + b = 3k$ thì $c = 0; 6; 9$, nếu $a + b = 3k + 1$ thì $c = 2; 5; 8$, nếu $a + b = 3k + 2$ thì $c = 1; 4; 7$) có $8.9.3 = 216$ (số).

19 **Bài 18:** Bạn Tâm đánh số trang của một cuốn vở có 110 trang bằng cách viết dãy số tự nhiên $1, 2, 3, \dots, 110$. Bạn Tâm phải viết tất cả bao nhiêu chữ số?

Lời giải:

Ta có: Từ trang 1 đến trang 9 có 9 trang, phải dùng 9 chữ số.

Từ trang 10 đến trang 99 có $(99 - 10) + 1 = 90$ (trang), phải dùng 180 (chữ số).

Từ trang 100 đến trang 110 có $(110 - 100) + 1 = 11$ (trang), phải dùng $11 \cdot 3 = 33$ (chữ số).

Vậy bạn Tâm phải viết tất cả: $9 + 180 + 33 = 222$ (chữ số).

Bài 19: Cho ba chữ số a, b, c đôi một khác nhau và khác 0. Tổng của tất cả các số có hai chữ số được lập từ ba chữ số a, b, c bằng 627. Tính tổng $a + b + c$.

Lời giải:

Ta có các số có hai chữ số được lập thành từ ba chữ số a, b, c là:

$$\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ba} + \overline{bc} + \overline{cb} + \overline{ca} + \overline{aa} + \overline{bb} + \overline{cc}$$

$$\text{Theo đầu bài ta có: } \overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ba} + \overline{bc} + \overline{cb} + \overline{ca} + \overline{aa} + \overline{bb} + \overline{cc} = 627 \Leftrightarrow 33(a + b + c) = 627 \Leftrightarrow a + b + c = 19$$

Vậy $a + b + c = 19$.

Bài 20: Tìm một số tự nhiên có hai chữ số biết rằng khi viết thêm số 12 vào bên trái số đó ta được số mới lớn gấp 26 lần số phải tìm.

Lời giải:

Gọi số cần tìm là: \overline{ab} ($a \neq 0; a, b < 10; a, b \in \mathbb{N}$)

Viết thêm số 12 vào bên trái số đó ta được: $\overline{12ab}$

Theo bài ra ta có: $\overline{12ab} = \overline{ab} \cdot 26$

$$1200 + \overline{ab} = \overline{ab} \cdot 26$$

$$\overline{ab} \cdot 26 - \overline{ab} = 1200$$

$$\overline{ab} \cdot (26 - 1) = 1200$$

$$\overline{ab} \cdot 25 = 1200$$

$$\overline{ab} = 48$$

Thử lại ta thấy $1248 : 48 = 26$.

Vậy số tự nhiên cần tìm là 1248.

Bài 21: Cho số có hai chữ số. Nếu lấy số đó chia cho hiệu của chữ số hàng chục và hàng đơn vị của nó thì được thương là 18 và dư 4. Tìm số đã cho.

Lời giải

Gọi số phải tìm là: \overline{ab} ($a \neq 0; a, b \in \mathbb{N}; a, b < 10$)

Theo bài ra ta có: $\overline{ab} = (a - b) \cdot 18 + 4$

$$10a + b = 18a - 18b + 4$$

$$19b = 8a + 4$$

Vì $8a + 4$ là số chẵn, suy ra b chẵn. Vậy $b \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$

Với $b = 0 \Rightarrow 8a + 4 = 0$ (vô lý)

Tương tự với các trường hợp b còn lại : ta có $b = 4; a = 9$ thỏa mãn bài toán

Vậy số cần tìm là 94.

20 **Bài 22:** Tìm một số tự nhiên có ba chữ số biết rằng khi viết thêm chữ số 2 vào bên phải số đó thì nó tăng thêm 4106 đơn vị.

Lời giải

Gọi số cần tìm là \overline{abc} ($a, b, c \in \mathbb{N}; a \neq 0; a, b, c < 10$)

Viết thêm chữ số 2 vào bên phải số đó, ta được: $\overline{abc2}$

Theo đề bài ta có: $\overline{abc2} = \overline{abc} + 4106$

$\overline{abc}.10 + 2 = \overline{abc} + 4106$ (phân tích $\overline{abc2}$ theo cấu tạo số)

Ta có: $\overline{abc}.10 - \overline{abc} = 4106 - 2$

$\overline{abc}.(10 - 1) = 4106$

$9\overline{abc} = 4104 \Leftrightarrow \overline{abc} = 456$

Thử lại: $4562 - 456 = 4106$ (đúng)

Vậy số tự nhiên cần tìm là 456.

Bài 23: Tìm số tự nhiên có ba chữ số \overline{abc} biết $\overline{abc} = (a + b + c)^3$.

Trích đề HSG huyện năm 2021 - 2022

Lời giải

Tìm số tự nhiên có 3 chữ số \overline{abc} biết $\overline{abc} = (a + b + c)^3$

Vì \overline{abc} là số tự nhiên có 3 chữ số nên a, b, c là chữ số, $a \neq 0$

$\overline{abc} = (a + b + c)^3$

$100a + 10b + c = (a + b + c)^3$

$a + 99a + b + 9b + c = (a + b + c)^3$

$(a + b + c) + 9(11a + b) = (a + b + c)^3$ (1)

Đặt $a + b + c = m$ ($m \in \mathbb{N}^*$)

Khi đó (1) trở thành $m + 9(11a + b) = m^3$

$9(11a + b) = m^3 - m$

$9(11a + b) = m(m - 1)(m + 1)$

$m(m - 1)(m + 1) : 9$

Ta có $100 \leq \overline{abc} < 1000 \Rightarrow 4^3 < m^3 < 10^3$

Do đó $4 < m < 10$ (1)

Lập luận suy ra bài toán có 3 trường hợp

+) TH1: Khi $m - 1$ chia hết cho 9

21 Mà $4 < m < 10 \Rightarrow 3 < m - 1 < 9$

Do đó không tìm được $m - 1$ chia hết cho 9 suy ra không tìm được m

+) TH2: Khi m chia hết cho 9

Do $4 < m < 10$ mà $m : 9 \Rightarrow m = 9$ (1)

Với $m = 9$ ta có $m^3 = 9^3 = 729 \Rightarrow \overline{abc} = 729 \Rightarrow a = 7, b = 2, c = 9$

$\Rightarrow a + b + c = 7 + 2 + 9 = 18 \Rightarrow m = 18$ do đó mâu thuẫn với (1)

Suy ra không tìm được m

+) TH3: $m + 1$ chia hết cho 9

Do $4 < m < 10 \Rightarrow 5 < m + 1 < 11$ mà $\Rightarrow m + 1 : 9 \Rightarrow m = 8$

Với $m = 8 \Rightarrow m^3 = 8^3 = 512 = \overline{abc} = 512 \Rightarrow a = 5, b = 1, c = 2 \Rightarrow a + b + c = 5 + 1 + 2 = 8 \Rightarrow m = 8$ thoả mãn (2)

Xác định số $\overline{abc} = 512$

Vậy $\overline{abc} = 512$

Bài 24: Cho tập hợp $S = \{1; 4; 7; 10; 13; 16; \dots\}$. Hỏi số 2023 có là phần tử của S hay không?

Lời giải

Tập hợp S gồm các số tự nhiên chia 3 dư 1

Ta có: 2003 chia 3 dư 1

Vậy 2003 là phần tử của S .

Bài 25: Tính giá trị của các biểu thức sau

$$C = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots + 2018 - 2019 - 2020.$$

$$D = 1.2 + 3.4. + 4.5 + \dots + 98.99 + 99.100.$$

Trích đề HSG huyện Quảng Xương năm 2011 - 2012

Lời giải

$$C = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots + 2018 - 2019 - 2020$$

$$C = 1 + (2 - 3) + (-4 + 5) + (6 - 7) + (-8 + 9) + \dots + (2018 - 2019) - 2020$$

$$C = 1 + (2 - 3) + (-4 + 5) + (6 - 7) + (-8 + 9) + \dots + (2018 - 2019) - 2020$$

$$C = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \dots + (-1) - 2020.$$

$$C = -2020.$$

$$D = 1.2 + 2.3 + 3.4. + 4.5 + \dots + 98.99 + 99.100$$

$$3D = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + 4.5.3 + \dots + 98.99.3 + 99.100.3$$

$$22 \quad 3D = 1.2.(3-0) + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + 98.99.(100-97) + 99.100.(101-98)$$

$$3D = 1.2.3 - 0 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + \dots + 98.99.100 - 97.98.99 + 99.100.101 - 98.99.100$$

$$3D = 98.99.100$$

$$D = \frac{98.99.100}{3}$$

$$D = 326700.$$

Bài 26: Thực hiện phép tính.

$$A = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \dots + 2023 - 2024.$$

Trích đề HSG huyện Thanh Hà năm 2012 - 2013

Lời giải

Ta có: $A = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \dots + 2023 - 2024$

$$A = (-1) + (-1) + (-1) + \dots + (-1)$$

$$A = -1012.$$

Bài 27: Thực hiện phép tính.

Tính tổng $A = 1.100 + 2.99 + 3.98 + \dots + 99.2 + 100.1.$

Lời giải

Ta biến đổi các số từ 99 đến 1 thành hiệu của 100 với các số từ 1 đến 99

$$A = 1.100 + 2.(100-1) + 3(100-2) + \dots + 99.(100-98) + 100.(100-99)$$

$$= 1.100 + 2.100 - 2.1 + 3.100 - 3.2 + \dots + 99.100 - 98.99 + 100.100 - 99.100$$

$$= 100.(1+2+3+\dots+99+100) - (1.2 + 2.3 + \dots + 98.99 + 99.100)$$

$$= (100.5050) - (99.100.101) : 3$$

$$= 50.100.101 - 100.101.33.$$

$$= 100.101(50-33)$$

$$= 10100.17$$

$$= 171700.$$

Bài 28: Tính tổng: $S = 7 + 9 + 11 + \dots + 97 + 99.$

a) Tính tổng S trên .

b) Tìm số hạng thứ 33 của tổng trên .

Lời giải

a) S có số số hạng được tính bằng cách: $(99 - 7) : 2 + 1 = 47$

Tổng S có giá trị là : $S = (99 + 7). 47 : 2 = 2491$

b) Xét tổng $S = 7 + 9 + 11 + \dots + 97 + 99$

Áp dụng công thức tìm số hạng trong một dãy số

Số cuối = (số số hạng - 1) . khoảng cách + số đầu

(số cuối là số hạng cần tìm trong tổng các dãy số tự nhiên cách đều)

23 Số hạng thứ 33 của tổng trên là : $(33 - 1) \cdot 2 + 7 = 71$.

Bài 29: Tính tổng : $B = 1 + 5 + 9 + \dots + 2005 + 2009$.

Lời giải

Số số hạng của B là : $(2009 - 1) : 4 + 1 = 503$

Tổng $B = (2009 + 1) \cdot 503 : 2 = 505515$.

Bài 30: Tính giá trị của A biết:

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2014.$$

Lời giải

Dãy số A có số số hạng là : $(2014 - 1) : 1 + 1 = 2014$ (số hạng)

Giá trị của A là : $(2014 + 1) \cdot 2014 : 2 = 2029105$.

Bài 32: Cho dãy số: 2; 4; 6; 8; 10; 12; Tìm số hạng thứ 2014 của dãy số trên ?

Lời giải

Số hạng thứ 2014 của dãy số trên là : $(2014 - 1) \cdot 2 + 2 = 4028$.

Bài 33: Tính tổng 50 số lẻ liên tiếp biết số lẻ lớn nhất trong dãy đó là 2013?

Lời giải

Số hạng bé nhất trong dãy số đó là : $2013 - (50 - 1) \cdot 2 = 1915$.

Tổng của 50 số lẻ cần tìm là : $(2013 + 1915) \cdot 50 : 2 = 98200$.

Bài 34: Một dãy phố có 15 nhà. Số nhà của 15 nhà đó được đánh là các số lẻ liên tiếp, biết tổng của 15 số nhà của dãy phố đó bằng 915. Hãy cho biết số nhà đầu tiên của dãy phố đó là số nào ?

Lời giải

Hiệu giữa số nhà cuối và số nhà đầu là : $(15 - 1) \cdot 2 = 28$.

Tổng của số nhà cuối và số nhà đầu là : $915 : 2 = 457.5$

Số nhà đầu tiên trong dãy phố đó là : $(457.5 - 28) : 2 = 214.75$

Bài 35: Bạn Lâm đánh số trang một cuốn sách dày 284 trang bằng dãy số chẵn 2; 4; 6; 8;

Lời giải

Chữ số 300 của dãy số trên là chữ số nào?

Viết dãy số chẵn từ 2 đến 98 phải dùng: $4 + 90 = 94$ (chữ số), còn lại $300 - 94 = 206$ (chữ số) để viết các số chẵn có ba chữ số kể từ 100.

Ta thấy: $206 : 3 = 68$ dư 2. Số chẵn thứ 68 kể từ 100 là : $100 + (68 - 1) \cdot 2 = 234$.

Hai chữ số tiếp theo là 2 và 3 thuộc số 236.

Vậy chữ số thứ 300 của dãy là chữ số 3 thuộc số 236.

Bài 36: Người ta viết liền nhau dãy các số tự nhiên 12345.....Hỏi chữ số chỉ đơn vị của số :

a) 53 đứng ở hàng thứ mấy?

b) 328 đứng ở hàng thứ mấy?

Lời giải

a) Từ số 1 đến số 53 (kể cả 53). Có: $9 + (53 - 10 + 1) \cdot 2 = 97$ chữ số. Vậy 3 ở hàng thứ 97.

b) Vậy 8 ở hàng thứ 876.

c) Vậy 7 ở hàng thứ 5241.

Bài 37: Tính giá trị của các biểu thức sau

$$C = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots + 2018 - 2019 - 2020.$$

$$D = 1.2 + 3.4. + 4.5 + \dots + 98.99 + 99.100.$$

Trích đề HSG huyện Quảng Xương năm 2011 -2012

Lời giải

$$C = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots + 2018 - 2019 - 2020$$

$$C = 1 + (2 - 3) + (-4 + 5) + (6 - 7) + (-8 + 9) + \dots + (2018 - 2019) - 2020$$

$$C = 1 + (2 - 3) + (-4 + 5) + (6 - 7) + (-8 + 9) + \dots + (2018 - 2019) - 2020$$

$$C = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \dots + (-1) - 2020.$$

$$C = -2020.$$

$$D = 1.2 + 2.3 + 3.4. + 4.5 + \dots + 98.99 + 99.100$$

$$3D = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + 4.5.3 + \dots + 98.99.3 + 99.100.3$$

$$3D = 1.2.(3 - 0) + 2.3.(4 - 1) + 3.4.(5 - 2) + 4.5.(6 - 3) \dots + 98.99.(100 - 97) + 99.100.(101 - 98)$$

$$3D = 1.2.3 - 0 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + \dots + 98.99.100 - 97.98.99 + 99.100.101 - 98.99.100$$

$$3D = 98.99.100$$

$$D = \frac{98.99.100}{3}.$$

$$D = 326700.$$

Bài 38: Thực hiện phép tính.

$$A = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \dots + 2023 - 2024.$$

Trích đề HSG huyện Thanh Hà năm 2012 -2013

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \dots + 2023 - 2024$$

$$A = (-1) + (-1) + (-1) + \dots + (-1)$$

$$A = -1012.$$

Bài 39: Thực hiện phép tính.

$$\text{Tính tổng } A = 1.100 + 2.99 + 3.98 + \dots + 99.2 + 100.1.$$

Lời giải

Ta biến đổi các số từ 99 đến 1 thành hiệu của 100 với các số từ 1 đến 99

$$A = 1.100 + 2.(100 - 1) + 3(100 - 2) + \dots + 99.(100 - 98) + 100.(100 - 99)$$

$$\begin{aligned}
 25 &= 1.100 + 2.100 - 2.1 + 3.100 - 3.2 + \dots + 99.100 - 98.99 + 100.100 - 99.100 \\
 &= 100.(1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100) - (1.2 + 2.3 + \dots + 98.99 + 99.100) \\
 &= (100.5050) - (99.100.101) : 3 \\
 &= 50.100.101 - 100.101.33. \\
 &= 100.101(50 - 33) \\
 &= 10100.17 \\
 &= 171700.
 \end{aligned}$$

Bài 40: Tính tổng: $S = 7 + 9 + 11 + \dots + 97 + 99$.

a) Tính tổng S trên .

b) Tìm số hạng thứ 33 của tổng trên .

Lời giải

a) S có số số hạng được tính bằng cách: $(99 - 7) : 2 + 1 = 47$

Tổng S có giá trị là : $S = (99 + 7). 47 : 2 = 2491$

b) Xét tổng $S = 7 + 9 + 11 + \dots + 97 + 99$

Áp dụng công thức tìm số hạng trong một dãy số

Số cuối = (số số hạng - 1) . khoảng cách + số đầu

(số cuối là số hạng cần tìm trong tổng các dãy số tự nhiên cách đều)

Số hạng thứ 33 của tổng trên là : $(33 - 1).2 + 7 = 71$.

Bài 41: Tính tổng : $B = 1 + 5 + 9 + \dots + 2005 + 2009$.

Lời giải

Số số hạng của B là : $(2009 - 1) : 4 + 1 = 503$

Tổng $B = (2009 + 1).503 : 2 = 505515$.

Bài 42: Tính giá trị của A biết:

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2014.$$

Lời giải

Dãy số A có số số hạng là: $(2014 - 1) : 1 + 1 = 2014$ (số hạng)

Giá trị của A là: $(2014 + 1).2014 : 2 = 2029105$.

Bài 43: Cho dãy số: 2; 4; 6; 8; 10; 12; Tìm số hạng thứ 2014 của dãy số trên ?

Lời giải

Số hạng thứ 2014 của dãy số trên là: $(2014 - 1).2 + 2 = 4028$.

Bài 44: Tính tổng 50 số lẻ liên tiếp biết số lẻ lớn nhất trong dãy đó là 2013?

Lời giải

Số hạng bé nhất trong dãy số đó là: $2013 - (50 - 1).2 = 1915$.

Tổng của 50 số lẻ cần tìm là: $(2013+1915).50:2=98200$.

Bài 45: Một dãy phố có 15 nhà. Số nhà của 15 nhà đó được đánh là các số lẻ liên tiếp, biết tổng của 15 số nhà của dãy phố đó bằng 915. Hãy cho biết số nhà đầu tiên của dãy phố đó là số nào?

Lời giải

Hiệu giữa số nhà cuối và số nhà đầu là: $(15-1).2=28$.

Tổng của số nhà cuối và số nhà đầu là: $915:2:15=122$.

Số nhà đầu tiên trong dãy phố đó là: $(122-28):2=47$.

Bài 46: Bạn Lâm đánh số trang một cuốn sách dày 284 trang bằng dãy số chẵn 2; 4; 6; 8; ...

Lời giải

Chữ số 300 của dãy số trên là chữ số nào?

Viết dãy số chẵn từ 2 đến 98 phải dùng: $4+90=94$ (chữ số), còn lại $300-94=206$ (chữ số) để viết các số chẵn có ba chữ số kể từ 100.

Ta thấy: $206:3=68$ dư 2. Số chẵn thứ 68 kể từ 100 là: $100+(68-1).2=234$.

Hai chữ số tiếp theo là 2 và 3 thuộc số 236.

Vậy chữ số thứ 300 của dãy là chữ số 3 thuộc số 236.

Bài 47: Người ta viết liên nhau dãy các số tự nhiên 12345.... Hỏi chữ số chỉ đơn vị của số :

- 53 đứng ở hàng thứ mấy?
- 328 đứng ở hàng thứ mấy?
- 1587 đứng ở hàng thứ mấy?

Lời giải

a) Từ số 1 đến số 53 (kể cả 53). Có: $9+(53-10+1).2=97$ chữ số. Vậy 3 ở hàng thứ 97.

b) Vậy 8 ở hàng thứ 876.

c) Vậy 7 ở hàng thứ 5241.

Bài 48: Tìm số có hai chữ số, biết rằng số mới viết theo thứ tự ngược lại nhân với số phải tìm được 3154, số nhỏ trong hai số đó thì lớn hơn tổng các chữ số của nó là 27.

Lời giải

Gọi số phải tìm là \overline{ab} ($a \neq 0; a, b \leq 9; a, b \in N$) \Rightarrow số sau là \overline{ba} , giả sử $\overline{ab} > \overline{ba}$ ta có:

$$\overline{ba} - (b+a) = 27$$

$$10b+a-b=27$$

$$b=3$$

Mà $\overline{a3.3a}=3154$

Suy ra $\overline{3a}$ có tận cùng là 8, suy ra $a=8$

Thử lại: $83.38=3154$ và $38-(3+8)=27$ (chọn)

Vậy số cần tìm là 38 và 83.

Bài 49: Một số có 3 chữ số, tận cùng bằng chữ số 7. Nếu chuyển chữ số 7 đó lên đầu thì ta được một số mới mà khi chia cho số cũ thì được thương là 2 dư 21. Tìm số đó.

Lời giải

Gọi $\overline{ab7}$ số tự nhiên có chữ số 7 là hàng đơn vị.

$\overline{7ab}$ số tự nhiên có chữ số 7 là số hàng trăm.

27 Theo đề bài ta có: $\overline{7ab} : \overline{ab7} = 2$ dư 21

$$\text{Hay: } \overline{7ab} = 2 \cdot \overline{ab7} + 21$$

$$\text{Ta có: } \overline{ab} = 10a + b; \overline{abc} = 100a + 10b + c$$

$$700 + \overline{ab} = 2(10\overline{ab} + 7) + 21$$

$$700 + \overline{ab} = 20\overline{ab} + 14 + 21$$

$$700 - 14 - 21 = 20\overline{ab} - \overline{ab}$$

$$665 = 19\overline{ab}$$

$$\overline{ab} = 35.$$

Vậy số tự nhiên có ba chữ số đó là: 357.

Bài 50: Tìm số tự nhiên có 4 chữ số, chữ số hàng đơn vị là 1, nếu chuyển chữ số hàng đơn vị lên đầu thì ta được số mới nhỏ hơn số đã cho 2889 đơn vị. Tìm số ban đầu.

Lời giải

Gọi số cần tìm là $\overline{abc1}$ ($0 \leq a, b, c \leq 9; a \neq 0$)

$$\text{Theo bài ra ta có: } \overline{abc1} = \overline{1abc} + 2889$$

$$10 \cdot \overline{abc} + 1 = 1000 + \overline{abc} + 2889$$

$$9 \cdot \overline{abc} = 3889$$

$$\overline{abc} = 432$$

Vậy số cần tìm là 4321.

Bài 51: Cho số có 4 chữ số, có chữ số hàng đơn vị là 8. Nếu chuyển chữ số hàng đơn vị lên đầu thì sẽ được số mới lớn hơn số đã cho 4059 đơn vị. Tìm số đã cho.

Lời giải

Gọi số cần tìm là $\overline{abc8}$ ($0 \leq a, b, c \leq 9; a \neq 0$)

$$\text{Theo bài ra ta có: } \overline{8abc} = \overline{abc8} + 4059$$

$$8000 + \overline{abc} = 10 \cdot \overline{abc} + 8 + 4059$$

$$9 \cdot \overline{abc} = 3933$$

$$\overline{abc} = 437$$

Vậy số cần tìm là 4378.

Bài 52: Tìm số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 5 và 27, biết rằng hai số giữa của nó là 97.

Lời giải

Gọi số cần tìm là $\overline{a97b}$ với $a, b \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}, a \neq 0$.

$$\text{Vì } \overline{a97b} : 5 \text{ nên } \begin{cases} b = 0 \\ b = 5 \end{cases}$$

TH1: Với $b = 0$ ta có $\overline{a970} : 27$ hay $a + 9 + 7 + 0 = a + 16 : 9$ nên $a = 2$ (thỏa mãn).

TH2: Với $b = 5$ ta có $\overline{a970} : 27$ hay $a + 9 + 7 + 5 = a + 21 : 9$ nên $a = 6$ (loại).

Bài 53: Tìm số có ba chữ số biết số đó chia cho 11 được thương bằng tổng các chữ số của số đó.

Lời giải

Gọi số cần tìm là : $\overline{abc}, (a, b, c \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}, a \neq 0)$.

$$\overline{abc} = 11(a + b + c)$$

$$100a + 10b + c = 11a + 11b + 11c$$

$$89a = b + 10c$$

$$89a = \overline{cb}$$

28 Vì \overline{cb} là số có hai chữ số nên $0 < a < 2$ suy ra $a = 1$.

Khi đó $89 = \overline{cb}$ suy ra $\overline{bc} = 98$ do đó $\overline{abc} = 198$.

Bài 54: Tìm số tự nhiên có ba chữ số \overline{abc} , thỏa mãn $\overline{abc} = (a + b + c)^3$

Lời giải

Điều kiện: $0 < a \leq 9; 0 \leq b, c \leq 9; a, b, c \in \mathbb{N}$

Nhận thấy: $100 \leq \overline{abc} \leq 999$

$$100 \leq (a + b + c)^3 \leq 999$$

$$5^3 \leq (a + b + c)^3 \leq 9^3$$

$$5 \leq a + b + c \leq 9$$

$$(a + b + c) \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

Nếu $a + b + c = 5$ thì $(a + b + c)^3 = 125$. Thử lại $(1 + 2 + 5)^3 = 512$ (không thỏa mãn).

Nếu $a + b + c = 6$ thì $(a + b + c)^3 = 216$. Thử lại $(2 + 1 + 6)^3 = 729$ (không thỏa mãn).

Nếu $a + b + c = 7$ thì $(a + b + c)^3 = 343$. Thử lại $(3 + 4 + 3)^3 = 1000$ (không thỏa mãn).

Nếu $a + b + c = 8$ thì $(a + b + c)^3 = 512$. Thử lại $(5 + 1 + 2)^3 = 512$ (thỏa mãn).

Nếu $a + b + c = 9$ thì $(a + b + c)^3 = 729$. Thử lại $(7 + 2 + 9)^3 = 5832$ (không thỏa mãn).

Vậy số tự nhiên cần tìm là 512.

Bài 55: Hiệu của hai số là 4. Nếu tăng một số gấp ba lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng 60. Tìm hai số đó.

Lời giải

Gọi hai số đó là a, b ($a > b; a, b \in \mathbb{N}$)

Theo bài ra ta có: $a - b = 4$ hay $b = a - 4$ (1)

Nếu tăng một số gấp ba lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng 60 thì $3a - b = 60$ (2)

Thay (1) vào (2) ta có $3a - (a - 4) = 60$

$$3a - a + 4 = 60$$

$$2a = 56$$

$$a = 28$$

$$\text{Suy ra } b = 24$$

Vậy số cần tìm là 24; 28.

Bài 56: Tính tổng sau: $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2$

Lời giải

Ta có $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 49.50 + 50.51$

$$= 1(1+1) + 2(2+1) + 3(3+1) + \dots + 49(49+1) + 50(50+1)$$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2) + (1 + 2 + 3 + \dots + 50)$$

$$= P + (1 + 2 + 3 + \dots + 50)$$

$$\text{Suy ra } P = S - (1 + 2 + 3 + \dots + 50)$$

$$\text{Lại có } S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 49.50 + 50.51 = \frac{50.51.52}{3} = 44200$$

$$(1 + 2 + 3 + \dots + 50) = \frac{(50+1).50}{2} = 1275$$

29 Vậy $P = 44200 - 1275 = 42925$.

Bài 57: Tính tổng $S = 1.4 + 4.7 + 7.10 + \dots + 2017.2020$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} 9S &= 1.4.9 + 4.7.9 + 7.10.9 + \dots + 2017.2020.9 \\ &= 1.4.(7+2) + 4.7.(10-1) + 7.10.(13-4) + \dots + 2017.2020.(2023-2014) \\ &= 1.4.7 + 1.4.2 + 4.7.10 - 1.4.7 + 7.10.13 - 4.7.10 \dots + 2017.2020.2023 - 2014.2017.2020 \\ &= 8 + 2017.2020.2023 \end{aligned}$$

Suy ra $S = \frac{8 + 2017.2020.2023}{9} = 915821092$

Vậy $S = 915821092$.

Bài 58: Tìm tất cả các số tự nhiên có 3 chữ số \overline{abc} sao cho $\overline{abc} = n^2 - 1$ và $\overline{cba} = (n-2)^2$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = n^2 - 1 \quad (1)$$

$$\overline{cba} = 100c + 10b + c = n^2 - 4n + 4 \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $99(a-c) = 4n-5$ nên $44n-5 \vdots 99$

Mặt khác: $100.(n^2 - 1) = 999$

suy ra $4n-5 = 99$ nên $n = 26$.

Vậy $\overline{abc} = 675$.

Bài 59: Tìm a, b, c biết: $\overline{2009abc} \vdots 315$

Lời giải

$315 = 5.7.9$. Mà $(5; 7; 9) = 1 \Rightarrow \overline{2009abc} \vdots \text{BCNN}(5; 7; 9)$

$$\overline{2009abc} = 2009000 + \overline{abc} = 315.6377 + 245 + \overline{abc}$$

$$\Rightarrow (245 + \overline{abc}) \vdots 315$$

$$\Rightarrow 315 \in \{(245 + \overline{abc})\}$$

Mà $100 \leq \overline{abc} \leq 999$

$$\Rightarrow 345 \leq 245 + \overline{abc} \leq 1244$$

$$\Rightarrow 245 + \overline{abc} \in \{630; 945\}$$

$$\Rightarrow \overline{abc} \in \{385; 700\}$$

Bài 60: Tìm số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 5 và 27, biết rằng hai số giữa của nó là 97.

Lời giải

Gọi số cần tìm là $\overline{a97b}$ với $a, b \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}, a \neq 0$.

$$\text{Vì } \overline{a97b} \vdots 5 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 5 \end{cases}$$

TH1: Với $b = 0 \Rightarrow \overline{a970} \vdots 27$

$$\Rightarrow a + 9 + 7 + 0 = a + 16 \vdots 9$$

$$\Rightarrow a = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

TH2: Với $b = 5 \Rightarrow \overline{a975} \vdots 27$

$$\Rightarrow a + 9 + 7 + 5 = a + 21 \vdots 9$$

30 $\Rightarrow a = 6$ (loại).

Bài 61: Tìm a, b biết: $\overline{5a6b2} : 3$ và $a - b = 4$.

Lời giải

$$\overline{5a6b2} : 3$$

$$\Rightarrow 5 + a + 6 + b + 2 = a + b + 13 : 3$$

$$\Rightarrow a + b + 1 : 3$$

Do $a, b \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}$

$$\Rightarrow a + b = 2, a + b = 5, a + b = 8, a + b = 11, a + b = 14, a + b = 17.$$

Kết hợp với $a - b = 4$.

Bài 62: Tìm a, b biết: $(\overline{14a3} + \overline{35b2}) : 9$ và $a - b = 3$.

Lời giải

$$\overline{14a3} + \overline{35b2} : 9$$

$$\Rightarrow 1 + 4 + a + 3 + 3 + 5 + b + 2 = a + b + 18 : 9$$

$$\Rightarrow a + b : 9$$

Do $a, b \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}$

$$\Rightarrow a + b = 0, a + b = 9, a + b = 18.$$

Kết hợp với $a - b = 3$.

Bài 63: Tìm 1 số có ba chữ số biết số đó chia cho 11 được thương bằng tổng các chữ số của số đó

Lời giải

Gọi số cần tìm là \overline{abc} , ($a, b, c \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}, a \neq 0$).

$$\overline{abc} = 11(a + b + c)$$

$$\Rightarrow 100a + 10b + c = 11a + 11b + 11c$$

$$\Rightarrow 89a = b + 10c$$

$$\Rightarrow 89a = \overline{cb}$$

Vì \overline{cb} là số có hai chữ số nên $0 < a < 2 \Rightarrow a = 1$.

Khi đó $89 = \overline{cb}$

$$\Rightarrow \overline{bc} = 98$$

$$\Rightarrow \overline{abc} = 198.$$

Bài 64: Cho tổng $S = 1 + 4 + 7 + \dots + 199$

a) Tìm số hạng thứ 50 của tổng

b) Tính S .

Lời giải

Cho tổng $S = 1 + 4 + 7 + \dots + 199$

a) Số hạng thứ 50 của tổng là:

$$1 + (50 - 1) \cdot 3 = 148$$

b) Số số hạng của tổng là:

$$(199 - 1) : 3 + 1 = 67 \text{ (số hạng)}$$

$$S = 1 + 4 + 7 + \dots + 199 = (199 + 1) \cdot 67 : 2 = 6700$$

Bài 65: Cho tổng $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 101$

a) Tìm số hạng thứ 25 của tổng

b) Tính S .

Lời giải

Cho tổng $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 101$

31 a) Số hạng thứ 25 của tổng là:

$$1 + (25 - 1) \cdot 2 = 49$$

b) Số số hạng của tổng là:

$$(101 - 1) : 2 + 1 = 51 \text{ (số hạng)}$$

$$S = 1 + 3 + 5 + \dots + 101 = (101 + 1) \cdot 51 : 2 = 2601$$

Bài 66: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số? Tính tổng của chúng.

Lời giải

Các số tự nhiên có hai chữ số là 10; 11; 12; ...; 99

Số các số này là: $99 - 10 + 1 = 90$ (số)

Ta có: $A = 10 + 11 + 12 + \dots + 99$ (1)

$$A = 99 + 98 + \dots + 11 + 10$$
 (2)

Cộng (1) với (2) và áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng ta được:

$$A + A = (10 + 99) + (11 + 98) + \dots + (98 + 11) + (99 + 10) = 109 + 109 + \dots + 109 + 109$$

$$\text{Nên } 2A = 109 \cdot 90 \Rightarrow A = 109 \cdot 90 : 2 = 45 \cdot 109 = 4905$$

Bài 67: Tính tổng của dãy số:

a) $A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$

b) $B = 6 + 7 + 8 + \dots + 245$

Lời giải

a) $A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$

Số số hạng của tổng là: $(100 - 1) : 1 + 1 = 100$ (số hạng)

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 = (100 + 1) \cdot 100 : 2 = 5050$$

b) $B = 6 + 7 + 8 + \dots + 245$

Số số hạng của tổng là: $(245 - 6) : 1 + 1 = 240$ (số hạng)

$$B = 6 + 7 + 8 + \dots + 245 = (245 + 6) \cdot 240 : 2 = 30120$$

Bài 68: Cho bốn chữ số 0; 3; 8; 9.

a) Tìm số lớn nhất, số nhỏ nhất có 4 chữ số khác nhau được viết từ 4 chữ số đã cho.

b) Tìm số lẻ lớn nhất, số chẵn nhỏ nhất có 4 chữ số khác nhau được viết từ 4 chữ số đã cho.

Lời giải:

a) Số lớn nhất có 4 chữ số khác nhau được viết từ 4 chữ số đã cho phải có chữ số hàng nghìn là chữ số lớn nhất. Vậy chữ số hàng nghìn phải tìm là 9.

Chữ số hàng trăm phải là chữ số lớn nhất trong 3 chữ số còn lại. Vậy chữ số hàng trăm phải tìm là 8.

Chữ số hàng chục là chữ số lớn nhất trong 2 chữ số còn lại. Vậy chữ số hàng chục là 3.

Vậy số cần tìm là 9830.

Tương tự số nhỏ nhất có bốn chữ số khác nhau từ 4 chữ số trên là 3089.

b) Tương tự số lẻ lớn nhất thỏa mãn điều kiện đầu bài là 9803.

Số chẵn nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện đầu bài là 3098.

Bài 69: Tìm số tự nhiên có ba chữ số \overline{abc} , thỏa mãn $\overline{abc} = (a + b + c)^3$

Lời giải:

Điều kiện: $0 < a \leq 9; 0 \leq b, c \leq 9; a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\text{Nhận thấy: } 100 \leq \overline{abc} \leq 999 \Rightarrow 100 \leq (a + b + c)^3 \leq 999 \Leftrightarrow 5^3 \leq (a + b + c)^3 \leq 9^3$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq a + b + c \leq 9 \Rightarrow (a + b + c) \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

Nếu $a+b+c=5$ thì $(a+b+c)^3=125$. Thử lại $(1+2+5)^3=512$ (không thỏa mãn)

Nếu $a+b+c=6$ thì $(a+b+c)^3=216$. Thử lại $(2+1+6)^3=729$ (không thỏa mãn)

Nếu $a+b+c=7$ thì $(a+b+c)^3=343$. Thử lại $(3+4+3)^3=1000$ (không thỏa mãn)

Nếu $a+b+c=8$ thì $(a+b+c)^3=512$. Thử lại $(5+1+2)^3=512$ (thỏa mãn)

Nếu $a+b+c=9$ thì $(a+b+c)^3=729$. Thử lại $(7+2+9)^3=5832$ (không thỏa mãn)

Vậy số tự nhiên cần tìm là 512.

Bài 70: Tìm hai số, biết rằng tổng của chúng gấp 5 lần hiệu của chúng, tích của chúng gấp 24 lần hiệu của chúng.

Phân tích: Bài toán có thể giải bằng “số phần” bằng cách biểu thị hiệu là 1 phần thì tổng là 5 phần và tích là 24 phần. Từ đó tính được số lớn ứng với bao nhiêu phần, số bé ứng với bao nhiêu phần.

Lời giải

Theo đầu bài. Nếu biểu thị hiệu là 1 phần thì tổng là 5 phần và tích là 24 phần.

Số lớn là: $(5+1):2=3$ (phần).

Số bé là: $5-3=2$ (phần)

Vậy tích sẽ bằng 12 lần số bé.

Ta có: Tích = Số lớn \times Số bé

$$\text{Tích} = 12 \times \text{Số bé}$$

Số lớn là 12.

Số bé là: $12:3.2=8$

Vậy hai số tự nhiên cần tìm là 12;8.

Bài 71: Tìm thương của một phép chia, biết rằng nếu thêm 15 vào số bị chia và thêm 5 vào số chia thì thương và số dư không đổi.

Phân tích: Thực hiện biểu diễn số bị chia theo số chia, số thương và số dư, từ đó thiết lập được hai đẳng thức liên quan giữa số thương, số chia, và số dư. Cuối cùng tìm được thương.

Lời giải

Gọi số bị chia, số chia, thương và số dư lần lượt là a, b, c, d ($a, b, c, d \in \mathbb{N}, b \neq 0; d < b$). Ta có:

$$a:b=c \text{ (dư } d) \Rightarrow a=cb+d$$

$$\text{Theo đề ta có: } (a+15):(b+5)=c \text{ (dư } d) \Rightarrow a+15=c.(b+5)+d$$

$$\text{Hay } a+15=cb+c.5+d$$

$$\text{Mà } a=cb+d \text{ nên } a+15=cb+c.5+d=cb+d+15=cb+c.5+d$$

$$\text{Suy ra } 15=c.5. \text{ Vậy } c=3.$$

Bài 72: Hiệu của hai số là 4. Nếu tăng một số gấp ba lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng 60. Tìm hai số đó.

Lời giải

Gọi 2 số đó là a, b ($a > b; a, b \in \mathbb{N}$)

$$\text{Theo bài ra ta có: } a-b=4 \Rightarrow b=a-4 \quad (1)$$

$$\text{Nếu tăng một số gấp ba lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng } 60 \Rightarrow 3a-b=60 \quad (2)$$

$$\text{Thay (1) vào (2) ta có } 3a-(a-4)=60 \Rightarrow 3a-a+4=60 \Rightarrow 2a=56 \Rightarrow a=28 \Rightarrow b=24$$

Vậy số cần tìm là 24;28.

Bài 73: Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 4 gồm bốn chữ số, chữ số tận cùng bằng 2?

Phân tích: Đây là bài toán đếm số tự nhiên có liên quan tới dấu hiệu chia hết cho 4. Trước hết ta cần viết số tự nhiên cần tìm dưới dạng $\overline{abc2}$, sau đó đếm số cách chọn mỗi chữ số tập hợp $\{0,1,2,\dots,9\}$. Việc thực hiện số cách chọn các chữ số a, b, c có sự ràng buộc lẫn nhau. Do đó nếu chữ số a có m cách chọn,

33 chữ số b có n cách chọn, chữ số c có k cách chọn thì ta sẽ có $m.n.k$ số có bốn chữ số thỏa mãn bài toán. Việc chọn chữ số c phải thỏa mãn điều kiện chi chia hết cho 4 là $\overline{c2}:4$.

Lời giải:

Các số phải đếm có dạng: $\overline{abc2}$ ($a \neq 0, 0 \leq a, b, c \leq 9$).

Chữ số a có 9 cách chọn.

Với mỗi cách chọn a , chữ số b có 10 cách chọn.

Với mỗi cách chọn a, b chữ số c có 5 cách chọn (1, 3, 5, 7, 9) để tạo với chữ số 2 tận cùng làm thành số chia hết cho 4.

Tất cả có: $9.10.5 = 450$ (số).

Bài 74: Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 5?

Phân tích: Số tự nhiên có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 5, ta cần hiểu chữ số 5 có thể là chữ số hàng đơn vị, chữ số hàng chục, chữ số hàng trăm nên ta cần chia ra ba loại số có 3 chữ số thỏa mãn là: $\overline{5ab}, \overline{a5b}, \overline{ab5}$. Ở mỗi loại số ta thực hiện đếm số cách chọn mỗi chữ số từ tập hợp $\{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ giống như bài 2.

Lời giải:

Ta chia ra 3 loại số:

Số đếm có dạng $\overline{5ab}$ ($0 \leq a, b \leq 9, a \neq 5, b \neq 5$): chữ số a có 9 cách chọn, chữ số b có 9 cách chọn các số thuộc loại này có: $9.9 = 81$ (số).

Số đếm có dạng $\overline{a5b}$ ($0 \leq a, b \leq 9, a \neq 5, b \neq 5, a \neq 0$): chữ số a có 8 cách chọn, chữ số b có 9 cách chọn, các số thuộc loại này có: $8.9 = 72$ (số).

Số đếm có dạng $\overline{ab5}$ ($0 \leq a, b \leq 9, a \neq 5, b \neq 5, a \neq 0$): các số thuộc loại này có: $8.9 = 72$ (số).

Vậy số tự nhiên có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 5 là $81 + 72 + 72 = 225$ (số).

Bài 75: Trong các số tự nhiên có ba chữ số, có bao nhiêu số:

- a) Chứa đúng một chữ số 4?
- b) Chứa đúng hai chữ số 4?
- c) Chia hết cho 5, có chứa chữ số 5?
- d) Chia hết cho 3, không chứa chữ số 3?

Lời giải:

a) Chứa đúng một chữ số 4?

Các số phải đếm có 3 dạng:

- Dạng $\overline{4bc}$ ($0 \leq c, b \leq 9, c \neq 4, b \neq 4$) có $9.9 = 81$ (số).

- Dạng $\overline{a4c}$ ($0 \leq a, c \leq 9, a \neq 4, c \neq 4, a \neq 0$) có $8.9 = 72$ (số).

- Dạng $\overline{ab4}$ ($0 \leq a, b \leq 9, a \neq 4, b \neq 4, a \neq 0$) có $8.9 = 72$ (số).

Tất cả có: $81 + 72 + 72 = 225$ (số).

b) Chứa đúng hai chữ số 4?

Các số phải đếm gồm 3 dạng:

- Dạng $\overline{44c}$ ($0 \leq c \leq 9, c \neq 4$) có 9 (số).

- Dạng $\overline{a44}$ ($0 \leq a \leq 9, a \neq 4, a \neq 0$) có 8 (số).

- Dạng $\overline{4b4}$ ($0 \leq b \leq 9, b \neq 4$) có 9 (số).

Tất cả có: $9 + 8 + 9 = 26$ (số).

c) Chia hết cho 5, có chứa chữ số 5?

Số có ba chữ số, chia hết cho 5 gồm 180 số, trong đó số không chứa chữ số 5 có dạng \overline{abc} ($0 \leq a, b, c \leq 9, a \neq 5, b \neq 5, c \neq 5, a \neq 0$), a có 8 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 1 cách chọn (là 0) gồm $8.9 = 72$ (số).

34 Vậy có $180 - 72 = 108$ (số) phải đếm.

d) Chia hết cho 3, không chứa chữ số 3?

Số phải tìm có dạng \overline{abc} ($0 \leq a, b, c \leq 9, a \neq 3, b \neq 3, c \neq 3, a \neq 0$), a có 8 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 3 cách chọn (nếu $a+b=3k$ thì $c=0;6;9$, nếu $a+b=3k+1$ thì $c=2;5;8$, nếu $a+b=3k+2$ thì $c=1;4;7$) có $8.9.3 = 216$ (số).

Bài 76: Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5?

Phân tích: Những số có tận cùng bằng 5 luôn cách nhau 10 đơn vị, tuy nhiên bài toán đòi hỏi số tự nhiên có 4 chữ số và chia hết cho 3. Do đó ta cần xác định: Số nhỏ nhất có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5. Khoảng cách trong dãy này sẽ là 30. Từ đó vận dụng công thức “Số số hạng = (số cuối – số đầu): Khoảng cách + 1”.

Lời giải:

Số lớn nhất có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5 là 9975

Số nhỏ nhất có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5 là 1005

Ta có dãy số: 1005; 1035; 1065;....; 9975

Khoảng cách của dãy là 30

\Rightarrow Số số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5 là: $(9975 - 1005) : 30 + 1 = 300$

Vậy có 300 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 77: Trong các số tự nhiên từ 1 đến 100, có bao nhiêu số:

a) Chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3?

b) Chia hết cho ít nhất một trong hai số 2 và 3?

c) Không chia hết cho 2 và không chia hết cho 3?

Lời giải:

a) Chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3?

Các số chia hết cho 2 là: 2; 4; 6;....; 100

Số các số chia hết cho 2 là:

$$\frac{(100 - 2)}{2} + 1 = 50 \text{ (số)}$$

Các số chia hết cho 2 và 3: 6; 12; 18; 24;....; 96

Số các số chia hết cho cả 2 và 3 là:

$$\frac{(96 - 6)}{6} + 1 = 16 \text{ (số)}$$

Vậy từ 1 đến 100 có $50 - 16 = 34$ số chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3.

b) Chia hết cho ít nhất một trong hai số 2 và 3?

Các số chia hết cho 3 là: 3; 6; 9; 12; 15;....; 99

Số các số chia hết cho 3 là:

$$\frac{(99 - 3)}{3} + 1 = 33 \text{ (số)}$$

Vậy các số chia cho ít nhất một trong hai số 2 và 3 là:

$$50 + 33 - 16 = 67 \text{ (số)}$$

c) Không chia hết cho 2 và không chia hết cho 3?

Số các số không chia hết cho 2 và cho 3 là:

$$100 - 67 = 33 \text{ (số)}$$

Bài 78: Cho bốn chữ số 0; 3; 8; 9.

a) Tìm số lớn nhất, số nhỏ nhất có 4 chữ số khác nhau được viết từ 4 chữ số đã cho.

b) Tìm số lẻ lớn nhất, số chẵn nhỏ nhất có 4 chữ số khác nhau được viết từ 4 chữ số đã cho.

Lời giải:

a) Số lớn nhất có 4 chữ số khác nhau được viết từ 4 chữ số đã cho phải có chữ số hàng nghìn là chữ số lớn nhất. Vậy chữ số hàng nghìn phải tìm là 9.

Chữ số hàng trăm phải là chữ số lớn nhất trong 3 chữ số còn lại. Vậy chữ số hàng trăm phải tìm là 8.

Chữ số hàng chục là chữ số lớn nhất trong 2 chữ số còn lại. Vậy chữ số hàng chục là 3.

Vậy số cần tìm là 9830.

Tương tự số nhỏ nhất có bốn chữ số khác nhau từ 4 chữ số trên là .

b) Tương tự số lẻ lớn nhất thỏa mãn điều kiện đầu bài là 9803.

Số chẵn nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện đầu bài là 3098.

Bài 79: Tìm số tự nhiên có ba chữ số \overline{abc} , thỏa mãn $\overline{abc} = (a+b+c)^3$

Lời giải:

Điều kiện: $0 < a \leq 9; 0 \leq b, c \leq 9; a, b, c \in \mathbb{N}$

Nhận thấy: $100 \leq \overline{abc} \leq 999$ suy ra $100 \leq (a+b+c)^3 \leq 999$ suy ra $5^3 \leq (a+b+c)^3 \leq 9^3$

Suy ra $5 \leq a+b+c \leq 9$ suy ra $(a+b+c) \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$

Nếu $a+b+c=5$ thì $(a+b+c)^3 = 125$. Thử lại $(1+2+5)^3 = 512$ (không thỏa mãn)

Nếu $a+b+c=6$ thì $(a+b+c)^3 = 216$. Thử lại $(2+1+6)^3 = 729$ (không thỏa mãn)

Nếu $a+b+c=7$ thì $(a+b+c)^3 = 343$. Thử lại $(3+4+3)^3 = 1000$ (không thỏa mãn)

Nếu $a+b+c=8$ thì $(a+b+c)^3 = 512$. Thử lại $(5+1+2)^3 = 512$ (thỏa mãn)

Nếu $a+b+c=9$ thì $(a+b+c)^3 = 729$. Thử lại $(7+2+9)^3 = 5832$ (không thỏa mãn)

Vậy số tự nhiên cần tìm là 512.

Bài 80: Tìm hai số, biết rằng tổng của chúng gấp 5 lần hiệu của chúng, tích của chúng gấp 24 lần hiệu của chúng.

Phân tích: Bài toán có thể giải bằng “số phần” bằng cách biểu thị hiệu là 1 phần thì tổng là 5 phần và tích là 24 phần. Từ đó tính được số lớn ứng với bao nhiêu phần, số bé ứng với bao nhiêu phần.

Lời giải:

Theo đầu bài. Nếu biểu thị hiệu là 1 phần thì tổng là 5 phần và tích là 24 phần.

Số lớn là: $(5+1):2 = 3$ (phần).

Số bé là: $5-3 = 2$ (phần)

Vậy tích sẽ bằng 12 lần số bé.

Ta có: Tích = Số lớn \times Số bé

$$\text{Tích} = 12 \times \text{Số bé}$$

Số lớn là 12.

Số bé là: $12:3.2 = 8$

Vậy hai số tự nhiên cần tìm là 12;8.

Bài 81: Tìm thương của một phép chia, biết rằng nếu thêm 15 vào số bị chia và thêm 5 vào số chia thì thương và số dư không đổi.

Lời giải:

Gọi số bị chia, số chia, thương và số dư lần lượt là a, b, c, d ($a, b, c, d \in \mathbb{N}, b \neq 0; d < b$). Ta có:

$$a : b = c \text{ (dư } d) \text{ suy ra } a = c.b + d$$

Theo đề ta có: $(a+15) : (b+5) = c$ (dư d) suy ra $a+15 = c.(b+5) + d$

$$\text{Hay } a+15 = c.b + c.5 + d$$

$$\text{Mà } a = c.b + d \text{ nên } a+15 = c.b + c.5 + d = c.b + d + 15 = c.b + c.5 + d$$

Suy ra $15 = c.5$. Vậy $c = 3$.

36 **Bài 82:** Hiệu của hai số là 4. Nếu tăng một số gấp ba lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng 60. Tìm hai số đó.

Lời giải:

Gọi 2 số đó là $a, b (a > b; a, b \in \mathbb{N})$

Theo bài ra ta có: $a - b = 4 \Rightarrow b = a - 4$ (1)

Nếu tăng một số gấp ba lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng 60 suy ra $3a - b = 60$ (2)

Thay (1) vào (2) ta có $3a - (a - 4) = 60$

suy ra

$$3a - a + 4 = 60$$

$$2a = 56$$

$$a = 28$$

$$b = 24$$

Vậy số cần tìm là 24; 28.

Bài 83: Tìm hai số biết rằng tổng của chúng gấp 5 lần hiệu của chúng và tích của chúng gấp 4008 lần hiệu của chúng.

Lời giải:

Coi hiệu của hai số là 1 phần thì tổng của chúng là 5 phần.

Do đó số lớn là $(5+1):2 = 3$ (phần).

Số bé là: $5-3 = 2$ (phần).

Tích của hai số là: $2.3 = 6$ (phần)

Mà tích hai số là 4008 nên giá trị một phần là: $4008:6 = 668$.

Số bé là: $668.2 = 1336$

Số lớn là: $668.3 = 2004$.

Vậy hai số cần tìm là 2004 và 1336.

Bài 84: Tìm hai số biết rằng tổng của chúng gấp 3 lần hiệu của chúng và tích của chúng gấp 124 lần hiệu của chúng.

Lời giải:

Coi hiệu của hai số là 1 phần thì tổng của chúng là 3 phần.

Do đó số lớn là $(3+1):2 = 2$ (phần).

Số bé là: $2-1 = 1$ (phần).

Tích của hai số là: $2.1 = 2$ (phần)

Mà tích hai số là 124 nên giá trị một phần là: $124:2 = 62$.

Số bé là: $62.1 = 62$

Số lớn là: $62.2 = 124$.

Vậy hai số cần tìm là 62 và 124.

Bài 85: Tổng của hai số tự nhiên gấp ba hiệu của chúng. Tìm thương của hai số tự nhiên ấy.

Lời giải:

Gọi hai số đó là a và $b (a, b \in \mathbb{N})$

Ta có $(a+b) = 3(a-b)$ suy ra $a+b = 3a-3b$ suy ra $4b = 2a$

Suy ra $a = 2b$ do đó $a:b = 2$

Vậy thương hai số tự nhiên cần tìm là 2.

Bài 86: Hiệu của hai số là 4. Nếu tăng một số gấp ba lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng 60. Tìm hai số đó.

Lời giải:

37 Gọi số bị trừ là a , số trừ là b ($a, b \in \mathbb{N}$)

Theo đề bài ta có : $a - b = 4$ (1)

Tăng số bị trừ lên 3 lần và giữ nguyên số chia vì hiệu của chúng bằng 60 nên : $3a - b = 60$ (2)

Từ (1) ta có $b = a - 4$ thay vào (2) ta được : $2a = 56$ suy ra $a = 28$ suy ra $b = 24$.

Vậy hai số tự nhiên cần tìm là 24; 28.

Bài 87: Tìm hai số, biết rằng tổng của chúng gấp 7 lần hiệu của chúng, tích của chúng gấp 192 lần hiệu của chúng.

Lời giải:

Coi hiệu của hai số là 1 phần thì tổng của chúng là 7 phần.

Do đó số lớn là $(7 + 1) : 2 = 4$ (phần).

Số bé là: $7 - 4 = 3$ (phần).

Tích của hai số là: $3.4 = 12$ (phần)

Mà tích hai số là 192 nên giá trị một phần là: $192 : 12 = 16$.

Số bé là: $16.3 = 48$

Số lớn là: $16.4 = 64$.

Vậy hai số tự nhiên cần tìm là 64; 48.

Bài 88: Tìm một số tự nhiên có hai chữ số biết rằng khi viết thêm số 12 vào bên trái số đó ta được số mới lớn gấp 26 lần số phải tìm.

Lời giải

Gọi số cần tìm là: \overline{ab} ($a \neq 0; a, b < 10; a, b \in \mathbb{N}$)

Viết thêm số 12 vào bên trái số đó ta được: $\overline{12ab}$

Theo bài ra ta có: $\overline{12ab} = \overline{ab}.26$

Suy ra $1200 + \overline{ab} = \overline{ab}.26$

Suy ra $\overline{ab}.26 - \overline{ab} = 1200$

Suy ra $\overline{ab}.(26 - 1) = 1200$

Suy ra $\overline{ab}.25 = 1200$

Suy ra $\overline{ab} = 48$.

Thử lại ta thấy $1248 : 48 = 26$.

Vậy: Số tự nhiên cần tìm là 1248.

Bài 89: Cho số có hai chữ số. Nếu lấy số đó chia cho hiệu của chữ số hàng chục và hàng đơn vị của nó thì được thương là 18 và dư 4. Tìm số đã cho.

Lời giải

Gọi số phải tìm là: \overline{ab} ($a \neq 0; a, b \in \mathbb{N}; a, b < 10$)

Theo bài ra ta có:

$\overline{ab} = (a - b).18 + 4$

Suy ra $10a + b = 18a - 18b + 4$

Suy ra $19b = 8a + 4$

Vì $8a + 4$ là số chẵn suy ra b chẵn suy ra $b \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$.

Với $b = 0$ suy ra $8a + 4 = 0$ (vô lý)

Tương tự với các trường hợp b còn lại : ta có $b = 4; a = 9$ thỏa mãn bài toán.

Vậy số cần tìm là 94.

Bài 90: Tìm một số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng số đó gấp 5 lần tích các chữ số của nó.

Lời giải

Gọi số phải tìm là: \overline{abc} ($0 < a \leq 9; 0 \leq b; c \leq 9; a; b; c \in \mathbb{N}$)

$$\overline{abc} = 5.a.b.c \text{ suy ra } a, b, c \neq 0$$

Nếu $c = 0$ thì $\overline{abc} = 0$ không thỏa mãn bài toán.

$$\text{Nếu } c = 5 \text{ thì } \overline{ab5} = 25\overline{ab} \quad (1)$$

Số có ba chữ số chia hết cho 25 khi $\overline{b5} : 25$ suy ra $b = 2$ hoặc $b = 7$.

Ta có: vế trái (1) là một số tự nhiên lẻ nên vế phải cũng là một số tự nhiên lẻ suy ra $b = 2$ (loại).

Do đó $b = 7$ suy ra $\overline{a75} = 25.a.7 = 175a$ suy ra $a = 1$.

Vậy số tự nhiên cần tìm là 175.

Bài 91: Tìm các chữ số $a; b; c$ thỏa mãn:

$$\text{a) } \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = \overline{abc}$$

$$\text{b) } \overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 4321$$

Lời giải

Điều kiện: $0 < a \leq 9; 0 \leq b; c \leq 9; a; b; c \in \mathbb{N}$

a) Ta có $\overline{abc} = 11(a + b + c)$ suy ra $100a + 10b + c = 11a + 11b + 11c$ suy ra $b + 10c = 89a \leq 99$

suy ra $a = 1$ suy ra $b = 9; c = 8$ (do $b + 10c \leq 99$)

b) Ta có: $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 1111.a + 111.b + 11.c + d$

$$\text{Vậy } 1111.a + 111.b + 11.c + d = 4321$$

Nếu $a < 3$ thì $111.b + 11.c + d > 2098$ (vô lý vì $b, c, d < 10$)

Nếu $a > 3$ thì vế trái lớn hơn 4321 (không thỏa mãn)

Vậy $a = 3$.

$$\text{Suy ra } 111.b + 11.c + d = 988$$

Nếu $b < 8$ thì $11.c + d > 210$ (vô lý vì $c, d < 10$)

Nếu $b > 8$ thì vế trái lớn hơn 988 (không thỏa mãn)

Vậy $b = 8$. Suy ra $11.c + d = 100$.

+ Nếu $c < 9$ thì $d > 11$ (vô lý vì $d < 10$)

Do đó $c = 9; d = 1$.

Vậy $a = 3, b = 8, c = 9, d = 1$ thỏa mãn $3891 + 389 + 38 + 3 = 4321$.

Bài 92: Tìm số tự nhiên có năm chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 2 vào đằng sau số đó thì được số lớn gấp ba lần số có được bằng cách viết thêm chữ số 2 vào đằng trước số đó.

Lời giải

Gọi số cần tìm là: \overline{abcde} ($0 < a \leq 9; 0 \leq b; c; d; e \leq 9; a; b; c; d; e \in \mathbb{N}$)

Theo bài ra ta có:

$$\overline{abcde2} = 3.\overline{2abcde}$$

$$\text{Suy ra } 10.\overline{abcde} + 2 = 3.200000 + 3.\overline{abcde}$$

$$\text{Suy ra } 7.\overline{abcde} = 599998$$

Suy ra $\overline{abcde} = 85714$.

Thử lại: $857142 = 3.285714$

Vậy số cần tìm là 857142.

Bài 93: Tìm số tự nhiên có tận cùng bằng 3, biết rằng nếu xóa chữ số hàng đơn vị thì số đó giảm đi 1992 đơn vị.

Lời giải

Vì rằng nếu xóa chữ số hàng đơn vị thì số đó giảm đi 1992 đơn vị nên số tự nhiên cần tìm có 4 chữ số.

Gọi số tự nhiên cần tìm là $\overline{abc3}$ ($0 < a \leq 9; 0 \leq b, c \leq 9; a; b; c \in \mathbb{N}$)

Theo bài ra ta có: $\overline{abc3} - 1992 = \overline{abc}$

Suy ra $10.\overline{abc} + 3 - 1992 = \overline{abc}$

Suy ra $9.\overline{abc} = 1989$

Suy ra $\overline{abc} = 221$.

Vậy số cần tìm là 2213.

Bài 94: Tìm ba chữ số khác nhau và khác 0, biết rằng nếu dùng cả ba chữ số này lập thành các số tự nhiên có ba chữ số thì hai số lớn nhất có tổng bằng 1444.

Lời giải

Gọi ba chữ số cần tìm là a, b, c ($0 < a < b < c < 9; a; b; c \in \mathbb{N}$).

Theo bài ra ta có:

$$\overline{abc} + \overline{acb} = 1444$$

$$100a + 10b + c + 100a + 10c + b = 1444$$

$$200a + 11b + 11c = 1444$$

$$200a + 11(b + c) = 1400 + 44$$

$$a = 7; b = 3; c = 1.$$

Vậy 3 số cần tìm là: 1; 3; 7.

Bài 95: Cho ba chữ số $a; b; c$ đôi một khác nhau và khác 0. Tổng của tất cả các số có hai chữ số được lập từ ba chữ số $a; b; c$ bằng 627. Tính tổng $a + b + c$.

Lời giải

Ta có các số có hai chữ số được lập thành từ ba chữ số $a; b; c$ là:

$$\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ba} + \overline{bc} + \overline{cb} + \overline{ca} + \overline{aa} + \overline{bb} + \overline{cc}$$

Theo đầu bài ta có:

$$\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ba} + \overline{bc} + \overline{cb} + \overline{ca} + \overline{aa} + \overline{bb} + \overline{cc} = 627$$

$$33(a + b + c) = 627$$

$$a + b + c = 19$$

Vậy $a + b + c = 19$.

Bài 96: Nếu xen vào giữa các chữ số của một số có hai chữ số của chính số đó, ta được một số mới có bốn chữ số và bằng 99 lần số đầu tiên. Tìm số đó

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là \overline{ab} ($0 < a \leq 9; 0 \leq b \leq 9; a; b \in \mathbb{N}$)

Theo bài ra, ta có:

$$\overline{aabb} = 99 \cdot \overline{ab} \text{ suy ra } 1100a + 11b = 990a + 99b \text{ suy ra } 110a - 88b = 0 \text{ suy ra } 5a - 4b = 0$$

$$\text{suy ra } 5a = 4b \text{ suy ra } \frac{a}{b} = \frac{4}{5}.$$

Mà $a; b$ là các số có 1 chữ số $\Rightarrow a = 4, b = 5$.

Vậy số tự nhiên cần tìm là 45.

Bài 97: Cho hai số có 4 chữ số và 2 chữ số mà tổng của hai số đó bằng 2750. Nếu cả hai số được viết theo thứ tự ngược lại thì tổng của hai số này bằng 8888. Tìm hai số đã cho.

Lời giải

Gọi 2 số cần tìm là: \overline{abcd} và \overline{xy} ($a, b, c, d, x, y \in \mathbb{N}; a; x \neq 0; a; b; c; d; x; y < 10$)

Theo đề ta có:

$$\overline{abcd} + \overline{xy} = 2750 \quad (1)$$

$$\overline{dcba} + \overline{yx} = 8888 \quad (2)$$

Cả 2 phép cộng đều không nhớ sang hàng nghìn nên từ (1) ta có $a = 2$ và từ (2) ta có $d = 8$.

Cũng từ (1) ta có $d + y$ có tận cùng bằng 0, mà $d = 8$ nên $y = 2$.

Từ (2) ta có $a + x$ có tận cùng bằng 8, mà $a = 2$ nên $x = 6$.

Từ (1) ta có $c + x + 1$ (vì có nhớ 1) có tận cùng bằng 5, mà $x = 6$ nên $c = 8$.

Từ (2) ta có $b + y$ có tận cùng bằng 8, mà $y = 2$ nên $b = 6$.

Vậy hai số đó là 2688 và 62.

Bài 98: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số? Tính tổng của chúng.

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2019 - 2020

Lời giải:

Các số tự nhiên có hai chữ số là 10; 11; 12; ...; 99

Số các số này là: $99 - 10 + 1 = 90$ (số)

Ta có: $A = 10 + 11 + 12 + \dots + 99$ (1)

$$A = 99 + 98 + \dots + 11 + 10 \quad (2)$$

Cộng (1) với (2) và áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng ta được:

$$A + A = (10 + 99) + (11 + 98) + \dots + (98 + 11) + (99 + 10) = 109 + 109 + \dots + 109 + 109$$

Nên $2A = 109 \cdot 90$ suy ra $A = 109 \cdot 90 : 2 = 45 \cdot 109 = 4905$.

Bài 99: Tính tổng các số tự nhiên có hai chữ số?

Lời giải

Cách 1:

Các số tự nhiên có hai chữ số là 10; 11; 12; ...; 99.

Số các số này là: $99 - 10 + 1 = 90$ số.

Ta có:

$$A = 10 + 11 + 12 + \dots + 99 \quad (1)$$

$$A = 99 + 98 + \dots + 11 + 10 \quad (2)$$

Cộng (1) với (2) và áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng ta được:

$$A + A = (10 + 99) + (11 + 98) + \dots + (98 + 11) + (99 + 10) = 109 + 109 + \dots + 109 + 109$$

Nên $2A = 109 \cdot 90$ suy ra $A = 109 \cdot 90 : 2 = 45 \cdot 109 = 4905$.

Cách 2:

Số số hạng của dãy: $\frac{(99 - 10)}{1} + 1 = 90$.

(khoảng cách 2 số hạng liên tiếp của dãy là 1, số hạng đầu của dãy là 10, số hạng cuối của dãy là 99)

Tổng của dãy: $A = \frac{99 + 10}{2} \cdot 90 = 4905$.

Bài 100: Tính tổng: $S = 5 + 10 + 15 + \dots + 2015 + 2020$

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2016 - 2017

Lời giải

Số số hạng của dãy là $(2020 - 5) : 5 + 1 = 404$.

Tổng $S = (5 + 2020) \cdot 404 : 2 = 409050$.

Bài 101: Tính tổng $S = 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \dots + \frac{4039}{2} + 2020$.

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2017 - 2018

Lời giải

Số số hạng của dãy là $(2020 - 1) : \frac{1}{2} + 1 = 4039$.

Tổng $S = (1 + 2020) \cdot 4039 : 2 = 4081409,5$.

Bài 102: Tính tổng $S = 10,11 + 11,12 + 12,13 + \dots + 98,99 + 100$.

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2018 - 2019

Lời giải

Số số hạng của dãy là $(100 - 10,11) : 1,01 + 1 = 90$.

Tổng $S = (10,11 + 100) \cdot 90 : 2 = 4954,95$.

Bài 103: Tính tổng: $B = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \dots + 99 \cdot 101$.

Trích đề HSG huyện Đông Sơn năm 2018 - 2019

Lời giải

Ta có: $6B = 1 \cdot 3 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \cdot 6 + 5 \cdot 7 \cdot 6 + \dots + 99 \cdot 101 \cdot 6$

$$6B = 1 \cdot 3 \cdot (5 + 1) + 3 \cdot 5 \cdot (7 - 1) + 5 \cdot 7 \cdot (9 - 3) + \dots + 99 \cdot 101 \cdot (103 - 97)$$

$$= (1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + 5 \cdot 7 \cdot 9 + \dots + 97 \cdot 99 \cdot 101 + 99 \cdot 101 \cdot 103) - (1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + \dots + 97 \cdot 99 \cdot 101)$$

$$= 3 + 99 \cdot 101 \cdot 103 = 1029900$$

Suy ra: $B = \frac{1029900}{6} = 171650$.

Bài 104: Tính tổng: $S = 1 \cdot 200 + 2 \cdot 199 + 3 \cdot 198 + 4 \cdot 197 + \dots + 199 \cdot 2 + 200 \cdot 1$

Trích đề HSG huyện Đông Sơn năm 2019 - 2020

Lời giải

Ta có $S = 1 \cdot 200 + 2 \cdot 199 + 3 \cdot 198 + 4 \cdot 197 + \dots + 199 \cdot 2 + 200 \cdot 1$

$$= 1 \cdot 200 + 2(200 - 1) + 3(200 - 2) + 4(200 - 3) + \dots + 199(200 - 198) + 200(200 - 199)$$

$$= (1+2+3+4+\dots+200) \cdot 200 - (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 198 \cdot 199 + 199 \cdot 200)$$

$$= \frac{200 \cdot 201}{2} - \frac{199 \cdot 200 \cdot 201}{3} = 1353400.$$

Vậy $S = 1353400$.

Bài 105: Tính tổng $B = 1+4+7+10+\dots+70+73$.

Lời giải:

$$B = 1+4+7+10+\dots+70+73$$

$$6B = 1 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 7 \cdot 6 + 10 \cdot 6 + \dots + 70 \cdot 6 + 73 \cdot 6$$

$$6B = 1 \cdot (4+2) + 4 \cdot (7-1) + 7 \cdot (10-4) + \dots + 73 \cdot (76-70)$$

$$6B = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 7 - 1 \cdot 4 + 7 \cdot 10 - 7 \cdot 4 + \dots + 73 \cdot 76 - 73 \cdot 70$$

$$6B = 2 + 73 \cdot 76$$

$$6B = 5550$$

$$B = 925.$$

Vậy $B = 925$.

Bài 106: Cho dãy số $2; 7; 12; \dots; 22; \dots$

- Nêu quy luật của dãy số trên.
- Viết tập hợp B gồm 5 số hạng liên tiếp của dãy số đó, bắt đầu từ số hạng thứ năm.
- Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của dãy số.

Lời giải:

Xét dãy số $2; 7; 12; \dots; 22 \dots$

a) Quy luật: Dãy số cách đều với khoảng cách 5.

$$b) B = \{22; 27; 32; 37; 42\}$$

c) Gọi số hạng thứ 100 của dãy là x , ta có: $(x-2) : 5 + 1 = 100 \Rightarrow x = 497$.

Do vậy tổng 100 số hạng đầu của dãy là: $(2+497) \cdot 100 : 2 = 24950$.

Bài 107: Người ta viết liền nhau các số tự nhiên 123456....

- Hỏi các chữ số đơn vị của các số 53; 328; 1587 đứng ở hàng thứ bao nhiêu?
- Chữ số viết ở hàng thứ 427 là chữ số nào?

Lời giải:

Viết liền nhau các số tự nhiên 123456...

a) 9 chữ số đầu tiên: $1; 2; \dots; 9$.

44 số có hai chữ số tiếp theo: $10, 11, \dots, 53$.

Chữ số hàng đơn vị của số 53 ở hàng số: $9 + 44 \cdot 2 = 97$.

Tương tự, chữ số hàng đơn vị của số 328 ở hàng số $9 + 90 \cdot 2 + 229 \cdot 3 = 876$

Chữ số hàng đơn vị của số 1587 ở hàng số $9 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 588 \cdot 4 = 5241$.

b) Ta có: $427 = 9 + 90 \cdot 2 + 79 \cdot 3$ dư 1

Khi đó số thứ 81 có 3 chữ số là: 179.

Chữ số viết ở hàng thứ 427 là chữ số 1.

Bài 108: Viết dãy số tự nhiên từ 1 đến 999 ta được một số tự nhiên A .

- a) Số A có bao nhiêu chữ số?
 b) Tính tổng các chữ số của số A ?
 c) Chữ số 1 được viết bao nhiêu lần?

Lời giải:

a)

Từ 1 đến 9 có 9 số gồm: 9 (chữ số)

Từ 10 đến 99 số có 90 số gồm: $90 \cdot 2 = 180$ (chữ số)

Từ 100 đến 999 có 900 số gồm: $900 \cdot 3 = 2700$ (chữ số)

Số A có: $9 + 180 + 2700 = 2889$ (chữ số).

b)

Giả sử ta viết số B là các số tự nhiên từ 000 đến 999 (mỗi số đều viết bởi 3 chữ số), thế thì tổng các chữ số của B cũng bằng tổng các chữ số của A . B có: $3 \cdot 1000 = 3000$ chữ số, mỗi chữ số từ 0 đến 9 đều có mặt: $3000 : 10 = 300$ (lần)

Tổng các chữ số của B (cũng là của A): $(0 + 1 + 2 + \dots + 9) \cdot 300 = 45 \cdot 300 = 13500$ (chữ số)

c) Cần đếm số chữ số 1 trong 11 dãy: 1; 2; 3; ...; 999 (1)

Ta xét dãy: 000, 001, 002, ..., 999 (2)

Số chữ số 1 trong hai dãy như nhau. Ở đây dãy (2) có 1000 số, mỗi số gồm 3 chữ số, số lượng mỗi chữ số từ 1 đến 9 đều như nhau. Mỗi chữ số (từ 1 đến 9) đều có mặt: $3 \cdot 1000 : 10 = 300$ (lần).

Vậy ở đây (1) chữ số 1 cũng được viết 300 lần.

Bài 109: Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ có ba chữ số?

Lời giải:

Số lẻ có ba chữ số là 101; 103; 105; ...; 999, khoảng cách giữa các số lẻ là 2.

Vậy tất cả có: $(999 - 101) : 2 + 1 = 450$ số lẻ có ba chữ số.

Bài 110: Viết các tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử và cho biết số phần tử của mỗi tập hợp.

- a) Tập hợp A các số tự nhiên có hai chữ số, trong đó chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2.
 b) Tập hợp B các số tự nhiên có ba chữ số mà tổng các chữ số bằng 3.

Lời giải:

a) Tập hợp A các số tự nhiên có hai chữ số, trong đó chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2 là $A = \{ 20; 31; 42; 53; 64; 75; 86; 97 \}$.

Tập hợp A có 8 phần tử.

b) Tập hợp B các số tự nhiên có ba chữ số mà tổng các chữ số bằng 3 là

$B = \{ 102; 120; 111; 201; 210; 300 \}$.

Tập hợp B có 6 phần tử.

Bài 111: Hãy tính số phần tử của các tập hợp sau:

- a) Tập hợp $A = \{ 1; 2; 3; \dots; 2020; 2021 \}$.
 b) Tập hợp B các số tự nhiên chẵn có 2 chữ số.
 c) Tập hợp C các số tự nhiên lẻ có 3 chữ số.
 d) Tập hợp D các số 2; 5; 8; 11; ...; 2015; 2018; 2021.

Lời giải

- a) Tập hợp A có $(2021-1):1+1=2021$ phần tử.
 b) Tập hợp B có $(98-10):2+1=45$ phần tử.
 c) Tập hợp C có $(999-101):2+1=450$ phần tử.
 d) Tập hợp D có $(2021-2):3+1=674$ phần tử.

Bài 112: Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 4 gồm bốn chữ số, chữ số tận cùng bằng 2?

Lời giải:

Các số phải đếm có dạng: $\overline{abc2}$ ($a \neq 0, 0 \leq a; b; c \leq 9; a; b; c \in \mathbb{N}$).

Chữ số a có 9 cách chọn.

Với mỗi cách chọn a , chữ số b có 10 cách chọn.

Với mỗi cách chọn a, b chữ số c có 5 cách chọn (1, 3, 5, 7, 9) để tạo với chữ số 2 tận cùng làm thành số chia hết cho 4.

Tất cả có: $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ (số).

Bài 113: Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 5?

Trích đề HSG huyện Đông Sơn năm 2020 – 2021

Lời giải:

Ta chia ra 3 loại số:

Số đếm có dạng $\overline{5ab}$ ($0 \leq a, b \leq 9, a \neq 5, b \neq 5$): chữ số a có 9 cách chọn, chữ số b có 9 cách chọn các số thuộc loại này có: $9 \cdot 9 = 81$ (số).

Số đếm có dạng $\overline{a5b}$ ($0 \leq a, b \leq 9, a \neq 5, b \neq 5, a \neq 0$): chữ số a có 8 cách chọn, chữ số b có 9 cách chọn, các số thuộc loại này có: $8 \cdot 9 = 72$ (số).

Số đếm có dạng $\overline{ab5}$ ($0 \leq a; b \leq 9; a \neq 5; b \neq 5; a \neq 0$): các số thuộc loại này có: $8 \cdot 9 = 72$ (số).

Vậy số tự nhiên có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 5 là $81 + 72 + 72 = 225$ (số).

Bài 114: Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số. Hỏi tập hợp A có bao nhiêu phần tử?

Lời giải:

Ta có: $A = \{100; 101; \dots; 999\}$

Tập hợp A có: $(999-100)+1=900$ phần tử.

CHỦ ĐỀ 4: SỐ NGUYÊN**A. PHẦN NỘI DUNG****I. Ước và bội.****Dạng 1: Chứng minh sự chia hết.**

Bài 1: Chứng tỏ rằng $a^2 + 3a + 1$ không thể chia hết cho 2 với a là số nguyên.

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

Lời giải

Ta có $a^2 + 3a + 1 = a^2 + a + 2a + 1 = a(a + 1) + 2a + 1$

Vì $a(a + 1)$ là tích hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 ;

$2a$ chia hết cho 2 ;

1 không chia hết cho 2 .

Suy ra $a^2 + 3a + 1$ không chia hết cho 2 với a là số nguyên.

Bài 2: Chứng tỏ $4x + 3y$ chia hết cho 7 khi $2x + 5y$ chia hết cho 7 .

Trích đề HSG cấp huyện năm 2018-2019

Lời giải

Ta có:

$$4x + 3y : 7$$

$$\text{Suy ra } 4(4x + 3y) : 7$$

$$\text{Suy ra } 16x + 12y : 7$$

$$\text{Suy ra } 14x + 7y + 2x + 5y : 7$$

$$\text{Mà } 14x + 7y : 7 \text{ suy ra } 2x + 5y : 7$$

$$\text{Vậy } 4x + 3y : 7 \text{ khi } 2x + 5y : 7$$

Bài 3: Tìm số nguyên n sao cho $4n - 5$ chia hết cho $2n - 1$.

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015-2016

Lời giải

Tìm số nguyên n sao cho $4n - 5$ chia hết cho $2n - 1$.

$$\text{Ta có : } 4n - 5 = 4n - 2 - 3 = 2(2n - 1) - 3$$

$$\text{Đề } 4n - 5 : 2n - 1$$

$$3 : 2n - 1$$

$$2n - 1 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

$2n - 1$	-1	1	-3	3
n	0 (TM)	1 (TM)	-1 (TM)	2 (TM)

$$\text{Vậy } n \in \{0; 1; 1; 2\}.$$

Bài 4:

a) Cho \overline{ababab} là số có sáu chữ số, chứng tỏ số \overline{ababab} là bội của 3

b) Chứng tỏ : $S = 16^5 + 2^{15}$ chia hết cho 33

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018 - 2019**Lời giải**

$$a) \overline{ababab} = \overline{ab} \cdot 10000 + \overline{ab} \cdot 100 + \overline{ab} = 10101 \cdot \overline{ab}$$

Do 10101 chia hết cho 3 nên \overline{ababab} chia hết cho 3 hay \overline{ababab} là bội của 3

$$b) \text{ Chứng minh } S = 16^5 + 2^{15} \text{ chia hết cho } 33$$

$$\text{Có } S = 16^5 + 2^{15} = (2^4)^5 + 2^{15} = 2^{20} + 2^{15} = 2^{15} \cdot (2^5 + 1) = 2^{15} \cdot 33$$

Nên S chia hết cho 33

Bài 5: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta có $n^3 - n : 6$

Trích đề chọn HSG Trục Ninh năm 2017-2018**Lời giải**

$$\text{Ta có } (n^3 - n) = n(n^2 - 1) = n(n^2 - n + n - 1) = n[n(n-1) + (n-1)] = n(n-1)(n+1)$$

Với mọi số nguyên dương n thì $(n-1)n(n+1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp sẽ chia hết cho 2 và 3 mà $(2,3)=1$ nên $n(n-1)(n+1) : 6$

Bài 6: Cho $M = (-a+b) - (b+c-a) + (c-a)$. Trong đó $b, c \in \mathbb{Z}$ còn a là một số nguyên âm. Chứng minh rằng biểu thức M luôn dương

Trích đề HSG huyện Lâm Thao, năm 2017 - 2018**Lời giải**

$M = -a$ mà a là số nguyên âm nên M luôn dương

Bài 7: Cho \overline{ababab} là số có sáu chữ số, chứng tỏ số \overline{ababab} là bội của 3.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018 - 2019**Lời giải**

$$\overline{ababab} = \overline{ab} \cdot 10000 + \overline{ab} \cdot 100 + \overline{ab} = 10101 \cdot \overline{ab}$$

Do 10101 chia hết cho 3 nên \overline{ababab} chia hết cho 3 hay \overline{ababab} là bội của 3.

Bài 8: Tìm các giá trị nguyên n của để phân số $B = \frac{2n+5}{n+3}$ có giá trị là số nguyên.

Trích đề KS HSG huyện năm 2021 - 2022**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \frac{2n+5}{n+3} = \frac{2(n+3)-1}{n+3} = 2 - \frac{1}{n+3}$$

Để B có giá trị nguyên thì $\frac{1}{n+3}$ nguyên

$$1 : (n+3)$$

$n+3$ thuộc ước nguyên của 1

$$n+3 \in \{-1; 1\}$$

$$n \in \{-4; -2\}.$$

Vậy $n \in \{-4; -2\}$

Bài 9: Tìm số nguyên n để $A = 2n^2 + n - 6$ chia hết cho $2n+1$

Trích đề HSG Trường Nghĩa Đồng huyện Tân Kỳ năm 2021-2022.

Lời giải

Ta có $A = 2n^2 + n - 6 = n.(2n+1) - 6$

Vì A chia hết cho $2n+1$ nên $6 : 2n+1$

$2n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$

Do $2n+1$ là số lẻ nên ta có bảng sau

$2n+1$	1	-1	3	-3
$2n$	0	-2	2	-4
n	0	-1	1	-2

Vậy với $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$ thì A chia hết cho $2n+1$

Bài 10: Chứng minh rằng trong hai số: $5^n + 2023$ và $5^n + 2024$, luôn có một số chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n .

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021 – 2022

Lời giải

Vì $5 \not\equiv 3$, nên $5^n \not\equiv 3$ do đó 5^n nhận được một trong hai dạng sau:

$5^n = 3k+1$ hoặc $5^n = 3k+2 (k \in \mathbb{Z})$

Nếu $5^n = 3k+1$ thì $5^n + 2024 = 3k + 2025 : 3$

Nếu $5^n = 3k+2$ thì $5^n + 2023 = 3k + 2025 : 3$

Dạng 2: Tìm số thỏa mãn điều kiện chia hết.

Trắc nghiệm

Bài 1: Tập hợp các số tự nhiên x thỏa mãn $6 : (x-2)$ là:

- A. $\{1; 2; 3; 6\}$. B. $\{3; 6\}$. C. $\{5; 8\}$. D. $\{3; 4; 5; 8\}$.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiên (Việt Yên) năm 2021-2022

Đáp án: D

Tự luận

Bài 1: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia số đó cho 3 dư 1 ; chia cho 4 dư 2 ; chia cho 5 dư 3 ; chia cho 6 dư 4 và chia hết cho 11 .

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải

Gọi số phải tìm là x . Theo bài ra ta có $x+2$ chia hết cho 3, 4, 5, 6.

nên $x+2$ là bội chung của 3, 4, 5, 6

Mà BCNN(3; 4; 5; 6) = 60 nên $x+2 = 60.n$.

Do đó $x = 60.n - 2$ ($n = 1; 2; 3 \dots$).

Mặt khác $x : 11$ nên lần lượt cho $n = 1; 2; 3 \dots$ Ta thấy $n = 7$ thì $x = 418 : 11$

Vậy số nhỏ nhất phải tìm là 418.

Bài 2: Tìm các số nguyên x sao cho $4x - 3 : x - 2$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Ta có: $4x - 3 = 4x - 8 + 5 = 4(x - 2) + 5$

Vì $4(x - 2) : x - 2$

Suy ra $4x - 3 : x - 2$ hay $5 : x - 2$

Suy ra $x - 2 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

Suy ra $x \in \{1; -3; 3; 7\}$

Bài 3: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2xy + y - 10x = 11$.

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Lời giải

Ta có:

$$2xy + y - 10x = 11$$

$$y(2x + 1) - 5(2x + 1) = 6$$

$$(y - 5)(2x + 1) = 6$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $y - 5, 2x + 1$ là $U(6)$ mà lẻ nên ta có bảng sau

$2x+1$	-1	1	-3	3
$y-5$	-6	6	-2	2
x	-1	0	-2	1
y	-1	11	3	7

Vậy cặp thỏa mãn là $(x, y) \in \{(-1; -1), (0; 11), (-2; 3), (1; 7)\}$

Bài 4. Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{6n+4}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên.

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{6n+4}{2n-1} = \frac{6n-3+7}{2n-1} = 3n + \frac{7}{2n-1}$$

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên để $\frac{6n+4}{2n-1}$ nguyên thì $\frac{7}{2n-1}$ nguyên.

Khi đó $(2n-1) \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$ nên $n \in \{-3; 0; 1; 4\}$

Do $n \in \mathbb{N}$ nên $n \in \{0; 1; 4\}$

Bài 5. Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị là số nguyên.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị là nguyên thì $n+3 : 2n-2$

$$2(n+3) : 2n-2$$

Suy ra $(2n+6) - (2n-2) : (2n-2)$

Suy ra $(2n-2n) + (6+2) : 2n-2$ suy ra $8 : 2n-2$

Suy ra $(2n-2) \in \{\pm 2; \pm 4; \pm 8\}$

Sau khi thử các trường hợp ta được $n = 5$

Bài 6: Tìm số nguyên n để $A = 2n^2 + n - 6$ chia hết cho $2n+1$.

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2021-2022

Lời giải

Ta có $A = 2n^2 + n - 6 = n(2n+1) - 6$

Do $n(2n+1):2n+1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$, để $A:2n+1$ thì $6:2n+1$

Hay $2n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$, mà $2n+1$ là số nguyên lẻ nên $2n+1$ là các ước lẻ của 6, ta có bảng sau:

$2n + 1$	-1	1	-3	3
n	-1	0	-2	1

Các giá trị của n tìm được đều thỏa mãn đề bài

Vậy $n \in \{-1; 0; -2; 1\}$.

Bài 7: Tìm các số nguyên n sao cho: $n^2 + 5n + 9$ là bội của $n+3$.

HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014 -2015

Lời giải

Ta có: $n^2 + 5n + 9 = n^2 + 3n + 2n + 9 = n(n+3) + 2n + 9$

Vì $n(n+3)$ chia hết cho $n+3 \Rightarrow 2n+9$ chia hết cho $n+3$

Vì $2n+9$ chia hết cho $n+3$

Vì $n+3$ chia hết cho $n+3 \Rightarrow 2(n+3)$ chia hết cho $n+3$

$2n+6$ chia hết cho $n+3$

$2n+9 - (2n+6)$ chia hết cho $2n+3$

3 chia hết cho $2n+3$

$2n+3 \in U(3) = \{1; -1; 3; -3\}$

$2n+3$	-1	1	-3	3
n	-2 (TM)	-1(TM)	-3(TM)	0(TM)

Vậy $n \in \{-2; -1; 0\}$.

Bài 8: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $2xy - x - y = 2$.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Lời giải

Ta có $2xy - x - y = 2$.

$4xy - 2x - 2y = 4$

$$2x(2y-1) - 2y + 1 = 5$$

$$2x(2y-1) - (2y-1) = 5$$

$$(2y-1)(2x-1) = 5$$

Ta có bảng sau:

$2x-1$	1	5	-1	-5
$2y-1$	5	1	-5	-1
x	1	3	0	-2
y	3	1	-2	0

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là $(1; 3)$, $(3; 1)$, $(-2; 0)$, $(0; -2)$

Bài 9: Tìm tất cả các cặp số tự nhiên khác không (x, y) sao cho $(2x+5) \cdot (x+2) = 3^y$

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Lời giải

Vì $(2x+5)(x+2) = 3^y$ mà 3 nguyên tố nên ta có $2x+5 = 3^a$, $x+2 = 3^b$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $a+b = y$.

Vì x là số tự nhiên khác 0 nên $2x+5 > x+2$ nên $3^a > 3^b$

Do đó $3^a : 3^b$

$$(2x+5) : (x+2)$$

Ta có $2x+5 = 2(x+2) + 1$;

Lập luận suy ra $1 : (x+2)$ vô lý vì $1 < x+2$

KL: Vậy không có giá trị nào của x, y thỏa mãn bài toán.

Bài 10: Tìm các số nguyên a, b biết rằng: $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$

Trích đề HSG huyện Hoài Nhơn năm 2015-2016

Lời giải

$$\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$$

$$\frac{2a-7}{14} = \frac{1}{b+3}$$

$$(2a-7)(b+3) = 14.$$

Do $a, b \in \mathbb{Z}$ nên $2a-7 \in U(14)$

Vì $2a-7$ lẻ nên $2a-7 \in \{-7; -1; 1; 7\}$ nên $a \in \{0; 3; 4; 7\}$.

Từ đó tính được: $(a, b) = (0; -5), (3; -17); (4; 11), (7; -1)$

Bài 11: Tìm các cặp số tự nhiên x, y sao cho $(2x+1)(y-5) = 12$

Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015-2016

Lời giải

$(2x+1);(y-5)$ là các ước của 12

$$U(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

Vì $2x+1$ lẻ nên

- $2x+1=1$. Do đó $x=0, y=17$
- $2x+1=3$. Do đó $x=1, y=9$

Bài 12: Tìm tất cả các số nguyên n để:

a) Phân số $\frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên

b) Phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản

Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015-2016

Lời giải

a) $\frac{n+1}{n-2}$ là số nguyên khi $(n+1):(n-2)$

$$\text{Ta có: } n+1 = (n-2)+3,$$

vậy $(n+1):(n-2)$ khi $3:(n-2)$

$$(n-2) \in U(3) = \{-3; -1; 1; 3\} \Rightarrow n \in \{-1; 1; 3; 5\}$$

b) Gọi d là Ư C của $12n+1$ và $30n+2$ ($d \in \mathbb{N}^*$)

$$12n+1 : d; 30n+2 : d$$

$$[5(12n+1) - 2(30n+2)] : d$$

$$(60n+5 - 60n-4) : d$$

$$1 : d$$

mà $d \in \mathbb{N}^*$ nên $d=1$

Vậy phân số đã cho tối giản.

Bài 13: Cho biểu thức : $P = \frac{2n+1}{n-4}$.

a) Với điều kiện nào của số nguyên n thì P là một phân số. Tính giá trị của P khi $n = -203$.

b) Viết tập hợp M các số nguyên n sao cho phân số P có giá trị là một số nguyên.

Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Lời giải

Xét biểu thức $P = \frac{2n+1}{n-4}$ ($n \in \mathbb{Z}$).

a) Để P là phân số thì $n-4 \neq 0 \Rightarrow n \neq 4$.

$$\text{Với } n = -203 \text{ thì } P = \frac{2(-203)+1}{-203-4} = \frac{-406+1}{-207} = \frac{-405}{-207} = \frac{45}{23}.$$

b) $P \in \mathbb{Z}$ nên $(2n+1):(n-4)$

$$(2n-8+9):(n-4)$$

$$[2(n-4)+9):(n-4)$$

$$9:n-4$$

$$n-4 \in U(9) = \{\pm 1; \pm 3; \pm 9\}.$$

Ta có bảng sau:

$n-4$	1	-1	3	-3	9	-9
n	5	3	7	1	13	-5

Vậy $n \in \{5; 3; 7; 1; 13; -5\}$ thì $P \in \mathbb{Z}$.

Bài 14: Tìm x nguyên dương để $2x-1$ chia hết cho $x-3$.

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Lời giải

$$\text{Vi } (2x-1):(x-3)$$

$$[2(x-3)+5):(x-3)$$

mà $2(x-3):x-3$ nên $5:x-3$

$$x-3 \in U(5) \text{ mà } U(5) = \{1; -1; 5; -5\}$$

$$x-3 \in \{1; -1; 5; -5\}$$

$$x \in \{4; 2; 8; -2\}$$

Mà x nguyên dương nên $x \in \{4; 2; 8\}$

$$\text{Vậy } x \in \{4; 2; 8\}$$

Bài 15: Tìm số tự nhiên n lớn nhất biết rằng khi chia các số 6355; 1705; 1271 cho n được các số dư lần lượt là 55; 25 và 1111.

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Lời giải

Vi khi chia 6355 cho n được số dư là 55 nên $(6355-55):n$.

Vi khi chia 1680 cho n được số dư là 25 nên $(1680-25):n$.

Vi khi chia 1260 cho n được số dư là 11 nên $(1260-11):n$

Suy ra n là Ư C(6300, 1680, 1260)

Mà n là số tự nhiên lớn nhất nên $n = \text{Ư CLN}(6300, 1680, 1260)$

Mà $\text{Ư CLN}(6300, 1680, 1260) = 420$ nên $n = 420$.

Vậy số tự nhiên n cần tìm là 420.

Bài 16: Tìm số tự nhiên x biết: $24:x$; $36:x$; $160:x$ và x là số lớn nhất.

Trích đề HSG Huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Lời giải

Ta có số tự nhiên x biết: $24 \vdots x$; $36 \vdots x$; $160 \vdots x$ và x là số lớn nhất

$$x = \text{Ư CLN}(24, 36, 160);$$

Ta có: $24 = 2^3 \cdot 3$; $36 = 2^2 \cdot 3^2$; $160 = 2^5 \cdot 5$

$$\text{Ư CLN}(24, 36, 160) = 2^2 = 4.$$

Vậy $x = 4$ (thỏa mãn).

Bài 17: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho: a chia cho 5 dư 3, a chia cho 7 dư 4

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Lời giải

$$\text{Ta có: } a = 5q + 3; a = 7p + 4$$

$$\text{Xét } a + 17 = 5q + 20 = 7p + 21$$

$a + 17$ chia hết cho cả 5 và 7

$$a + 17 \in BC(5; 7)$$

Vì a là số tự nhiên nhỏ nhất nên $a + 17 = BCNN(5, 7) = 35$

$$a = 18$$

Bài 18: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng số đó chia cho 9 dư 5, chia cho 7 dư 4 và chia cho 5 dư 3

Trích đề HSG cấp trường Bá Thước năm 2018-2019

Lời giải

Gọi số cần tìm là a

Ta có a chia cho 9 dư 5 nên $a = 9k + 5 (k \in \mathbb{N})$

$$2a = 9k_1 + 1$$

$$(2a - 1) \vdots 9$$

Ta có a chia cho 7 dư 4 nên $a = 7m + 4 (m \in \mathbb{N})$

$$2a = 7m_1 + 1$$

$$(2a - 1) \vdots 7$$

Ta có a chia cho 5 dư 3 nên $a = 5t + 3 (t \in \mathbb{N})$

$$2a = 5t_1 + 1$$

$$(2a - 1) \vdots 5$$

$(2a - 1) \vdots \{9; 7; 5\}$, mà $(9; 7; 5) = 1$ và a là số tự nhiên nhỏ nhất

$$2a - 1 = BCNN(9, 7, 5) = 315.$$

Vậy $a = 158$

Bài 19: Tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng bằng 84, Ư CLN, của chúng bằng 6

Trích đề HSG cấp trường vòng 2 THCS Tân Lập năm 2018-2019

Lời giải

Gọi 2 số phải tìm là a và b ($a \leq b$) ta có: $(a, b) = 1$

$$\begin{cases} a = 6a' \\ b = 6b' \end{cases}, (a', b') = 1 (a, b, a'b' \in \mathbb{N}^*)$$

$$a' + b' = 14$$

a'	1	3	5
b'	13	11	9
a	6	18	30
b	78	66	54

Bài 20: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khác 0 biết rằng số đó có 15 ước dương

Trích đề chọn HSG Tam Dương năm 2016-2017

Lời giải

Vì $15 = 1.15 = 3.5$ nên số cần tìm có dạng a^{14} hoặc $b^2.c^4$ (a, b, c là các số nguyên tố và $b \neq c$)

Th1: Số cần tìm có dạng a^{14} mà số đó là nhỏ nhất nên $a = 2$. Do đó $2^{14} = 16384$

Th2: Số cần tìm có dạng $b^2.c^4$ mà số đó nhỏ nhất nên $c = 2; a = 3$. Do đó $3^2.2^4 = 144$

Do $144 < 16384$ nên số cần tìm là 144

Bài 21: Tìm số nguyên n để phân số $M = \frac{2n-7}{n-5}$ có giá trị là số nguyên

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Lời giải

$$M = \frac{2n-7}{n-5} = \frac{2n-10+3}{n-5} = 2 + \frac{3}{n-5} \in \mathbb{Z}$$

$$n-5 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

$$n \in \{2; 4; 6; 8\}$$

$$\text{Vậy } n \in \{2; 4; 6; 8\}$$

Bài 22: Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ biết: $2x(3y-2) + (3y-2) = -55$

Trích đề HSG cấp trường Hà Huy Tập năm 2018-2019

Lời giải

$$2x(3y-2) + (3y-2) = -55$$

$$(3y-2)(2x+1) = -55 = -5.11 = 5.(-11)$$

Sau khi thử các trường hợp ta có $(x; y) = (5; -1)$

Bài 23: Cho a là một số nguyên có dạng $a = 3b + 7$ ($b \in \mathbb{Z}$). Hỏi a có thể nhận những giá trị nào trong các giá trị sau: $a = 11; a = 2002; a = 2003; a = 11570; a = 22789; a = 29563; a = 299537$

Trích đề HSG cấp trường Bá Thước năm 2018-2019

Lời giải

Số nguyên có dạng $a = 3b + 7$ ($b \in \mathbb{Z}$) hay a là số chia 3 dư 1

Vậy a có thể nhận những giá trị là $a = 2002; a = 22789; a = 29563$

Bài 24: Xét phân số $A = \frac{n^2 + 4}{n + 5}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên n trong khoảng từ 1 đến 2022 sao cho phân số A chưa tối giản.

- A. 79 B. 89 C. 99 D. 69

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 25: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của x để $x+3$ chia hết cho $x-2$. Số tập hợp con của tập hợp S là:

- A. 4 B. 16 C. 15 D. 5

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 26: Số nguyên dương nhỏ nhất không phải là ước của tích $1.2.3.4 \dots 96.97.98$ là

- A. 78 B. 99 C. 101 D. 100

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 27: Tìm số nguyên n để $(n+3):(n+1)$

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Lời giải

$$(n+3):(n+1)$$

$$\Rightarrow (n+1+2):(n+1)$$

$$\Rightarrow 2:(n+1) \text{ vì } (n+1):(n+1)$$

$$\Rightarrow n+1 \in \{1; 2; -1; -2\}$$

Trường hợp 1: $n+1=1 \Rightarrow n=0$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: $n+1=2 \Rightarrow n=1$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: $n+1=-1 \Rightarrow n=-2$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: $n+1=-2 \Rightarrow n=-3$ (thỏa mãn)

Vậy $n \in \{-3; -2; 0; 1\}$ thì $(n+3):(n+1)$

Bài 28: Có ba chồng sách: Văn, Âm nhạc, Toán, mỗi chồng chỉ gồm một loại sách. Mỗi cuốn Văn dày 15 mm, mỗi cuốn Âm nhạc dày 6 mm, mỗi cuốn Toán dày 8 mm. Người ta xếp cho 3 chồng sách cao bằng nhau. Tính chiều cao nhỏ nhất của ba chồng sách đó.

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

Vì chiều cao của ba chồng sách bằng nhau nên ta gọi là a (mm) (Điều kiện $a > 0$)

Theo đề bài ta có: $a:15; a:6; a:8$ mà a là số nhỏ nhất

Suy ra $a = BCNN(15, 6, 8) = 120$ (thỏa mãn)

Vậy chiều cao nhỏ nhất của ba chồng sách đó là 120 mm.

Bài 29: Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho $xy - 2x + y + 1 = 0$

*Trích đề HSG huyện Thạch Thành, năm 2018- 2019***Lời giải**

$$xy - 2x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow x(y - 2) + (y - 2) = -3$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(y - 2) = -3 = 1 \cdot (-3) = (-3) \cdot 1$$

Từ đó suy ra $(x; y) \in \{(0; -1); (-4; 3)\}$

Bài 30: Tìm số nguyên n để phân số $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên.

*Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018- 2019***Lời giải**

Ta có: $\frac{4n+5}{2n-1} = \frac{4n-2+7}{2n-1} = n + \frac{7}{2n-1}$

Vì $n \in \mathbb{Z}$ nên để $\frac{4n+5}{2n-1}$ nguyên thì $(2n-1) \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\} \Rightarrow n \in \{-3; 0; 1; 4\}$

Bài 31: Tìm số nguyên n để phân số $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên

*Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019***Lời giải**

Ta có: $\frac{4n+5}{2n-1} = \frac{4n-2+7}{2n-1} = n + \frac{7}{2n-1}$

Vì $n \in \mathbb{Z}$ nên để $\frac{4n+5}{2n-1}$ nguyên thì $(2n-1) \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\} \Rightarrow n \in \{-3; 0; 1; 4\}$

Bài 32: Tìm hai số nguyên tố x và y sao cho: $x^2 - 2x + 1 = 6y^2 - 2x + 2$

*Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019***Lời giải**

Ta có: $x^2 - 2x + 1 = 6y^2 - 2x + 2$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 6y^2 \Rightarrow 6y^2 = (x-1)(x+1):2, \text{ do } 6y^2:2$$

Mặt khác $x-1+x+1=2x:2 \Rightarrow (x-1)$ và $(x+1)$ cùng chẵn hoặc cùng lẻ

Vậy $(x-1)$ và $(x+1)$ cùng chẵn $\Rightarrow (x-1)$ và $(x+1)$ là hai số chẵn liên tiếp

$$\Rightarrow (x-1)(x+1):8 \Rightarrow 6y^2:8 \Rightarrow 3y^2:4 \Rightarrow y^2:4 \Rightarrow y:2$$

$$\Rightarrow y = 2 \text{ (} y \text{ là số nguyên tố), tìm được: } x = 5$$

Bài 33: Số học sinh khối 6 của một trường chưa đến 400 bạn, biết khi xếp hàng 10; hàng 12; 15 đều dư 3 nhưng nếu xếp hàng 11 thì không dư. Tính số học sinh khối 6 của trường đó.

*Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019***Lời giải**

Gọi số học sinh là a ($a \in \mathbb{Z}^+$)

Ta có: $a-3 \in BC(10;12;15) \Rightarrow a-3 = 60k (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow a = 60k + 3$

k	1	2	3	4	5	6	7
a	63	123	183	243	303	363	423

Ta xem với giá trị nào của k thì $a < 400$ và $a:11$

Trong các giá trị trên, chỉ có $a = 363 < 400$ và $a:11$

Vậy số học sinh cần tìm là 363 học sinh.

Bài 34: Tìm các giá trị nguyên của n để phân số $B = \frac{2n+5}{n+3}$ có giá trị là số nguyên.

Trích đề KS HSG huyện năm 2021 – 2022

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{2n+5}{n+3} = \frac{2(n+3)-1}{n+3} = 2 - \frac{1}{n+3}$$

Để B có giá trị nguyên thì $\frac{1}{n+3}$ nguyên

$$1:(n+3)$$

$n+3$ thuộc ước nguyên của 1

$$n+3 \in \{-1; 1\}$$

$$n \in \{-4; -2\}.$$

$$\text{Vậy } n \in \{-4; -2\}$$

Bài 35: Tìm số nguyên n để $A = 2n^2 + n - 6$ chia hết cho $2n+1$

Trích đề HSG Trường Nghĩa Đồng huyện Tân Kỳ năm 2021-2022.

Lời giải

$$\text{Ta có } A = 2n^2 + n - 6 = n.(2n+1) - 6$$

Vì A chia hết cho $2n+1$ nên $6:2n+1$

$$2n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$$

Do $2n+1$ là số lẻ nên ta có bảng sau

$2n+1$	1	-1	3	-3
$2n$	0	-2	2	-4
n	0	-1	1	-2

Vậy với $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$ thì A chia hết cho $2n+1$

Bài 36: Tìm các cặp số nguyên x, y thỏa mãn: $3xy + 2x - 5y = 6$

Trích đề HSG Trường Nghĩa Đồng huyện Tân Kỳ năm 2021-2022.

Lời giải

$$3xy + 2x - 5y = 6 \text{ suy ra } x(3y+2) - 5y = 6$$

$$3x(3y+2) - 15y = 18$$

$$3x(3y+2) - 15y - 10 = 18 - 10$$

$$3x(3y+2) - 5(3y+2) = 8$$

$$(3x-5).(3y+2) = 8$$

Nên $3y+2 \in U(8) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$

Mà $3y+2$ là số chia 3 dư 2 nên $3y+2 \in \{-1; 2; -4; 8\}$

Ta có bảng sau:

$3y+2$	-4	-1	2	8
$3x-5$	-2	-8	4	1
y	-2	-1	0	2
x	1	-1	3	2

Vậy $(x;y) \in \{(1;-2); (-1;-1); (3;0); (2;2)\}$

Bài 37: Tìm số nguyên n sao cho $n-2022$ chia hết cho $n-2017$.

Trích đề HSG Quận Hà Đông năm 2021-2022.

Lời giải

Ta có: $(n-2022):(n-2017)$ điều kiện $n \neq 2017$.

Mà $(n-2017):(n-2017)$ nên $(n-2022)-(n-2017):(n-2017)$ (tính chất chia hết của một hiệu).

Suy ra $-5:(n-2017)$ nên $(n-2017) \in U(-5) = \{-1; 1; -5; 5\}$

Ta có bảng sau:

$n-2017$	-1	1	-5	5
n	2016	2018	2012	2022
	thỏa mãn	thỏa mãn	thỏa mãn	thỏa mãn

Vậy với $n \in \{2016; 2018; 2012; 2022\}$ thì $n-2022$ chia hết cho $n-2017$.

Bài 38: Tìm hai số nguyên, biết tích của chúng lớn hơn ba lần tổng của chúng là 1

Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021-2022

Lời giải

Gọi 2 số đó là x, y ($x; y \in \mathbb{Z}$)

Ta có $xy - 3(x+y) = 1$

$xy - 3x - 3y = 1$

$xy - 3x - 3y + 9 = 10$

$(xy - 3x) - (3y - 9) = 10$

$x(y - 3) - 3(y - 3) = 10$

$(x-3)(y-3) = 10$. Vì $x; y \in \mathbb{Z}$, vai trò x, y như nhau. Giả sử $x > y$.

Ta có bảng

$x-3$	5	10	-2	-1
$y-3$	2	1	-5	-10
x	8	13	1	2
y	5	4	-2	-7

Vậy $(x; y) \in \{(8;5); (13;4); (1;-2); (2;-7)\}$. Có 4 cặp số nguyên x, y thỏa mãn

Bài 39: Tìm x, y nguyên biết: $2x(3y-2) + (3y-2) = -55$

Trích đề ks HSG Trường Thiện Quang huyện Kim Sơn năm 2021-2022

Lời giải

Tìm x, y nguyên biết: $2x(3y-2) + (3y-2) = -55$

Ta có

$$(2x-1)(3y-2) = -55$$

$$\text{Suy ra } 2x+1 = \frac{-55}{3y-2} \quad (1)$$

Để x nguyên thì $3x-2 \in U(-55) = \{1; 5; 11; 55; -1; -5; -11; -55\}$

$+3y-2=1$ suy ra $3y=3$ nên $y=1$, thay vào (1) ta được $x=28$

$+3y-2=5$ suy ra $3y=7$ nên $y=\frac{7}{3}$, (Loại)

$+3y-2=11$ suy ra $3y=13$ nên $y=\frac{13}{3}$, (Loại)

$+3y-2=55$ suy ra $3y=57$ nên $y=19$, thay vào (1) ta được $x=-1$.

$+3y-2=-1$ suy ra $3y=1$ nên $y=\frac{1}{3}$, (loại)

$+3y-2=-5$ suy ra $3y=-3$ nên $y=-1$, thay vào (1) ta được $x=5$

$+3y-2=-11$ suy ra $3y=-9$ nên $y=-3$, thay vào (1) ta được $x=2$

$+3y-2=-55$ suy ra $3y=-53$ nên $y=\frac{-53}{3}$, (loại)

Vậy ta có 4 cặp số x, y nguyên thoả mãn là

$$(x, y) \in \{(28; 1); (-1; 19); (5; -1); (2; 3)\}$$

Bài 40: Tìm các số nguyên a, b biết rằng: $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3} \Rightarrow \frac{2a-7}{14} = \frac{1}{b+3} \Rightarrow (2a-7)(b+3) = 14$$

Do $a, b \in \mathbb{Z}$ nên $2a-7 \in U(14)$

Vì $2a-7$ lẻ nên $2a-7 \in \{\pm 1; \pm 7\} \Rightarrow a \in \{0; 3; 4; 7\}$

Vậy $(a; b) = \{(0; -5); (3; -17); (4; 11); (7; -1)\}$

Bài 41: Tìm tất cả các cặp số nguyên sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Lời giải

$M = -a$ Gọi hai số nguyên đó là x và y

Theo bài ra ta có: $xy = x + y$

$$\Rightarrow xy - x - y + 1 = 1$$

$$\Rightarrow (x-1)(y-1) = 1$$

$\Rightarrow x-1, y-1$ là các ước của 1

$\Rightarrow x-1 = y-1 = 1$ hoặc $x-1 = y-1 = -1$

$\Rightarrow x = y = 2$ hoặc $x = y = 0$

Bài 42: Tìm số nguyên x , biết:

$$a) 2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7$$

$$b) \frac{x}{6} + \frac{x}{10} + \frac{x}{15} + \frac{x}{21} + \frac{x}{28} + \frac{x}{36} + \frac{x}{45} + \frac{x}{55} + \frac{x}{66} + \frac{x}{78} = \frac{220}{39}$$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018- 2019

Lời giải

$$a) 2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7 \Leftrightarrow 2016 : [25 - (3x + 2)] = 63$$

$$\Leftrightarrow 25 - (3x + 2) = 2016 : 63 \Rightarrow 25 - (3x + 2) = 32$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2 = -7 \Leftrightarrow 3x = -9 \Leftrightarrow x = -3$$

$$b) \frac{x}{6} + \frac{x}{10} + \frac{x}{15} + \frac{x}{21} + \frac{x}{28} + \frac{x}{36} + \frac{x}{45} + \frac{x}{55} + \frac{x}{66} + \frac{x}{78} = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{36} + \frac{1}{45} + \frac{1}{55} + \frac{1}{66} + \frac{1}{78} \right) = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110} + \frac{1}{132} + \frac{1}{156} \right) = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 13} \right) = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} \right) = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{13} \right) = \frac{220}{39} \Rightarrow x = 11$$

Bài 43: Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ biết: $\frac{x}{5} + 1 = \frac{1}{y-1}$

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{x}{5} + 1 = \frac{1}{y-1} \Leftrightarrow \frac{x+5}{5} = \frac{1}{y-1} \Leftrightarrow (x+5)(y-1) = 5 \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow (x+5)(y-1) = 5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = -5 \cdot (-1) = (-1) \cdot (-5)$$

Thay hết tất cả các trường hợp ta có:

$$(x; y) = \{(0; 2); (-4; 6); (-10; 0); (-6; -4)\}$$

B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

(copy đề bài ở các dạng trên để làm phiếu phô tô cho HS)

I. Ước và bội.

Dạng 1: Chứng minh sự chia hết.

Bài 1: Chứng tỏ rằng $a^2 + 3a + 1$ không thể chia hết cho 2 với a là số nguyên.

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

Bài 2: Chứng tỏ $4x + 3y$ chia hết cho 7 khi $2x + 5y$ chia hết cho 7.

Trích đề HSG cấp huyện năm 2018-2019

Bài 3: Tìm số nguyên n sao cho $4n - 5$ chia hết cho $2n - 1$.

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015-2016

Bài 4:

a) Cho \overline{ababab} là số có sáu chữ số, chứng tỏ số \overline{ababab} là bội của 3

c) Chứng tỏ : $S = 16^5 + 2^{15}$ chia hết cho 33

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018 - 2019

Bài 5: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta có $n^3 - n : 6$

Trích đề chọn HSG Trục Ninh năm 2017-2018

Bài 6: Cho $M = (-a + b) - (b + c - a) + (c - a)$. Trong đó $b, c \in \mathbb{Z}$ còn a là một số nguyên âm. Chứng minh rằng biểu thức M luôn dương

Trích đề HSG huyện Lâm Thao, năm 2017 - 2018

Bài 7: Cho \overline{ababab} là số có sáu chữ số, chứng tỏ số \overline{ababab} là bội của 3.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018 - 2019

Bài 8: Tìm các giá trị nguyên n của để phân số $B = \frac{2n+5}{n+3}$ có giá trị là số nguyên.

Trích đề KS HSG huyện năm 2021 - 2022

Bài 9: Tìm số nguyên n để $A = 2n^2 + n - 6$ chia hết cho $2n + 1$

Trích đề HSG Trường Nghĩa Đồng huyện Tân Kỳ năm 2021-2022.

Bài 10: Chứng minh rằng trong hai số: $5^n + 2023$ và $5^n + 2024$, luôn có một số chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n .

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021 - 2022

Dạng 2: Tìm số thỏa mãn điều kiện chia hết.

Trắc nghiệm

Bài 1: Tập hợp các số tự nhiên x thỏa mãn $6 : (x - 2)$ là:

A. $\{1; 2; 3; 6\}$.

B. $\{3; 6\}$.

C. $\{5; 8\}$.

D. $\{3; 4; 5; 8\}$.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021-2022

Tự luận

Bài 1: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia số đó cho 3 dư 1 ; chia cho 4 dư 2 ; chia cho 5 dư 3 ; chia cho 6 dư 4 và chia hết cho 11 .

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Bài 2: Tìm các số nguyên x sao cho $4x-3 \vdots x-2$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 3: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2xy + y - 10x = 11$.

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Vậy cặp thỏa mãn là $(x; y) \in \{(-1; -1), (0; 11), (-2; 3), (1; 7)\}$

Bài 4. Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{6n+4}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên.

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Bài 5. Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị là số nguyên.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 6: Tìm số nguyên n để $A = 2n^2 + n - 6$ chia hết cho $2n+1$.

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2021-2022

Bài 7: Tìm các số nguyên n sao cho: $n^2 + 5n + 9$ là bội của $n+3$.

HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014 -2015

Bài 8: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn : $2xy - x - y = 2$.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Bài 9: Tìm tất cả các cặp số tự nhiên khác không (x, y) sao cho $(2x+5) \cdot (x+2) = 3^y$

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Bài 10: Tìm các số nguyên a, b biết rằng: $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$

Trích đề HSG huyện Hoài Nhơn năm 2015-2016

Bài 11: Tìm các cặp số tự nhiên x, y sao cho $(2x+1)(y-5) = 12$

Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015-2016

Bài 12: Tìm tất cả các số nguyên n để:

a) Phân số $\frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên

b) Phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản

Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015-2016

Bài 13: Cho biểu thức : $P = \frac{2n+1}{n-4}$.

a) Với điều kiện nào của số nguyên n thì P là một phân số. Tính giá trị của P khi $n = -203$.

b) Viết tập hợp M các số nguyên n sao cho phân số P có giá trị là một số nguyên.

Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Bài 14: Tìm x nguyên dương để $2x-1$ chia hết cho $x-3$.

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Bài 15: Tìm số tự nhiên n lớn nhất biết rằng khi chia các số $6355; 1705; 1271$ cho n được các số dư lần lượt là $55; 25$ và 1111 .

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Bài 16: Tìm số tự nhiên x biết: $24 \vdots x$; $36 \vdots x$; $160 \vdots x$ và x là số lớn nhất.

Trích đề HSG Huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Bài 17: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho: a chia cho 5 dư 3, a chia cho 7 dư 4

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Bài 18: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng số đó chia cho 9 dư 5, chia cho 7 dư 4 và chia cho 5 dư 3

Trích đề HSG cấp trường Bá Thước năm 2018-2019

Bài 19: Tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng bằng 84, ƯCLN, của chúng bằng 6

Trích đề HSG cấp trường vòng 2 THCS Tân Lập năm 2018-2019

Bài 20: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khác 0 biết rằng số đó có 15 ước dương

Trích đề chọn HSG Tam Dương năm 2016-2017

Bài 21: Tìm số nguyên n để phân số $M = \frac{2n-7}{n-5}$ có giá trị là số nguyên

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Bài 22: Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ biết: $2x(3y-2) + (3y-2) = -55$

Trích đề HSG cấp trường Hà Huy Tập năm 2018-2019

Bài 23: Cho a là một số nguyên có dạng $a = 3b + 7 (b \in \mathbb{Z})$. Hỏi a có thể nhận những giá trị nào trong các giá trị sau: $a = 11; a = 2002; a = 2003; a = 11570; a = 22789; a = 29563; a = 299537$

Trích đề HSG cấp trường Bá Thước năm 2018-2019

Bài 24: Xét phân số $A = \frac{n^2+4}{n+5}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên n trong khoảng từ 1 đến 2022 sao cho phân số A chưa tối giản.

B. 79

B. 89

C. 99

D. 69

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 25: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của x để $x+3$ chia hết cho $x-2$. Số tập hợp con của tập hợp S là:

B. 4

B. 16

C. 15

D. 5

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 26: Số nguyên dương nhỏ nhất không phải là ước của tích $1.2.3.4. \dots .96.97.98$ là

B. 78

B. 99

C. 101

D. 100

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 27: Tìm số nguyên n để $(n+3) \vdots (n+1)$

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 28: Có ba chồng sách: Văn, Âm nhạc, Toán, mỗi chồng chỉ gồm một loại sách. Mỗi cuốn Văn dày 15 mm, mỗi cuốn Âm nhạc dày 6 mm, mỗi cuốn Toán dày 8 mm. Người ta xếp cho 3 chồng sách cao bằng nhau. Tính chiều cao nhỏ nhất của ba chồng sách đó.

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Bài 29: Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho $xy - 2x + y + 1 = 0$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành, năm 2018- 2019

Bài 30: Tìm số nguyên n để phân số $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên.

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018- 2019

Bài 31: Tìm số nguyên n để phân số $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Bài 32: Tìm hai số nguyên tố x và y sao cho: $x^2 - 2x + 1 = 6y^2 - 2x + 2$

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Bài 33: Số học sinh khối 6 của một trường chưa đến 400 bạn, biết khi xếp hàng 10; hàng 12; 15 đều dư 3 nhưng nếu xếp hàng 11 thì không dư. Tính số học sinh khối 6 của trường đó.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Bài 34: Tìm các giá trị nguyên của n để phân số $B = \frac{2n+5}{n+3}$ có giá trị là số nguyên.

Trích đề KS HSG huyện năm 2021 – 2022

Bài 35: Tìm số nguyên n để $A = 2n^2 + n - 6$ chia hết cho $2n + 1$

Trích đề HSG Trường Nghĩa Đồng huyện Tân Kỳ năm 2021-2022.

Bài 36: Tìm các cặp số nguyên x, y thỏa mãn: $3xy + 2x - 5y = 6$

Trích đề HSG Trường Nghĩa Đồng huyện Tân Kỳ năm 2021-2022.

Bài 37: Tìm số nguyên n sao cho $n - 2022$ chia hết cho $n - 2017$.

Trích đề HSG Quận Hà Đông năm 2021-2022.

Bài 38: Tìm hai số nguyên, biết tích của chúng lớn hơn ba lần tổng của chúng là 1

Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021-2022

Bài 39: Tìm x, y nguyên biết : $2x(3y - 2) + (3y - 2) = -55$

Trích đề ks HSG Trường Thiện Quang huyện Kim Sơn năm 2021-2022

Bài 40: Tìm các số nguyên a, b biết rằng: $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Bài 41: Tìm tất cả các cặp số nguyên sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 42: Tìm số nguyên x , biết:

a) $2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7$

b) $\frac{x}{6} + \frac{x}{10} + \frac{x}{15} + \frac{x}{21} + \frac{x}{28} + \frac{x}{36} + \frac{x}{45} + \frac{x}{55} + \frac{x}{66} + \frac{x}{78} = \frac{220}{39}$



Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018- 2019

Bài 43: Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ biết: $\frac{x}{5} + 1 = \frac{1}{y-1}$

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

C. SỬU TÀM CÁC BÀI TRONG CÁC ĐỀ CỦA NHỮNG NĂM TRƯỚC ĐÓ

(Phần này lấy các câu từ những năm trước, trước năm 2020-2021, tối thiểu 10 bài)

Bài 1: Cho $A = \frac{3n-5}{n+4}$, tìm $n \in \mathbb{Z}$ để A có giá trị nguyên.*Trích đề HSG huyện Tĩnh Gia năm 2018 - 2019***Lời giải**

Ta có

$$A = \frac{3n-5}{n+4} = 3 + \frac{-17}{n+4}$$

 A có giá trị nguyên khi và chỉ khi $(n+4) \in U(-17) = \{\pm 1; \pm 17\}$.

Ta có bảng sau:

$n+4$	-17	-1	1	17
n	-21	-5	-3	13

Vậy $n \in \{-21; -5; -3; 13\}$ thì A có giá trị nguyên.**Bài 2:** Tìm các số nguyên n sao cho $n^2 + 5n + 9$ là bội của $n + 3$.*Trích đề HSG huyện Hưng Hà (Thái Bình) năm 2018 - 2019***Lời giải**Ta có $n^2 + 5n + 9 = n(n+3) + 2n + 1 = n(n+3) + 2(n+3) - 5 = (n+3).(n+2) - 5 : n+3$ Vì $(n+3).(n+2) : n+3$ nên $5 : n+3$ Suy ra $n+3 \in U(5) = \{-5; -1; 1; 5\}$ hay $n \in \{-8; -4; -2; 2\}$ Vậy $n \in \{-8; -4; -2; 2\}$.**Bài 3:** Tìm x, y nguyên biết $\frac{2}{y} - \frac{1}{x} = \frac{8}{xy} + 1$.**Lời giải**Từ $\frac{2}{y} - \frac{1}{x} = \frac{8}{xy} + 1$.Suy ra $\frac{2x-y}{x.y} = \frac{8+xy}{x.y}$

$$2x - y = 8 + xy$$

$$xy - 2x + y = -8$$

$$x.(y-2) + y - 2 = -10$$

$$(y-2).(x+1) = -10.$$

Ta có bảng sau:

$x+1$	-10	-5	-2	-1	1	2	5	10
x	-11	-6	-3	-2	0	1	4	9

$y-2$	1	2	5	10	-10	-5	-2	-1
y	3	4	7	12	-8	-3	0	1

Vậy các cặp số $(x; y)$ nguyên thoả mãn là $(-11; 3), (-6; 4), (-3; 7), (-2; 12), (0; -8), (1; -3), (4; 0), (9; 1)$

Bài 4: Tìm số nguyên x, y biết $6x^2 + 5y^2 = 74$.

Lời giải

Từ $6x^2 + 5y^2 = 74$

Suy ra $6x^2 \leq 74$ do đó $x^2 \leq \frac{74}{6}$ mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x^2 \in \{0; 1; 4; 9\}$.

TH1: $x^2 = 0$ suy ra $5y^2 = 74$ (loại)

TH2: $x^2 = 1$ suy ra $6 + 5y^2 = 74$ hay $5y^2 = 68$ (loại)

TH3: $x^2 = 4$ suy ra $6 \cdot 4 + 5y^2 = 74$ nên $5y^2 = 50$ hay $y^2 = 10$ (loại)

TH4: $x^2 = 9$ ($x = \pm 3$) suy ra $6 \cdot 9 + 5y^2 = 74$ nên $5y^2 = 20$ hay $y^2 = 4$ suy ra $y = \pm 2$.

Vậy các cặp số $(x; y)$ nguyên thoả mãn là $(-3; -2), (-3; 2), (3; -2), (3; 2)$.

Bài 5: Tìm các số nguyên x, y thoả mãn $2x^2 + 3y^2 = 77$.

Lời giải

Từ $2x^2 + 3y^2 = 77$

Suy ra $0 \leq 3y^2 \leq 77$ do đó $0 \leq y^2 \leq 25$ mà $y \in \mathbb{Z}$ và y^2 là số chính phương nên $y^2 \in \{1; 9; 25\}$.

TH1: $y^2 = 1$ suy ra $2x^2 + 3 = 77$ nên $2x^2 = 74$ hay $x^2 = 37$ (loại).

TH2: $y^2 = 9$ ($y = \pm 3$) suy ra $2x^2 + 3 \cdot 9 = 77$ nên $2x^2 = 50$ hay $x^2 = 25$ suy ra $x = \pm 5$.

TH3: $y^2 = 25$ ($y = \pm 5$) suy ra $2x^2 + 3 \cdot 25 = 77$ nên $2x^2 = 2$ hay $x^2 = 1$ suy ra $x = \pm 1$.

Vậy các cặp số $(x; y)$ nguyên thoả mãn là

$(-5; -3), (-5; 3), (5; -3), (5; 3), (-1; -5), (-1; 5), (1; -5), (1; 5)$.

Bài 6: Tìm các giá trị x, y nguyên thoả mãn:

a) $x(y+2) = -8$

b) $x(y-3) = -12$

c) $(x+1)y = 3$

Lời giải

a) Vì x, y là các số nguyên nên $x, (y+2)$ cũng là các số nguyên

Mà $x(y+2) = -8$. Nên $x, (y+2) \in U(-8) = \{1; 2; 4; 8; -1; -2; -4; -8\}$

Ta có bảng sau:

x	1	2	4	8	-1	-2	-4	-8
$y+2$	-8	-4	-2	-1	8	4	2	1
y	-10	-6	-4	-3	6	2	0	-1

Vậy các cặp số $(x; y)$ nguyên thoả mãn là

$(1; -10), (2; -6), (4; -4), (8; -3), (-1; 6), (-2; 2), (-4; 0), (-8; -1)$.

b) Vì x, y là các số nguyên nên $x, (y-3)$ cũng là các số nguyên

Mà $x(y-3) = -12$ nên $x, (y-3) \in U(-12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12; -1; -2; -3; -4; -6; -12\}$

Ta có bảng sau:

x	1	2	3	4	6	12	-1	-2	-3	-4	-6	-12
$y-3$	-12	-6	-4	-3	-2	-1	12	6	4	3	2	1
y	-9	-3	-1	0	1	2	15	9	7	6	5	4

Vậy các cặp số $(x; y)$ nguyên thoả mãn là

$$(1; -9), (2; -3), (3; -1), (4; 0), (6; 1), (12; 2), (-1; 15), (-2; 9), (-3; 7), (-4; 6), (-6; 5), (-12; 4).$$

c) Vì x, y là các số nguyên nên $(x+1), y$ cũng là các số nguyên

Mà $(x+1)y = 3$ nên $(x+1), y \in U(3) = \{1; 3; -1; -3\}$.

Ta có bảng sau:

$x+1$	1	3	-1	-3
x	0	2	-2	-4
y	3	1	-3	-1

Vậy các cặp số $(x; y)$ nguyên thoả mãn là $(0; 3), (2; 1), (-2; -3), (-4; -1)$.

Bài 7: Tìm các giá trị x, y nguyên thoả mãn $(x+1)(y-3) = 3$

Lời giải

Vì x, y là các số nguyên nên $(x+1), (y-3)$ cũng là các số nguyên. Mà $(x+1)(y-3) = 3$ nên $(x+1), (y-3) \in U(3) = \{1; 3; -1; -3\}$. Ta có bảng sau:

$x+1$	1	3	-1	-3
x	0	2	-2	-4
$y-3$	3	1	-3	-1
y	6	4	0	2

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là $(0; 6), (2; 4), (-2; 0), (-4; 2)$.

Bài 8: Tìm các giá trị x, y nguyên thoả mãn $(2x+1)(y-5) = 12$

Lời giải

Vì x, y là các số nguyên nên $(2x+1), (y-5)$ cũng là các số nguyên.

Mà $(2x+1)(y-5) = 12$ nên $(2x+1), (y-5) \in U(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12; -1; -2; -3; -4; -6; -12\}$

Vì $2x+1$ là số lẻ nên ta có bảng sau:

$2x+1$	1	3	-1	-3
x	0	1	-1	-2
$y-5$	12	4	-12	-4
y	17	9	-7	1

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là $(0; 17), (1; 9), (-1; -7), (-2; 1)$.

Bài 9: Tìm x, y nguyên thỏa mãn: $(x-3) = y(x+2)$ với $x \neq -2$.

Lời giải

$$\text{Vì } (x-3) = y(x+2) \quad (1)$$

$$\text{nên } x-3 : x+2$$

$$\text{Suy ra } x+2-5 : x+2$$

Mà $x+2 : x+2$ với mọi x nguyên, $x \neq -2$.

$$\text{Nên } 5 : x+2 \text{ suy ra } x+2 \in U(5) = \{1; 5; -1; -5\}.$$

$$\text{suy ra } x \in \{-1; 3; -3; -7\}.$$

Với $x = -1$ thay vào (1) ta được $-4 = y \cdot 1$ suy ra $y = -4$.

Với $x = 3$ thay vào (1) ta được $0 = y \cdot 5$ suy ra $y = 0$.

Với $x = -3$ thay vào (1) ta được $-6 = y \cdot (-1)$ suy ra $y = 6$.

Với $x = -7$ thay vào (1) ta được $-10 = y \cdot (-5)$ suy ra $y = 2$.

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là $(-1; -4), (3; 0), (-3; 6), (-7; 2)$.

Bài 10: Tìm các số nguyên x , biết:

a) $3x+2 : x-1$

b) $2x-5 : x-1$

c) $2x+3 : x+1$

Lời giải

a) $3x+2 : x-1$

$$\text{Suy ra } 3x-3+5 : x-1$$

$$\text{hay } 3(x-1)+5 : x-1$$

Vì $3(x-1) : x-1$ với mọi $x \neq 1$

$$\text{nên } 5 : x-1 \text{ suy ra } x-1 \in U(5) = \{1; 5; -1; -5\}.$$

$$\text{suy ra } x \in \{2; 6; 0; -4\}.$$

b) $2x-5 : x-1$

$$\text{Suy ra } 2x-2-3 : x-1$$

$$\text{hay } 2(x-1)-3 : x-1$$

Vì $2(x-1) : x-1$ với mọi $x \neq 1$

$$\text{nên } 3 : x-1 \text{ suy ra } x-1 \in U(3) = \{1; 3; -1; -3\}.$$

$$\text{suy ra } x \in \{2; 4; 0; -2\}.$$

c) $2x+3 : x+1$

$$\text{Suy ra } 2x+2+1 : x+1$$

$$\text{hay } 2(x+1)+1 : x+1$$

Vì $2(x+1) : x+1$ với mọi $x \neq -1$.

$$\text{nên } 1 : x+1 \text{ suy ra } x+1 \in U(1) = \{-1; 1\}.$$

$$\text{suy ra } x \in \{0; -2\}.$$

Bài 11: Tìm các số nguyên x , biết

a) $2x+5 : 2x-1$

b) $4x-5 : 2x-1$

c) $10-2x : x-2$

Lời giải

$$a) 2x+5:2x-1 \Rightarrow 2x-1+6:2x-1$$

Vì $2x-1:2x-1$ với mọi x nguyên

$$\text{Nên } 6:2x-1 \Rightarrow 2x-1 \in U(6) = \{1; 2; 3; 6; -1; -2; -3; -6\}$$

$$\Rightarrow 2x \in \{2; 3; 4; 7; 0; -1; -2; -5\}$$

$$\Rightarrow x \in \left\{1; \frac{3}{2}; 2; \frac{7}{2}; 0; \frac{-1}{2}; -1; \frac{-5}{2}\right\}.$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{1; 2; 0; -1\}$.

$$b) \quad 4x-5:2x-1$$

$$\Rightarrow 4x-2-3:2-1$$

$$\Rightarrow 2(2x-1)-3:2x-1$$

Vì $2(2x-1):2x-1$ với mọi x nguyên

$$\text{Nên } 3:2x-1 \Rightarrow 2x-1 \in U(3) = \{1; 3; -1; -3\}$$

$$\Rightarrow 2x \in \{2; 4; 0; -2\}$$

$$\Rightarrow x \in \{1; 2; 0; -1\}.$$

Vậy $x \in \{1; 2; 0; -1\}$.

Bài 12: Tìm các số nguyên x , biết $10-2x:x-2$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 10-2x:x-2$$

$$\Rightarrow 2x-10:x-2$$

$$\Rightarrow 2x-4-6:x-2$$

$$\Rightarrow 2(x-2)-6:x-2$$

Vì $2(x-2):x-2$ với mọi x nguyên khác 2.

$$\text{Nên } 6:x-2 \Rightarrow x-2 \in U(6) = \{1; 2; 3; 6; -1; -2; -3; -6\}$$

$$\Rightarrow x \in \{3; 4; 5; 8; 1; 0; -1; -4\}$$

Vậy $x \in \{3; 4; 5; 8; 1; 0; -1; -4\}$.

Bài 13: Tìm số nguyên n với $n \neq 2$ để phân số $A = \frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là số nguyên.

Lời giải

Để phân số A có giá trị là một số nguyên thì $n+1:n-2$

$$\Rightarrow n-2+3:n-2$$

Vì $n-2:n-2$ với mọi số nguyên n khác 2.

$$\text{Nên } 3:n-2 \Rightarrow n-2 \in U(3) = \{1; 3; -1; -3\}$$

$$\Rightarrow n \in \{3; 5; 1; -1\}.$$

Bài 14: Tìm số nguyên n với $n \neq 1$ để phân số $A = \frac{n+2}{n-1}$ có giá trị là số nguyên.

Lời giải

Để phân số A có giá trị là một số nguyên thì $n+2:n-1 \Rightarrow n-1+3:n-1$

Vì $n-1:n-1$ với mọi số nguyên n khác 1

Nên $3: n-1 \Rightarrow n-1 \in U(3) = \{1; 3; -1; -3\}$

$\Rightarrow n \in \{2; 4; 0; -2\}$.

Bài 15: Tìm x, y nguyên thỏa mãn $xy - 3x = -19$.

Lời giải

$$xy - 3x = -19$$

$$\Rightarrow x(y-3) = -19.$$

Vì x, y là các số nguyên nên $x, (y-3)$ cũng là các số nguyên

Nên $x, (y-3) \in U(-19) = \{1; 19; -1; -19\}$

Ta có bảng sau:

x	1	19	-1	-19
$y-3$	-19	-1	19	1
y	-16	2	22	4

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là $(1; -16), (19; 2), (-1; 22), (-19; 4)$.

Bài 16: Tìm x, y nguyên thỏa mãn $2x + xy - y = 9$.

Lời giải

Ta có $2x + xy - y = 9$

$$\Rightarrow x(y+2) - y - 2 + 2 = 9$$

$$\Rightarrow x(y+2) - (y+2) = 7$$

$$\Rightarrow (y+2)(x-1) = 7.$$

Vì là x, y các số nguyên nên $(x-1), (y+2)$ cũng là các số nguyên.

Nên $(x-1), (y+2) \in U(7) = \{1; 7; -1; -7\}$.

Ta có bảng sau:

$x-1$	1	7	-1	-7
x	2	8	0	-6
$y+2$	7	1	-7	-1
y	5	-1	-9	-3

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là $(2; 5), (8; -1), (0; -9), (-6; -3)$.

Bài 17: Tìm x, y nguyên thỏa mãn $(x+6) = y(x-1)$ với $x \neq 1$.

Lời giải

$$\text{Vì } y(x-1) = x+6 \quad (1)$$

$$\text{Nên } x+6: x-1 \Rightarrow x-1+7: x-1$$

Mà $x-1: x-1$ với mọi x nguyên khác 1.

$$\text{Nên } 7: x-1 \Rightarrow x-1 \in U(7) = \{1; 7; -1; -7\}$$

$$\Rightarrow x \in \{2; 8; 0; -6\}.$$

Với $x=2$ thay vào (1) ta được $y.1 = 8 \Rightarrow y = 8$

Với $x=8$ thay vào (1) ta được $y.7 = 14 \Rightarrow y = 2$

Với $x=0$ thay vào (1) ta được $y.(-1) = 6 \Rightarrow y = -6$

Với $x = -6$ thay vào (1) ta được $y \cdot (-7) = 0 \Rightarrow y = 0$.

Bài 18: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia nó cho 6, 7, 9 được các số dư lần lượt là 2, 3, 5.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là a với $a \in \mathbb{N}$.

Vì a chia 6 dư 2 nên $a - 2$ chia hết cho 6.

Vì a chia 7 dư 3 nên $a - 3$ chia hết cho 7.

Vì a chia 9 dư 5 nên $a - 5$ chia hết cho 9.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a-2:6 \\ a-3:7 \\ a-5:9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-2+6:6 \\ a-3+7:7 \\ a-5+9:9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+4:6 \\ a+4:7 \\ a+4:9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+4 \in BC(6;7;9) = B(126) = \{0;126;252;.....\}$$

$$\Rightarrow a \in \{122;248;.....\}. \text{ Vì } a \text{ là số tự nhiên nhỏ nhất nên } a = 122.$$

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm là 122.

Bài 19: Tìm số tự nhiên có ba chữ số biết rằng nếu bớt số đó đi 8 thì được số chia hết cho 7, nếu bớt số đó đi 9 thì được số chia hết cho 8, nếu bớt số đó đi 10 thì được số chia hết cho 9.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là a với $a \in \mathbb{N}$.

Vì a bớt đi 8 thì chia hết cho 7 nên $a - 8$ chia hết cho 7.

Vì a bớt đi 9 thì chia hết cho 8 nên $a - 9$ chia hết cho 8.

Vì a bớt đi 10 thì chia hết cho 9 nên $a - 10$ chia hết cho 9.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a-8:7 \\ a-9:8 \\ a-10:9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-8+7:7 \\ a-9+8:8 \\ a-10+9:9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-1:7 \\ a-1:8 \\ a-1:9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a-1 \in BC(7;8;9) = B(504) = \{0;504;1008;.....\}$$

$$\Rightarrow a \in \{1;505;1009;.....\}. \text{ Vì } a \text{ là số tự nhiên có ba chữ số nên } a = 505.$$

Vậy số tự nhiên cần tìm là 505.

Bài 20: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 11, 17, 29 thì có dư lần lượt là 6, 12, 24.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là a .

Vì a chia cho 11 dư 6 nên $a - 6$ chia hết cho 11.

Vì a chia cho 17 dư 12 nên $a - 12$ chia hết cho 17.

Vì a chia cho 29 dư 24 nên $a - 24$ chia hết cho 29.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a-6:11 \\ a-12:17 \\ a-24:29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-6+11:11 \\ a-12+17:17 \\ a-24+29:29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+5:11 \\ a+5:17 \\ a+5:29 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+5 \in BC(11;17;29) = B(5423) = \{0;5423;10846;.....\}$$

$$\Rightarrow a \in \{5418;10841;.....\}. \text{ Vì } a \text{ nhỏ nhất nên } a = 5418.$$

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm là 5418.

Bài 21: Tìm số tự nhiên n lớn nhất có ba chữ số, sao cho n chia 8; 31 được dư lần lượt là 7; 28.

Lời giải

Vì n chia cho 8 dư 7 nên $n - 7$ chia hết cho 8

Và n chia cho 31 dư 28 nên $n - 28$ chia hết cho 31

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \begin{cases} n-7:8 \\ n-28:31 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} n-7+72:8 \\ n-28+93:31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+65:8 \\ n+65:31 \end{cases} \\ &\Rightarrow n+65 \in BC(8;31) = B(248) = \{0; 248; 496; 744; 992; \dots\} \\ &\Rightarrow n \in \{183; 431; 679; 927; \dots\}. \end{aligned}$$

Vì n là số tự nhiên lớn nhất có ba chữ số nên $n = 927$.

Bài 22: Cho phân số: $A = \frac{n-5}{n+1}$ ($n \in \mathbb{Z}; n \neq -1$)

- a) Tìm n để A có giá trị nguyên
b) Tìm n để A là phân số tối giản

Lời giải:

$$\text{a) } A = \frac{n-5}{n+1} = \frac{n+1-6}{n+1} = 1 - \frac{6}{n+1}$$

A nhận giá trị nguyên $n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$.

$n+1$	1	-1	2	-2	3	-3	6	-6
n	0	-2	1	-3	2	-4	5	-7

b) A tối giản $(n+1, n-5) = 1$

$$(n+1, 6) = 1$$

$\Rightarrow n+1$ không chia hết cho 2 và $n+1$ không chia hết cho 3.

Bài 23:

a) Tìm hai số tự nhiên a và b biết $BCNN(a, b) = 180$; $UCLN(a, b) = 12$

b) Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để phân số $A = \frac{4n-1}{2n+3}$ có giá trị nguyên.

Lời giải:

a) Ta có $ab = 180 \cdot 12 = 2160$

Giả sử $a \leq b$. Vì $UCLN(a, b) = 12$ nên $a = 12m, b = 12n$ với $(m, n) = 1$ và $m \leq n$

Suy ra $12m \cdot 12n = 2160 \Rightarrow mn = 15$. Ta có bảng sau:

m	n	a	b
1	15	12	180
3	5	36	60

Vậy ta có hai cặp $(a; b)$ là $(12; 180), (36; 60)$.

$$\text{b) } A = \frac{4n-1}{2n+3} = \frac{2(2n+3)}{2n+3} - \frac{7}{2n+3} = 2 - \frac{7}{2n+3}$$

A có giá trị nguyên $\Leftrightarrow 2n+3 \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$.

Ta có bảng sau

$2n+3$	1	-1	7	-7
n	-1	-2	2	-5

Vậy $n \in \{-1; -2; 2; -5\}$

Bài 24: Cho $A = \frac{12n+1}{2n+3}$. Tìm giá trị của n để:

- a) A là một phân số b) A là một số nguyên

Lời giải:

a) $A = \frac{12n+1}{2n+3}$ là phân số khi $12n+1 \in \mathbb{Z}, 2n+3 \in \mathbb{Z}, 2n+3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \neq -1, 5 \end{cases}$

b) $A = \frac{12n+1}{2n+3} = 6 - \frac{17}{2n+3}$

A là số nguyên khi $2n+3 \in U(17) \Leftrightarrow 2n+3 \in \{\pm 1; \pm 17\} \Leftrightarrow n \in \{-10; -2; -1; 7\}$

Bài 25:

- a) Tìm giá trị n là số tự nhiên để $n+7$ chia hết cho $n+2$
 b) Tìm x là số chia trong phép chia 235 cho x được số dư là 14

Lời giải:

a) $(x+7):(x+2) \Leftrightarrow 5:(x+2) \Leftrightarrow (x+2) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

$\Rightarrow x \in \{-3; -1; -7; 3\}$.

b) $235 : x$ dư 14 $\Rightarrow 235 - 14 : x (x > 14) \Rightarrow 221 : x (x > 14) \Rightarrow x \in \{17; 221\}$

Bài 26: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ biết: $(3n+8):(n+1)$

Lời giải:

Ta có: $3n+8 = 3n+3+5 = 3(n+1)+5$

Suy ra: $(3n+8):(n+1)$ khi $(n+1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

Tìm được: $n \in \{-6; -2; 0; 4\}$

Bài 27:

a) Cho $\overline{abc} - \overline{deg} : 7$. Chứng minh $\overline{abc deg} : 7$

b) Tìm số nguyên n sao cho $n^2 + 1 : n + 1$

Lời giải:

a) Ta có: $\overline{abc deg} = 1000 \cdot \overline{abc} + \overline{deg}$

$$= (1001 - 1)\overline{abc} + \overline{\text{deg}} = 1001\overline{abc} - \overline{abc} + \overline{\text{deg}} = 1001\overline{abc} - (\overline{abc} - \overline{\text{deg}})$$

$$\text{Vì } 1001\overline{abc} = 7.143\overline{abc} \Rightarrow 7.143.\overline{abc} : 7 \quad (1)$$

$$\overline{abc} - \overline{\text{deg}} : 7 \text{ (gt)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\overline{abc} \text{ deg} : 7$

b) Ta có:

$$n^2 + 2 = n(n+1) + [-(n+1)] + 3$$

$$\text{Vì } n(n+1) : n+1 \text{ và } -(n+1) : n+1$$

$$\text{Đề } n^2 + 2 : n+1 \text{ thì } 3 : n+1 \Rightarrow n+1 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\} \Rightarrow n \in \{-2; 0; -4; 2\}.$$

Bài 28:

a) Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{90}$. Chứng minh A chia hết cho 11 và 13.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho $xy - 2x + y + 1 = 0$.

Lời giải:

a) A có 90 số hạng mà $90 : 5$ nên $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{90}$

$$A = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + (3^6 + 3^7 + 3^8 + 3^9 + 3^{10}) + \dots + (3^{86} + 3^{87} + 3^{88} + 3^{89} + 3^{90})$$

$$= 3.(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^6.(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{86}.(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4)$$

$$= 121.(3 + 3^6 + \dots + 3^{86}) : 11 \Rightarrow A : 11$$

A có 90 số hạng mà $90 : 3$ nên:

$$A = (3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6) + \dots + (3^{88} + 3^{89} + 3^{90})$$

$$= 3.(1 + 3 + 3^2) + 3^4.(1 + 3 + 3^2) + \dots + 3^{88}.(1 + 3 + 3^2)$$

$$= 13.(3 + 3^4 + \dots + 3^{88}) : 13 \Rightarrow A : 13$$

$$\text{b) } xy - 2x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow x(y - 2) + (y - 2) = -3$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(y - 2) = -3 = 1.(-3) = (-3).1$$

Từ đó suy ra $(x; y) \in \{(0; -1); (-4; 3)\}$

Bài 29: Tìm tất cả các số nguyên n để:

Phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản

Lời giải:

Gọi d là ƯC của $12n+1$ và $30n+2$ ($d \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow 12n+1 : d, 30n+2 : d$

$$[5(12n+1) - 2(30n+2)] : d \Leftrightarrow (60n+5 - 60n-4) : d \Leftrightarrow 1 : d$$

mà $d \in \mathbb{N}^* \Rightarrow d = 1$

Vậy phân số đã cho tối giản

Bài 30: Tìm số nguyên n để phân số $M = \frac{2n-7}{n-5}$ có giá trị là số nguyên

Lời giải:

$$a) M = \frac{2n-7}{n-5} = \frac{2n-10+3}{n-5} = 2 + \frac{3}{n-5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n-5 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

Suy ra $n \in \{2; 4; 6; 8\}$

Bài 31: Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị là số nguyên

Lời giải:

Để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị là nguyên thì $n+3 : 2n-2$

$$2(n+3) : 2n-2$$

$$(2n+6) - (2n-2) : (2n-2)$$

$$(2n-2n) + (6+2) : 2n-2 \Rightarrow 8 : 2n-2$$

Suy ra $(2n-2) \in \{\pm 2; \pm 4; \pm 8\}$

Sau khi thử các trường hợp ta được $n = 5$.

Bài 32: Cho $A = \frac{3n-5}{n+4}$, tìm $n \in \mathbb{Z}$ để A có giá trị nguyên.

Lời giải:

$$\text{Ta có } A = \frac{3n-5}{n+4} = 3 + \frac{-17}{n+4}$$

Để $A \in \mathbb{Z}$ thì $(n+4) \in U(-17) = \{\pm 1; \pm 17\}$.

Lập bảng và xét các giá trị ta có $n \in \{-5; -3; 21; 13\}$ thì A nguyên.

Bài 33. Tìm các giá trị nguyên của n để phân số $A = \frac{3n+2}{n-1}$ có giá trị là số nguyên

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{3n+2}{n-1} = \frac{3n-3+5}{n-1} = 3 + \frac{5}{n-1}$$

Để A có giá trị nguyên $\frac{5}{n-1} \in \mathbb{Z}$ suy ra $(n-1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$ suy ra $n \in \{2; 0; 6; -4\}$

Bài 34. Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{2n+1}{n+2}$ là phân số rút gọn được

Lời giải

Gọi d là ƯCLN($2n+1, n+2$) ($d \in \mathbb{N}^*$)

Ta có: $2n+1 : d, n+2 : d$ suy ra $[(2n+4) - (2n+1)] : d$ suy ra $3 : d$

Vì $d \in \mathbb{N}^*$ nên $d \in \{1; 3\}$. Để phân số $\frac{2n+1}{n+2}$ rút gọn được thì $d = 3$

Suy ra $n+2=3k$ suy ra $n=3k-2 (k \in \mathbb{N}^*)$

Vậy với $n=3k-2 (k \in \mathbb{N}^*)$ thì phân số $\frac{2n+1}{n+2}$ là phân số rút gọn được

Bài 35: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ biết: $(3n+8):(n+1)$

Lời giải

Ta có: $3n+8=3n+3+5=3(n+1)+5$

Suy ra : $(3n+8):(n+1)$ khi $(n+1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$.

Vậy $n \in \{-6; -2; 0; 4\}$.

Bài 36: Tìm số nguyên n để $5+n^2-2n$ chia hết cho $n-2$

Lời giải

Ta có $5+n^2-2n=5+n(n-2)$

Vì $n(n-2):(n-2)$, nên để $(5+n^2-2n):(n-2)$ thì $5:(n-2)$

Suy ra $(n-2)$ phải là ước của 5 suy ra $(n-2) \in \{-5; -1; 1; 5\}$ suy ra : $n \in \{-3; -1; 3; 7\}$

Vậy $n \in \{-3; -1; 3; 7\}$ thì $5+n^2-2n$ chia hết cho $n-2$

Bài 37: Cho $A=3+3^2+3^3+3^4+\dots+3^{90}$. Chứng minh A chia hết cho 11 và 13.

Lời giải:

A có 90 số hạng mà $90:5$ nên $A=3+3^2+3^3+3^4+\dots+3^{90}$

$A=(3+3^2+3^3+3^4+3^5)+(3^6+3^7+3^8+3^9+3^{10})+\dots+(3^{86}+3^{87}+3^{88}+3^{89}+3^{90})$

$=3.(1+3+3^2+3^3+3^4)+3^6.(1+3+3^2+3^3+3^4)+\dots+3^{86}.(1+3+3^2+3^3+3^4)$

$=121.(3+3^6+\dots+3^{86}):11$ suy ra $A:11$

A có 90 số hạng mà $90:3$ nên:

$A=(3+3^2+3^3)+(3^4+3^5+3^6)+\dots+(3^{88}+3^{89}+3^{90})$

$=3.(1+3+3^2)+3^4.(1+3+3^2)+\dots+3^{88}.(1+3+3^2)$

$=13.(3+3^4+\dots+3^{88}):13$ suy ra : $A:13$

Bài 38. Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho $xy-2x+y+1=0$.

Lời giải:

$xy-2x+y+1=0$ suy ra : $x(y-2)+(y-2)=-3$

suy ra : $(x+1)(y-2)=-3=1.(-3)=(-3).1$

Từ đó suy ra $(x; y) \in \{(0; -1); (-4; 3)\}$

Bài 39: Tìm các số nguyên a, b biết rằng: $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$

Lời giải:

$$\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3} \text{ suy ra } \frac{2a-7}{14} = \frac{1}{b+3} \text{ suy ra } (2a-7)(b+3) = 14$$

Do $a, b \in \mathbb{Z}$ nên $2a-7 \in U(14)$

Vì $2a-7$ lẻ nên $2a-7 \in \{\pm 1; \pm 7\}$ suy ra $a \in \{0; 3; 4; 7\}$

Vậy $(a; b) = \{(0; -5); (3; -17); (4; 11); (7; -1)\}$

Bài 40: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n &= (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n) = 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) \\ &= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 = 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}) \text{ chia hết cho 10.} \end{aligned}$$

Vậy với mọi số nguyên dương n thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10.

Bài 41: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $(2n+7):n+1$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (2n+7):n+1 &\Leftrightarrow 2n+7-2(n+1):n+1 \\ &\Leftrightarrow (2n+7)-(2n+2):n+1 \Leftrightarrow 2n+7-2n-2:n+1 \Leftrightarrow 5:n+1 \\ &\Rightarrow n+1 \in \{\pm 1; \pm 5\} \Rightarrow n \in \{-6; -2; 0; 4\} \end{aligned}$$

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên $n \in \{0; 4\}$

Vậy với $n \in \{0; 4\}$ thì $(2n+7):n+1$

Bài 42: Tìm số nguyên n để $A = 2n^2 + n - 6$ chia hết cho $2n+1$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 2n^2 + n - 6 = n(2n+1) - 6$$

Vì A chia hết cho $2n+1$ nên $n(2n+1) - 6:2n+1$ mà $n(2n+1):2n+1$ nên

$$6:2n+1 \Rightarrow 2n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}.$$

Do $2n+1$ là số lẻ nên $2n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 3\}$. Ta có bảng sau:

$2n+1$	1	-1	3	-3
$2n$	0	-2	2	-4
n	0	-1	1	-2

Vậy $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$

Bài 43: Tìm các cặp số nguyên x, y thỏa mãn: $3xy + 2x - 5y = 6$

Lời giải

$$3xy + 2x - 5y = 6 \Rightarrow x(3y+2) - 5y = 6 \Rightarrow 3x(3y+2) - 15y = 18$$

$$\Rightarrow 3x(3y+2) - 15y - 10 = 18 - 10 \Rightarrow 3x(3y+2) - 5(3y+2) = 8$$

$$\Rightarrow (3x-5)(3y+2) = 8$$

$$\Rightarrow 3y+2 \in U(8) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$$

Mà $3y+2$ là số chia cho 3 dư 2 $\Rightarrow 3y+2 \in \{-1; 2; -4; 8\}$.

Ta có bảng sau:

$3y+2$	-4	-1	2	8
$3x-5$	-2	-8	4	1
y	-2	-1	0	2
x	1	-1	3	2

Vậy $(x; y) \in \{(1; -2), (-1; -1), (3; 0), (2; 2)\}$

Bài 44: Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $2x+3y=14$

Lời giải

Xét $2x+5y=14$ (1)

Ta có: $14:2; 2x:2 \Rightarrow 5y:2 \Rightarrow y:2$

$5y < 14 \Rightarrow y < 14:5 \Rightarrow y \leq 2$

mà y chẵn nên $y=2$ thay vào (1) $\Rightarrow x=2$

Vậy $x=2; y=2$

Bài 45: Tìm các số nguyên x, y sao cho: $(x+1)(xy-1)=3$

Lời giải

Vì $(x+1)(xy-1)=3, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x+1 \in \mathbb{Z}, xy-1 \in \mathbb{Z}$

Do đó, $(x+1), (xy-1) \in \{\pm 1; \pm 3\}$

Ta có:

$x+1$	1	-1	3	-3
$xy-1$	3	-3	1	-3
x	0	-2	2	-4
y	Ktm	1	1	0

Vậy các cặp (x, y) thỏa mãn là: $(-2; 1); (2; 1); (-4; 0)$

Bài 46: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ biết: $(3n+8):(n+1)$

Lời giải:

Ta có: $3n+8 = 3n+3+5 = 3(n+1)+5$

Suy ra : $(3n+8):(n+1)$ khi $(n+1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$.

Vậy $n \in \{-6; -2; 0; 4\}$.

Bài 47: Tìm số nguyên n để $(n^2 + 3n + 6):(n+3)$

Lời giải:

Ta có $n^2 + 3n + 6 = n(n+3) + 6$

Vì $n(n+3):(n+3)$, nên để $(n^2 + 3n + 6):(n+3)$ thì $6:(n+3)$

Mà $n \in \mathbb{Z}$ nên $(n+3)$ là ước của 6

$\Rightarrow (n+3) \in \{\pm 3; \pm 6\} \Rightarrow n \in \{0; -6; 3; -9\}$

Vậy $n \in \{0; -6; 3; -9\}$ thì $(n^2 + 3n + 6):(n+3)$

Bài 48: Tìm tất cả các số nguyên n để phân số $\frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên

Lời giải:

Ta có $\frac{n+1}{n-2}$ là một số nguyên khi $(n+1):(n-2)$

Ta có $n+1 = (n-2) + 3$, do đó $(n+1):(n-2)$ khi $3:(n-2)$

$\Rightarrow (n-2)$ là ước của 3

$\Rightarrow (n-2) \in \{-3; -1; 1; 3\} \Rightarrow n \in \{-1; 1; 3; 5\}$

Vậy $n \in \{-1; 1; 3; 5\}$ thì $\frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên.

Bài 49: Cho $A = 999993^{1999} - 555557^{1997}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 5

Trích đề HSG huyện Mường Ảng, năm 2014- 2015

Lời giải

Để chứng minh $A:5$ ta xét chữ số tận cùng của A bằng việc xét chữ số tận cùng của từng số hạng.

Ta có: $3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3 = 81^{499} \cdot 27$ nên 3^{1999} có tận cùng là 7

$$7^{1997} = (7^4)^{499} \cdot 7 = 2401^{499} \cdot 7 \Rightarrow 7^{1997} \text{ tận cùng là } 7$$

Vậy A có tận cùng là 0 nên $A:5$

Bài 50: Tìm số nguyên n để $n^2 + 3:n-1$

Trích đề HSG huyện Xuân Trường, năm 2013- 2014

Lời giải

Ta có $n^2 + 3 = n(n-1) + n + 3$ (Thêm bớt n để làm xuất hiện tích $n-1$) $= n(n-1) + (n-1) + 1 + 3$ (

Thêm bớt 1 để làm xuất hiện $n-1$)

$$= (n-1)(n+1) + 4 : n-1$$

Vì $(n-1)(n+1) : n-1$ nên suy ra $4 : n-1$

$$n-1 \in U(4) = \{-4; -2; 1; 2; 4\}$$

$$\Rightarrow n \in \{-3; -1; 0; 2; 3; 5\}$$

Vậy $n \in \{-3; -1; 0; 2; 3; 5\}$ thì $n^2 + 3 : n-1$

Bài 51: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta có $n^3 - n : 6$

Trích đề HSG huyện Trực Ninh năm 2017-2018

Lời giải

$$\text{Ta có } (n^3 - n) = n(n^2 - 1) = n(n^2 - n + n - 1) = n[n(n-1) + (n-1)] = n(n-1)(n+1)$$

Với mọi số nguyên dương n thì $(n-1)n(n+1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp sẽ chia hết cho 2 và 3 mà $(2, 3) = 1$ nên $n(n-1)(n+1) : 6$

Bài 52: Chứng tỏ rằng: $\frac{2n+5}{n+3} (n \in \mathbb{N})$ là phân số tối giản

Trích đề HSG huyện Quỳnh Lưu năm 2018-2019.

Gọi d là ước chung của $n+3$ và $2n+5$ với $d \in \mathbb{N}$

Suy ra $n+3 : d$ và $2n+5 : d$

$$2(n+3) - (2n+5) : d \text{ suy ra } 1 : d \text{ nên } d = 1$$

Do đó $Ư_{CLN}(n+3, 2n+5) = 1$ suy ra $\frac{2n+5}{n+3} (n \in \mathbb{N})$ là phân số tối giản.

Bài 53: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để phân số $A = \frac{4n-1}{2n+3}$ có giá trị nguyên

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2017-2018

Lời giải

$$A = \frac{4n-1}{2n+3} = \frac{2(2n+3)}{2n+3} - \frac{7}{2n+3} = 2 - \frac{7}{2n+3}$$

A có giá trị nguyên thì $2n+3 \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$

Ta có bảng sau

$2n+3$	1	-1	7	-7
n	-1	-2	2	-5

Bài 54: Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho sau khi viết tiếp số đó sau số 2014 ta được số chia hết cho 101

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2017-2018

Lời giải

Giả sử n có k chữ số ($k \geq 1$)

Ta có : $2014 = 19 \cdot 101 + 95$, do đó:

$$\overline{2014n} = 2014 \cdot 10^k + n = 19 \cdot 101 \cdot 10^k + 95 \cdot 10^k + n$$

Suy ra $\overline{2014n} : 101$ khi và chỉ khi $95 \cdot 10^k + n : 101$

Với $k=1$ thì $95 \cdot 10^k + n = 950 + n = 101 \cdot 9 + (41+n) : 101$ khi và chỉ khi $41+n : 101$ nhưng n có một chữ số nên $41+n \leq 41+9 < 101$, nên không có số n thỏa mãn đầu bài.

Với $k = 2$ thì $95 \cdot 10^k + n = 9500 + n = 101 \cdot 94 + (6+n) : 101$ suy ra $6+n : 101$, và số n nhỏ nhất được xác định bởi $6+n = 101$ suy ra $n = 95$

Vậy $n = 95$ thỏa mãn đề bài

Bài 55: Tìm x, y nguyên biết: $x + y + xy = 40$

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2017-2018

Lời giải

Ta có $x + y + xy = 40$

$(y+1)x + y + 1 = 41$

$(x+1)(y+1) = 41$

Mà x, y nguyên nên $x+1, y+1$ là ước của 41

Tính được $(x, y) \in \{(40, 0); (0, 40); (-2, -42); (-42, -2)\}$

Bài 56: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ biết: $(3n+8) : (n+1)$

Trích đề HSG huyện Bạch Thông năm 2018-2019

Lời giải

Ta có: $3n+8 = 3n+3+5 = 3(n+1)+5$

Suy ra: $(3n+8) : (n+1)$ khi $(n+1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

Tìm được: $n \in \{-6; -2; 0; 4\}$

Bài 57: Tìm các số nguyên x, y biết: $2x - y + 4xy = 6$

Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2017-2018

Lời giải

Ta có $2x - y + 4xy = 6$

Hay $2x(2y+1) - y = 6$

$(2y+1)(4x-1) = 11$

Do x, y nguyên nên $4x-1 \in U(11) = \{1; -1; 11; -11\}$

Mà $4x-1$ chia 4 dư -1 (hoặc 3) nên $4x-1 = -1$ hoặc $4x-1 = 11$

Tìm được $x = 0; y = -6$ hoặc $x = 3; y = 0$

Bài 58: Tìm các số nguyên n để $\frac{2n+1}{n+2}$ có giá trị là một số nguyên

Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2017-2018

Lời giải

Để $\frac{2n+1}{n+2}$ có giá trị là số nguyên thì $2n+1 : n+2$ (1)

Vì $n+2 : n+2$ nên $2(n+2) : n+2$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $2(n+2) - (2n+1) : n+2$ chia hết cho $n+2$ hay $3 : (n+2)$

Vì $n+2$ nguyên nên $n+2 \in \{-1; 1; -3; 3\}$

$n \in \{-3; -5; -1; 1\}$ Vậy với $n \in \{-3; -5; -1; 1\}$ thì phân số $\frac{2n+1}{n+2}$ là số nguyên.

Bài 59: Chứng tỏ rằng với mọi số nguyên n thì phân số $\frac{3n-10}{2n-7}$ là phân số tối giản

Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2018-2019

Lời giải

Gọi Ư CLN $(3n-10; 2n-7) = d$ ($d \in \mathbb{N}^*$)

thì $3n-10 \vdots d$ và $2n-7 \vdots d$

$2(3n-10) \vdots d$ và $3(2n-7) \vdots d$

$2(3n-10) - 3(2n-7) \vdots d$

Suy ra $1 \vdots d$ nên $d \in \{1; -1\}$

Vậy với mọi số nguyên n thì phân số $\frac{3n-10}{2n-7}$ là phân số tối giản.

Bài 60: Tìm số nguyên n để $A = 2n^2 + n - 6$ chia hết cho $2n+1$

Đề Sưu tầm

Lời giải

Ta có: $A = 2n^2 + n - 6 = n(2n+1) - 6$

Vì A chia hết cho $2n+1$ nên $n(2n+1) - 6 \vdots 2n+1$ mà $n(2n+1) \vdots 2n+1$ nên $6 \vdots 2n+1$ hay $2n+1 \in \text{Ư}(6)$.

Do $2n+1$ là số lẻ nên ta có bảng sau:

$2n+1$	1	-1	3	-3
$2n$	0	-2	2	-4
n	0	-1	1	-2

Vậy với $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$ thì $A = 2n^2 + n - 6$ chia hết cho $2n+1$

PHIẾU BÀI TẬP SỐ 2

Bài 1: Cho $A = \frac{3n-5}{n+4}$, tìm $n \in \mathbb{Z}$ để A có giá trị nguyên.

Trích đề HSG huyện Tĩnh Gia năm 2018 - 2019

Bài 2: Tìm các số nguyên n sao cho $n^2 + 5n + 9$ là bội của $n+3$.

Trích đề HSG huyện Hưng Hà (Thái Bình) năm 2018 - 2019

Bài 3: Tìm x, y nguyên biết $\frac{2}{y} - \frac{1}{x} = \frac{8}{xy} + 1$.

Bài 4: Tìm số nguyên x, y biết $6x^2 + 5y^2 = 74$.

Bài 5: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2x^2 + 3y^2 = 77$.

Bài 6: Tìm các giá trị x, y nguyên thỏa mãn:

b) $x(y+2) = -8$

b) $x(y-3) = -12$

c) $(x+1)y = 3$

Bài 7: Tìm các giá trị x, y nguyên thỏa mãn $(x+1)(y-3) = 3$

Bài 8: Tìm các giá trị x, y nguyên thỏa mãn $(2x+1)(y-5) = 12$

Bài 9: Tìm x, y nguyên thỏa mãn: $(x-3) = y(x+2)$ với $x \neq -2$.

Bài 10: Tìm các số nguyên x , biết:

b) $3x+2 \vdots x-1$

b) $2x-5 \vdots x-1$

c) $2x+3 \vdots x+1$

Bài 11: Tìm các số nguyên x , biết

d) $2x+5 \vdots 2x-1$

e) $4x-5 \vdots 2x-1$

f) $10-2x \vdots x-2$

Bài 12: Tìm các số nguyên x , biết $10-2x \vdots x-2$ **Bài 13:** Tìm số nguyên n với $n \neq 2$ để phân số $A = \frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là số nguyên.**Bài 14:** Tìm số nguyên n với $n \neq 1$ để phân số $A = \frac{n+2}{n-1}$ có giá trị là số nguyên.**Bài 15:** Tìm x, y nguyên thỏa mãn $xy - 3x = -19$.**Bài 16:** Tìm x, y nguyên thỏa mãn $2x + xy - y = 9$.**Bài 17:** Tìm x, y nguyên thỏa mãn $(x+6) = y(x-1)$ với $x \neq 1$.**Bài 18:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia nó cho 6, 7, 9 được các số dư lần lượt là 2, 3, 5.**Bài 19:** Tìm số tự nhiên có ba chữ số biết rằng nếu bớt số đó đi 8 thì được số chia hết cho 7, nếu bớt số đó đi 9 thì được số chia hết cho 8, nếu bớt số đó đi 10 thì được số chia hết cho 9.**Bài 20:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 11, 17, 29 thì có dư lần lượt là 6, 12, 24.**Bài 21:** Tìm số tự nhiên n lớn nhất có ba chữ số, sao cho n chia 8; 31 được dư lần lượt là 7; 28.**Bài 22:** Cho phân số: $A = \frac{n-5}{n+1}$ ($n \in \mathbb{Z}; n \neq -1$)a) Tìm n để A có giá trị nguyênb) Tìm n để A là phân số tối giản**Bài 23:**a) Tìm hai số tự nhiên a và b biết $BCNN(a, b) = 180$; $UCLN(a, b) = 12$ b) Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để phân số $A = \frac{4n-1}{2n+3}$ có giá trị nguyên.**Bài 24:** Cho $A = \frac{12n+1}{2n+3}$. Tìm giá trị của n để:a) A là một phân sốb) A là một số nguyên**Bài 25:**a) Tìm giá trị n là số tự nhiên để $n+7$ chia hết cho $n+2$ b) Tìm x là số chia trong phép chia 235 cho x được số dư là 14**Bài 26:** Tìm $n \in \mathbb{Z}$ biết: $(3n+8) \vdots (n+1)$ **Bài 27:**a) Cho $\overline{abc} - \overline{deg} \vdots 7$. Chứng minh $\overline{abcdeg} \vdots 7$ b) Tìm số nguyên n sao cho $n^2 + 1 \vdots n + 1$ **Bài 28:**a) Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{90}$. Chứng minh A chia hết cho 11 và 13.b) Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho $xy - 2x + y + 1 = 0$.**Bài 29:** Tìm tất cả các số nguyên n để:

Phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản

Bài 30: Tìm số nguyên n để phân số $M = \frac{2n-7}{n-5}$ có giá trị là số nguyên

Bài 31: Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị là số nguyên

Bài 32: Cho $A = \frac{3n-5}{n+4}$, tìm $n \in \mathbb{Z}$ để A có giá trị nguyên.

Bài 33: Tìm các giá trị nguyên của n để phân số $A = \frac{3n+2}{n-1}$ có giá trị là số nguyên

Bài 34: Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{2n+1}{n+2}$ là phân số rút gọn được

Bài 35: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ biết: $(3n+8):(n+1)$

Bài 36: Tìm số nguyên n để $5+n^2-2n$ chia hết cho $n-2$

Bài 37: Cho $A = 3+3^2+3^3+3^4+\dots+3^{90}$. Chứng minh A chia hết cho 11 và 13.

Bài 38: Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho $xy-2x+y+1=0$.

Bài 39: Tìm các số nguyên a, b biết rằng: $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$

Bài 40: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10.

Bài 41: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $(2n+7):(n+1)$

Bài 42: Tìm số nguyên n để $A = 2n^2 + n - 6$ chia hết cho $2n+1$

Bài 43: Tìm các cặp số nguyên x, y thỏa mãn: $3xy + 2x - 5y = 6$

Bài 44: Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $2x + 3y = 14$

Bài 45: Tìm các số nguyên x, y sao cho: $(x+1)(xy-1) = 3$

Bài 46: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ biết: $(3n+8):(n+1)$

Bài 47: Tìm số nguyên n để $(n^2+3n+6):(n+3)$

Bài 48: Tìm tất cả các số nguyên n để phân số $\frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên

Bài 49: Cho $A = 999993^{1999} - 555557^{1997}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 5

Trích đề HSG huyện Mường Ảng, năm 2014-2015

Bài 50: Tìm số nguyên n để $n^2+3:n-1$

Trích đề HSG huyện Xuân Trường, năm 2013-2014

Bài 51: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta có $n^3 - n : 6$

Trích đề HSG huyện Trực Ninh năm 2017-2018

Bài 52: Chứng tỏ rằng: $\frac{2n+5}{n+3} (n \in \mathbb{N})$ là phân số tối giản

Trích đề HSG huyện Quỳnh Lưu năm 2018-2019.

Bài 53: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để phân số $A = \frac{4n-1}{2n+3}$ có giá trị nguyên

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2017-2018

Bài 54: Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho sau khi viết tiếp số đó sau số 2014 ta được số chia hết cho 101

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2017-2018

Bài 55: Tìm x, y nguyên biết: $x + y + xy = 40$

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2017-2018

Bài 56: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ biết: $(3n+8):(n+1)$

Trích đề HSG huyện Bạch Thông năm 2018-2019

Bài 57: Tìm các số nguyên x, y biết: $2x - y + 4xy = 6$

Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2017-2018

Bài 58: Tìm các số nguyên n để $\frac{2n+1}{n+2}$ có giá trị là một số nguyên

Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2017-2018

Bài 59: Chứng tỏ rằng với mọi số nguyên n thì phân số $\frac{3n-10}{2n-7}$ là phân số tối giản

Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2018-2019

Bài 60: Tìm số nguyên n để $A = 2n^2 + n - 6$ chia hết cho $2n + 1$

Đề Sư tầm

CHỦ ĐỀ 4: SỐ NGUYÊN

A. PHẦN NỘI DUNG

I. Ước và bội.

Dạng 1: Chứng minh sự chia hết.

Bài 1: Cho $M = (-a+b) - (b+c-a) + (c-a)$. Trong đó $b, c \in \mathbb{Z}$ còn a là một số nguyên âm. Chứng minh rằng biểu thức M luôn dương

Trích đề HSG huyện Lâm Thao, năm 2017 - 2018

Lời giải

$M = -a$ mà a là số nguyên âm nên M luôn dương

Bài 2: Cho \overline{ababab} là số có sáu chữ số, chứng tỏ số \overline{ababab} là bội của 3.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018 - 2019

Lời giải

$$\overline{ababab} = \overline{ab}.10000 + \overline{ab}.100 + \overline{ab} = 10101.\overline{ab}$$

Do 10101 chia hết cho 3 nên \overline{ababab} chia hết cho 3 hay \overline{ababab} là bội của 3.

Bài 3: Tìm số nguyên n sao cho $4n-5$ chia hết cho $2n-1$.

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015-2016

Lời giải

Tìm số nguyên n sao cho $4n-5$ chia hết cho $2n-1$.

$$\text{Ta có : } 4n-5 = 4n-2-3 = 2(2n-1)-3$$

$$\text{Đề } 4n-5 : 2n-1$$

$$3 : 2n-1$$

$$2n-1 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

$2n-1$	-1	1	-3	3
n	0 (TM)	1 (TM)	-1 (TM)	2 (TM)

Vậy $n \in \{0; 1; 1; 2\}$.

Bài 4:

a) Cho \overline{ababab} là số có sáu chữ số, chứng tỏ số \overline{ababab} là bội của 3

b) Chứng tỏ : $S = 16^5 + 2^{15}$ chia hết cho 33

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018 - 2019

Lời giải

$$\text{a) } \overline{ababab} = \overline{ab}.10000 + \overline{ab}.100 + \overline{ab} = 10101.\overline{ab}$$

Do 10101 chia hết cho 3 nên \overline{ababab} chia hết cho 3 hay \overline{ababab} là bội của 3

b) Chứng minh $S = 16^5 + 2^{15}$ chia hết cho 33

$$\text{Có } S = 16^5 + 2^{15} = (2^4)^5 + 2^{15} = 2^{20} + 2^{15} = 2^{15} \cdot (2^5 + 1) = 2^{15} \cdot 33$$

Nên S chia hết cho 33

Bài 5: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta có $n^3 - n : 6$

Lời giải

Ta có $(n^3 - n) = n(n^2 - 1) = n(n^2 - n + n - 1) = n[n(n-1) + (n-1)] = n(n-1)(n+1)$

Với mọi số nguyên dương n thì $(n-1)n(n+1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp sẽ chia hết cho 2 và 3 mà $(2,3)=1$ nên $n(n-1)(n+1):6$

Bài 6: Chứng tỏ rằng $a^2 + 3a + 1$ không thể chia hết cho 2 với a là số nguyên.

Lời giải

Ta có $a^2 + 3a + 1 = a^2 + a + 2a + 1 = a(a+1) + 2a + 1$

Vì $a(a+1)$ là tích hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 ;

$2a$ chia hết cho 2 ;

1 không chia hết cho 2 .

Suy ra $a^2 + 3a + 1$ không chia hết cho 2 với a là số nguyên.

Bài 7: Chứng tỏ $4x + 3y$ chia hết cho 7 khi $2x + 5y$ chia hết cho 7 .

Lời giải

Ta có:

$$4x + 3y : 7$$

$$\text{Suy ra } 4(4x + 3y) : 7$$

$$\text{Suy ra } 16x + 12y : 7$$

$$\text{Suy ra } 14x + 7y + 2x + 5y : 7$$

$$\text{Mà } 14x + 7y : 7 \text{ suy ra } 2x + 5y : 7$$

$$\text{Vậy } 4x + 3y : 7 \text{ khi } 2x + 5y : 7$$

Dạng 2: Tìm số thỏa mãn điều kiện chia hết.

Bài 1: Xét phân số $A = \frac{n^2 + 4}{n + 5}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên n trong khoảng từ 1 đến 2022 sao cho

phân số A chưa tối giản.

A. 79

B. 89

C. 99

D. 69

Bài 2: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của x để $x + 3$ chia hết cho $x - 2$. Số tập hợp con của tập hợp S là:

A. 4

B. 16

C. 15

D. 5

Bài 3: Số nguyên dương nhỏ nhất không phải là ước của tích $1.2.3.4. \dots .96.97.98$ là

A. 78

B. 99

C. 101

D. 100

Bài 4: Tìm số nguyên n để $(n + 3) : (n + 1)$

Lời giải

$$(n+3):(n+1)$$

$$\Rightarrow (n+1+2):(n+1)$$

$$\Rightarrow 2:(n+1) \text{ vì } (n+1):(n+1)$$

$$\Rightarrow n+1 \in \{1; 2; -1; -2\}$$

Trường hợp 1: $n+1=1 \Rightarrow n=0$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: $n+1=2 \Rightarrow n=1$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: $n+1=-1 \Rightarrow n=-2$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: $n+1=-2 \Rightarrow n=-3$ (thỏa mãn)

Vậy $n \in \{-3; -2; 0; 1\}$ thì $(n+3):(n+1)$

Bài 5: Có ba chồng sách: Văn, Âm nhạc, Toán, mỗi chồng chỉ gồm một loại sách. Mỗi cuốn Văn dày 15 mm, mỗi cuốn Âm nhạc dày 6 mm, mỗi cuốn Toán dày 8 mm. Người ta xếp cho 3 chồng sách cao bằng nhau. Tính chiều cao nhỏ nhất của ba chồng sách đó.

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

Vì chiều cao của ba chồng sách bằng nhau nên ta gọi là a (mm) (Điều kiện $a > 0$)

Theo đề bài ta có: $a:15; a:6; a:8$ mà a là số nhỏ nhất

Suy ra $a = BCNN(15, 6, 8) = 120$ (thỏa mãn)

Vậy chiều cao nhỏ nhất của ba chồng sách đó là 120 mm.

Bài 6: Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho $xy - 2x + y + 1 = 0$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành, năm 2018- 2019

Lời giải

$$xy - 2x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow x(y-2) + (y-2) = -3$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(y-2) = -3 = 1 \cdot (-3) = (-3) \cdot 1$$

Từ đó suy ra $(x; y) \in \{(0; -1); (-4; 3)\}$

Bài 7: Tìm số nguyên n để phân số $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên.

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018- 2019

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{4n+5}{2n-1} = \frac{4n-2+7}{2n-1} = n + \frac{7}{2n-1}$$

Vì $n \in \mathbb{Z}$ nên để $\frac{4n+5}{2n-1}$ nguyên thì $(2n-1) \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\} \Rightarrow n \in \{-3; 0; 1; 4\}$

Bài 8: Tìm số nguyên n để phân số $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Lời giải

Ta có: $\frac{4n+5}{2n-1} = \frac{4n-2+7}{2n-1} = n + \frac{7}{2n-1}$

Vì $n \in \mathbb{Z}$ nên để $\frac{4n+5}{2n-1}$ nguyên thì $(2n-1) \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\} \Rightarrow n \in \{-3; 0; 1; 4\}$

Bài 9: Tìm hai số nguyên tố x và y sao cho: $x^2 - 2x + 1 = 6y^2 - 2x + 2$

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Lời giải

Ta có: $x^2 - 2x + 1 = 6y^2 - 2x + 2$

$\Rightarrow x^2 - 1 = 6y^2 \Rightarrow 6y^2 = (x-1)(x+1):2$, do $6y^2:2$

Mặt khác $x-1+x+1=2x:2 \Rightarrow (x-1)$ và $(x+1)$ cùng chẵn hoặc cùng lẻ

Vậy $(x-1)$ và $(x+1)$ cùng chẵn $\Rightarrow (x-1)$ và $(x+1)$ là hai số chẵn liên tiếp

$\Rightarrow (x-1)(x+1):8 \Rightarrow 6y^2:8 \Rightarrow 3y^2:4 \Rightarrow y^2:4 \Rightarrow y:2$

$\Rightarrow y = 2$ (y là số nguyên tố), tìm được: $x = 5$

Bài 10: Số học sinh khối 6 của một trường chưa đến 400 bạn, biết khi xếp hàng 10; hàng 12; 15 đều dư 3 nhưng nếu xếp hàng 11 thì không dư. Tính số học sinh khối 6 của trường đó.

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2018-2019

Lời giải

Gọi số học sinh là a ($a \in \mathbb{Z}^+$)

Ta có: $a-3 \in BC(10;12;15) \Rightarrow a-3 = 60k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow a = 60k + 3$

k	1	2	3	4	5	6	7
a	63	123	183	243	303	363	423

Ta xem với giá trị nào của k thì $a < 400$ và $a:11$

Trong các giá trị trên, chỉ có $a = 363 < 400$ và $a:11$

Vậy số học sinh cần tìm là 363 học sinh.

Bài 11: Tìm số nguyên n để $A = 2n^2 + n - 6$ chia hết cho $2n+1$.

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2021-2022

Lời giải

Ta có $A = 2n^2 + n - 6 = n(2n+1) - 6$

Do $n(2n+1):2n+1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$, để $A:2n+1$ thì $6:2n+1$

Hay $2n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$, mà $2n+1$ là số nguyên lẻ nên $2n+1$ là các ước lẻ của 6, ta có bảng sau:

$2n + 1$	- 1	1	- 3	3
n	- 1	0	- 2	1

Các giá trị của n tìm được đều thỏa mãn đề bài

Vậy $n \in \{-1; 0; -2; 1\}$.

Bài 12: Tìm các số nguyên n sao cho: $n^2 + 5n + 9$ là bội của $n + 3$.

HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014 -2015

Lời giải

Ta có : $n^2 + 5n + 9 = n^2 + 3n + 2n + 9 = n.(n+3) + 2n + 9$

Vì $n(n+3)$ chia hết cho $n+3 \Rightarrow 2n+9$ chia hết cho $n+3$

Vì $2n+9$ chia hết cho $n+3$

Vì $n+3$ chia hết cho $n+3 \Rightarrow 2(n+3)$ chia hết cho $n+3$

$2n+6$ chia hết cho $n+3$

$2n+9 - (2n+6)$ chia hết cho $2n+3$

3 chia hết cho $2n+3$

$2n+3 \in U(7) = \{1; -1; 7; -7\}$

$2n+3$	-1	1	-7	7
n	-2 (TM)	-1(TM)	-5(TM)	2(TM)

Vậy $n \in \{-1; -2; 2; -5\}$.

Bài 13: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn : $2xy - x - y = 2$.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Lời giải

Ta có $2xy - x - y = 2$.

$4xy - 2x - 2y = 4$

$2x(2y-1) - 2y + 1 = 5$

$2x(2y-1) - (2y-1) = 5$

$(2y-1)(2x-1) = 5$

Ta có bảng sau:

$2x-1$	1	5	-1	-5
$2y-1$	5	1	-5	-1
x	1	3	0	-2
y	3	1	-2	0

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là $(1; 3), (3; 1), (-2; 0), (0; -2)$

Bài 14: Tìm tất cả các cặp số tự nhiên khác không (x, y) sao cho $(2x+5) \cdot (x+2) = 3^y$

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Lời giải

Vì $(2x+5)(x+2) = 3^y$ mà 3 nguyên tố nên ta có $2x+5 = 3^a, x+2 = 3^b$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $a+b = y$.

Vì x là số tự nhiên khác 0 nên $2x+5 > x+2$ nên $3^a > 3^b$

Do đó $3^a : 3^b$

$$(2x+5):(x+2)$$

Ta có $2x+5 = 2(x+2)+1$;

Lập luận suy ra $1:(x+2)$ vô lý vì $1 < x+2$

KL: Vậy không có giá trị nào của x, y thỏa mãn bài toán.

Bài 15: Tìm các số nguyên a, b biết rằng: $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$

Trích đề HSG huyện Hoài Nhơn năm 2015-2016

Lời giải

$$\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$$

$$\frac{2a-7}{14} = \frac{1}{b+3}$$

$$(2a-7)(b+3) = 14.$$

Do $a, b \in \mathbb{Z}$ nên $2a-7 \in \mathcal{U}(14)$

Vì $2a-7$ lẻ nên $2a-7 \in \{-7; -1; 1; 7\}$ nên $a \in \{0; 3; 4; 7\}$.

Từ đó tính được: $(a, b) = (0; -5), (3; -17); (4; 11), (7; -1)$

Bài 16: Tìm các cặp số tự nhiên x, y sao cho $(2x+1)(y-5) = 12$

Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015-2016

Lời giải

$(2x+1); (y-5)$ là các ước của 12

$$\mathcal{U}(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

Vì $2x+1$ lẻ nên

- $2x+1=1$. Do đó $x=0, y=17$
- $2x+1=3$. Do đó $x=1, y=9$

Bài 17: Tìm tất cả các số nguyên n để:

a) Phân số $\frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên

b) Phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản

Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015-2016

Lời giải

a) $\frac{n+1}{n-2}$ là số nguyên khi $(n+1):(n-2)$

Ta có: $n+1 = (n-2)+3$,

vậy $(n+1):(n-2)$ khi $3:(n-2)$

$$(n-2) \in \mathcal{U}(3) = \{-3; -1; 1; 3\} \Rightarrow n \in \{-1; 1; 3; 5\}$$

b) Gọi d là Ư C của $12n+1$ và $30n+2$ ($d \in \mathbb{N}^*$)

$$12n+1:d; 30n+2:d$$

$$[5(12n+1)-2(30n+2)]:d$$

$$(60n+5-60n-4):d$$

$$1:d$$

mà $d \in \mathbb{N}^*$ nên $d=1$

Vậy phân số đã cho tối giản.

Bài 18: Cho biểu thức : $P = \frac{2n+1}{n-4}$.

a) Với điều kiện nào của số nguyên n thì P là một phân số. Tính giá trị của P khi $n=-203$.

b) Viết tập hợp M các số nguyên n sao cho phân số P có giá trị là một số nguyên.

Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Lời giải

Xét biểu thức $P = \frac{2n+1}{n-4}$ ($n \in \mathbb{Z}$).

a) Để P là phân số thì $n-4 \neq 0 \Rightarrow n \neq 4$.

$$\text{Với } n = -203 \text{ thì } P = \frac{2(-203)+1}{-203-4} = \frac{-406+1}{-207} = \frac{-405}{-207} = \frac{45}{23}.$$

b) $P \in \mathbb{Z}$ nên $(2n+1):(n-4)$

$$(2n-8+9):(n-4)$$

$$[2(n-4)+9]:(n-4)$$

$$9:n-4$$

$$n-4 \in \text{Ư}(9) = \{\pm 1; \pm 3; \pm 9\}.$$

Ta có bảng sau:

$n-4$	1	-1	3	-3	9	-9
n	5	3	7	1	13	-5

Vậy $n \in \{5; 3; 7; 1; 13; -5\}$ thì $P \in \mathbb{Z}$.

Bài 19: Tìm x nguyên dương để $2x-1$ chia hết cho $x-3$.

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Lời giải

$$\text{Vi } (2x-1):(x-3)$$

$$[2(x-3)+5]:(x-3)$$

mà $2(x-3):x-3$ nên $5:x-3$

$$x-3 \in \text{Ư}(5) \text{ mà } \text{Ư}(5) = \{1; -1; 5; -5\}$$

$$x-3 \in \{1; -1; 5; -5\}$$

$$x \in \{4; 2; 8; -2\}$$

Mà x nguyên dương nên $x \in \{4; 2; 8\}$

Vậy $x \in \{4; 2; 8\}$

Bài 20: Tìm số tự nhiên n lớn nhất biết rằng khi chia các số 6355; 1705; 1271 cho n được các số dư lần lượt là 55; 25 và 1111.

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Lời giải

Vì khi chia 6355 cho n được số dư là 55 nên $(6355 - 55) : n$.

Vì khi chia 1680 cho n được số dư là 25 nên $(1680 - 25) : n$.

Vì khi chia 1260 cho n được số dư là 11 nên $(1260 - 11) : n$

Suy ra n là Ư C(6300, 1680, 1260)

Mà n là số tự nhiên lớn nhất nên $n = \text{Ư CLN}(6300, 1680, 1260)$

Mà $\text{Ư CLN}(6300, 1680, 1260) = 420$ nên $n = 420$.

Vậy số tự nhiên n cần tìm là 420.

Bài 21: Tìm số tự nhiên x biết: $24 : x$; $36 : x$; $160 : x$ và x là số lớn nhất.

Trích đề HSG Huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Lời giải

Ta có số tự nhiên x biết: $24 : x$; $36 : x$; $160 : x$ và x là số lớn nhất

$x = \text{Ư CLN}(24, 36, 160)$;

Ta có: $24 = 2^3 \cdot 3$; $36 = 2^2 \cdot 3^2$; $160 = 2^5 \cdot 5$

$\text{Ư CLN}(24, 36, 160) = 2^2 = 4$.

Vậy $x = 4$ (thỏa mãn).

Bài 22: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho: a chia cho 5 dư 3, a chia cho 7 dư 4

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Lời giải

Ta có: $a = 5q + 3$; $a = 7p + 4$

Xét $a + 17 = 5q + 20 = 7p + 21$

$a + 17$ chia hết cho cả 5 và 7

$a + 17 \in BC(5; 7)$

Vì a là số tự nhiên nhỏ nhất nên $a + 17 = BCNN(5, 7) = 35$

$a = 18$

Bài 23: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng số đó chia cho 9 dư 5, chia cho 7 dư 4 và chia cho 5 dư 3

Trích đề HSG cấp trường Bá Thước năm 2018-2019

Lời giải

Gọi số cần tìm là a

Ta có a chia cho 9 dư 5 nên $a = 9k + 5 (k \in \mathbb{N})$

$2a = 9k_1 + 1$

$$(2a-1):9$$

Ta có a chia cho 7 dư 4 nên $a = 7m + 4 (m \in \mathbb{N})$

$$2a = 7m_1 + 1$$

$$(2a-1):7$$

Ta có a chia cho 5 dư 3 nên $a = 5t + 3 (t \in \mathbb{N})$

$$2a = 5t_1 + 1$$

$$(2a-1):5$$

$(2a-1):\{9;7;5\}$, mà $(9;7;5) = 1$ và a là số tự nhiên nhỏ nhất

$$2a-1 = BCNN(9,7,5) = 315.$$

Vậy $a = 158$

Bài 24: Tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng bằng 84, Ư CLN, của chúng bằng 6

Trích đề HSG cấp trường vòng 2 THCS Tân Lập năm 2018-2019

Lời giải

Gọi 2 số phải tìm là a và b ($a \leq b$) ta có: $(a,b) = 1$

$$\begin{cases} a = 6a' \\ b = 6b' \end{cases}, (a',b') = 1 (a,b,a'b' \in \mathbb{N}^*)$$

$$a' + b' = 14$$

a'	1	3	5
b'	13	11	9
a	6	18	30
b	78	66	54

Bài 25: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khác 0 biết rằng số đó có 15 ước dương

Trích đề chọn HSG Tam Dương năm 2016-2017

Lời giải

Vì $15 = 1.15 = 3.5$ nên số cần tìm có dạng a^{14} hoặc $b^2.c^4$ (a,b,c là các số nguyên tố và $b \neq c$)

Th1: Số cần tìm có dạng a^{14} mà số đó là nhỏ nhất nên $a = 2$. Do đó $2^{14} = 16384$

Th2: Số cần tìm có dạng $b^2.c^4$ mà số đó nhỏ nhất nên $c = 2; a = 3$. Do đó $3^2.2^4 = 144$

Do $144 < 16384$ nên số cần tìm là 144

Bài 26: Tìm số nguyên n để phân số $M = \frac{2n-7}{n-5}$ có giá trị là số nguyên

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Lời giải

$$M = \frac{2n-7}{n-5} = \frac{2n-10+3}{n-5} = 2 + \frac{3}{n-5} \in \mathbb{Z}$$

$$n-5 \in \text{Ư}(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

$$n \in \{2; 4; 6; 8\}$$

Vậy $n \in \{2; 4; 6; 8\}$

Bài 27: Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ biết: $2x(3y-2)+(3y-2)=-55$

Trích đề HSG cấp trường Hà Huy Tập năm 2018-2019

Lời giải

$$2x(3y-2)+(3y-2)=-55$$

$$(3y-2)(2x+1)=-55=-5.11=5.(-11)$$

Sau khi thử các trường hợp ta có $(x; y)=(5; -1)$

Bài 28: Cho a là một số nguyên có dạng $a=3b+7(b \in \mathbb{Z})$. Hỏi a có thể nhận những giá trị nào trong các giá trị sau: $a=11; a=2002; a=2003; a=11570; a=22789; a=29563; a=299537$

Trích đề HSG cấp trường Bá Thước năm 2018-2019

Lời giải

Số nguyên có dạng $a=3b+7(b \in \mathbb{Z})$ hay a là số chia 3 dư 1

Vậy a có thể nhận những giá trị là $a=2002; a=22789; a=29563$

Trắc nghiệm

Bài 29: Tập hợp các số tự nhiên x thỏa mãn $6:(x-2)$ là:

- A. $\{1; 2; 3; 6\}$. B. $\{3; 6\}$. C. $\{5; 8\}$. D. $\{3; 4; 5; 8\}$.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021-2022

Đáp án: D

Tự luận

Bài 30: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia số đó cho 3 dư 1 ; chia cho 4 dư 2 ; chia cho 5 dư 3 ; chia cho 6 dư 4 và chia hết cho 11 .

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải

Gọi số phải tìm là x . Theo bài ra ta có $x+2$ chia hết cho 3, 4, 5, 6.

nên $x+2$ là bội chung của 3, 4, 5, 6

Mà $BCNN(3; 4; 5; 6) = 60$ nên $x+2 = 60.n$.

Do đó $x = 60.n - 2$ ($n = 1; 2; 3 \dots$).

Mặt khác $x:11$ nên lần lượt cho $n = 1; 2; 3 \dots$ Ta thấy $n = 7$ thì $x = 418:11$

Vậy số nhỏ nhất phải tìm là 418 .

Bài 31: Tìm các số nguyên x sao cho $4x-3:x-2$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Ta có: $4x-3 = 4x-8+5 = 4(x-2)+5$

Vì $4(x-2):x-2$

Suy ra $4x-3:x-2$ hay $5:x-2$

Suy ra $x-2 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

Suy ra $x \in \{1; -3; 3; 7\}$

Bài 32: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2xy + y - 10x = 11$.

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Lời giải

Ta có:

$$2xy + y - 10x = 11$$

$$y(2x + 1) - 5(2x + 1) = 6$$

$$(y - 5)(2x + 1) = 6$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $y - 5, 2x + 1$ là Ư(6) mà lẻ nên ta có bảng sau

$2x+1$	-1	1	-3	3
$y-5$	-6	6	-2	2
x	-1	0	-2	1
y	-1	11	3	7

Vậy cặp thỏa mãn là $(x; y) \in \{(-1; -1), (0; 11), (-2; 3), (1; 7)\}$

Bài 33. Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{6n+4}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên.

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{6n+4}{2n-1} = \frac{6n-3+7}{2n-1} = 3n + \frac{7}{2n-1}$$

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên để $\frac{6n+4}{2n-1}$ nguyên thì $\frac{7}{2n-1}$ nguyên.

Khi đó $(2n-1) \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$ nên $n \in \{-3; 0; 1; 4\}$

Do $n \in \mathbb{N}$ nên $n \in \{0; 1; 4\}$

Bài 34. Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị là số nguyên.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị là nguyên thì $n+3 : 2n-2$

$$2(n+3) : 2n-2$$

Suy ra $(2n+6) - (2n-2) : (2n-2)$

Suy ra $(2n-2n) + (6+2) : 2n-2$ suy ra $8 : 2n-2$

Suy ra $(2n-2) \in \{\pm 2; \pm 4; \pm 8\}$

Sau khi thử các trường hợp ta được $n = 5$

II. Tìm số thỏa mãn điều kiện cho trước

Bài 1: Tìm tất cả các cặp số nguyên sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018-2019

Lời giải

$M = -a$ Gọi hai số nguyên đó là x và y

Theo bài ra ta có:

$$xy = x + y$$

$$\Rightarrow xy - x - y + 1 = 1$$

$$\Rightarrow (x-1)(y-1) = 1$$

$\Rightarrow x-1, y-1$ là các ước của 1

$\Rightarrow x-1 = y-1 = 1$ hoặc $x-1 = y-1 = -1$

$$\Rightarrow x = y = 2 \text{ hoặc } x = y = 0$$

Bài 2: Tìm số nguyên x , biết:

$$a) 2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7$$

$$b) \frac{x}{6} + \frac{x}{10} + \frac{x}{15} + \frac{x}{21} + \frac{x}{28} + \frac{x}{36} + \frac{x}{45} + \frac{x}{55} + \frac{x}{66} + \frac{x}{78} = \frac{220}{39}$$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018- 2019

Lời giải

$$a) 2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7 \Leftrightarrow 2016 : [25 - (3x + 2)] = 63$$

$$\Leftrightarrow 25 - (3x + 2) = 2016 : 63 \Rightarrow 25 - (3x + 2) = 32$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2 = -7 \Leftrightarrow 3x = -9 \Leftrightarrow x = -3$$

$$b) \frac{x}{6} + \frac{x}{10} + \frac{x}{15} + \frac{x}{21} + \frac{x}{28} + \frac{x}{36} + \frac{x}{45} + \frac{x}{55} + \frac{x}{66} + \frac{x}{78} = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{36} + \frac{1}{45} + \frac{1}{55} + \frac{1}{66} + \frac{1}{78} \right) = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110} + \frac{1}{132} + \frac{1}{156} \right) = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 13} \right) = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} \right) = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{13} \right) = \frac{220}{39} \Rightarrow x = 11$$

Bài 3: Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ biết: $\frac{x}{5} + 1 = \frac{1}{y-1}$

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{x}{5} + 1 = \frac{1}{y-1} \Leftrightarrow \frac{x+5}{5} = \frac{1}{y-1} \Leftrightarrow (x+5)(y-1) = 5 \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow (x+5)(y-1) = 5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = -5 \cdot (-1) = (-1) \cdot (-5)$$

Thay hết tất cả các trường hợp ta có:

$$(x; y) = \{(0; 2); (-4; 6); (-10; 0); (-6; -4)\}$$

B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

I. Ước và bội.

Dạng 1: Chứng minh sự chia hết.

Bài 1: Cho $M = (-a+b) - (b+c-a) + (c-a)$. Trong đó $b, c \in \mathbb{Z}$ còn a là một số nguyên âm. Chứng minh rằng biểu thức M luôn dương

Trích đề HSG huyện Lâm Thao, năm 2017 - 2018

Bài 2: Cho \overline{ababab} là số có sáu chữ số, chứng tỏ số \overline{ababab} là bội của 3.

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2018 - 2019

Bài 3: Tìm số nguyên n sao cho $4n-5$ chia hết cho $2n-1$.

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015-2016

Bài 4:

a) Cho \overline{ababab} là số có sáu chữ số, chứng tỏ số \overline{ababab} là bội của 3

b) Chứng tỏ : $S = 16^5 + 2^{15}$ chia hết cho 33

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2018 - 2019

Bài 5: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta có $n^3 - n : 6$

Trích đề chọn HSG Trục Ninh năm 2017-2018

Bài 6: Chứng tỏ rằng $a^2 + 3a + 1$ không thể chia hết cho 2 với a là số nguyên.

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

Bài 7: Chứng tỏ $4x + 3y$ chia hết cho 7 khi $2x + 5y$ chia hết cho 7.

Trích đề HSG cấp huyện năm 2018-2019

Dạng 2: Tìm số thỏa mãn điều kiện chia hết.

Bài 1: Xét phân số $A = \frac{n^2 + 4}{n + 5}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên n trong khoảng từ 1 đến 2022 sao cho phân số A chưa tối giản.

A. 79

B. 89

C. 99

D. 69

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021 - 2022

Bài 2: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của x để $x + 3$ chia hết cho $x - 2$. Số tập hợp con của tập hợp S là:

A. 4

B. 16

C. 15

D. 5

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021 - 2022

Bài 3: Số nguyên dương nhỏ nhất không phải là ước của tích $1.2.3.4 \dots 96.97.98$ là

A. 78

B. 99

C. 101

D. 100

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021 - 2022

Bài 4: Tìm số nguyên n để $(n+3):(n+1)$

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 5: Có ba chồng sách: Văn, Âm nhạc, Toán, mỗi chồng chỉ gồm một loại sách. Mỗi cuốn Văn dày 15 mm, mỗi cuốn Âm nhạc dày 6 mm, mỗi cuốn Toán dày 8 mm. Người ta xếp cho 3 chồng sách cao bằng nhau. Tính chiều cao nhỏ nhất của ba chồng sách đó.

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Bài 6: Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho $xy - 2x + y + 1 = 0$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành, năm 2018- 2019

Bài 7: Tìm số nguyên n để phân số $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên.

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018- 2019

Bài 8: Tìm số nguyên n để phân số $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Bài 9: Tìm hai số nguyên tố x và y sao cho: $x^2 - 2x + 1 = 6y^2 - 2x + 2$

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Bài 10: Số học sinh khối 6 của một trường chưa đến 400 bạn, biết khi xếp hàng 10; hàng 12; 15 đều dư 3 nhưng nếu xếp hàng 11 thì không dư. Tính số học sinh khối 6 của trường đó.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Bài 11: Tìm số nguyên n để $A = 2n^2 + n - 6$ chia hết cho $2n + 1$.

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2021-2022

Bài 12: Tìm các số nguyên n sao cho: $n^2 + 5n + 9$ là bội của $n + 3$.

HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014 -2015

Bài 13: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn : $2xy - x - y = 2$.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Bài 14: Tìm tất cả các cặp số tự nhiên khác không (x, y) sao cho $(2x+5) \cdot (x+2) = 3^y$

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Bài 15: Tìm các số nguyên a, b biết rằng: $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$

Trích đề HSG huyện Hoài Nhơn năm 2015-2016

Bài 16: Tìm các cặp số tự nhiên x, y sao cho $(2x+1)(y-5) = 12$

Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015-2016

Bài 17: Tìm tất cả các số nguyên n để:

a) Phân số $\frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên

b) Phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản

Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015-2016

Bài 18: Cho biểu thức : $P = \frac{2n+1}{n-4}$.

- a) Với điều kiện nào của số nguyên n thì P là một phân số. Tính giá trị của P khi $n = -203$.
b) Viết tập hợp M các số nguyên n sao cho phân số P có giá trị là một số nguyên.

Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Bài 19: Tìm x nguyên dương để $2x-1$ chia hết cho $x-3$.

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Bài 20: Tìm số tự nhiên n lớn nhất biết rằng khi chia các số $6355; 1705; 1271$ cho n được các số dư lần lượt là $55; 25$ và 1111 .

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Bài 21: Tìm số tự nhiên x biết: $24 : x$; $36 : x$; $160 : x$ và x là số lớn nhất.

Trích đề HSG Huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Bài 22: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho: a chia cho 5 dư 3, a chia cho 7 dư 4

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Bài 23: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng số đó chia cho 9 dư 5, chia cho 7 dư 4 và chia cho 5 dư 3

Trích đề HSG cấp trường Bá Thước năm 2018-2019

Bài 24: Tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng bằng 84, ƯCLN, của chúng bằng 6

Trích đề HSG cấp trường vòng 2 THCS Tân Lập năm 2018-2019

Bài 25: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khác 0 biết rằng số đó có 15 ước dương

Trích đề chọn HSG Tam Dương năm 2016-2017

Bài 26: Tìm số nguyên n để phân số $M = \frac{2n-7}{n-5}$ có giá trị là số nguyên

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Bài 27: Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ biết: $2x(3y-2) + (3y-2) = -55$

Trích đề HSG cấp trường Hà Huy Tập năm 2018-2019

Bài 28: Cho a là một số nguyên có dạng $a = 3b + 7 (b \in \mathbb{Z})$. Hỏi a có thể nhận những giá trị nào trong các giá trị sau: $a = 11; a = 2002; a = 2003; a = 11570; a = 22789; a = 29563; a = 299537$

Trích đề HSG cấp trường Bá Thước năm 2018-2019

Trắc nghiệm

Bài 29: Tập hợp các số tự nhiên x thỏa mãn $6 : (x-2)$ là:

- A. $\{1; 2; 3; 6\}$. B. $\{3; 6\}$. C. $\{5; 8\}$. D. $\{3; 4; 5; 8\}$.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021-2022

Tự luận

Bài 30: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia số đó cho 3 dư 1 ; chia cho 4 dư 2 ; chia cho 5 dư 3 ; chia cho 6 dư 4 và chia hết cho 11 .

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Bài 31: Tìm các số nguyên x sao cho $4x-3 : x-2$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 32: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2xy + y - 10x = 11$.

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Bài 33. Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{6n+4}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên.

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Bài 34. Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị là số nguyên.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

II. Tìm số thỏa mãn điều kiện cho trước

Bài 1: Tìm tất cả các cặp số nguyên sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 2: Tìm số nguyên x , biết:

a) $2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7$

b) $\frac{x}{6} + \frac{x}{10} + \frac{x}{15} + \frac{x}{21} + \frac{x}{28} + \frac{x}{36} + \frac{x}{45} + \frac{x}{55} + \frac{x}{66} + \frac{x}{78} = \frac{220}{39}$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018- 2019

Bài 3: Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ biết: $\frac{x}{5} + 1 = \frac{1}{y-1}$

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

C. SỬU TÂM CÁC BÀI TƯƠNG TỰ

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n &= (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n) = 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) \\ &= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 = 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}) \text{ chia hết cho 10.} \end{aligned}$$

Vậy với mọi số nguyên dương n thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10.

Bài 2: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $(2n+7):n+1$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (2n+7):n+1 &\Leftrightarrow 2n+7-2(n+1):n+1 \\ &\Leftrightarrow (2n+7)-(2n+2):n+1 \Leftrightarrow 2n+7-2n-2:n+1 \Leftrightarrow 5:n+1 \\ &\Rightarrow n+1 \in \{\pm 1; \pm 5\} \Rightarrow n \in \{-6; -2; 0; 4\} \end{aligned}$$

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên $n \in \{0; 4\}$

Vậy với $n \in \{0; 4\}$ thì $(2n+7):n+1$

Bài 3: Tìm số nguyên n để $A = 2n^2 + n - 6$ chia hết cho $2n+1$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 2n^2 + n - 6 = n(2n+1) - 6$$

Vì A chia hết cho $2n+1$ nên $n(2n+1) - 6 : 2n+1$ mà $n(2n+1) : 2n+1$ nên

$$6 : 2n+1 \Rightarrow 2n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3 \pm 6\}.$$

Do $2n+1$ là số lẻ nên $2n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 3\}$. Ta có bảng sau:

$2n+1$	1	-1	3	-3
$2n$	0	-2	2	-4
n	0	-1	1	-2

Vậy $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$

Bài 4: Tìm các cặp số nguyên x, y thỏa mãn: $3xy + 2x - 5y = 6$

Lời giải

$$\begin{aligned} 3xy + 2x - 5y = 6 &\Rightarrow x(3y+2) - 5y = 6 \Rightarrow 3x(3y+2) - 15y = 18 \\ &\Rightarrow 3x(3y+2) - 15y - 10 = 18 - 10 \Rightarrow 3x(3y+2) - 5(3y+2) = 8 \\ &\Rightarrow (3x-5)(3y+2) = 8 \\ &\Rightarrow 3y+2 \in U(8) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\} \end{aligned}$$

Mà $3y+2$ là số chia cho 3 dư 2 $\Rightarrow 3y+2 \in \{-1; 2; -4; 8\}$.

Ta có bảng sau:

$3y+2$	-4	-1	2	8
$3x-5$	-2	-8	4	1
y	-2	-1	0	2
x	1	-1	3	2

Vậy $(x; y) \in \{(1; -2), (-1; -1), (3; 0), (2; 2)\}$

Bài 5: Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $2x + 3y = 14$

Lời giải

Xét $2x + 3y = 14$ (1)

Ta có: $14 : 2; 2x : 2 \Rightarrow 5y : 2 \Rightarrow y : 2$

$5y < 14 \Rightarrow y < 14 : 5 \Rightarrow y \leq 2$

mà y chẵn nên $y = 2$ thay vào (1) $\Rightarrow x = 2$

Vậy $x = 2; y = 2$

Bài 6: Tìm các số nguyên x, y sao cho: $(x+1)(xy-1) = 3$

Lời giải

Vì $(x+1)(xy-1) = 3, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x+1 \in \mathbb{Z}, xy-1 \in \mathbb{Z}$

Do đó, $(x+1), (xy-1) \in \{\pm 1; \pm 3\}$

Ta có:

$x+1$	1	-1	3	-3
$xy-1$	3	-3	1	-3
x	0	-2	2	-4
y	Ktm	1	1	0

Vậy các cặp (x, y) thỏa mãn là: $(-2; 1); (2; 1); (-4; 0)$

Bài 7: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ biết: $(3n+8):(n+1)$

Lời giải:

Ta có: $3n+8 = 3n+3+5 = 3(n+1)+5$

Suy ra: $(3n+8):(n+1)$ khi $(n+1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$.

Vậy $n \in \{-6; -2; 0; 4\}$.

Bài 8: Tìm số nguyên n để $(n^2+3n+6):(n+3)$

Lời giải:

Ta có $n^2+3n+6 = n(n+3)+6$

Vì $n(n+3):(n+3)$, nên để $(n^2+3n+6):(n+3)$ thì $6:(n+3)$

Mà $n \in \mathbb{Z}$ nên $(n+3)$ là ước của 6

$$\Rightarrow (n+3) \in \{\pm 3; \pm 6\} \Rightarrow n \in \{0; -6; 3; -9\}$$

Vậy $n \in \{0; -6; 3; -9\}$ thì $(n^2 + 3n + 6) : (n+3)$

Bài 9: Tìm tất cả các số nguyên n để phân số $\frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên

Lời giải:

Ta có $\frac{n+1}{n-2}$ là một số nguyên khi $(n+1) : (n-2)$

Ta có $n+1 = (n-2) + 3$, do đó $(n+1) : (n-2)$ khi $3 : (n-2)$

$\Rightarrow (n-2)$ là ước của 3

$$\Rightarrow (n-2) \in \{-3; -1; 1; 3\} \Rightarrow n \in \{-1; 1; 3; 5\}$$

Vậy $n \in \{-1; 1; 3; 5\}$ thì $\frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên.

Bài 10: Cho $A = 999993^{1999} - 555557^{1997}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 5

Trích đề HSG huyện Mường Ảng, năm 2014- 2015

Lời giải

Để chứng minh $A : 5$ ta xét chữ số tận cùng của A bằng việc xét chữ số tận cùng của từng số hạng.

Ta có: $3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3^3 = 81^{499} \cdot 27$ nên 3^{1999} có tận cùng là 7

$$7^{1997} = (7^4)^{499} \cdot 7 = 2401^{499} \cdot 7 \Rightarrow 7^{1997} \text{ tận cùng là } 7$$

Vậy A có tận cùng là 0 nên $A : 5$

Bài 11: Tìm số nguyên n để $n^2 + 3 : n - 1$

Trích đề HSG huyện Xuân Trường, năm 2013- 2014

Lời giải

Ta có $n^2 + 3 = n(n-1) + n + 3$ (Thêm bớt n để làm xuất hiện tích $n-1$) $= n(n-1) + (n-1) + 1 + 3$ (

Thêm bớt 1 để làm xuất hiện $n-1$)

$$= (n-1)(n+1) + 4 : n-1$$

Vì $(n-1)(n+1) : n-1$ nên suy ra $4 : n-1$

$$n-1 \in U(4) = \{-4; -2; 1; 2; 4\}$$

$$\Rightarrow n \in \{-3; -1; 0; 2; 3; 5\}$$

Vậy $n \in \{-3; -1; 0; 2; 3; 5\}$ thì $n^2 + 3 : n - 1$

Bài 12: Cho $A = \frac{3n-5}{n+4}$, tìm $n \in \mathbb{Z}$ để A có giá trị nguyên.

Trích đề HSG huyện Tĩnh Gia năm 2018 - 2019

Lời giải

Ta có

$$A = \frac{3n-5}{n+4} = 3 + \frac{-17}{n+4}$$

A có giá trị nguyên khi và chỉ khi $(n+4) \in U(-17) = \{\pm 1; \pm 17\}$.

Ta có bảng sau:

$n+4$	-17	-1	1	17
n	-21	-5	-3	13

Vậy $n \in \{-21; -5; -3; 13\}$ thì A có giá trị nguyên.

Bài 13: Tìm các số nguyên n sao cho $n^2 + 5n + 9$ là bội của $n+3$.

Trích đề HSG huyện Hưng Hà (Thái Bình) năm 2018 - 2019

Lời giải

Ta có $n^2 + 5n + 9 = n(n+3) + 2n + 1 = n(n+3) + 2(n+3) - 5 = (n+3) \cdot (n+2) - 5 : n+3$

Vì $(n+3) \cdot (n+2) : n+3$ nên $5 : n+3$

Suy ra $n+3 \in U(5) = \{-5; -1; 1; 5\}$

hay $n \in \{-8; -4; -2; 2\}$

Vậy $n \in \{-8; -4; -2; 2\}$.

Bài 14: Tìm x, y nguyên biết $\frac{2}{y} - \frac{1}{x} = \frac{8}{xy} + 1$.

Lời giải

Từ $\frac{2}{y} - \frac{1}{x} = \frac{8}{xy} + 1$.

Suy ra $\frac{2x-y}{x \cdot y} = \frac{8+xy}{x \cdot y}$

$$2x - y = 8 + xy$$

$$xy - 2x + y = -8$$

$$x \cdot (y-2) + y-2 = -10$$

$$(y-2) \cdot (x+1) = -10.$$

Ta có bảng sau:

$x+1$	-10	-5	-2	-1	1	2	5	10
x	-11	-6	-3	-2	0	1	4	9
$y-2$	1	2	5	10	-10	-5	-2	-1
y	3	4	7	12	-8	-3	0	1

Vậy các cặp số (x, y) nguyên thoả mãn là $(-11; 3), (-6; 4), (-3; 7), (-2; 12), (0; -8), (1; -3), (4; 0), (9; 1)$

Bài 15: Tìm số nguyên x, y biết $6x^2 + 5y^2 = 74$.

Lời giải

Từ $6x^2 + 5y^2 = 74$

Suy ra $6x^2 \leq 74$ do đó $x^2 \leq \frac{74}{6}$ mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x^2 \in \{0; 1; 4; 9\}$.

TH1: $x^2 = 0$ suy ra $5y^2 = 74$ (loại)

TH2: $x^2 = 1$ suy ra $6 + 5y^2 = 74$ hay $5y^2 = 68$ (loại)

TH3: $x^2 = 4$ suy ra $6.4 + 5y^2 = 74$ nên $5y^2 = 50$ hay $y^2 = 10$ (loại)

TH4: $x^2 = 9$ ($x = \pm 3$) suy ra $6.9 + 5y^2 = 74$ nên $5y^2 = 20$ hay $y^2 = 4$ suy ra $y = \pm 2$.

Vậy các cặp số $(x; y)$ nguyên thoả mãn là $(-3; -2), (-3; 2), (3; -2), (3; 2)$.

Bài 16: Tìm các số nguyên x, y thoả mãn $2x^2 + 3y^2 = 77$.

Lời giải

Từ $2x^2 + 3y^2 = 77$

Suy ra $0 \leq 3y^2 \leq 77$ do đó $0 \leq y^2 \leq 25$ mà $y \in \mathbb{Z}$ và y^2 là số chính phương nên $y^2 \in \{1; 9; 25\}$.

TH1: $y^2 = 1$ suy ra $2x^2 + 3 = 77$ nên $2x^2 = 74$ hay $x^2 = 37$ (loại).

TH2: $y^2 = 9$ ($y = \pm 3$) suy ra $2x^2 + 3.9 = 77$ nên $2x^2 = 50$ hay $x^2 = 25$ suy ra $x = \pm 5$.

TH3: $y^2 = 25$ ($y = \pm 5$) suy ra $2x^2 + 3.25 = 77$ nên $2x^2 = 2$ hay $x^2 = 1$ suy ra $x = \pm 1$.

Vậy các cặp số $(x; y)$ nguyên thoả mãn là

$(-5; -3), (-5; 3), (5; -3), (5; 3), (-1; -5), (-1; 5), (1; -5), (1; 5)$.

Bài 17: Tìm các giá trị x, y nguyên thoả mãn:

a) $x(y+2) = -8$

b) $x(y-3) = -12$

c) $(x+1)y = 3$

Lời giải

a) Vì x, y là các số nguyên nên $x, (y+2)$ cũng là các số nguyên

Mà $x(y+2) = -8$. Nên $x, (y+2) \in U(-8) = \{1; 2; 4; 8; -1; -2; -4; -8\}$

Ta có bảng sau:

x	1	2	4	8	-1	-2	-4	-8
$y+2$	-8	-4	-2	-1	8	4	2	1
y	-10	-6	-4	-3	6	2	0	-1

Vậy các cặp số $(x; y)$ nguyên thoả mãn là

$(1; -10), (2; -6), (4; -4), (8; -3), (-1; 6), (-2; 2), (-4; 0), (-8; -1)$.

b) Vì x, y là các số nguyên nên $x, (y-3)$ cũng là các số nguyên

Mà $x(y-3) = -12$ nên $x, (y-3) \in U(-12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12; -1; -2; -3; -4; -6; -12\}$

Ta có bảng sau:

x	1	2	3	4	6	12	-1	-2	-3	-4	-6	-12
$y-3$	-12	-6	-4	-3	-2	-1	12	6	4	3	2	1
y	-9	-3	-1	0	1	2	15	9	7	6	5	4

Vậy các cặp số $(x; y)$ nguyên thoả mãn là

$(1; -9), (2; -3), (3; -1), (4; 0), (6; 1), (12; 2), (-1; 15), (-2; 9), (-3; 7), (-4; 6), (-6; 5), (-12; 4)$.

c) Vì x, y là các số nguyên nên $(x+1), y$ cũng là các số nguyên

Mà $(x+1)y = 3$ nên $(x+1), y \in U(3) = \{1; 3; -1; -3\}$.

Ta có bảng sau:

$x+1$	1	3	-1	-3
x	0	2	-2	-4
y	3	1	-3	-1

Vậy các cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn là $(0;3), (2;1), (-2;-3), (-4;-1)$.

Bài 18: Tìm các giá trị x, y nguyên thỏa mãn $(x+1)(y-3)=3$

Lời giải

Vì x, y là các số nguyên nên $(x+1), (y-3)$ cũng là các số nguyên. Mà $(x+1)(y-3)=3$ nên $(x+1), (y-3) \in U(3) = \{1; 3; -1; -3\}$. Ta có bảng sau:

$x+1$	1	3	-1	-3
x	0	2	-2	-4
$y-3$	3	1	-3	-1
y	6	4	0	2

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là $(0;6), (2;4), (-2;0), (-4;2)$.

Bài 19: Tìm các giá trị x, y nguyên thỏa mãn $(2x+1)(y-5)=12$

Lời giải

Vì x, y là các số nguyên nên $(2x+1), (y-5)$ cũng là các số nguyên.

Mà $(2x+1)(y-5)=12$ nên $(2x+1), (y-5) \in U(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12; -1; -2; -3; -4; -6; -12\}$

Vì $2x+1$ là số lẻ nên ta có bảng sau:

$2x+1$	1	3	-1	-3
x	0	1	-1	-2
$y-5$	12	4	-12	-4
y	17	9	-7	1

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là $(0;17), (1;9), (-1;-7), (-2;1)$.

Bài 20: Tìm x, y nguyên thỏa mãn: $(x-3)=y(x+2)$ với $x \neq -2$.

Lời giải

$$\text{Vì } (x-3)=y(x+2) \quad (1)$$

nên $x-3 \vdots x+2$

Suy ra $x+2-5 \vdots x+2$

Mà $x+2 \vdots x+2$ với mọi x nguyên, $x \neq -2$.

Nên $5 \vdots x+2$ suy ra $x+2 \in U(5) = \{1; 5; -1; -5\}$.

suy ra $x \in \{-1; 3; -3; -7\}$.

Với $x=-1$ thay vào (1) ta được $-4=y.1$ suy ra $y=-4$.

Với $x=3$ thay vào (1) ta được $0=y.5$ suy ra $y=0$.

Với $x=-3$ thay vào (1) ta được $-6=y.(-1)$ suy ra $y=6$.

Với $x=-7$ thay vào (1) ta được $-10=y.(-5)$ suy ra $y=2$.

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là $(-1; -4), (3; 0), (-3; -6), (-7; 2)$.

Bài 21: Tìm các số nguyên x , biết:

a) $3x+2 \vdots x-1$

b) $2x-5 \vdots x-1$

c) $2x+3 \vdots x+1$

Lời giải

a) $3x+2 \vdots x-1$

Suy ra $3x-3+5 \vdots x-1$

hay $3(x-1)+5 \vdots x-1$

Vì $3(x-1) \vdots x-1$ với mọi $x \neq 1$

nên $5 \vdots x-1$ suy ra $x-1 \in U(5) = \{1; 5; -1; -5\}$.

suy ra $x \in \{2; 6; 0; -4\}$.

b) $2x-5 \vdots x-1$

Suy ra $2x-2-3 \vdots x-1$

hay $2(x-1)-3 \vdots x-1$

Vì $x-1 \vdots x-1$ với mọi $x \neq 1$

nên $3 \vdots x-1$ suy ra $x-1 \in U(3) = \{1; 3; -1; -3\}$.

suy ra $x \in \{2; 4; 0; -2\}$.

c) $2x+3 \vdots x+1$

Suy ra $2x+2+1 \vdots x+1$

hay $2(x+1)+1 \vdots x+1$

Vì $2(x+1) \vdots x+1$ với mọi $x \neq -1$.

nên $1 \vdots x+1$ suy ra $x+1 \in U(1) = \{-1; 1\}$.

suy ra $x \in \{0; -2\}$.

Bài 22: Tìm các số nguyên x , biết

a) $2x+5 \vdots 2x-1$

b) $4x-5 \vdots 2x-1$

c) $10-2x \vdots x-2$

Lời giải

a) $2x+5 \vdots 2x-1 \Rightarrow 2x-1+6 \vdots 2x-1$

Vì $2x-1 \vdots 2x-1$ với mọi x nguyên

Nên $6 \vdots 2x-1 \Rightarrow 2x-1 \in U(6) = \{1; 2; 3; 6; -1; -2; -3; -6\}$

$\Rightarrow 2x \in \{2; 3; 4; 7; 0; -1; -2; -5\}$

$\Rightarrow x \in \left\{1; \frac{3}{2}; 2; \frac{7}{2}; 0; \frac{-1}{2}; -1; \frac{-5}{2}\right\}$.

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{1; 2; 0; -1\}$.

b) $4x-5 \vdots 2x-1$

$\Rightarrow 4x-2-3 \vdots 2x-1$

$\Rightarrow 2(2x-1)-3 \vdots 2x-1$

Vì $2(2x-1) \vdots 2x-1$ với mọi x nguyên

Nên $3 \vdots 2x-1 \Rightarrow 2x-1 \in U(3) = \{1; 3; -1; -3\}$

$\Rightarrow 2x \in \{2; 4; 0; -2\}$

$\Rightarrow x \in \{1; 2; 0; -1\}$.

Vậy $x \in \{1; 2; 0; -1\}$.

Bài 23: Tìm các số nguyên x , biết $10 - 2x \vdots x - 2$

Lời giải

Ta có: $10 - 2x \vdots x - 2$

$$\Rightarrow 2x - 10 \vdots x - 2$$

$$\Rightarrow 2x - 4 - 6 \vdots x - 2$$

$$\Rightarrow 2(x - 2) - 6 \vdots x - 2$$

Vì $2(x - 2) \vdots x - 2$ với mọi x nguyên khác 2.

$$\text{Nên } 6 \vdots x - 2 \Rightarrow x - 2 \in U(6) = \{1; 2; 3; 6; -1; -2; -3; -6\}$$

$$\Rightarrow x \in \{3; 4; 5; 8; 1; 0; -1; -4\}$$

Vậy $x \in \{3; 4; 5; 8; 1; 0; -1; -4\}$.

Bài 24: Tìm số nguyên n với $n \neq 2$ để phân số $A = \frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là số nguyên.

Lời giải

Để phân số A có giá trị là một số nguyên thì $n + 1 \vdots n - 2$

$$\Rightarrow n - 2 + 3 \vdots n - 2$$

Vì $n - 2 \vdots n - 2$ với mọi số nguyên n khác 2.

$$\text{Nên } 3 \vdots n - 2 \Rightarrow n - 2 \in U(3) = \{1; 3; -1; -3\}$$

$$\Rightarrow n \in \{3; 5; 1; -1\}.$$

Bài 25: Tìm số nguyên n với $n \neq 1$ để phân số $A = \frac{n+2}{n-1}$ có giá trị là số nguyên.

Lời giải

Để phân số A có giá trị là một số nguyên thì $n + 2 \vdots n - 1 \Rightarrow n - 1 + 3 \vdots n - 1$

Vì $n - 1 \vdots n - 1$ với mọi số nguyên n khác 1

$$\text{Nên } 3 \vdots n - 1 \Rightarrow n - 1 \in U(3) = \{1; 3; -1; -3\}$$

$$\Rightarrow n \in \{2; 4; 0; -2\}.$$

Bài 26: Tìm x, y nguyên thỏa mãn $xy - 3x = -19$.

Lời giải

$$xy - 3x = -19$$

$$\Rightarrow x(y - 3) = -19.$$

Vì x, y là các số nguyên nên $x, (y - 3)$ cũng là các số nguyên

$$\text{Nên } x, (y - 3) \in U(-19) = \{1; 19; -1; -19\}$$

Ta có bảng sau:

x	1	19	-1	-19
$y - 3$	-19	-1	19	1
y	-16	2	22	4

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là $(1; -16), (19; 2), (-1; 22), (-19; 4)$.

Bài 27: Tìm x, y nguyên thỏa mãn $2x + xy - y = 9$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 2x + xy - y = 9$$

$$\Rightarrow x(y + 2) - y - 2 + 2 = 9$$

$$\Rightarrow x(y+2)-(y+2)=7$$

$$\Rightarrow (y+2)(x-1)=7.$$

Vì là x, y các số nguyên nên $(x-1), (y+2)$ cũng là các số nguyên.

Nên $(x-1), (y+2) \in U(7) = \{1; 7; -1; -7\}$.

Ta có bảng sau:

$x-1$	1	7	-1	-7
x	2	8	0	-6
$y+2$	7	1	-7	-1
y	5	-1	-9	-3

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là $(2; 5), (8; -1), (0; -9), (-6; -3)$.

Bài 28: Tìm x, y nguyên thỏa mãn $(x+6) = y(x-1)$ với $x \neq 1$.

Lời giải

$$\text{Vì } y(x-1) = x+6 \quad (1)$$

$$\text{Nên } x+6 : x-1 \Rightarrow x-1+7 : x-1$$

Mà $x-1 : x-1$ với mọi x nguyên khác 1.

$$\text{Nên } 7 : x-1 \Rightarrow x-1 \in U(7) = \{1; 7; -1; -7\}$$

$$\Rightarrow x \in \{2; 8; 0; -6\}.$$

$$\text{Với } x=2 \text{ thay vào (1) ta được } y \cdot 1 = 8 \Rightarrow y=8$$

$$\text{Với } x=8 \text{ thay vào (1) ta được } y \cdot 7 = 14 \Rightarrow y=2$$

$$\text{Với } x=0 \text{ thay vào (1) ta được } y \cdot (-1) = 6 \Rightarrow y=-6$$

$$\text{Với } x=-6 \text{ thay vào (1) ta được } y \cdot (-7) = 0 \Rightarrow y=0.$$

Bài 29: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia nó cho 6, 7, 9 được các số dư lần lượt là 2, 3, 5.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là a với $a \in \mathbb{N}$.

Vì a chia 6 dư 2 nên $a-2$ chia hết cho 6.

Vì a chia 7 dư 3 nên $a-3$ chia hết cho 7.

Vì a chia 9 dư 5 nên $a-5$ chia hết cho 9.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a-2 : 6 \\ a-3 : 7 \\ a-5 : 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-2+6 : 6 \\ a-3+7 : 7 \\ a-5+9 : 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+4 : 6 \\ a+4 : 7 \\ a+4 : 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+4 \in BC(6; 7; 9) = B(126) = \{0; 126; 252; \dots\}$$

$$\Rightarrow a \in \{122; 248; \dots\}. \text{ Vì } a \text{ là số tự nhiên nhỏ nhất nên } a = 122.$$

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm là 122.

Bài 30: Tìm số tự nhiên có ba chữ số biết rằng nếu bớt số đó đi 8 thì được số chia hết cho 7, nếu bớt số đó đi 9 thì được số chia hết cho 8, nếu bớt số đó đi 10 thì được số chia hết cho 9.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là a với $a \in \mathbb{N}$.

Vì a bớt đi 8 thì chia hết cho 7 nên $a-8$ chia hết cho 7.

Vì a bớt đi 9 thì chia hết cho 8 nên $a-9$ chia hết cho 8.

Vì a bớt đi 10 thì chia hết cho 9 nên $a-10$ chia hết cho 9.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a-8:7 \\ a-9:8 \\ a-10:9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-8+7:7 \\ a-9+8:8 \\ a-10+9:9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-1:7 \\ a-1:8 \\ a-1:9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a-1 \in BC(7;8;9) = B(504) = \{0;504;1008;.....\}$$

$$\Rightarrow a \in \{1;505;1009;.....\}. \text{ Vì } a \text{ là số tự nhiên có ba chữ số nên } a = 505.$$

Vậy số tự nhiên cần tìm là 505.

Bài 31: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 11,17,29 thì có dư lần lượt là 6,12,24.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là a .

Vì a chia cho 11 dư 6 nên $a-6$ chia hết cho 11.

Vì a chia cho 17 dư 12 nên $a-12$ chia hết cho 17.

Vì a chia cho 29 dư 24 nên $a-24$ chia hết cho 29.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a-6:11 \\ a-12:17 \\ a-24:29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-6+11:11 \\ a-12+17:17 \\ a-24+29:29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+5:11 \\ a+5:17 \\ a+5:29 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+5 \in BC(11;17;29) = B(5423) = \{0;5423;10846;.....\}$$

$$\Rightarrow a \in \{5418;10841;.....\}. \text{ Vì } a \text{ nhỏ nhất nên } a = 5418.$$

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm là 5418.

Bài 32: Tìm số tự nhiên n lớn nhất có ba chữ số, sao cho n chia 8;31 được dư lần lượt là 7;28.

Lời giải

Vì n chia cho 8 dư 7 nên $n-7$ chia hết cho 8

Và n chia cho 31 dư 28 nên $n-28$ chia hết cho 31

$$\text{Ta có } \begin{cases} n-7:8 \\ n-28:31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n-7+72:8 \\ n-28+93:31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+65:8 \\ n+65:31 \end{cases}$$

$$\Rightarrow n+65 \in BC(8;31) = B(248) = \{0;248;496;744;992;.....\}$$

$$\Rightarrow n \in \{183;431;679;927;.....\}.$$

Vì n là số tự nhiên lớn nhất có ba chữ số nên $n = 927$.

Bài 33: Cho phân số: $A = \frac{n-5}{n+1}$ ($n \in \mathbb{Z}; n \neq -1$)

a) Tìm n để A có giá trị nguyên

b) Tìm n để A là phân số tối giản

Lời giải:

$$\text{a) } A = \frac{n-5}{n+1} = \frac{n+1-6}{n+1} = 1 - \frac{6}{n+1}$$

A nhận giá trị nguyên $n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$.

$n+1$	1	-1	2	-2	3	-3	6	-6
n	0	-2	1	-3	2	-4	5	-7

b) A tối giản $(n+1, n-5) = 1$

$$(n+1, 6) = 1$$

$\Rightarrow n+1$ không chia hết cho 2 và $n+1$ không chia hết cho 3.

Bài 34:

a) Tìm hai số tự nhiên a và b biết $BCNN(a,b) = 180$; $UCLN(a,b) = 12$

b) Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để phân số $A = \frac{4n-1}{2n+3}$ có giá trị nguyên.

Lời giải:

a) Ta có $ab = 180.12 = 2160$

Giả sử $a \leq b$. Vì $UCLN(a,b) = 12$ nên $a = 12m, b = 12n$ với $(m,n) = 1$ và $m \leq n$

Suy ra $12m.12n = 2160 \Rightarrow mn = 15$. Ta có bảng sau:

m	n	a	b
1	15	12	180
3	5	36	60

Vậy ta có hai cặp $(a;b)$ là $(12;180), (36;60)$.

b) $A = \frac{4n-1}{2n+3} = \frac{2(2n+3)}{2n+3} - \frac{7}{2n+3} = 2 - \frac{7}{2n+3}$

A có giá trị nguyên $\Leftrightarrow 2n+3 \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$.

Ta có bảng sau

$2n+3$	1	-1	7	-7
n	-1	-2	2	-5

Vậy $n \in \{-1; -2; 2; -5\}$

Bài 35: Cho $A = \frac{12n+1}{2n+3}$. Tìm giá trị của n để:

a) A là một phân số b) A là một số nguyên

Lời giải:

a) $A = \frac{12n+1}{2n+3}$ là phân số khi $12n+1 \in \mathbb{Z}, 2n+3 \in \mathbb{Z}, 2n+3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \neq -1, 5 \end{cases}$

b) $A = \frac{12n+1}{2n+3} = 6 - \frac{17}{2n+3}$

A là số nguyên khi $2n+3 \in U(17) \Leftrightarrow 2n+3 \in \{\pm 1; \pm 17\} \Leftrightarrow n \in \{-10; -2; -1; 7\}$

Bài 36:

a) Tìm giá trị n là số tự nhiên để $n+7$ chia hết cho $n+2$

b) Tìm x là số chia trong phép chia 235 cho x được số dư là 14

Lời giải:

a) $(x+7):(x+2) \Leftrightarrow 5:(x+2) \Leftrightarrow (x+2) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

$$\Rightarrow x \in \{-3; -1; -7; 3\}.$$

$$b) 235 : x \text{ dư } 14 \Rightarrow 235 - 14 : x (x > 14) \Rightarrow 221 : x (x > 14) \Rightarrow x \in \{17; 221\}$$

Bài 37: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ biết: $(3n+8) : (n+1)$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } 3n+8 = 3n+3+5 = 3(n+1)+5$$

$$\text{Suy ra : } (3n+8) : (n+1) \text{ khi } (n+1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$$

$$\text{Tìm được: } n \in \{-6; -2; 0; 4\}$$

Bài 38:

a) Cho $\overline{abc} - \overline{deg} : 7$. Chứng minh $\overline{abc deg} : 7$

b) Tìm số nguyên n sao cho $n^2 + 1 : n + 1$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có: } \overline{abc deg} = 1000 \cdot \overline{abc} + \overline{deg}$$

$$= (1001 - 1) \overline{abc} + \overline{deg} = 1001 \overline{abc} - \overline{abc} + \overline{deg} = 1001 \overline{abc} - (\overline{abc} - \overline{deg})$$

$$\text{Vì } 1001 \overline{abc} = 7 \cdot 143 \overline{abc} \Rightarrow 7 \cdot 143 \overline{abc} : 7 \quad (1)$$

$$\overline{abc} - \overline{deg} : 7 \text{ (gt)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\overline{abc deg} : 7$

b) Ta có:

$$n^2 + 2 = n(n+1) + [-(n+1)] + 3$$

$$\text{Vì } n(n+1) : n+1 \text{ và } -(n+1) : n+1$$

$$\text{Để } n^2 + 2 : n+1 \text{ thì } 3 : n+1 \Rightarrow n+1 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\} \Rightarrow n \in \{-2; 0; -4; 2\}.$$

Bài 39:

a) Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{90}$. Chứng minh A chia hết cho 11 và 13.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho $xy - 2x + y + 1 = 0$.

Lời giải:

$$\text{a) } A \text{ có } 90 \text{ số hạng mà } 90 : 5 \text{ nên } A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{90}$$

$$A = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + (3^6 + 3^7 + 3^8 + 3^9 + 3^{10}) + \dots + (3^{86} + 3^{87} + 3^{88} + 3^{89} + 3^{90})$$

$$= 3 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^6 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{86} \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4)$$

$$= 121 \cdot (3 + 3^6 + \dots + 3^{86}) : 11 \Rightarrow A : 11$$

A có 90 số hạng mà $90 : 3$ nên:

$$A = (3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6) + \dots + (3^{88} + 3^{89} + 3^{90})$$

$$= 3 \cdot (1 + 3 + 3^2) + 3^4 \cdot (1 + 3 + 3^2) + \dots + 3^{88} \cdot (1 + 3 + 3^2)$$

$$= 13.(3+3^4+\dots+3^{88}):13 \Rightarrow A:13$$

$$b) xy - 2x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow x(y-2) + (y-2) = -3$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(y-2) = -3 = 1.(-3) = (-3).1$$

Từ đó suy ra $(x; y) \in \{(0; -1); (-4; 3)\}$

Bài 40: Tìm tất cả các số nguyên n để:

Phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản

Lời giải:

Gọi d là ƯC của $12n+1$ và $30n+2$ ($d \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow 12n+1:d, 30n+2:d$

$$[5(12n+1) - 2(30n+2)]:d \Leftrightarrow (60n+5 - 60n-4):d \Leftrightarrow 1:d$$

mà $d \in \mathbb{N}^* \Rightarrow d = 1$

Vậy phân số đã cho tối giản

Bài 41: Tìm số nguyên n để phân số $M = \frac{2n-7}{n-5}$ có giá trị là số nguyên

Lời giải:

$$a) M = \frac{2n-7}{n-5} = \frac{2n-10+3}{n-5} = 2 + \frac{3}{n-5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n-5 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

Suy ra $n \in \{2; 4; 6; 8\}$

Bài 42: Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị là số nguyên

Lời giải:

Để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị là nguyên thì $n+3:2n-2$

$$2(n+3):2n-2$$

$$(2n+6)-(2n-2):(2n-2)$$

$$(2n-2n)+(6+2):2n-2 \Rightarrow 8:2n-2$$

Suy ra $(2n-2) \in \{\pm 2; \pm 4; \pm 8\}$

Sau khi thử các trường hợp ta được $n = 5$.

Bài 43: Cho $A = \frac{3n-5}{n+4}$, tìm $n \in \mathbb{Z}$ để A có giá trị nguyên.

Lời giải:

$$\text{Ta có } A = \frac{3n-5}{n+4} = 3 + \frac{-17}{n+4}$$

Để $A \in \mathbb{Z}$ Thì $(n+4) \in U(-17) = \{\pm 1; \pm 17\}$.

Lập bảng và xét các giá trị ta có $n \in \{-5; -3; 21; 13\}$ thì A nguyên.

Bài 33. Tìm các giá trị nguyên của n để phân số $A = \frac{3n+2}{n-1}$ có giá trị là số nguyên

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{3n+2}{n-1} = \frac{3n-3+5}{n-1} = 3 + \frac{5}{n-1}$$

Để A có giá trị nguyên $\frac{5}{n-1} \in \mathbb{Z}$ suy ra $(n-1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$ suy ra $n \in \{2; 0; 6; -4\}$

Bài 45. Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{2n+1}{n+2}$ là phân số rút gọn được

Lời giải

Gọi d là ƯCLN($2n+1, n+2$) ($d \in \mathbb{N}^*$)

Ta có: $2n+1 : d, n+2 : d$ suy ra $[(2n+4) - (2n+1)] : d$ suy ra $3 : d$

Vì $d \in \mathbb{N}^*$ nên $d \in \{1; 3\}$. Để phân số $\frac{2n+1}{n+2}$ rút gọn được thì $d = 3$

Suy ra $n+2 = 3k$ suy ra $n = 3k - 2$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

Vậy với $n = 3k - 2$ ($k \in \mathbb{N}^*$) thì phân số $\frac{2n+1}{n+2}$ là phân số rút gọn được

Bài 46: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ biết: $(3n+8) : (n+1)$

Lời giải

Ta có: $3n+8 = 3n+3+5 = 3(n+1)+5$

Suy ra: $(3n+8) : (n+1)$ khi $(n+1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$.

Vậy $n \in \{-6; -2; 0; 4\}$.

Bài 47: Tìm số nguyên n để $5+n^2-2n$ chia hết cho $n-2$

Lời giải

Ta có $5+n^2-2n = 5+n(n-2)$

Vì $n(n-2) : (n-2)$, nên để $(5+n^2-2n) : (n-2)$ thì $5 : (n-2)$

Suy ra $(n-2)$ phải là ước của 5 suy ra $(n-2) \in \{-5; -1; 1; 5\}$ suy ra: $n \in \{-3; -1; 3; 7\}$

Vậy $n \in \{-3; -1; 3; 7\}$ thì $5+n^2-2n$ chia hết cho $n-2$

Bài 48: Cho $A = 3+3^2+3^3+3^4+\dots+3^{90}$. Chứng minh A chia hết cho 11 và 13.

Lời giải:

A có 90 số hạng mà $90 : 5$ nên $A = 3+3^2+3^3+3^4+\dots+3^{90}$

$$A = (3+3^2+3^3+3^4+3^5) + (3^6+3^7+3^8+3^9+3^{10}) + \dots + (3^{86}+3^{87}+3^{88}+3^{89}+3^{90})$$

$$= 3 \cdot (1+3+3^2+3^3+3^4) + 3^6 \cdot (1+3+3^2+3^3+3^4) + \dots + 3^{86} \cdot (1+3+3^2+3^3+3^4)$$

$$= 121 \cdot (3+3^6+\dots+3^{86}) : 11 \text{ suy ra } A : 11$$

A có 90 số hạng mà $90 : 3$ nên:

$$A = (3+3^2+3^3) + (3^4+3^5+3^6) + \dots + (3^{88}+3^{89}+3^{90})$$

$$= 3 \cdot (1+3+3^2) + 3^4 \cdot (1+3+3^2) + \dots + 3^{88} \cdot (1+3+3^2)$$

$$= 13.(3 + 3^4 + \dots + 3^{88}):13 \text{ suy ra } A:13$$

Bài 49. Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho $xy - 2x + y + 1 = 0$.

Lời giải:

$$xy - 2x + y + 1 = 0 \text{ suy ra } x(y - 2) + (y - 2) = -3$$

$$\text{suy ra } (x + 1)(y - 2) = -3 = 1 \cdot (-3) = (-3) \cdot 1$$

$$\text{Từ đó suy ra } (x; y) \in \{(0; -1); (-4; 3)\}$$

Bài 50: Tìm các số nguyên a, b biết rằng: $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$

Lời giải:

$$\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3} \text{ suy ra } \frac{2a-7}{14} = \frac{1}{b+3} \text{ suy ra } (2a-7)(b+3) = 14$$

Do $a, b \in \mathbb{Z}$ nên $2a-7 \in U(14)$

$$\text{Vì } 2a-7 \text{ lẻ nên } 2a-7 \in \{\pm 1; \pm 7\} \text{ suy ra } a \in \{0; 3; 4; 7\}$$

$$\text{Vậy } (a; b) = \{(0; -5); (3; -17); (4; 11); (7; -1)\}$$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

CHỦ ĐỀ 4: SỐ NGUYÊN
A. PHẦN NỘI DUNG

I. Ước và bội.

Dạng 1: Chứng minh sự chia hết.

Bài 1: Tìm các giá trị nguyên n của đề phân số $B = \frac{2n+5}{n+3}$ có giá trị là số nguyên.

Trích đề KS HSG huyện năm 2021 – 2022

Lời giải

Ta có: $\frac{2n+5}{n+3} = \frac{2(n+3)-1}{n+3} = 2 - \frac{1}{n+3}$

Để B có giá trị nguyên thì $\frac{1}{n+3}$ nguyên

$1:(n+3)$

$n+3$ thuộc ước nguyên của 1

$n+3 \in \{-1; 1\}$

$n \in \{-4; -2\}$.

Vậy $n \in \{-4; -2\}$

Bài 2: Tìm số nguyên n để $A = 2n^2 + n - 6$ chia hết cho $2n+1$

Trích đề HSG Trường Nghĩa Đồng huyện Tân Kỳ năm 2021-2022.

Lời giải

Ta có $A = 2n^2 + n - 6 = n.(2n+1) - 6$

Vì A chia hết cho $2n+1$ nên $6:(2n+1)$

$2n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$

Do $2n+1$ là số lẻ nên ta có bảng sau

$2n+1$	1	-1	3	-3
$2n$	0	-2	2	-4
n	0	-1	1	-2

Vậy với $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$ thì A chia hết cho $2n+1$.

Bài 3: Chứng minh rằng trong hai số: $5^n + 2023$ và $5^n + 2024$, luôn có một số chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n .

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021 – 2022

Lời giải

Vì $5 \not\vdots 3$, nên $5^n \not\vdots 3$ do đó 5^n nhận được một trong hai dạng sau:

$5^n = 3k+1$ hoặc $5^n = 3k+2 (k \in \mathbb{Z})$

Nếu $5^n = 3k+1$ thì $5^n + 2024 = 3k + 2025 : 3$

Nếu $5^n = 3k+2$ thì $5^n + 2023 = 3k + 2025 : 3$.

Bài 4: Một số tự nhiên chia hết cho 2, chia cho 3 dư 1, chia cho 337 dư 335. Hỏi số tự nhiên đó chia cho 2022 dư bao nhiêu?

Trích đề HSG huyện Quế Võ năm 2021-2022

Lời giải

Gọi số tự nhiên phải tìm là $a (a \in \mathbb{N}^*)$.

Vì a chia cho 3 dư 1, chia cho 337 dư 335 $\Rightarrow a+2$ chia hết cho cả 3 và 337

$\Rightarrow a+2$ là bội chung lớn hơn 0 của 3 và 337

Do $(3;337)=1 \Rightarrow \text{BCNN}(3;337)=3 \cdot 337=1011$

$\Rightarrow BC(3;337)=B(1011)=\{0;1011;2022;3033;4044;5055;6066;\dots\}$

$\Rightarrow a+2 \in \{1011;2022;3033;4044;5055;6066;\dots\}$

Mà a chia hết cho 2 $\Rightarrow a+2$ chẵn $\Rightarrow a+2 \in \{2022;4044;6066;\dots\}$

$\Rightarrow a+2$ chia hết cho 2022. Vậy a chia cho 2022 dư 2020.

Bài 5: CMR: $2x+y \vdots 9$ thì $5x+7y \vdots 9$

Trích đề HSG huyện Chương Mỹ năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có:

$$2x+y \vdots 9 \Rightarrow 7(2x+y) \vdots 9 \Rightarrow 14x+7y \vdots 9 \Rightarrow 9x+5x+7y \vdots 9 \Rightarrow 5x+7y \vdots 9$$

Vậy $2x+y \vdots 9$ thì $5x+7y \vdots 9$

Dạng 2: Tìm số thỏa mãn điều kiện chia hết.

Bài 1: Tìm các giá trị nguyên của n để phân số $B = \frac{2n+5}{n+3}$ có giá trị là số nguyên.

Trích đề KS HSG huyện năm 2021 – 2022

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{2n+5}{n+3} = \frac{2(n+3)-1}{n+3} = 2 - \frac{1}{n+3}$$

Để B có giá trị nguyên thì $\frac{1}{n+3}$ nguyên

$$1 \vdots (n+3)$$

$n+3$ thuộc ước nguyên của 1

$$n+3 \in \{-1;1\}$$

$$n \in \{-4;-2\}.$$

$$\text{Vậy } n \in \{-4;-2\}$$

Bài 2: Tìm số nguyên n để $A = 2n^2 + n - 6$ chia hết cho $2n+1$

Trích đề HSG Trường Nghĩa Đồng huyện Tân Kỳ năm 2021-2022.

Lời giải

$$\text{Ta có } A = 2n^2 + n - 6 = n \cdot (2n+1) - 6$$

Vì A chia hết cho $2n+1$ nên $6 \vdots 2n+1$

$$2n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$$

Do $2n+1$ là số lẻ nên ta có bảng sau

$2n+1$	1	-1	3	-3
$2n$	0	-2	2	-4
n	0	-1	1	-2

Vậy với $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$ thì A chia hết cho $2n+1$

Bài 3: Tìm các cặp số nguyên x, y thỏa mãn: $3xy + 2x - 5y = 6$

Trích đề HSG Trường Nghĩa Đồng huyện Tân Kỳ năm 2021-2022.

Lời giải

$$3xy + 2x - 5y = 6 \text{ suy ra } x(3y+2) - 5y = 6$$

$$3x(3y+2)-15y=18$$

$$3x(3y+2)-15y-10=18-10$$

$$3x(3y+2)-5(3y+2)=8$$

$$(3x-5).(3y+2)=8$$

$$\text{Nên } 3y+2 \in U(8) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$$

$$\text{Mà } 3y+2 \text{ là số chia 3 dư 2 nên } 3y+2 \in \{-1; 2; -4; 8\}$$

Ta có bảng sau:

$3y+2$	-4	-1	2	8
$3x-5$	-2	-8	4	1
y	-2	-1	0	2
x	1	-1	3	2

$$\text{Vậy } (x;y) \in \{(1;-2); (-1;-1); (3;0); (2;2)\}$$

Bài 4: Tìm số nguyên n sao cho $n-2022$ chia hết cho $n-2017$.

Trích đề HSG Quận Hà Đông năm 2021-2022.

Lời giải

Ta có: $(n-2022):(n-2017)$ điều kiện $n \neq 2017$.

Mà $(n-2017):(n-2017)$ nên $(n-2022)-(n-2017):(n-2017)$ (tính chất chia hết của một hiệu).

$$\text{Suy ra } -5:(n-2017) \text{ nên } (n-2017) \in U(-5) = \{-1; 1; -5; 5\}$$

Ta có bảng sau:

$n-2017$	-1	1	-5	5
n	2016	2018	2012	2022
	thỏa mãn	thỏa mãn	thỏa mãn	thỏa mãn

Vậy với $n \in \{2016; 2018; 2012; 2022\}$ thì $n-2022$ chia hết cho $n-2017$.

Bài 5: Tìm hai số nguyên, biết tích của chúng lớn hơn ba lần tổng của chúng là 1

Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021-2022

Lời giải

Gọi 2 số đó là x, y ($x; y \in \mathbb{Z}$)

$$\text{Ta có } xy-3(x+y)=1$$

$$xy-3x-3y=1$$

$$xy-3x-3y+9=10$$

$$(xy-3x)-(3y-9)=10$$

$$x(y-3)-3(y-3)=10$$

$$(x-3)(y-3)=10. \text{ Vì } x; y \in \mathbb{Z}, \text{ vai trò } x, y \text{ như nhau. Giả sử } x > y.$$

Ta có bảng

$x-3$	5	10	-2	-1
$y-3$	2	1	-5	-10
x	8	13	1	2
y	5	4	-2	-7

Vậy $(x; y) \in \{(8;5); (13;4); (1;-2); (2;-7)\}$. Có 4 cặp số nguyên x, y thỏa mãn

Bài 6: Tìm x, y nguyên biết : $2x(3y-2)+(3y-2)=-55$

Trích đề ks HSG Trường Thiện Quang huyện Kim Sơn năm 2021-2022

Lời giải

Tìm x, y nguyên biết : $2x(3y-2)+(3y-2)=-55$

Ta có

$$(2x-1)(3y-2)=-55$$

$$\text{Suy ra } 2x-1 = \frac{-55}{3y-2} \quad (1)$$

Để x nguyên thì $3y-2 \in U(-55) = \{1; 5; 11; 55; -1; -5; -11; -55\}$

$+3y-2=1$ suy ra $3y=3$ nên $y=1$, thay vào (1) ta được $x=28$

$+3y-2=5$ suy ra $3y=7$ nên $y=\frac{7}{3}$, (Loại)

$+3y-2=11$ suy ra $3y=13$ nên $y=\frac{13}{3}$, (Loại)

$+3y-2=55$ suy ra $3y=57$ nên $y=19$, thay vào (1) ta được $x=-1$.

$+3y-2=-1$ suy ra $3y=1$ nên $y=\frac{1}{3}$, (loại)

$+3y-2=-5$ suy ra $3y=-3$ nên $y=-1$, thay vào (1) ta được $x=5$

$+3y-2=-11$ suy ra $3y=-9$ nên $y=-3$, thay vào (1) ta được $x=2$

$+3y-2=-55$ suy ra $3y=-53$ nên $y=-\frac{53}{3}$, (loại)

Vậy ta có 4 cặp số x, y nguyên thoả mãn là $(x, y) \in \{(28; 1); (-1; 19); (5; -1); (2; 3)\}$.

Bài 7: Tìm các số nguyên a, b biết rằng: $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3} \Rightarrow \frac{2a-7}{14} = \frac{1}{b+3} \Rightarrow (2a-7)(b+3) = 14$$

Do $a, b \in \mathbb{Z}$ nên $2a-7 \in U(14)$

Vì $2a-7$ lẻ nên $2a-7 \in \{\pm 1; \pm 7\} \Rightarrow a \in \{0; 3; 4; 7\}$

Vậy $(a; b) = \{(0; -5); (3; -17); (4; 11); (7; -1)\}$

B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

I. Ước và bội.

Dạng 1: Chứng minh sự chia hết.

Bài 1: Tìm các giá trị nguyên của n để phân số $B = \frac{2n+5}{n+3}$ có giá trị là số nguyên.

Trích đề KS HSG huyện năm 2021 – 2022

Bài 2: Tìm số nguyên n để $A = 2n^2 + n - 6$ chia hết cho $2n+1$

Trích đề HSG Trường Nghĩa Đồng huyện Tân Kỳ năm 2021-2022.

Bài 3: Chứng minh rằng trong hai số: $5^n + 2023$ và $5^n + 2024$, luôn có một số chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n .

Bài 4: Một số tự nhiên chia hết cho 2, chia cho 3 dư 1, chia cho 337 dư 335. Hỏi số tự nhiên đó chia cho 2022 dư bao nhiêu?

Trích đề HSG huyện Quế Võ năm 2021-2022

Bài 5: CMR : $2x + y : 9$ thì $5x + 7y : 9$.

Trích đề HSG huyện Chương Mỹ năm 2021 - 2022

Dạng 2: Tìm số thỏa mãn điều kiện chia hết.

Bài 1: Tìm các giá trị nguyên của n để phân số $B = \frac{2n+5}{n+3}$ có giá trị là số nguyên.

Trích đề KS HSG huyện năm 2021 – 2022

Bài 2: Tìm số nguyên n để $A = 2n^2 + n - 6$ chia hết cho $2n+1$

Trích đề HSG Trường Nghĩa Đồng huyện Tân Kỳ năm 2021-2022.

Bài 3: Tìm các cặp số nguyên x, y thỏa mãn: $3xy + 2x - 5y = 6$

Trích đề HSG Trường Nghĩa Đồng huyện Tân Kỳ năm 2021-2022.

Bài 4: Tìm số nguyên n sao cho $n - 2022$ chia hết cho $n - 2017$.

Trích đề HSG Quận Hà Đông năm 2021-2022.

Bài 5: Tìm hai số nguyên, biết tích của chúng lớn hơn ba lần tổng của chúng là 1

Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021-2022

Bài 6: Tìm x, y nguyên biết : $2x(3y - 2) + (3y - 2) = -55$.

Trích đề ks HSG Trường Thiện Quang huyện Kim Sơn năm 2021-2022

Bài 7: Tìm các số nguyên a, b biết rằng: $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

C. SỬ TÀM CÁC BÀI TRONG CÁC ĐỀ CỦA NHỮNG NĂM TRƯỚC ĐÓ

I. Ước và bội.

Dạng 1: Chứng minh sự chia hết.

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta có $n^3 - n : 6$

Trích đề HSG huyện Trực Ninh năm 2017-2018

Lời giải

Ta có $(n^3 - n) = n(n^2 - 1) = n(n^2 - n + n - 1) = n[n(n-1) + (n-1)] = n(n-1)(n+1)$

Với mọi số nguyên dương n thì $(n-1)n(n+1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp sẽ chia hết cho 2 và 3 mà $(2,3)=1$ nên $n(n-1)(n+1) : 6$

Bài 2: Chứng tỏ rằng: $\frac{2n+5}{n+3} (n \in \mathbb{N})$ là phân số tối giản

Trích đề HSG huyện Quỳnh Lưu năm 2018-2019.

Gọi d là ước chung của $n+3$ và $2n+5$ với $d \in \mathbb{N}$

Suy ra $n+3 : d$ và $2n+5 : d$

$2(n+3) - (2n+5) : d$ suy ra $1 : d$ nên $d = 1$

Do đó $U_{CLN}(n+3, 2n+5) = 1$ suy ra $\frac{2n+5}{n+3} (n \in \mathbb{N})$ là phân số tối giản.

Dạng 2: Tìm số thỏa mãn điều kiện chia hết.

Bài 1: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để phân số $A = \frac{4n-1}{2n+3}$ có giá trị nguyên

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2017-2018

Lời giải

$$A = \frac{4n-1}{2n+3} = \frac{2(2n+3)}{2n+3} - \frac{7}{2n+3} = 2 - \frac{7}{2n+3}$$

A có giá trị nguyên thì $2n+3 \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$

Ta có bảng sau

$2n+3$	1	-1	7	-7
n	-1	-2	2	-5

Bài 2: Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho sau khi viết tiếp số đó sau số 2014 ta được số chia hết cho 101

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2017-2018

Lời giải

Giả sử n có k chữ số ($k \geq 1$)

Ta có : $2014 = 19 \cdot 101 + 95$, do đó:

$$\overline{2014n} = 2014 \cdot 10^k + n = 19 \cdot 101 \cdot 10^k + 95 \cdot 10^k + n$$

Suy ra $\overline{2014n} : 101$ khi và chỉ khi $95 \cdot 10^k + n : 101$

Với $k=1$ thì $95 \cdot 10^k + n = 950 + n = 101 \cdot 9 + (41+n) : 101$ khi và chỉ khi $41+n : 101$ nhưng n có một chữ số nên $41+n \leq 41+9 < 101$, nên không có số n thỏa mãn đầu bài.

Với $k=2$ thì $95 \cdot 10^k + n = 9500 + n = 101 \cdot 94 + (6+n) : 101$ suy ra $6+n : 101$, và số n nhỏ nhất được xác định bởi $6+n = 101$ suy ra $n = 95$

Vậy $n = 95$ thỏa mãn đề bài

Bài 3: Tìm x, y nguyên biết: $x + y + xy = 40$

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2017-2018

Lời giải

Ta có $x + y + xy = 40$

$$(y+1)x + y + 1 = 41$$

$$(x+1)(y+1) = 41$$

Mà x, y nguyên nên $x+1, y+1$ là ước của 41

$$\text{Tính được } (x, y) \in \{(40, 0); (0, 40); (-2, -42); (-42, -2)\}$$

Bài 4: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ biết: $(3n+8):(n+1)$

Trích đề HSG huyện Bạch Thông năm 2018-2019

Lời giải

Ta có: $3n+8 = 3n+3+5 = 3(n+1)+5$

Suy ra: $(3n+8):(n+1)$ khi $(n+1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

Tìm được: $n \in \{-6; -2; 0; 4\}$

Bài 5: Tìm các số nguyên x, y biết: $2x - y + 4xy = 6$

Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2017-2018

Lời giải

Ta có $2x - y + 4xy = 6$

$$\text{Hay } 2x(2y+1) - y = 6$$

$$(2y+1)(4x-1) = 11$$

Do x, y nguyên nên $4x-1 \in U(11) = \{1; -1; 11; -11\}$

Mà $4x-1$ chia 4 dư -1 (hoặc 3) nên $4x-1 = -1$ hoặc $4x-1 = 11$

Tìm được $x = 0; y = -6$ hoặc $x = 3; y = 0$

Bài 6: Tìm các số nguyên n để $\frac{2n+1}{n+2}$ có giá trị là một số nguyên

Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2017-2018

Lời giải

Để $\frac{2n+1}{n+2}$ có giá trị là số nguyên thì $2n+1:n+2$ (1)

Vì $n+2:n+2$ nên $2(n+2):n+2$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $2(n+2) - (2n+1):n+2$ chia hết cho $n+2$ hay $3:(n+2)$

Vì $n+2$ nguyên nên $n+2 \in \{-1; 1; -3; 3\}$

$n \in \{-3; -5; -1; 1\}$ Vậy với $n \in \{-3; -5; -1; 1\}$ thì phân số $\frac{2n+1}{n+2}$ là số nguyên.

Bài 7: Chứng tỏ rằng với mọi số nguyên n thì phân số $\frac{3n-10}{2n-7}$ là phân số tối giản

Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2018-2019

Lời giải

Gọi Ư CLN $(3n-10; 2n-7) = d$ ($d \in \mathbb{N}^*$)

thì $3n-10:d$ và $2n-7:d$

$$2(3n-10):d \text{ và } 3(2n-7):d$$

$$2(3n-10) - 3(2n-7):d$$

Suy ra $1:d$ nên $d \in \{1; -1\}$

Vậy với mọi số nguyên n thì phân số $\frac{3n-10}{2n-7}$ là phân số tối giản.

Bài 8: Tìm số nguyên n để $A = 2n^2 + n - 6$ chia hết cho $2n+1$

Đề Suu tầm

Lời giải

Ta có: $A = 2n^2 + n - 6 = n(2n+1) - 6$

Vì A chia hết cho $2n+1$ nên $n(2n+1) - 6 : 2n+1$ mà $n(2n+1) : 2n+1$ nên $6 : 2n+1$ hay $2n+1 \in U(6)$.

Do $2n+1$ là số lẻ nên ta có bảng sau:

$2n+1$	1	-1	3	-3
$2n$	0	-2	2	-4
n	0	-1	1	-2

Vậy với $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$ thì $A = 2n^2 + n - 6$ chia hết cho $2n+1$.

Bài 9: Chứng tỏ rằng mọi số tự nhiên có ba chữ số giống nhau đều chia hết cho 37

Lời giải

Chứng tỏ rằng mọi số tự nhiên có ba chữ số giống nhau đều chia hết cho 37

Gọi số tự nhiên có ba chữ số giống nhau có dạng \overline{aaa}

(a là chữ số khác 0)

Ta có: $\overline{aaa} = 111.a = 37.3.a$

$\Rightarrow \overline{aaa} : 37$

Vậy mọi số tự nhiên có ba chữ số giống nhau đều chia hết cho 37

Bài 10: Cho $3a + 2b$ chia hết cho 17. Chứng minh rằng $10a + b$ chia hết cho 17.

Lời giải

Cho $3a + 2b$ chia hết cho 17. Chứng minh rằng $10a + b$ chia hết cho 17.

Ta xét: $2(10a + b) - (3a + 2b) = (20a + 2b) - (3a + 2b) = 17a$

$\Rightarrow 2(10a + b) - (3a + 2b)$ chia hết cho 17

Mà $3a + 2b$ chia hết cho 17

$\Rightarrow 2(10a + b)$ chia hết cho 17

$\Rightarrow 10a + b$ chia hết cho 17 vì $(2, 17) = 1$.

Vậy nếu $3a + 2b$ chia hết cho 17 thì $10a + b$ chia hết cho 17

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

CHỦ ĐỀ: PHÂN SỐ**A. PHẦN NỘI DUNG**

Các bài toán về tỷ số của hai số; tìm số khi biết giá trị phân số của nó; tìm giá trị phân số của một số; tỷ số phần trăm.

Trắc nghiệm

Bài 1: Trung bình cộng của tử số và mẫu số của một phân số là 68 . Cộng thêm vào tử số của phân số đó 4 đơn vị thì được phân số mới bằng phân số $\frac{3}{2}$. Phân số lúc đầu là:

- A. $\frac{84}{52}$. B. $\frac{76}{60}$. C. $\frac{75}{61}$. D. $\frac{80}{56}$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: D. $\frac{80}{56}$.

Tự luận

Bài 1. Vào tháng 9 , giá bán một chiếc máy tính là 24000000 đồng. Đến tháng 10, cửa hàng tăng giá lên 20% . Đến tháng 11 , cửa hàng hạ giá của tháng 10 xuống 20% . Hỏi giá bán của chiếc máy tính đó vào tháng 9 và tháng 11 , tháng nào đắt hơn.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Lời giải

Giá bán máy tính trong tháng 10 là: $24000000 + 24000000 \cdot 20\% = 28800000$ (đồng)

Giá bán máy tính trong tháng 11 là: $28800000 - 28800000 \cdot 20\% = 23040000$ (đồng)

Vậy giá bán máy tính đó vào tháng 9 đắt hơn tháng 11.

Bài 2: Hãng ô tô Vinfat có chính sách bán hàng theo hình thức trả góp hàng tháng như sau:

- Số tiền gốc mỗi tháng phải trả = tổng số khoản vay/kỳ hạn vay (tính theo tháng)
- Số tiền lãi hàng tháng phải trả = dư nợ thực tế \cdot lãi suất tháng

Biết rằng: Lãi suất tháng = lãi suất ngân hàng theo năm / 12 tháng.

Một khách hàng ký kết hợp đồng mua Ô tô vay trả góp 600 triệu đồng với kỳ hạn 5 năm, lãi suất ngân hàng là 6% / năm

- a) Tính số tiền cả gốc và lãi mà khách hàng phải trả trong tháng đầu tiên, tháng thứ hai?
- b) Tính tổng số tiền cả gốc và lãi mà khách hàng phải trả cho đến khi trả hết nợ?

Trích đề HSG huyện Kỳ Anh năm 2021 - 2022

Lời giải

a) Kỳ hạn vay tính theo tháng: $5 \cdot 12 = 60$ (tháng)

Số tiền gốc mỗi tháng phải trả: $600 : 60 = 10$ (triệu đồng)

Lãi suất tháng: $6\% : 12 = \frac{6}{100} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100} = 0,5 \cdot \frac{1}{100} = \frac{0,5}{100} = 0,5\%$

Số tiền gốc và lãi phải trả trong tháng đầu tiên:

$$10 + 0,5\% \cdot 600 = 10 + \frac{0,5}{100} \cdot 600 = 13 \text{ (triệu đồng)}$$

Dư nợ của tháng thứ 2: $600 - 10 = 590$ (triệu đồng)

Số tiền gốc và lãi phải trả trong tháng thứ 2 là:

$$10 + 0,5\% \cdot 590 = 10 + \frac{0,5 \cdot 590}{100} = 10 + 2,95 = 12,95 \text{ (triệu đồng)}$$

b) Tổng số tiền gốc và lãi phải trả từ tháng thứ nhất đến tháng thứ 60 là:

$$\begin{aligned} & 600 + 0,5\% \cdot 600 + 0,5\% \cdot (600 - 10) + 0,5\% \cdot (600 - 20) \\ & + 0,5\% \cdot (600 - 30) \dots + 0,5\% \cdot (600 - 590) \\ & = 600 + 0,5\% \cdot (600 + 600 - 10 + 600 - 20 + \dots + 600 - 590) \\ & = 600 + 0,5\% \cdot [60 \cdot 600 - 10 \cdot (1 + 2 + \dots + 59)] = 600 + 0,5\% \cdot \left(60 \cdot 600 - 10 \cdot \frac{59 \cdot 60}{2} \right) \\ & = 600 + 0,5\% \cdot \left(60 \cdot 600 - 600 \cdot \frac{59}{2} \right) \\ & = 600 + \frac{0,5}{100} \cdot 600 \cdot \frac{120 - 59}{2} = 600 + 3 \cdot \frac{61}{2} = 600 + \frac{183}{2} \\ & = 600 + 91,5 = 691,5 \text{ (triệu đồng)} \end{aligned}$$

Bài 3: Vào tháng 9, giá bán một chiếc máy tính là 24000000 đồng. Đến tháng 10, cửa hàng tăng giá lên 20%. Đến tháng 11, cửa hàng hạ giá của tháng 10 xuống 20%. Hỏi giá bán của chiếc máy tính đó vào tháng 9 và tháng 11, tháng nào đắt hơn.

Trích đề HSG huyện Chí Linh năm 2021-2022

Lời giải

Giá bán máy tính trong tháng 10 là

$$24000000 + 24000000 \cdot 20\% = 28800000 \text{ đồng}$$

Giá bán máy tính trong tháng 11 là

$$28800000 - 28800000 \cdot 20\% = 23040000 \text{ đồng}$$

Vậy giá bán máy tính đó vào tháng 9 đắt hơn tháng 11

Bài 4: Tổng của hai số là 2015, biết $\frac{6}{7}$ của $\frac{2}{3}$ số thứ nhất nhiều hơn $\frac{5}{6}$ của $\frac{4}{5}$ số thứ hai là 52. Tìm mỗi số.

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2022 - 2023

Lời giải

Gọi 2 số cần tìm là $x; y$.

Theo đề bài ta có: $x + y = 2015$ nên $x = 2015 - y$ (1)

$$\frac{6}{7} \cdot \frac{2}{3} x - \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} y = 52 \text{ nên } \frac{4}{7} x - \frac{2}{3} y = 52 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có $\frac{4}{7}(2015 - y) - \frac{2}{3}y = 52$

$$\frac{26}{21}y = \frac{8060}{7} - 52$$

$$\frac{26}{21}y = \frac{7696}{7}$$

$$y = \frac{23088}{26}$$

$$y = 888$$

$$x = 2015 - 888 = 1127$$

Vậy hai số cần tìm là 1127; 888.

Bài 5: Tìm 3 số có tổng bằng 210, biết rằng $\frac{6}{7}$ số thứ nhất bằng $\frac{9}{11}$ số thứ 2 và $\frac{9}{11}$ số thứ hai bằng $\frac{2}{3}$ số thứ ba.

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2017 -2018
Lời giải

$$\text{Số thứ nhất bằng: } \frac{9}{11} : \frac{6}{7} = \frac{21}{22} \text{ (số thứ hai)}$$

$$\text{Số thứ ba bằng: } \frac{9}{11} : \frac{2}{3} = \frac{27}{22} \text{ (số thứ hai)}$$

$$\text{Tổng của 3 số bằng } \frac{21}{22} + \frac{27}{22} + 1 \text{ (số thứ hai)} = \frac{70}{22} \text{ (số thứ hai)}$$

$$\text{Số thứ hai là: } 210 : \frac{70}{22} = 66$$

$$\text{Số thứ nhất là: } \frac{21}{22} \cdot 66 = 63$$

$$\text{Số thứ ba: } \frac{27}{22} \cdot 66 = 81.$$

Bài 6: Tổng số trang của 8 quyển vở loại 1; 9 quyển vở loại 2 và 5 quyển vở loại 3 là 1980 trang. Số trang của một quyển vở loại 2 chỉ bằng $\frac{2}{3}$ số trang của 1 quyển vở loại 1. Số trang của 4 quyển vở loại 3 bằng số trang của 3 quyển vở loại 2. Tính số trang của mỗi quyển vở mỗi loại.

Trích đề HSG huyện Phù Ninh năm 2015 -2016
Lời giải

- Vì số trang của mỗi quyển vở loại 2 bằng $\frac{2}{3}$ số trang của 1 quyển loại 1. Nên số trang của 3 quyển loại 2 bằng số trang của 3. $\frac{2}{3} = 2$ quyển loại 1.

- Mà số trang của 4 quyển loại 3 bằng 3 quyển loại 2. Nên số trang của 2 quyển loại 1 bằng số trang của 4 quyển loại 3.

- Do đó số trang của 8 quyển loại 1 bằng: $(8 : 2) \cdot 4 = 16$ (quyển loại 3).

Số trang của 9 quyển loại 2 bằng: $(9 : 3) \cdot 4 = 12$ (quyển loại 3).

Vậy 1980 chính là số trang của $16 + 12 + 5 = 33$ (quyển loại 3).

- Suy ra: Số trang 1 quyển vở loại 3 là: $1980 : 33 = 60$ (trang).

Số trang 1 quyển vở loại 2 là: $\frac{60 \cdot 4}{3} = 80$ (trang).

Số trang 1 quyển vở loại 1 là: $\frac{80 \cdot 3}{2} = 120$ (trang).

Bài 7: Tìm hai số biết tỉ số của chúng bằng 5 : 8 và tích của chúng bằng 360.

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014 -2015
Lời giải

Gọi hai số cần tìm là a và b

Theo đề bài: $\frac{a}{b} = \frac{5}{8}$ nên $8a = 5b$. Do đó $\frac{a}{5} = \frac{b}{8}$

Đặt $\frac{a}{5} = \frac{b}{8} = k$. Ta có $a = 5k$ và $b = 8k$

Ta có: $a \cdot b = 360 = 5k \cdot 8k = 360$

$$40k^2 = 360$$

$$k^2 = 360 : 40 = 9$$

$$\left[\begin{array}{l} k^2 = (-3)^2 \\ k^2 = 3^2 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} k = -3 \\ k = 3 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a = 5 \cdot (-3) = -15 \\ a = 5 \cdot 3 = 15 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} b = 8 \cdot (-3) = -24 \\ b = 8 \cdot 3 = 24 \end{array} \right.$$

Vậy có 2 cặp số a, b thỏa mãn là $(-15; 24), (15; 24)$.

Bài 8: Cùng một công việc nếu mỗi người làm riêng thì 3 người A, B, C hoàn thành công việc trong thời gian lần lượt là 6 giờ, 8 giờ, 12 giờ. Hai người B và C làm chung trong 2 giờ sau đó người C chuyển đi làm việc khác, người A cùng làm với người B tiếp tục công việc cho đến khi hoàn thành. Hỏi người A làm trong mấy giờ?

Trích đề HSG huyện Hoài Nhơn 2015-2016

Lời giải

Trong 1 giờ mỗi người A, B, C lần lượt làm được $\frac{1}{6}$ (công việc), $\frac{1}{8}$ (công việc), $\frac{1}{12}$ (công việc), B

và C làm được $\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{24}$ (công việc)

2 giờ B và C làm được $\frac{5}{24} \cdot 2 = \frac{5}{12}$ (công việc)

A và B làm được $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$ (công việc)

1 giờ A và B cùng làm được: $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}$ (công việc)

Thời gian A cùng làm với B là: $\frac{7}{12} : \frac{7}{24} = 2$ giờ.

Bài 9: Trên con đường đi qua 3 địa điểm A, B, C (B nằm giữa A và C), có hai người đi xe máy là Hùng và Dũng. Hùng xuất phát từ A , Dũng xuất phát từ B . Họ cùng khởi hành lúc 8 giờ để cùng đến C vào lúc 11 giờ cùng ngày. Ninh đi xe đạp từ C về phía A , gặp Dũng lúc 9 giờ và gặp Hùng lúc 9 giờ 24 phút. Biết quãng đường AB dài 30km, vận tốc của Ninh bằng $\frac{1}{4}$ vận tốc của Hùng. Tính quãng đường BC .

Trích đề HSG cấp Trường năm 2019-2020

Lời giải

Thời gian đi từ A đến C của Hùng là: $11 - 8 = 3$ (giờ)

Thời gian đi từ B đến C của Dũng là: $11 - 8 = 3$ (giờ)

Quãng đường AB là 30km do đó cứ 1 giờ khoảng cách của Hùng và Dũng bớt đi 10km. Vì vậy lúc 9 giờ Hùng còn cách Dũng là 20 km, lúc đó Ninh gặp Dũng nên Ninh cũng cách Hùng 20 km. Đến 9 giờ 24 phút, Ninh gặp Hùng do đó tổng vận tốc của Ninh và Hùng là:

$$20 : \frac{24}{60} = 50 \text{ (km/h)}$$

Do vận tốc của Ninh bằng $\frac{1}{4}$ vận tốc của Hùng nên vận tốc của Hùng là:

$$[50 : (1 + 4)] \cdot 4 = 40 \text{ (km/h)}$$

Từ đó suy ra quãng đường BC là: $40 \cdot 3 - 30 = 90 \text{ (km)}$

Bài 10: Ba máy bơm cùng bơm vào một bể lớn. Nếu dùng cả máy I và máy III thì sau 1 giờ 20 phút bể sẽ đầy, dùng cả máy II và III thì sau 1 giờ 30 phút bể sẽ đầy, dùng cả máy I và máy III thì sau 2 giờ 24 phút bể sẽ đầy. Hỏi nếu mỗi máy bơm được dùng một mình thì bể sẽ đầy trong bao lâu.

Trích đề HSG huyện Ngọc Lặc năm 2018-2019

Lời giải

Ta quy ước dung tích bể là đơn vị

$$1h20' = \frac{4}{3}h; 1h30' = \frac{3}{2}h; 2h24' = \frac{12}{5}h$$

Như vậy, trong 1 giờ.

$$\text{Vòi } I \text{ và } II \text{ chảy được } \frac{3}{4} \text{ bể}$$

$$\text{Vòi } II \text{ và } III \text{ chảy được } \frac{2}{3} \text{ bể}$$

$$\text{Vòi } I \text{ và } III \text{ chảy được: } \frac{5}{12} \text{ bể}$$

$$\text{Suy ra trong 1 giờ cả 3 vòi chảy được: } \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{5}{12} \right) : 2 = \frac{11}{12} \text{ (bể)}$$

Trong 1 giờ,

$$\text{Vòi } III \text{ chảy được: } \frac{11}{12} - \frac{3}{4} = \frac{1}{6} \text{ bể}$$

$$\text{Vòi } I \text{ chảy được: } \frac{11}{12} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4} \text{ bể}$$

$$\text{Vòi } II \text{ chảy được: } \frac{11}{12} - \frac{5}{12} = \frac{1}{2} \text{ bể}$$

Vậy, vòi I chảy 1 mình 4 h sẽ đầy bể

Vòi II chảy một mình 2 h sẽ đầy bể

Vòi III chảy 1 mình 6 h sẽ đầy bể.

Bài 11: Người ta thả một số bèo vào ao thì sau 6 ngày bèo phủ kín mặt ao. Biết rằng cứ sau một ngày

thì diện tích bèo tăng lên gấp đôi. Hỏi:

- a) Sau mấy ngày bèo phủ kín nửa ao?
b) Sau ngày thứ nhất bèo phủ được mấy phần ao?

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

a) Vì cứ sau một ngày thì diện tích bèo tăng lên gấp đôi mà sau 6 ngày bèo phủ kín mặt ao. Suy ra sau ngày thứ 5 bèo phủ kín nửa ao.

b)

$$\text{Sau ngày thứ 4 bèo phủ kín } \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4} \text{ (ao)}$$

$$\text{Sau ngày thứ 3 bèo phủ kín } \frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{8} \text{ (ao)}$$

$$\text{Sau ngày thứ 2 bèo phủ kín } \frac{1}{8} : 2 = \frac{1}{16} \text{ (ao)}$$

$$\text{Sau ngày thứ nhất bèo phủ kín } \frac{1}{16} : 2 = \frac{1}{32} \text{ (ao)}$$

$$\text{Vậy sau ngày thứ nhất bèo phủ kín được } \frac{1}{32} \text{ (ao)}$$

Bài 12: Cho $E = \frac{1}{1.101} + \frac{1}{2.102} + \frac{1}{3.103} + \dots + \frac{1}{10.110}$

và $F = \frac{1}{1.11} + \frac{1}{2.12} + \frac{1}{3.13} + \dots + \frac{1}{100.110}$. Tính tỉ số $\frac{E}{F}$

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Lời giải

Ta có:

$$E = \frac{1}{1.101} + \frac{1}{2.102} + \dots + \frac{1}{10.110}$$

$$E = \frac{1}{100} \cdot \left(\frac{100}{1.10} + \frac{100}{2.102} + \dots + \frac{100}{10.110} \right)$$

$$= \frac{1}{100} \cdot \left(1 - \frac{1}{101} + \frac{1}{2} - \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{10} - \frac{1}{110} \right)$$

$$= \frac{1}{100} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10} \right) - \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{110} \right) \right]$$

$$F = \frac{1}{1.11} + \frac{1}{2.12} + \dots + \frac{1}{100.110}$$

$$F = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{10}{1.11} + \frac{10}{2.12} + \dots + \frac{10}{100.110} \right)$$

$$F = \frac{1}{10} \cdot \left(1 - \frac{1}{11} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{110} \right)$$

$$F = \frac{1}{10} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} \right) - \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{110} \right) \right]$$

$$F = \frac{1}{10} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10} \right) - \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{110} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{E}{F} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{10}} = \frac{1}{10}$$

Bài 13: Ba máy bơm cùng bơm vào một bể lớn, nếu dùng cả máy một và máy hai thì sau 1 giờ 20 phút bể sẽ đầy, dùng máy hai và máy ba thì sau 1 giờ 30 phút bể sẽ đầy còn nếu dùng máy một và máy ba thì bể sẽ đầy sau 2 giờ 24 phút. Hỏi nếu mỗi máy bơm được dùng một mình thì bể sẽ đầy sau bao lâu ?

Trích đề HSG trường Nguyễn Khuyến năm 20... - 20...

Lời giải

Máy 1 và máy 2 bơm 1 giờ 20 phút hay $\frac{4}{3}$ giờ đầy bể nên 1 giờ máy 1 và 2 bơm được $\frac{3}{4}$ bể

Máy 2 và máy 3 bơm 1 giờ 30 phút hay $\frac{3}{2}$ giờ đầy bể nên 1 giờ máy 2 và 3 bơm được $\frac{2}{3}$ bể

Máy 1 và máy 3 bơm 2 giờ 24 phút hay $\frac{12}{5}$ giờ đầy bể nên 1 giờ máy 1 và 3 bơm được $\frac{5}{12}$ bể.

$$\Rightarrow \text{Một giờ cả ba máy bơm được } \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{5}{12} \right) : 2 = \frac{11}{12} \text{ (bể)}$$

Một giờ:

Máy 3 bơm được: $\frac{11}{12} - \frac{3}{4} = \frac{1}{6}$ bể nên máy 3 bơm 1 mình 6 giờ đầy bể

Máy 1 bơm được: $\frac{11}{12} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$ bể nên máy 1 bơm 1 mình 4 giờ đầy bể

Máy 2 bơm được: $\frac{11}{12} - \frac{5}{12} = \frac{1}{2}$ bể nên máy 2 bơm 1 mình 2 giờ đầy bể

Bài 14: Bạn Nga đọc một cuốn sách trong 3 ngày. Ngày thứ nhất đọc được $\frac{1}{4}$ số trang của cuốn sách.

Ngày thứ hai đọc được $\frac{4}{5}$ số trang còn lại. Ngày thứ ba đọc 30 trang cuối cùng.

a) Tính số trang của quyển sách.

b) Quyển sách đó có giá là 80 000 đồng. Khi mua quyển sách, Nga được giảm giá 20%. Tính số tiền mà Nga phải trả cho cô bán hàng?

Trích đề HSG THCS Quỳnh Thiện năm 2022 - 2023

Lời giải

Ngày thứ hai đọc được: $\frac{4}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$ (quyển sách)

30 trang sách chiếm: $1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$ (quyển sách)

Quyển sách có số trang là: $30 : \frac{3}{20} = 200$ (trang)

Số tiền mà Nga phải trả cho cô bán hàng là: $(100\% - 20\%) \cdot 80000 = 64000$ (đồng)

Bài 15: Cho biểu thức : $A = \frac{2n+1}{n-3} + \frac{3n-5}{n-3} - \frac{4n-5}{n-3}$. Tìm giá trị của n để

- A là một phân số
- A là một số nguyên

Trích đề HSG huyện Đoàn Hùng năm 2018-2019

Lời giải

$$a) \frac{2n+1}{n-3} + \frac{3n-5}{n-3} - \frac{4n-5}{n-3} = \frac{2n+1+3n-5-4n+5}{n-3} = \frac{n+1}{n-3}$$

A là phân số khi $n \in \mathbb{Z}, n \neq 3$

$$b) A = \frac{n+1}{n-3} = \frac{n-3+4}{n-3} = 1 + \frac{4}{n-3}$$

A là số nguyên khi $n-3 \in \mathcal{U}(4) = \{1; 2; 4; -1; -2; -4\} \Rightarrow n \in \{4; 5; 7; 2; 1; -1\}$

Bài 16: Với giá trị nào của số tự nhiên a thì $\frac{8a+19}{4a+1}$ có giá trị nguyên

Trích đề HSG cấp huyện 2016-2017

Lời giải

$$N = \frac{8a+19}{4a+1} = \frac{8a+2+17}{4a+1} = 2 + \frac{17}{4a+1}$$

Để N nguyên thì $4a+1$ là ước số của 17

$$\Rightarrow a = 0, a = 4.$$

Bài 17: Cho hai biểu thức $M = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{37.38}$ và $N = \frac{1}{20.38} + \frac{1}{21.37} + \dots + \frac{1}{38.20}$.

Chứng minh rằng: $\frac{M}{N}$ là một số nguyên.

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\text{Ta có: } M = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{37} - \frac{1}{38}$$

$$M = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{37}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{38}\right)$$

$$M = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{38}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{19}\right)$$

$$M = \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{38}$$

$$\text{Ta có } N = \frac{1}{20.38} + \frac{1}{21.37} + \dots + \frac{1}{38.20}$$

$$58N = \frac{1}{20} + \frac{1}{38} + \frac{1}{21} + \frac{1}{37} + \dots + \frac{1}{38} + \frac{1}{20}$$

$$29N = \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{38}$$

$$\text{Suy ra } \frac{M}{N} = 29$$

Bài 18: Cho các số a, b, c khác 0 thỏa mãn $a+b+c = 2022$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2021}{2022}$

$$\text{Tính } M = \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c}$$

Trích đề Olipic huyện Hương Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\text{Ta có } M + 3 = \frac{b+c}{a} + 1 + \frac{a+c}{b} + 1 + \frac{a+b}{c} + 1$$

$$M + 3 = \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}$$

$$M + 3 = (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 2022 \cdot \frac{2021}{2022} = 2021$$

$$M = 2021 - 3 = 2018$$

Bài 19: Cho $B = \frac{n-3}{n+2}$ với $n \in \mathbb{Z}$

a) Tìm điều kiện của n để B là một phân số.

b) Tìm tất cả các số nguyên n để B có giá trị là một số nguyên.

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021 - 2022

Lời giải

a) Để B là một phân số thì $n+2 \neq 0$ suy ra $n \neq -2$

$$b) B = \frac{n-3}{n+2} = \frac{n+2-5}{n+2} = 1 - \frac{5}{n+2}$$

$$\Rightarrow n+2 \in \{-5; -1; 1; 5\}$$

$$\Rightarrow n \in \{-7; -3; -1; 3\}$$

B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

(copy đề bài ở các dạng trên để làm phiếu ôn tập cho HS)

Trắc nghiệm

Bài 1: Trung bình cộng của tử số và mẫu số của một phân số là 68 . Cộng thêm vào tử số của phân số đó 4 đơn vị thì được phân số mới bằng phân số $\frac{3}{2}$. Phân số lúc đầu là:

A. $\frac{84}{52}$.

B. $\frac{76}{60}$.

C. $\frac{75}{61}$.

D. $\frac{80}{56}$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Tự luận

Bài 1. Vào tháng 9 , giá bán một chiếc máy tính là 24000000 đồng. Đến tháng 10, cửa hàng tăng giá lên 20% . Đến tháng 11 , cửa hàng hạ giá của tháng 10 xuống 20% . Hỏi giá bán của chiếc máy tính đó vào tháng 9 và tháng 11 , tháng nào đắt hơn.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Bài 2: Hãng ô tô Vinfat có chính sách bán hàng theo hình thức trả góp hàng tháng như sau:

- Số tiền gốc mỗi tháng phải trả = tổng số khoản vay/kỳ hạn vay (tính theo tháng)

- Số tiền lãi hàng tháng phải trả = dư nợ thực tế \times lãi suất tháng

Biết rằng: Lãi suất tháng = lãi suất ngân hàng theo năm / 12 tháng.

Một khách hàng ký kết hợp đồng mua Ô tô vay trả góp 600 triệu đồng với kỳ hạn 5 năm, lãi suất ngân hàng là 6% / năm

a) Tính số tiền cả gốc và lãi mà khách hàng phải trả trong tháng đầu tiên, tháng thứ hai?

b) Tính tổng số tiền cả gốc và lãi mà khách hàng phải trả cho đến khi trả hết nợ?

Trích đề HSG huyện Kỳ Anh năm 2021 - 2022

Bài 3: Vào tháng 9 , giá bán một chiếc máy tính là 24000000 đồng. Đến tháng 10, cửa hàng tăng giá lên 20% . Đến tháng 11 , cửa hàng hạ giá của tháng 10 xuống 20% . Hỏi giá bán của chiếc máy tính đó vào tháng 9 và tháng 11 , tháng nào đắt hơn.

Trích đề HSG huyện Chí Linh năm 2021-2022

Bài 4: Tổng của hai số là 2015 , biết $\frac{6}{7}$ của $\frac{2}{3}$ số thứ nhất nhiều hơn $\frac{5}{6}$ của $\frac{4}{5}$ số thứ hai là 52 . Tìm mỗi số.

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2022 - 2023

Bài 5: Tìm 3 số có tổng bằng 210 , biết rằng $\frac{6}{7}$ số thứ nhất bằng $\frac{9}{11}$ số thứ 2 và $\frac{9}{11}$ số thứ hai bằng $\frac{2}{3}$ số thứ ba.

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2017 -2018

Bài 6: Tổng số trang của 8 quyển vở loại 1; 9 quyển vở loại 2 và 5 quyển vở loại 3 là 1980 trang. Số trang của một quyển vở loại 2 chỉ bằng $\frac{2}{3}$ số trang của 1 quyển vở loại 1. Số trang của 4 quyển vở loại 3 bằng số trang của 3 quyển vở loại 2. Tính số trang của mỗi quyển vở mỗi loại.

Trích đề HSG huyện Phù Ninh năm 2015 -2016

Bài 7: Tìm hai số biết tỉ số của chúng bằng 5:8 và tích của chúng bằng 360.

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014 -2015

Bài 8: Cùng một công việc nếu mỗi người làm riêng thì 3 người A, B, C hoàn thành công việc trong thời gian lần lượt là 6 giờ, 8 giờ, 12 giờ. Hai người B và C làm chung trong 2 giờ sau đó người C chuyển đi làm việc khác, người A cùng làm với người B tiếp tục công việc cho đến khi hoàn thành. Hỏi người A làm trong mấy giờ?

Trích đề HSG huyện Hoài Nhơn 2015-2016

Bài 9: Trên con đường đi qua 3 địa điểm A, B, C (B nằm giữa A và C), có hai người đi xe máy là Hùng và Dũng. Hùng xuất phát từ A , Dũng xuất phát từ B . Họ cùng khởi hành lúc 8 giờ để cùng đến C vào lúc 11 giờ cùng ngày. Ninh đi xe đạp từ C về phía A , gặp Dũng lúc 9 giờ và gặp Hùng lúc 9 giờ 24 phút. Biết quãng đường AB dài 30km, vận tốc của Ninh bằng $\frac{1}{4}$ vận tốc của Hùng. Tính quãng đường BC .

Trích đề HSG cấp Trường năm 2019-2020

Bài 10: Ba máy bơm cùng bơm vào một bể lớn. Nếu dùng cả máy I và máy III thì sau 1 giờ 20 phút bể sẽ đầy, dùng cả máy II và III thì sau 1 giờ 30 phút bể sẽ đầy, dùng cả máy I và máy III thì sau 2 giờ 24 phút bể sẽ đầy. Hỏi nếu mỗi máy bơm được dùng một mình thì bể sẽ đầy trong bao lâu.

Trích đề HSG huyện Ngọc Lặc năm 2018-2019

Bài 11: Người ta thả một số bèo vào ao thì sau 6 ngày bèo phủ kín mặt ao. Biết rằng cứ sau một ngày thì diện tích bèo tăng lên gấp đôi. Hỏi:

- Sau mấy ngày bèo phủ kín nửa ao?
- Sau ngày thứ nhất bèo phủ được mấy phần ao?

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Bài 12: Cho $E = \frac{1}{1.101} + \frac{1}{2.102} + \frac{1}{3.103} + \dots + \frac{1}{10.110}$

và $F = \frac{1}{1.11} + \frac{1}{2.12} + \frac{1}{3.13} + \dots + \frac{1}{100.110}$. Tính tỉ số $\frac{E}{F}$

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Bài 13: Ba máy bơm cùng bơm vào một bể lớn, nếu dùng cả máy một và máy hai thì sau 1 giờ 20 phút bể sẽ đầy, dùng máy hai và máy ba thì sau 1 giờ 30 phút bể sẽ đầy còn nếu dùng máy một và máy ba thì bể sẽ đầy sau 2 giờ 24 phút. Hỏi nếu mỗi máy bơm được dùng một mình thì bể sẽ đầy sau bao lâu ?

Trích đề HSG trường Nguyễn Khuyến năm 20... - 20...

Bài 14: Bạn Nga đọc một cuốn sách trong 3 ngày. Ngày thứ nhất đọc được $\frac{1}{4}$ số trang của cuốn sách.

Ngày thứ hai đọc được $\frac{4}{5}$ số trang còn lại. Ngày thứ ba đọc 30 trang cuối cùng.

- Tính số trang của quyển sách.

b) Quyền sách đó có giá là 80 000 đồng. Khi mua quyền sách, Nga được giảm giá 20%. Tính số tiền mà Nga phải trả cho cô bán hàng?

Trích đề HSG THCS Quỳnh Thiện năm 2022 - 2023

Bài 15: Cho biểu thức : $A = \frac{2n+1}{n-3} + \frac{3n-5}{n-3} - \frac{4n-5}{n-3}$. Tìm giá trị của n để

- c) A là một phân số
- d) A là một số nguyên

Trích đề HSG huyện Đoan Hùng năm 2018-2019

Bài 16: Với giá trị nào của số tự nhiên a thì $\frac{8a+19}{4a+1}$ có giá trị nguyên

Trích đề HSG cấp huyện 2016-2017

Bài 17: Cho hai biểu thức $M = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{37.38}$ và $N = \frac{1}{20.38} + \frac{1}{21.37} + \dots + \frac{1}{38.20}$.

Chứng minh rằng: $\frac{M}{N}$ là một số nguyên.

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021 - 2022

Bài 18: Cho các số a, b, c khác 0 thỏa mãn $a+b+c=2022$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2021}{2022}$

Tính $M = \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c}$

Trích đề Olympic huyện Hương Sơn năm 2021 -2022

Bài 19: Cho $B = \frac{n-3}{n+2}$ với $n \in Z$

- a) Tìm điều kiện của n để B là một phân số.
- b) Tìm tất cả các số nguyên n để B có giá trị là một số nguyên.

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021 - 2022

C. SỬU TÀM CÁC BÀI TRONG CÁC ĐỀ CỦA NHỮNG NĂM TRƯỚC ĐÓ

(Phần này lấy các câu từ những năm trước, trước năm 2020-2021, tối thiểu 10 bài)

Bài 1: Có ba thùng gạo. Lấy $\frac{1}{5}$ số gạo ở thùng A đổ vào thùng B, sau đó lấy $\frac{1}{3}$ số gạo có tất cả ở thùng B đổ vào thùng C thì số gạo ở mỗi thùng đều bằng 20kg. Hỏi lúc đầu mỗi thùng có bao nhiêu ki-lô-gam gạo?

Trích đề HSG trường THCS Quế Phú (Quế Sơn) năm 2018 - 2019

Lời giải

Sau khi đổ vào thùng B, số gạo còn lại ở thùng A (so với ban đầu) là: $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ (thùng A)

$\frac{4}{5}$ thùng A bằng 20 kg nên thùng A có: $20 : \frac{4}{5} = 25$ (kg)

Số gạo đã đổ từ A sang B: $25 \cdot \frac{1}{5} = 5$ (kg)

Sau khi đổ vào thùng C , số gạo còn lại ở thùng B (so với lúc chưa đổ qua C): $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}$ thùng B bằng 20 nên thùng B là: $20 : \frac{2}{3} = 30$ (kg)

Thùng B lúc đầu (chưa đổ từ A qua B): $30 - 5 = 25$ (kg)

Số gạo đã đổ từ B sang C : $30 \cdot \frac{1}{3} = 10$ (kg)

Số gạo ban đầu của thùng C : $20 - 10 = 10$ (kg).

Bài 2: Một người đi quãng đường AB dài 20km. Biết rằng 10km đầu người đó đi với vận tốc 20 km/h và 10km sau người đó đi với vận tốc 30 km/h. Hỏi vận tốc trung bình của người đó trên quãng đường AB là bao nhiêu?

Trích đề HSG huyện Vĩnh Tường (Vĩnh Phúc) năm 2019 - 2020

Lời giải

Thời gian người đó đi 10km đầu là $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ (h)

Thời gian người đó đi 10km sau là: $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ (h)

Tổng thời gian người đó đi quãng đường AB là: $20 : \frac{5}{6} = 24$ (km/h).

Bài 3: Xe máy thứ nhất đi từ A đến B mất 4 giờ, xe thứ hai đi từ B đến A mất 3 giờ. Nếu hai xe khởi hành cùng một lúc từ A và B thì sau 1,5 giờ hai xe sẽ còn cách nhau 15km (hai xe chưa gặp nhau). Tính quãng đường AB .

Trích đề HSG huyện Phúc Thọ (Hà Nội) năm 2018 - 2019

Lời giải

Mỗi giờ xe thứ nhất đi được là $1 : 4 = \frac{1}{4}$ (quãng đường AB)

Mỗi giờ xe thứ hai đi được là $1 : 3 = \frac{1}{3}$ (quãng đường AB)

Sau 1,5 giờ cả hai xe đi được $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) \cdot 1,5 = \frac{7}{8}$ (quãng đường AB)

Phần số chỉ 15km là $1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$ (quãng đường AB)

Quãng đường AB là $15 : \frac{1}{8} = 120$ (km)

Bài 4: Một người đi từ A đến B với vận tốc 24 km/h. Một lát sau một người khác cũng đi từ A đến B với vận tốc 40 km/h. Theo dự định hai người sẽ gặp nhau tại B nhưng khi đi được nửa quãng đường AB thì người thứ hai đi tăng vận tốc lên thành 48 km/h. Hỏi hai người sẽ gặp nhau tại địa điểm cách B bao nhiêu km? Biết rằng quãng đường AB dài 160 km.

Trích đề HSG huyện Nga Sơn (Thanh Hoá) năm 2018 - 2019

Lời giải

Hiệu vận tốc của hai người là $40 - 24 = 16$ (km/h)

Thời gian người thứ nhất đi hết quãng đường AB là: $160 : 24 = \frac{20}{3}$ h = 6h 40'

Thời gian người thứ hai đi hết quãng đường AB theo dự kiến: $160 : 40 = 4$ h

Thời gian người thứ nhất đi trước người thứ hai là: $6\text{h}40' - 4\text{h} - 2\text{h}40' = \frac{8}{3}$ h

Quãng đường người thứ nhất đi trước là: $\frac{8}{3} \cdot 24 = 64$ (km)

Khoảng cách giữa hai người khi người thứ hai tăng vận tốc: $64 - 16 \cdot 2 = 32$ (km)

Thời gian từ khi người thứ hai tăng vận tốc đến lúc gặp nhau là: $32 : (48 - 24) = \frac{4}{3}$ h

Đến lúc gặp nhau người thứ hai đã đi quãng đường là: $80 + 48 \cdot \frac{4}{3} = 144$ (km)

Chỗ gặp nhau cách B là: $160 - 144 = 16$ (km)

Bài 5: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết: $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2009}$ và $B = \frac{2008}{1} + \frac{2007}{2} + \frac{2006}{3} + \dots + \frac{1}{2008}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \left(1 + \frac{2007}{2}\right) + \left(1 + \frac{2006}{3}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2008}\right) + 1 = \frac{2009}{2} + \frac{2009}{3} + \frac{2009}{4} + \dots + \frac{2009}{2008} + \frac{2009}{2009} \\ &= 2009 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2008} + \frac{1}{2009}\right) = 2009 \cdot A \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \frac{A}{B} = \frac{A}{2009A} = \frac{1}{2009}.$$

Bài 6: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết: $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}$ và $B = \frac{1}{199} + \frac{2}{198} + \frac{3}{197} + \dots + \frac{198}{2} + \frac{199}{1}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \left(1 + \frac{1}{199}\right) + \left(1 + \frac{2}{198}\right) + \left(1 + \frac{3}{197}\right) + \dots + \left(1 + \frac{198}{2}\right) + 1 = \frac{200}{199} + \frac{200}{198} + \dots + \frac{200}{2} + \frac{200}{200} \\ &= 200 \left(\frac{1}{199} + \frac{1}{198} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{200}\right) = 200 \cdot A \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \frac{A}{B} = \frac{A}{200A} = \frac{1}{200}.$$

Bài 7: Tính giá trị $\frac{A}{B}$ biết:

$$A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{101.102} \quad \text{và} \quad B = \frac{1}{52.102} + \frac{1}{53.101} + \frac{1}{54.100} + \dots + \frac{1}{102.52} + \frac{2}{77.154}.$$

Lời giải

$$A = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \frac{1}{101} - \frac{1}{102}$$

$$A = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{101} - \frac{1}{102}\right)$$

$$A = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{101} + \frac{1}{102}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{102}\right)$$

$$A = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{102}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{51}\right)$$

$$A = \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{101} + \frac{1}{102}$$

$$A = \left(\frac{1}{52} + \frac{1}{102}\right) + \left(\frac{1}{53} + \frac{1}{101}\right) + \dots + \left(\frac{1}{76} + \frac{1}{78}\right) + \frac{1}{77}$$

$$A = \frac{154}{52 \cdot 102} + \frac{154}{53 \cdot 101} + \dots + \frac{154}{76 \cdot 78} + \frac{154}{77 \cdot 154}$$

$$A = 154 \left(\frac{1}{52 \cdot 102} + \frac{1}{53 \cdot 101} + \dots + \frac{1}{76 \cdot 78} + \frac{1}{77 \cdot 154} \right)$$

$$\text{và } B = \left(\frac{1}{52 \cdot 102} + \frac{1}{102 \cdot 52}\right) + \left(\frac{1}{53 \cdot 101} + \frac{1}{101 \cdot 53}\right) + \dots + \left(\frac{1}{76 \cdot 78} + \frac{1}{78 \cdot 76}\right) + \frac{2}{77 \cdot 154}$$

$$B = \frac{2}{52 \cdot 102} + \frac{2}{53 \cdot 101} + \dots + \frac{2}{76 \cdot 78} + \frac{2}{77 \cdot 154}$$

$$B = 2 \left(\frac{1}{52 \cdot 102} + \frac{1}{53 \cdot 101} + \dots + \frac{1}{76 \cdot 78} + \frac{1}{77 \cdot 154} \right)$$

$$\text{Suy ra } \frac{A}{B} = \frac{154}{2} = 77.$$

Bài 8: Thực hiện phép tính $A = \frac{\frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021}}{\frac{2021}{2019} + \frac{2022}{2020} - \frac{2023}{2021}} - \frac{\frac{2}{2021} + \frac{2}{2022} - \frac{2}{2023}}{\frac{2021}{2021} + \frac{2022}{2022} - \frac{2023}{2023}}$

Lời giải

$$A = \frac{\frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021}}{5 \cdot \left(\frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021}\right)} - \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2021} + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}\right)}{3 \cdot \left(\frac{1}{2021} + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}\right)} = \frac{1}{5} - \frac{2}{3} = \frac{-7}{15}.$$

Bài 9: Tính $A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2021}}{\frac{2020}{1} + \frac{2019}{2} + \frac{2018}{3} + \dots + \frac{1}{2020}}$.

Lời giải

Nhận thấy mỗi phân số ở mẫu, tổng tử và mẫu đều bằng nhau và bằng 2021. Nên ta tách 2020 thành 2020 số 1 rồi ghép các số 1 vào các phân số còn lại.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \frac{2020}{1} + \frac{2019}{2} + \frac{2018}{3} + \dots + \frac{1}{2020} \\ &= \left(1 + \frac{2019}{2}\right) + \left(1 + \frac{2018}{3}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2020}\right) + 1. \end{aligned}$$

$$= \frac{2021}{2} + \frac{2021}{3} + \dots + \frac{2021}{2020} + \frac{2021}{2021}$$

$$= 2021 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2021} \right).$$

$$\text{Khi đó } A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2021}}{2021 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2021} \right)} = \frac{1}{2021}.$$

Bài 10: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết: $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2009}$ và $B = \frac{2008}{1} + \frac{2007}{2} + \frac{2006}{3} + \dots + \frac{1}{2008}$.

Lời giải

$$B = \left(1 + \frac{2007}{2} \right) + \left(1 + \frac{2006}{3} \right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2008} \right) + 1$$

$$= \frac{2009}{2} + \frac{2009}{3} + \frac{2009}{4} + \dots + \frac{2009}{2008} + \frac{2009}{2009}.$$

$$= 2009 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2008} + \frac{1}{2009} \right).$$

$$\text{Khi đó } \frac{A}{B} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2009}}{2009 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2009} \right)} = \frac{1}{2009}$$

Bài 11: Cho phân số $\frac{a}{b}$ ($a < b$) cùng thêm m đơn vị vào tử và mẫu thì phân số mới lớn hơn hay bé hơn

$\frac{a}{b}$?

Trích đề HSG cấp trường năm 2017-2018

Lời giải

Theo bài toán cho $a < b$ nên $am < bm$.

Do đó: $ab + am < ab + bm$ hay $a(b + m) < b(a + m)$

Vậy $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$.

Bài 12: Trên con đường đi qua 3 địa điểm A, B, C (B nằm giữa A và C), có hai người đi xe máy là Hùng và Dũng. Hùng xuất phát từ A , Dũng xuất phát từ B . Họ cùng khởi hành lúc 8 giờ để cùng đến C vào lúc 11 giờ cùng ngày. Ninh đi xe đạp từ C về phía A , gặp Dũng lúc 9 giờ và gặp Hùng lúc 9 giờ 24 phút. Biết quãng đường AB dài 30km, vận tốc của Ninh bằng $\frac{1}{4}$ vận tốc của Hùng. Tính quãng đường BC .

Trích đề HSG cấp trường năm 2019-2020

Lời giải

Thời gian đi từ A đến C của Hùng là: $11 - 8 = 3$ (giờ)

Thời gian đi từ B đến C của Dũng là: $11 - 8 = 3$ (giờ)

Quãng đường AB là 30km, do đó cứ 1 giờ khoảng cách của Hùng và Dũng bớt đi 10km.

Vì vậy lúc 9 giờ Hùng còn cách Dũng là 20 km, lúc đó Ninh gặp Dũng nên Ninh cũng cách Hùng 20 km.

Đến 9 giờ 24 phút, Ninh gặp Hùng do đó tổng vận tốc của Ninh và Hùng là:

$$20 : \frac{24}{60} = 50 \text{ (km/h)}$$

Do vận tốc của Ninh bằng $\frac{1}{4}$ vận tốc của Hùng nên vận tốc của Hùng là:

$$[50 : (1 + 4)] \cdot 4 = 40 \text{ (km/h)}$$

Suy ra quãng đường BC là: $40 \cdot 3 - 30 = 90$ (km).

Bài 13: Tích của hai phân số là $\frac{8}{15}$. Thêm 4 đơn vị vào phân số thứ nhất thì tích mới là $\frac{56}{15}$. Tìm hai phân số đó.

Trích đề HSG cấp trường năm 2019-2020

Lời giải

Tích của hai phân số là $\frac{8}{15}$.

Thêm 4 đơn vị vào phân số thứ nhất thì tích mới là $\frac{56}{15} - \frac{8}{15} = \frac{48}{15}$ đây chính là 4 lần phân số thứ hai.

Suy ra phân số thứ hai là: $\frac{48}{15} : 4 = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

Do đó: phân số thứ nhất là: $\frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$.

Bài 14: Tổng số trang của 8 quyển vở loại 1, 9 quyển vở loại 2 và 5 quyển vở loại 3 là 1980 trang.

Số trang của một quyển vở loại 2 chỉ bằng $\frac{2}{3}$ số trang của 1 quyển vở loại 1. Số trang của 4 quyển vở loại 3 bằng số trang của 3 quyển vở loại 2. Tính số trang của mỗi quyển vở mỗi loại.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Vì số trang của mỗi quyển vở loại 2 bằng $\frac{2}{3}$ số trang của 1 quyển vở loại 1.

Nên số trang của 3 quyển vở loại 2 bằng số trang của 2 quyển loại 1.

Mà số trang của 4 quyển vở loại 3 bằng 3 quyển vở loại 2.

Nên số trang của 2 quyển vở loại 1 bằng số trang 4 quyển vở loại 3.

Do đó số trang 8 quyển vở loại 1: $4 \cdot 8 : 2 = 16$ (quyển loại 3)

Số trang của 9 quyển loại 2 bằng: $9 \cdot 4 : 3 = 12$ (quyển loại 3)

Vậy 1980 trang chính là số trang của $16 + 12 + 5 = 33$ (quyển loại 3)

Suy ra: Số trang 1 quyển vở loại 3: $1980 : 33 = 60$ (trang)

Số trang 1 quyển vở loại 2: $\frac{60.4}{3} = 80$ (trang).

Số trang 1 quyển vở loại 1: $\frac{80.3}{2} = 120$ (trang).

Bài 15: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết

$$A = \frac{1}{1.101} + \frac{1}{2.102} + \frac{1}{3.103} + \dots + \frac{1}{10.110} \quad \text{và} \quad B = \frac{1}{1.11} + \frac{1}{2.12} + \frac{1}{3.13} + \dots + \frac{1}{100.110}.$$

Lời giải

$$100.A = \frac{100}{1.101} + \frac{100}{2.102} + \frac{100}{3.103} + \dots + \frac{100}{10.110}$$

$$100.A = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{101}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{102}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{103}\right) + \dots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{110}\right)$$

$$100.A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10}\right) - \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{110}\right)$$

Và

$$10.B = \frac{10}{1.11} + \frac{10}{2.12} + \frac{10}{3.13} + \dots + \frac{10}{100.110}$$

$$10.B = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{13}\right) + \dots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{110}\right)$$

$$10.B = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}\right) - \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{110}\right)$$

$$10.B = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10}\right) - \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{110}\right)$$

Suy ra: $\frac{A}{B} = \frac{1}{10}$.

Bài 16: Cho $A = \frac{34}{7.13} + \frac{51}{13.22} + \frac{85}{22.37} + \frac{68}{37.49}$ và $B = \frac{39}{7.16} + \frac{65}{16.31} + \frac{52}{31.43} + \frac{26}{43.49}$. Tính tỉ số $\frac{A}{B}$

Lời giải

$$A = 17 \cdot \left(\frac{2}{7.13} + \frac{3}{13.22} + \frac{5}{22.37} + \frac{4}{37.49}\right)$$

$$3.A = 17 \cdot \left(\frac{6}{7.13} + \frac{9}{13.22} + \frac{15}{22.37} + \frac{12}{37.49}\right)$$

$$3.A = 17 \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{22} + \frac{1}{22} - \frac{1}{37} + \frac{1}{37} - \frac{1}{49}\right)$$

$$3.A = 17 \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{49}\right).$$

$$B = 13 \cdot \left(\frac{3}{7.16} + \frac{5}{16.31} + \frac{4}{31.43} + \frac{2}{43.49}\right)$$

$$3.B = 13 \cdot \left(\frac{9}{7.16} + \frac{15}{16.31} + \frac{12}{31.43} + \frac{6}{43.49}\right)$$

$$3.B = 13 \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{31} + \frac{1}{31} - \frac{1}{43} + \frac{1}{43} - \frac{1}{49}\right)$$

$$3.B = 13 \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{49} \right).$$

$$\text{Vậy } \frac{3.A}{3.B} = \frac{17}{13} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{17}{13}.$$

$$\text{Bài 17: Tính } A = \frac{101+100+99+\dots+3+2+1}{101-100+99-\dots+3-2+1}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } 1+2+3+\dots+100+101 = \frac{(101+1) \cdot 101}{2} = 51 \cdot 101$$

$$\begin{aligned} \text{Và } 101-100+99-\dots+3-2+1 \\ = (101-100) + (99-98) + \dots + (3-2) + 1 \\ = 1+1+\dots+1+1 = 51 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{51 \cdot 101}{51} = 101.$$

$$\text{Bài 81: Tính } A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}}{\frac{99}{1} + \frac{98}{2} + \frac{97}{3} + \dots + \frac{1}{99}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{99}{1} + \frac{98}{2} + \frac{97}{3} + \dots + \frac{1}{99} \\ = \left(1 + \frac{98}{2} \right) + \left(1 + \frac{97}{3} \right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{99} \right) + 1 \\ = \frac{100}{2} + \frac{100}{3} + \dots + \frac{100}{99} + \frac{100}{100} \\ = 100 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } A = \frac{1}{100}.$$

$$\text{Bài 19: Tính tỉ số } \frac{A}{B} \text{ biết } A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200} \text{ và } B = \frac{1}{199} + \frac{2}{198} + \frac{3}{197} + \dots + \frac{198}{2} + \frac{199}{1}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \left(1 + \frac{1}{199} \right) + \left(1 + \frac{2}{198} \right) + \left(1 + \frac{3}{197} \right) + \dots + \left(1 + \frac{198}{2} \right) + 1. \\ &= \frac{200}{199} + \frac{200}{198} + \dots + \frac{200}{2} + \frac{200}{200} = 200 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } \frac{A}{B} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}}{200 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200} \right)} = \frac{1}{200}.$$

$$A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}}{100 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} \right)} = \frac{1}{100}.$$

$$\text{Bài 20: Tính tỉ số } \frac{A}{B} \text{ biết } A = \frac{1}{2012} + \frac{2}{2011} + \dots + \frac{2011}{2} + \frac{2011}{1} \text{ và } B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2013}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{1}{2012} + 1 \right) + \left(\frac{2}{2011} + 1 \right) + \dots + \left(\frac{2011}{2} + 1 \right) + 1 \\
 &= \frac{2013}{2012} + \frac{2013}{2011} + \dots + \frac{2013}{2} + \frac{2013}{2013} \\
 &= 2013 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2013} \right).
 \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } \frac{A}{B} = \frac{2013 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2013} \right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2013}} = 2013.$$

Bài 21: Cho $P = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022}$ và $Q = \frac{1}{1012} + \frac{1}{1013} + \frac{1}{1014} + \dots + \frac{1}{2021} + \frac{1}{2022}$.

Tính tỉ số $\frac{P}{Q}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 P &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2021} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2022} \right) \\
 P &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} \right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2022} \right) \\
 P &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1011} \right) \\
 P &= \frac{1}{1012} + \frac{1}{1013} + \frac{1}{1014} + \dots + \frac{1}{2022}
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{P}{Q} = 1.$$

Bài 22: Trong một trường học số học sinh nữ bằng $\frac{6}{5}$ số học sinh nam.

- Tính xem số học sinh nữ bằng mấy phần số học sinh toàn trường.
- Nếu số học sinh toàn trường là 1210 em thì trường đó có bao nhiêu học sinh nam, bao nhiêu học sinh nữ.

Lời giải:

a) Theo đề bài trong trường cứ 5 phần học sinh nam thì có 6 phần học sinh nữ. Như vậy nếu học sinh toàn trường là 11 phần thì số học sinh nữ chiếm 6 phần, nên số học sinh nữ bằng $\frac{6}{11}$ số học sinh toàn trường.

b) Nếu số học sinh toàn trường là 1210 em thì

$$\text{Số học sinh nữ là: } 1210 \cdot \frac{6}{11} = 660 \text{ (em)}$$

$$\text{Số học sinh nam là: } 1210 - 660 = 550 \text{ (em)}.$$

Bài 23: Ba lớp 6 có 102 học sinh. Số học sinh lớp A bằng $\frac{8}{9}$ số học sinh lớp B, số học sinh lớp C

bằng $\frac{17}{16}$ số học sinh lớp A. Hỏi mỗi lớp có bao nhiêu học sinh?

Lời giải:

Số học sinh lớp B bằng $\frac{9}{8}$ số học sinh lớp A (hay bằng $\frac{18}{16}$).

Số học sinh lớp C bằng $\frac{17}{16}$ số học sinh lớp A.

Tổng số phần của 3 lớp là: $16+18+17=51$

Số học sinh lớp A là: $(102:51).16=32$ (học sinh)

Số học sinh lớp B là: $(102:51).18=36$ (học sinh)

Số học sinh lớp C là: $(102:51).17=34$ (học sinh).

Bài 24: Ba tổ công nhân trồng được tất cả 286 cây ở công viên. Số cây tổ 1 trồng được bằng $\frac{9}{10}$ số cây tổ 2 và số cây tổ 3 trồng được bằng $\frac{24}{25}$ số cây tổ 2. Hỏi mỗi tổ trồng được bao nhiêu cây?

Lời giải:

Số cây tổ 1 bằng $\frac{9}{10}$ số cây tổ 2 (hay bằng $\frac{45}{50}$).

Số cây tổ 3 bằng $\frac{24}{25}$ số cây tổ 2 (hay bằng $\frac{48}{50}$).

Như vậy nếu số cây tổ 2 là 50 phần thì số cây tổ 1 là 45 phần, số cây tổ 3 là 48 phần.

Tổng số phần của 3 tổ là: $50+45+48=143$

Số cây tổ 1 trồng là: $(286:143).45=90$ (cây).

Số cây tổ 2 trồng là: $(286:143).50=100$ (cây).

Số cây tổ 3 trồng là: $(286:143).48=96$ (cây).

Bài 25: Mẹ hơn con 24 tuổi. Cách đây 4 năm tuổi con bằng $\frac{1}{4}$ tuổi mẹ. Hỏi hiện nay mỗi người bao nhiêu tuổi?

Lời giải:

Hiệu số tuổi của hai mẹ con không thay đổi theo thời gian nên cách đây 4 năm mẹ vẫn hơn con 24 tuổi. Ta có sơ đồ khi đó:

Tuổi con: |-----|
 Tuổi mẹ: |-----|-----|-----|-----|

Theo sơ đồ tuổi mẹ cách đây 4 năm là: $24:(4-1).4=32$ (tuổi)

Vì mỗi năm mỗi người tăng lên 1 tuổi nên hiện nay tuổi mẹ là:

$32+4.1=36$ (tuổi)

Tuổi con hiện nay là: $36-24=12$ (tuổi).

Bài 26: Tổng số trang của 8 quyển vở loại 1 ; 9 quyển vở loại 2 và 5 quyển vở loại 3 là 1980 trang. Số trang của một quyển vở loại 2 chỉ bằng $\frac{2}{3}$ số trang của 1 quyển vở loại 1. Số trang của 4 quyển vở loại 3 bằng số trang của 3 quyển vở loại 2. Tính số trang của mỗi quyển vở mỗi loại.

Lời giải:

Vì số trang của mỗi quyển vở loại 2 bằng $\frac{2}{3}$ số trang của 1 quyển loại 1. Nên số trang của 3 quyển loại 2 bằng số trang của 2 quyển loại 1

Mà số trang của 4 quyển loại 3 bằng 3 quyển loại 2.

Nên số trang của 2 quyển loại 1 bằng số trang của 4 quyển loại 3

Do đó số trang của 8 quyển loại 1 là $4.8:2=16$ (quyển loại 3)

Số trang của 9 quyển loại 2 là $9.4:3=12$ (quyển loại 3)

Vậy 1980 chính là số trang của $16+12+15=33$ (quyển loại 3)

Suy ra: Số trang 1 quyển vở loại 3 là $1980:33=60$ (trang)

Số trang 1 quyền vở loại 2 là $\frac{60.4}{3} = 80$ (trang)

Số trang 1 quyền vở loại 1 là $\frac{80.3}{2} = 120$ (trang).

Bài 27: Bạn Nam hỏi tuổi của bố. Bố bạn Nam trả lời: “Nếu bố sống đến 100 tuổi thì $\frac{6}{7}$ của $\frac{7}{10}$ số tuổi của bố sẽ lớn hơn $\frac{2}{5}$ của $\frac{7}{8}$ thời gian bố phải sống là 3 năm”. Hỏi bố của bạn Nam bao nhiêu tuổi?

Lời giải:

Ta có: $\frac{6}{7}$ của $\frac{7}{10}$ là $\frac{6}{7} \cdot \frac{7}{10} = \frac{3}{5}$

$\frac{2}{5}$ của $\frac{7}{8}$ là $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{20}$

Gọi số tuổi bố của bạn Nam là x ($x \in \mathbb{N}^*$)

Khi đó thời gian bố phải sống là $100 - x$ ($x < 100$)

Theo bài ra ta có:

$$\frac{3}{5}x = \frac{7}{20}(100 - x) + 3$$

$$12x = 700 - 7x + 60$$

$$19x = 760$$

$$x = 40 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy bố của bạn Nam 40 tuổi.

Bài 28: Lớp 6A có số học sinh Giỏi và Khá chiếm $\frac{7}{12}$ số học sinh cả lớp. Số học sinh Giỏi và Trung

bình chiếm $\frac{5}{8}$ số học sinh cả lớp. Số học sinh Khá và Trung bình có 34 bạn, số học sinh giỏi hơn số học sinh Yếu là 10 bạn, lớp không có học sinh kém. Hỏi lớp 6A có bao nhiêu bạn học sinh Giỏi? bao nhiêu học sinh khá? bao nhiêu học sinh Trung bình?

Lời giải:

Phần số chỉ số học sinh giỏi hơn yếu là: $\left(\frac{7}{12} + \frac{5}{8}\right) - 1 = \frac{5}{24}$ (học sinh cả lớp)

Số học sinh cả lớp là: $10 \cdot \frac{24}{5} = 48$ (học sinh)

Số học sinh giỏi và yếu là: $48 - 34 = 14$ (học sinh)

Số học sinh giỏi là: $(14 + 10) : 2 = 12$ (học sinh)

Số học sinh yếu là: $12 - 10 = 2$ (học sinh)

Số học sinh giỏi và trung bình là: $48 \cdot \frac{5}{8} = 30$ (học sinh)

Số học sinh trung bình là: $30 - 12 = 18$ (học sinh)

Số học sinh khá là: $48 - (18 + 2 + 14) = 16$ (học sinh).

Bài 29: Trong một buổi đi tham quan, số nữ đăng ký tham gia bằng $\frac{1}{4}$ số nam. Nhưng sau đó 1 bạn

nữ xin nghỉ, 1 bạn nam xin đi thêm nên số nữ đi tham quan bằng $\frac{1}{5}$ số nam. Tính số học sinh nữ và học sinh nam đã đi tham quan.

Lời giải:

Tổng số học sinh nam và nữ dự định đi tham quan và đã đi tham quan là như nhau nên ta lấy làm đơn

vì.

Số học sinh nữ đăng ký đi tham quan bằng $\frac{1}{4}$ số nam nên bằng $\frac{1}{5}$ tổng số học sinh.

Số học sinh nữ đã đi tham quan bằng $\frac{1}{5}$ số nam đã đi tham quan nên bằng $\frac{1}{6}$ tổng số học sinh.

Số nữ dự định đi nhiều hơn số nữ đã đi là: $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$ tổng số học sinh.

Tổng số học sinh là: $1 : \frac{1}{30} = 30$ (học sinh)

Số học sinh nữ đã đi tham quan: $30 \cdot \frac{1}{6} = 5$ (học sinh)

Số học sinh nam đã đi tham quan: $30 - 25 = 5$ (học sinh).

Bài 30: Số sách ở ngăn A bằng $\frac{2}{3}$ số sách ở ngăn B. Nếu chuyển 3 quyển từ ngăn A sang ngăn B thì số sách ở ngăn A bằng $\frac{3}{7}$ số sách ở ngăn B. Tìm số sách ở mỗi ngăn.

Lời giải:

Số sách ở ngăn A bằng $\frac{2}{3}$ số sách ở ngăn B thì số sách ở ngăn A bằng $\frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$ số sách cả 2 ngăn.

Sau khi chuyển 3 quyển từ ngăn A sang ngăn B thì số sách ngăn A bằng $\frac{3}{7}$ số sách ở ngăn B hay bằng $\frac{3}{3+7} = \frac{3}{10}$ số sách cả hai ngăn.

Vì số sách ngăn A ban đầu hơn số sách ở ngăn A sau khi chuyển là 3 quyển. Nên ta có phân số chỉ 3 quyển là: $\frac{2}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$

Số sách cả hai ngăn là: $3 : \frac{1}{10} = 30$ (quyển)

Số sách ở ngăn A là: $30 \cdot \frac{2}{5} = 12$ (quyển)

Số sách ngăn B là: $30 - 12 = 18$ (quyển).

Bài 31: Một lớp học có số học sinh nữ bằng $\frac{5}{3}$ số học sinh nam. Nếu 10 học sinh nam chưa vào lớp thì số học sinh nữ gấp 7 lần số học sinh nam. Tìm số học sinh nam và nữ của lớp đó.

Lời giải:

Số học sinh nữ bằng $\frac{5}{3}$ số học sinh nam, nên số học sinh nam bằng $\frac{3}{8}$ số học sinh cả lớp.

Khi 10 học sinh nam chưa vào lớp thì số học sinh nam bằng $\frac{1}{7}$ số học sinh nữ, nên số học sinh nam bằng $\frac{1}{8}$ số học sinh cả lớp.

Vậy 10 học sinh biểu thị $\frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ học sinh cả lớp.

Số học sinh cả lớp là: $10 : \frac{1}{4} = 40$ (học sinh).

Số học sinh nam là: $40 \cdot \frac{3}{8} = 15$ (học sinh).

Số học sinh nữ là: $40 - 15 = 25$ (học sinh).

Bài 32: Một bà đi chợ bán trứng, lần đầu bà bán được $\frac{2}{5}$ số trứng, lần thứ hai bà bán được $\frac{2}{3}$ số trứng còn lại, cuối cùng còn lại 10 quả. Hỏi số trứng ban đầu bà đem đi bán là bao nhiêu quả?

Lời giải

Số trứng còn lại sau lần bán thứ nhất:

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \text{ (số trứng ban đầu)}$$

Số trứng bán được ở lần bán thứ hai:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5} \text{ (số trứng ban đầu)}$$

10 quả trứng ứng với số phần:

$$1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5} \right) = \frac{1}{5} \text{ (số trứng ban đầu)}$$

Vậy ban đầu có:

$$10 : \frac{1}{5} = 50 \text{ (quả trứng).}$$

Đáp số: 50 quả trứng

Bài 33: Ban đầu trong thư viện có số sách khoa học tự nhiên bằng $\frac{4}{5}$ số sách khoa học xã hội, vì thư viện mới cho mượn 40 quyển sách khoa học tự nhiên nên số sách khoa học tự nhiên bằng $\frac{4}{15}$ số sách khoa học xã hội. Hỏi ban đầu thư viện có bao nhiêu quyển sách mỗi loại.

Lời giải

40 quyển sách khoa học tự nhiên bằng:

$$\frac{4}{5} - \frac{4}{15} = \frac{8}{15} \text{ (số sách KHXH)}$$

Số sách KHXH là:

$$40 : \frac{8}{15} = 75 \text{ (quyển)}$$

Số sách KHTN ban đầu là:

$$75 \cdot \frac{4}{5} = 60 \text{ (quyển)}$$

Đáp số: KHTN: 60 quyển; KHXH: 75 quyển

Bài 34: Hiện nay tuổi cháu bằng $\frac{5}{14}$ tuổi bà, cách đây 10 năm tuổi bà gấp 4 lần tuổi cháu. Tính tuổi bà và tuổi cháu hiện nay.

Lời giải

Chú ý: hiệu số tuổi của bà và cháu không đổi.

Hiện nay tuổi cháu bằng $\frac{5}{14-5} = \frac{5}{9}$ (hiệu tuổi bà và cháu)

Cách đây 10 năm tuổi cháu bằng $\frac{1}{4}$ tuổi bà hay tuổi cháu bằng $\frac{1}{3}$ hiệu tuổi bà và cháu, do đó 10 năm ứng với:

$$\frac{5}{9} - \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \text{ (hiệu tuổi bà và cháu).}$$

Hiệu tuổi bà và cháu là:

$$10 : \frac{2}{9} = 45 \text{ (tuổi)}$$

Tuổi cháu hiện nay là:

$$45 : \frac{5}{9} = 25 \text{ (tuổi)}$$

Tuổi bà hiện nay là:

$$25 + 45 = 70 \text{ (tuổi)}$$

Đáp số: Cháu: 25 tuổi, Bà: 70 tuổi

Bài 35: Tìm 2 số biết rằng 70% số lớn hơn 85% số bé là 1 đơn vị và 68% số lớn hơn 42,5% số bé là 17 đơn vị.

Lời giải

Vì 68% số lớn hơn 42,5% số bé là 17 đơn vị nên 136% số lớn hơn 85% là 34 đơn vị, mà 70% số lớn hơn 85% số bé là 1 đơn vị, nên suy ra:

$$136\% - 70\% = 66\% \text{ số lớn là bằng } 34 - 1 = 33 \text{ đơn vị}$$

Vậy số lớn bằng:

$$33 : 66\% = 50$$

$$85\% \text{ số bé bằng } (70\% \text{ của } 50) - 1 = 50 \cdot 70\% - 1 = 34$$

Do đó số bé bằng:

$$34 : 85\% = 40$$

Bài 36: Một cái sân chơi hình chữ nhật, biết 40% chiều rộng bằng $\frac{2}{9}$ chiều dài, và chiều dài của sân là 90m. Tính chu vi, diện tích của cái sân đó.

Lời giải

$\frac{2}{9}$ chiều dài sân là:

$$90 \cdot \frac{2}{9} = 20(m)$$

Chiều rộng sân là:

$$20 : 40\% = 50(m)$$

Chu vi sân là:

$$(90 + 50) \cdot 2 = 280(m)$$

Diện tích sân là:

$$90 \cdot 50 = 4500(m^2)$$

Đáp số: $280m; 4500m^2$

Bài 37: Lượng nước trong cỏ tươi 60% , trong cỏ khô là 15% . Hỏi một tấn cỏ tươi có bao nhiêu cỏ khô?

Lời giải

Lượng cỏ nguyên chất trong cỏ tươi chiếm:

$$100\% - 60\% = 40\%$$

Lượng cỏ nguyên chất trong cỏ khô chiếm:

$$100\% - 15\% = 85\%$$

1 tấn cỏ tươi cho số cỏ nguyên chất là:

$$1000 \cdot 40\% = 400 (kg)$$

Vậy 1 tấn cỏ tươi cho số kg cỏ khô là:

$$400 \cdot 85\% = \frac{8000}{17} (kg)$$

Đáp số: $\frac{8000}{17} \text{ kg} = \frac{8}{17} \text{ tấn}$

Bài 38: Tại một phân xưởng lao động, đầu năm số công nhân bậc 2 bằng $\frac{2}{7}$ số công nhân bậc 1. Đến cuối năm có 5 công nhân bậc 1 được lên thành bậc 2 nên số công nhân bậc 2 bằng một nửa số công nhân bậc 1. Tính tổng số công nhân bậc 1 và bậc 2 ở phân xưởng đó.

Lời giải

Đầu năm số công nhân bậc hai chiếm $\frac{2}{2+7} = \frac{2}{9}$ (tổng số công nhân bậc 1, bậc 2)

Cuối năm số công nhân bậc hai chiếm $\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ (tổng số công nhân bậc 1, bậc 2)

5 công nhân ứng với $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$ (tổng số công nhân bậc 1, bậc 2)

Tổng số công nhân bậc 1 và bậc 2 ở phân xưởng đó là: $5 : \frac{1}{9} = 45$ (công nhân)

Đáp số: 45 công nhân

Bài 39: Số sách ở ngăn A bằng $\frac{2}{5}$ tổng số sách ở ngăn A và B. Sau đó người ta bổ sung vào ngăn

A thêm 3 quyển sách nữa thì số sách ở ngăn A bằng tổng số sách ở 2 ngăn A và B. Tính số sách ban đầu ở mỗi ngăn.

Lời giải

(chú ý: số sách ngăn B không đổi)

Ban đầu số sách ngăn A bằng $\frac{2}{5-2} = \frac{2}{3}$ (số sách ngăn B)

Sau khi bổ sung 3 quyển thì số sách ngăn A bằng $\frac{5}{11-5} = \frac{5}{6}$ (số sách ngăn B)

Vậy 3 quyển sách ứng với: $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ (số sách ngăn B)

Số sách ngăn B là: $3 : \frac{1}{6} = 18$ (quyển)

Số sách ban đầu ngăn A là: $\frac{3}{2} \cdot 18 = 27$ (quyển)

Đáp số: 27 quyển; 18 quyển.

Bài 40: Ba đội xe phải chở một số bao xi măng cho công trường xây dựng, đội thứ nhất chở được $\frac{2}{5}$ tổng số bao, đội thứ hai chở được 45% số bao còn lại, đội thứ ba chở được 140 bao, như vậy so với quy định cả 3 đội đã chở nhiều hơn 8 bao. Hỏi 3 đội chở được bao nhiêu bao xi măng?

Lời giải

Số bao xi măng đội thứ hai chở được chiếm:

$$45\% \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) = 27\% \text{ (tổng số bao)}$$

Theo quy định số bao xi măng đội thứ ba phải chở chiếm:

$$1 - \frac{2}{5} - 27\% = 33\% \text{ (tổng số bao)}$$

Mà theo quy định thì đội ba phải chở là:

$$140 : 33\% = 424 \text{ (bao)}$$

Vậy tổng số bao cả 3 đội phải chở theo quy định là:

$$424 + 8 = 432 \text{ (bao)}$$

Vậy cả ba đội đã chở được:

$$432 + 8 = 440 \text{ (bao)}$$

Đáp số: 440 bao.

Bài 41: Có một đoạn đường cần phải sửa. Nếu cả 2 người cùng làm thì hết 6 ngày sửa xong, nếu làm một mình người thứ nhất thì sửa xong trong 14 ngày. Hỏi đoạn đường đó dài bao nhiêu mét? Biết rằng mỗi ngày người thứ hai sửa nhanh hơn người thứ nhất là $1,5m$.

Lời giải

Một ngày cả 2 người sửa được $\frac{1}{6}$ quãng đường.

Một ngày người thứ nhất sửa được: $\frac{1}{4}$ quãng đường

Một ngày thứ hai sửa được: $\frac{1}{6} - \frac{1}{14} = \frac{2}{21}$ (quãng đường)

Người thứ hai trong một ngày sửa được nhiều hơn người thứ nhất là:

$$\frac{2}{21} - \frac{1}{14} = \frac{1}{42} \text{ (quãng đường)}$$

Đoạn đường đó dài là: $1,5 : \frac{1}{42} = 63(m)$

Đáp số: $63m$

Bài 42: Trong đợt tổng kết năm học tại một trường THCS, tổng số học sinh giỏi của ba lớp 6A, 6B, 6C là 90 em. Biết rằng $\frac{2}{5}$ số học sinh giỏi của lớp 6A bằng $\frac{1}{3}$ số học sinh giỏi của lớp 6B và bằng $\frac{1}{2}$ số học sinh giỏi của lớp 6C. Tính số học sinh giỏi mỗi lớp.

Trích đề HSG huyện Quỳnh Hợp năm 2015 -2016

Lời giải

Số học sinh giỏi của lớp 6B bằng

$$\frac{2}{5} : \frac{1}{3} = \frac{6}{5} \text{ (số học sinh giỏi lớp 6A)}$$

Số học sinh giỏi lớp 6C bằng

$$\frac{2}{5} : \frac{1}{2} = \frac{4}{5} \text{ (số học sinh giỏi lớp 6A)}$$

Số học sinh giỏi của cả 3 lớp bằng

$$1 + \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = 3 \text{ (số học sinh giỏi lớp 6A)}$$

Vậy số học sinh giỏi lớp 6A là $90 : 3 = 30$ học sinh, của lớp 6B là 36 học sinh và của lớp 6C là 24 học sinh.

Bài 43: Trong một buổi đi tham quan, số nữ đăng kí tham gia bằng $\frac{1}{4}$ số nam. Nhưng sau đó một bạn nữ xin nghỉ, một bạn nam xin đi thêm nên số nữ đi tham quan bằng $\frac{1}{5}$ số nam. Tính số học sinh nữ và học sinh nam đã đi tham quan.

Lời giải

Tổng số học sinh nam và nữ dự định đi tham quan và đã đi tham quan là như nhau nên ta lấy làm đơn vị.

Số hs nữ đăng kí đi tham quan bằng $\frac{1}{4}$ số nam nên bằng $\frac{1}{5}$ tổng số.

Số hs nữ đã đi tham quan bằng $\frac{1}{5}$ số nam đã đi tham quan nên bằng $\frac{1}{6}$ tổng số.

Số nữ dự định đi nhiều hơn số nữ đã đi là: $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$ tổng số hay 1 học sinh

Tổng số hs là $1: \frac{1}{30} = 30$ (học sinh)

Số hs nữ đã đi tham quan là: $30 \cdot \frac{1}{6} = 5$ (học sinh)

Số hs nam đã đi tham quan là: $30 - 25 = 5$ (học sinh).

Bài 44: Tổng bình phương của 3 số tự nhiên là 2596. Biết rằng tỉ số giữa số thứ nhất và số thứ hai là $\frac{2}{3}$, giữa số thứ hai và số thứ ba là $\frac{5}{6}$. Tìm ba số đó.

Lời giải

Gọi a, b, c là 3 số tự nhiên phải tìm.

Theo đề bài ta có: $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}; \frac{b}{c} = \frac{5}{6}$ (1) và $a^2 + b^2 + c^2 = 2596$ (2)

Từ (1) suy ra $a = \frac{2}{3}b; c = \frac{6}{5}b$, thay vào (2) ta có

$$\frac{4}{9}b^2 + b^2 + \frac{36}{25}b^2 = 2596$$

$$\frac{649}{225}b^2 = 2596$$

$$b^2 = 900$$

Tính được $b = 30, a = \frac{2}{3} \cdot 30 = 20; c = \frac{6}{5} \cdot 30 = 36$.

Vậy 3 số tự nhiên cần tìm là: 30; 20; 36.

Bài 45: Sau buổi biểu diễn văn nghệ, nhà trường tặng cam cho các tiết mục. Lần đầu tiết mục đồng ca hết $\frac{5}{6}$ số cam và $\frac{1}{6}$ quả; lần 2 tặng tiết mục tốp ca hết $\frac{6}{7}$ số cam còn lại và $\frac{1}{7}$ quả; lần 3 tặng tiết mục đơn ca hết $\frac{3}{4}$ số cam còn lại lần 2 và $\frac{1}{4}$ quả thì vừa hết. Tính số cam trường đó đã tặng và số cam riêng cho các tiết mục đồng ca, tốp ca và đơn ca.

Lời giải

Nhận xét: $\frac{1}{4}$ quả cuối cùng chính là $\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ số cam còn lại sau lần 3. Vậy bài này phải tính ngược từ dưới lên.

Tiết mục đơn ca được tặng $\frac{1}{4} : \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{1} = 1$ (quả).

Tương tự trên, tiết mục đơn ca và tốp ca được tặng: $\left(\frac{1}{7} + 1\right) : \frac{1}{7} = 8$ (quả).

Tương tự số cam của trường đó đã tặng: $\left(8 + \frac{1}{6}\right) : \frac{1}{6} = 49$ (quả)

Số cam tặng tiết mục tốp ca: $8 - 1 = 7$ (quả)

Số cam tặng tiết mục đồng ca: $49 - 8 = 41$ (quả).

Bài 46: Trong một buổi đi tham quan, số nữ đăng kí tham gia bằng $\frac{1}{4}$ số nam. Nhưng sau đó có một bạn nữ xin nghỉ, một bạn nam xin đi thêm nên số nữ đi tham quan bằng $\frac{1}{5}$ số nam. Tính số học sinh nữ và nam đã đi tham quan.

Lời giải

Tổng số học sinh nam và nữ dự định đi tham quan và đã đi tham quan là như nhau, ta lấy làm đơn vị.

Số nữ dự định đi tham quan bằng $\frac{1}{4}$ số nam nên bằng $\frac{1}{5}$ tổng số nam và nữ.

Số nữ đi tham quan bằng $\frac{1}{5}$ số nam nên bằng $\frac{1}{6}$ tổng số nam và nữ.

Số nữ dự định đi nhiều hơn số nữ đã đi là: $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$ (tổng số học sinh) hay $\frac{1}{30}$ tổng số học sinh tương ứng với 1 học sinh.

Tổng số học sinh là: $1 : \frac{1}{30} = 30$ (học sinh)

Số học sinh nữ đã đi tham quan là: $30 \cdot \frac{1}{6} = 5$ (học sinh)

Số học sinh nam đã đi tham quan là: $30 - 5 = 25$ (học sinh)

Vậy có 5 học sinh nữ và 25 học sinh nam đi tham quan.

Bài 47: Hai ô tô cùng xuất phát từ Hà Nội đi Vinh. Ô tô thứ nhất đi từ 4 giờ 10 phút, ô tô thứ hai đi từ lúc 5 giờ 15 phút.

a) Lúc $11\frac{1}{2}$ giờ cùng ngày hai ô tô cách nhau bao nhiêu km? Biết rằng vận tốc của ô tô thứ nhất là 35 km/h. Vận tốc của ô tô thứ hai là $34\frac{1}{2}$ km/h.

b) Khi ô tô thứ nhất đến Vinh thì ô tô thứ hai cách Vinh bao nhiêu Km? Biết rằng Hà Nội cách Vinh 319 km.

Lời giải

a) Thời gian ô tô thứ nhất đã đi: $11\frac{1}{2} - 4\frac{1}{6} = 7 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = 7 + \frac{1}{3} = 7\frac{1}{3}$ (giờ)

Quãng đường ô tô thứ nhất đã đi được: $35 \cdot 7\frac{1}{3} = 256\frac{2}{3}$ (km)

Thời gian ô tô thứ hai đã đi: $11\frac{1}{2} - 5\frac{1}{4} = 6\frac{1}{4}$ (giờ)

Quãng đường ô tô thứ hai đã đi: $34\frac{1}{2} \cdot 6\frac{1}{4} = 215\frac{5}{8}$ (km)

Lúc 11 giờ 30 phút cùng ngày hai ô tô cách nhau: $256\frac{2}{3} - 215\frac{5}{8} = 41\frac{1}{24}$ (km)

b) Thời gian ô tô thứ nhất đến Vinh là: $319 : 35 = 9\frac{4}{35}$ (giờ)

Ô tô đến Vinh vào lúc: $4\frac{1}{6} + 9\frac{4}{35} = 13\frac{59}{210}$ (giờ)

Khi ô tô thứ nhất đến Vinh thì thời gian ô tô thứ hai đã đi:

$13\frac{59}{210} - 5\frac{1}{4} = 7 + \frac{269}{210} - \frac{1}{4} = 7 + \frac{538}{420} - \frac{105}{420} = 7\frac{433}{420}$ (giờ)

Quãng đường mà ô tô thứ hai đi được: $7\frac{433}{420} \cdot 34\frac{1}{2} \approx 277$ (km)

Vậy ô tô thứ nhất đến Vinh thì ô tô thứ hai cách Vinh là: $319 - 277 = 42$ (km).

Bài 48: Tổng tiền lương của bác công nhân A, B, C là 2500000 đồng. Biết 40% tiền lương của bác A bằng 50% tiền lương của bác B và bằng $\frac{4}{7}$ tiền lương của bác C . Hỏi tiền lương của mỗi bác là bao nhiêu?

Lời giải

$$40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}, \quad 50\% = \frac{1}{2}$$

Quy đồng tử các phân số $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{4}{7}$ được: $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}, \frac{2}{5} = \frac{4}{10}, \frac{4}{7}$

Như vậy: $\frac{4}{10}$ lương của bác A bằng $\frac{4}{8}$ lương của bác B và bằng $\frac{4}{7}$ lương của bác C .

Suy ra, $\frac{1}{10}$ lương của bác A bằng $\frac{1}{8}$ lương của bác B và bằng $\frac{1}{7}$ lương của bác C .

Lương của bác A là : $2500000 : (10 + 8 + 7) \cdot 10 = 1000000$ (đ)

Lương của bác B là : $2500000 : (10 + 8 + 7) \cdot 8 = 800000$ (đ)

Lương của bác C là : $2500000 : (10 + 8 + 7) \cdot 7 = 700000$ (đ).

Bài 49: Một ô tô đi từ A về phía B , một xe máy đi từ B về phía A . Hai xe khởi hành cùng một lúc cho đến khi gặp nhau thì quãng đường ô tô đi được lớn hơn quãng đường của xe máy đi là $50km$. Biết 30% quãng đường ô tô đi được bằng 45% quãng đường xe máy đi được. Hỏi quãng đường mỗi xe đi được bằng mấy phần trăm quãng đường AB .

Lời giải

$$30\% = \frac{3}{10} = \frac{9}{30}; \quad 45\% = \frac{9}{20}$$

$\frac{9}{30}$ quãng đường ô tô đi được bằng $\frac{9}{20}$ quãng đường xe máy đi được.

Suy ra, $\frac{1}{30}$ quãng đường ô tô đi được bằng $\frac{1}{20}$ quãng đường xe máy đi được.

Quãng đường ô tô đi được: $50 : (30 - 20) \cdot 30 = 150$ (km)

Quãng đường xe máy đi được: $50 : (30 - 20) \cdot 20 = 100$ (km).

Bài 50: Một lớp học có số học sinh nữ bằng $\frac{5}{3}$ số học sinh nam. Nếu 10 học sinh nam chưa vào lớp thì số học sinh nữ gấp 7 lần số học sinh nam. Tìm số học sinh nam và nữ của lớp đó.

Lời giải

Số học sinh nam bằng $\frac{3}{5}$ số học sinh nữ, nên số HS nam bằng $\frac{3}{8}$ số học sinh cả lớp.

Khi 10 học sinh nam chưa vào lớp thì số học sinh nam bằng $\frac{1}{7}$ số học sinh nữ tức bằng $\frac{1}{8}$ số học sinh cả lớp.

Vậy 10 học sinh biểu thị : $\frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ (học sinh cả lớp)

Nên số học sinh cả lớp là: $10 : \frac{1}{4} = 40$ (học sinh)

Số học sinh nam là : $40 \cdot \frac{3}{8} = 15$ (học sinh)

Số học sinh nữ là : $40 \cdot \frac{5}{8} = 25$ (học sinh).

Bài 51: Hai người đi mua gạo. Người thứ nhất mua gạo nếp, người thứ hai mua gạo tẻ. Giá gạo tẻ rẻ hơn giá gạo nếp là 20%. Biết khối lượng gạo tẻ người thứ hai mua nhiều hơn khối lượng gạo nếp là 20%. Hỏi người nào trả tiền ít hơn? ít hơn mấy % so với người kia?

Lời giải

Gọi giá gạo nếp là a (đồng/kg); khối lượng gạo nếp đã mua là b (kg)

Suy ra giá gạo tẻ là $\frac{80}{100} \cdot a$; khối lượng gạo tẻ đã mua là $\frac{120}{100} \cdot b$

Số tiền người thứ nhất phải trả là $a \cdot b$ (đồng)

Số tiền người thứ hai phải trả là $\frac{80}{100} \cdot a \cdot \frac{120}{100} \cdot b = \frac{96}{100} a \cdot b$

Vậy người thứ hai trả ít tiền hơn người thứ nhất. Tỷ lệ % ít hơn là:

$$\left(a \cdot b - \frac{96}{100} \cdot a \cdot b \right) : a \cdot b = 4\%$$

Bài 52: Có ba vòi cùng chảy nước vào một bể. Vòi 1 chảy đầy nước trong 4 giờ, vòi 2 chảy đầy bể nước trong 3 giờ. Vòi 3 muốn chảy đầy nước thì cần thời gian bằng $\frac{21}{24}$ lần thời gian vòi 1 và vòi 2 cùng chảy đầy bể nước. Hỏi nếu mở cả 3 vòi cùng một lúc thì sau bao lâu bể nước đầy? (lúc đầu bể không có nước)

Lời giải

Trong một giờ, vòi 1 chảy được là: $1 : 4 = \frac{1}{4}$ (bể).

Trong một giờ, vòi 2 chảy được là: $1 : 3 = \frac{1}{3}$ (bể).

Trong một giờ, vòi 1 và vòi 2 chảy được là: $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$ (bể).

Thời gian mở cả vòi 1 và vòi 2 để chảy đầy bể là: $1 : \frac{7}{12} = \frac{12}{7}$ (giờ).

Thời gian vòi 3 chảy đầy bể là: $\frac{12}{7} \cdot \frac{21}{24} = \frac{3}{2}$ (giờ).

Trong một giờ, vòi 3 chảy được là: $1 : \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$ (bể).

Trong một giờ, cả 3 vòi chảy được là: $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{4}$ (bể).

Thời gian mở cả 3 vòi đầy bể là: $1 : \frac{5}{4} = \frac{4}{5}$ (giờ) = 48 (phút).

Bài 53: Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị là số nguyên

Lời giải

Để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị là nguyên thì $n+3 : 2n-2$

$$2(n+3) : 2n-2 \Rightarrow (2n+6) - (2n-2) : (2n-2)$$

$$\Rightarrow (2n-2n) + (6+2) : 2n-2 \Rightarrow 8 : 2n-2$$

Suy ra $(2n-2) \in \{\pm 2; \pm 4; \pm 8\}$

Sau khi thử các trường hợp $\Rightarrow n = 5$

Bài 54: Tìm tất cả các số nguyên n để:

- a) Phân số $\frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên
 b) Phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản

Lời giải

a) $\frac{n+1}{n-2}$ là số nguyên khi $(n+1)(n-2)$

Ta có $n+1 = (n-2) + 3$

Vậy $(n+1) : (n-2)$ khi $3 : (n-2)$

$$n-2 \in U(3) = \{-3; -1; 1; 3\}$$

$$\Rightarrow n \in \{-1; 1; 3; 5\}$$

b) Gọi d là ƯC của $12n+1$ và $30n+2$ ($d \in \mathbb{N}^*$)

$$\Rightarrow 12n+1 : d, 30n+2 : d$$

$$[5(12n+1) - 2(30n+2)] : d$$

$$\Leftrightarrow 60n+5 - 60n-4 : d$$

$$\Leftrightarrow 1 : d$$

$$\Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số đã cho tối giản.

Bài 55: Tìm bộ ba số nguyên dương a, b, c sao cho: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4}{5}$.

Lời giải

Không làm mất tính tổng quát, ta giả sử: $a \leq b \leq c$

$$\text{khi đó ta có: } \frac{3}{a} \geq \frac{4}{5}, a \leq \frac{15}{4}$$

Nếu $a=1$ thì không thể được, do đó $a=2$ hoặc $a=3$

$$\text{Nếu } a=2 \text{ thì } \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{10}$$

$$\text{Suy ra } \frac{2}{b} \geq \frac{3}{10}, b \leq \frac{20}{3}$$

$$\text{Suy ra } b=4 \text{ hoặc } b=5 \text{ hoặc } b=6 \text{ vì } \frac{3}{10} < \frac{1}{3}$$

Suy ra các số a, b, c thỏa mãn là $(a=2, b=4, c=20)$ và $(a=2, b=5, c=10)$

$$\text{Nếu } a=3 \text{ thì } \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{7}{15}$$

từ đó $\frac{2}{b} \geq \frac{7}{15}, b \leq \frac{30}{7}$ suy ra $b=3$ hoặc $b=4$. Không có trường hợp nào thỏa mãn

Vậy có 12 bộ số thỏa mãn là các hoán vị của hai bộ ba số $(2, 4, 20)$ và $(2, 5, 10)$

Bài 56: Trong đợt tổng kết năm học tại một trường THCS, tổng số học sinh giỏi của ba lớp 6A, 6B, 6C là 90 em. Biết rằng $\frac{2}{5}$ số học sinh giỏi của lớp 6A bằng $\frac{1}{3}$ số học sinh giỏi của lớp 6B và bằng $\frac{1}{2}$ số học sinh giỏi của lớp 6C. Tính số học sinh giỏi mỗi lớp.

Lời giải

Số học sinh giỏi của lớp 6B bằng

$$\frac{2}{5} : \frac{1}{3} = \frac{6}{5} \text{ (số học sinh giỏi lớp 6A)}$$

Số học sinh giỏi lớp 6C bằng

$$\frac{2}{5} : \frac{1}{2} = \frac{4}{5} \text{ (số học sinh giỏi lớp 6A)}$$

Số học sinh giỏi của cả 3 lớp bằng

$$1 + \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = 3 \text{ (số học sinh giỏi lớp 6A)}$$

Vậy số học sinh giỏi lớp 6A là $90 : 3 = 30$ học sinh, của lớp 6B là 36 học sinh và của lớp 6C là 24 học sinh

Bài 57:

Tìm một phân số tối giản, biết rằng khi cộng mẫu số vào tử số và cộng mẫu số vào mẫu số của phân số ấy thì được một phân số mới, lớn gấp 2 lần phân số ban đầu

Lời giải

Gọi phân số tối giản lúc đầu là $\frac{a}{b}$. Nếu chỉ cộng mẫu số vào mẫu số ta được phân số $\frac{a}{b+b} = \frac{a}{2b}$; phân

số này nhỏ hơn phân số $\frac{a}{b}$ hai lần

Để $\frac{a+b}{2b}$ gấp 2 lần phân số lúc đầu thì $a+b$ phải bằng 4 lần a

⇒ Mẫu số b phải gấp 3 lần tử số a

Phân số tối giản thoả mãn điều kiện trên là $\frac{3}{16}$

Bài 58:

a) Tìm A biết rằng $\frac{11}{6}$ của A là $\frac{\left(29\frac{7}{30} - 27\frac{5}{18}\right) : 4\%}{2\frac{2}{3}}$

b) Tìm B biết $\frac{25}{7}$ của B là $\frac{\left(13\frac{3}{5} - 10\frac{3}{14}\right) \cdot \frac{5}{2}}{(31 - 11,25) : 5\frac{5}{6}}$

Lời giải

a) Thu gọn $\frac{\left(29\frac{7}{30} - 27\frac{5}{18}\right) : 4\%}{2\frac{2}{3}} = \frac{\frac{88}{45} \cdot \frac{1}{25}}{\frac{8}{3}} = \frac{55}{3}$, do đó $A = \frac{55}{3} : \frac{11}{6} = \frac{5.2}{1.1} = 10$

b) Thu gọn $\frac{\left(13\frac{3}{5} - 10\frac{3}{14}\right) \cdot \frac{5}{2}}{(31 - 11,25) : 5\frac{5}{6}} = \frac{5}{2}$; suy ra $B = \frac{5}{2} : \frac{25}{7} = \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{25} = \frac{7}{10} = 0,7$

Bài 59: Một cuộn dây dài 150m. Lần thứ nhất người bán hàng cắt đi $\frac{8}{15}$ cuộn dây, lần thứ 2 cắt tiếp

$\frac{5}{14}$ phần còn lại. Hỏi sau 2 lần cắt thì phần dây còn lại bao nhiêu?

Lời giải

Cách 1:

$$\text{Lần thứ nhất cắt đi: } 150 \cdot \frac{8}{15} = 80 \text{ (m)}$$

$$\text{Số dây còn lại sau lần thứ nhất: } 150 - 80 = 70 \text{ (m)}$$

$$\text{Lần thứ hai cắt đi: } 70 \cdot \frac{5}{14} = 25 \text{ (m)}$$

$$\text{Sau 2 lần cắt thì còn lại: } 150 - (80 + 25) = 45 \text{ (m)}$$

Đáp số: 45 (m)

Cách 2:

$$\text{Phần dây còn lại sau lần cắt thứ nhất: } 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15} \text{ (cuộn dây)}$$

$$\text{Phần dây cắt đi lần 2: } \frac{7}{15} \cdot \frac{5}{14} = \frac{1}{6} \text{ (cuộn dây)}$$

$$\text{Phần dây còn lại bằng: } 1 - \left(\frac{8}{15} + \frac{1}{6} \right) = \frac{3}{10} \text{ (cuộn dây)}$$

$$\text{Vậy phần dây còn lại dài: } 150 \cdot \frac{3}{10} = 45 \text{ (m)}$$

Đáp số: 45 (m)

Bài 60: Cho a, b là các số nguyên dương sao cho $a^2 + b^2$ chia hết cho tích ab . Hãy tìm thương của phép chia $a^2 + b^2$ cho ab .

Lời giải

Gọi $d = (a, b)$ thì $a = d \cdot m$ và $b = d \cdot n$ với $(m, n) = 1$.

Ta có: $a^2 + b^2 = d^2(m^2 + n^2)$ và $ab = d^2mn$

Vì $a^2 + b^2$ chia hết cho ab nên $m^2 + n^2$ chia hết cho mn . Suy ra $m^2 + n^2$ chia hết cho m và n .

Suy ra m^2 chia hết cho n và n^2 chia hết cho m .

Vì $(m, n) = 1$ nên m chia hết cho n và n chia hết cho m .

Suy ra $m = n = 1$.

$$\text{Do đó: } \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{d^2(m^2 + n^2)}{d^2mn} = \frac{2d^2}{d^2} = 2$$

Vậy thương của phép chia $a^2 + b^2$ cho ab bằng 2.

Bài 61:

Trong đợt mua bút ủng hộ người khuyết tật của tỉnh Nghệ An, khối 6 của một trường mua một lượng bút nhất định. Lớp 6A mua $\frac{2}{9}$ tổng số bút; lớp 6B mua $\frac{3}{8}$ số bút còn lại; lớp 6C mua $\frac{2}{5}$ số bút còn lại sau khi hai lớp 6A và 6B đã mua; lớp 6D mua hết số bút còn lại là 210 chiếc. Hỏi tổng số bút mà khối 6 trường đó đã mua là bao nhiêu chiếc?

Lời giải

$$\text{Số phần bút lớp 6B mua là: } \frac{3}{8} \left(1 - \frac{2}{9} \right) = \frac{7}{24} \text{ (tổng số bút)}$$

Số phần bút lớp 6C mua là: $\frac{2}{5}(1 - \frac{2}{9} - \frac{7}{24}) = \frac{7}{36}$ (tổng số bút)

Số phần bút lớp 6D mua là: $1 - \frac{2}{9} - \frac{7}{24} - \frac{7}{36} = \frac{7}{24}$ (tổng số bút)

Số bút khối 6 mang bán là: $210 : \frac{7}{24} = 720$ (bút)

Bài 62:

Số sách ở ngăn A bằng $\frac{3}{5}$ số sách ở ngăn B. Nếu chuyển 1 quyển từ ngăn A sang ngăn B thì số sách ở ngăn A bằng $\frac{2}{3}$ số sách ở ngăn B. Tìm số sách ở mỗi ngăn lúc đầu.

Lời giải

Lúc đầu, số sách ở ngăn A chiếm số phần tổng số sách là: $\frac{3}{3+5} = \frac{3}{8}$ (tổng số sách)

Lúc sau, số sách ở ngăn A chiếm số phần tổng số sách là: $\frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$ (tổng số sách)

Số sách ở ngăn A tăng so với lúc đầu là: $\frac{2}{5} - \frac{3}{8} = \frac{1}{40}$ (tổng số sách)

Tổng số sách ở hai ngăn là: $1 : \frac{1}{40} = 40$ (quyển sách)

Vậy, số sách ở ngăn A lúc đầu là: $40 \cdot \frac{3}{8} = 15$ (quyển sách)

Số sách ở ngăn B lúc đầu là: $40 - 15 = 25$ (quyển sách)

Bài 63: Một ca nô xuôi dòng từ A đến B hết 30 phút và ngược dòng từ B về A hết 45 phút. Hỏi một cụm bè trôi từ A về B hết bao lâu

Trích đề HSG huyện Xuân Trường, năm 2010- 2011

Lời giải

Mỗi phút ca nô đi xuôi dòng được số phần khúc sông là: $1 : 30 = \frac{1}{30}$ (khúc sông AB)

Mỗi phút ca nô đi ngược dòng được số phần khúc sông là: $1 : 45 = \frac{1}{45}$ (khúc sông AB)

Vì hiệu vận tốc xuôi dòng và ngược dòng chính là 2 lần vận tốc của dòng nước nên mỗi giờ dòng nước trôi được số phần khúc sông là:

$$\left(\frac{1}{30} - \frac{1}{45} \right) : 2 = \frac{1}{180} \text{ (khúc sông AB)}$$

Thời gian chum bè trôi theo dòng nước từ A đến B là: $1: \frac{1}{180} = 180$ (phút) = 3 (giờ)

Bài 64: Một ca nô chạy xuôi khúc sông AB hết 6 giờ và chạy ngược khúc sông ấy hết 9 giờ. Hỏi một phao trôi theo dòng nước từ A đến B trong bao lâu?

Trích đề HSG huyện Hải Hậu, năm 2011- 2012

Lời giải

Trong 1 giờ, ca nô chạy xuôi được $\frac{1}{6}$ AB, ca nô chạy ngược được $\frac{1}{9}$ BA.

Do vận tốc xuôi trừ vận tốc ngược bằng 2 lần vận tốc dòng nước nên trong một giờ dòng nước trôi được:

$$\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9} \right) : 2 = \frac{1}{36} \text{ AB}$$

Thời gian phao trôi từ A đến B là: $1: \frac{1}{36} = 36$ (giờ).

Bài 65: Tìm phân số bằng phân số $\frac{20}{39}$, biết ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số đó là 36.

Lời giải

Ta thấy $\text{ƯCLN}(20,39)=1$

Nên phân số $\frac{20}{39}$ là phân số tối giản

Mà ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số cần tìm là 36

Nên phân số cần tìm đã được rút gọn thành $\frac{20}{39}$ bằng cách chia cả tử và mẫu cho 36

Vậy phân số cần tìm là: $\frac{20.36}{39.36} = \frac{720}{1404}$

Bài 66 : Cho $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2017}$; $B = \frac{1}{2016} + \frac{2}{2015} + \frac{3}{2014} + \dots + \frac{2015}{2} + \frac{2016}{1}$. Tính $\frac{A}{B}$

Lời giải

$$B = \frac{1}{2016} + \frac{2}{2015} + \frac{3}{2014} + \dots + \frac{2015}{2} + \frac{2016}{1}$$

$$B = \left(\frac{1}{2016} + 1 \right) + \left(\frac{2}{2015} + 1 \right) + \left(\frac{3}{2014} + 1 \right) + \dots + \left(\frac{2015}{2} + 1 \right) + 1$$

$$B = \frac{2017}{2016} + \frac{2017}{2015} + \frac{2017}{2014} + \dots + \frac{2017}{2} + \frac{2017}{2017}$$

$$B = 2017 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2017} \right)$$

$$\text{Do đó } \frac{A}{B} = \frac{1}{2017}$$

Bài 67: Cho $A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2022}$; $B = \frac{1}{1012} + \frac{1}{1013} + \dots + \frac{1}{2022}$. Tính $\left(\frac{A}{B}\right)^{2022}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2022} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2022}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1011}\right) \\ &= \frac{1}{1012} + \frac{1}{1013} + \dots + \frac{1}{2022} = B \end{aligned}$$

Suy ra: $\frac{A}{B} = 1$

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{2022} = 1^{2022} = 1$$

Vậy $\left(\frac{A}{B}\right)^{2022} = 1$

Bài 68: Cho $A = \frac{4}{7.31} + \frac{6}{7.41} + \frac{9}{10.41} + \frac{7}{10.57}$ và $B = \frac{7}{19.31} + \frac{5}{19.43} + \frac{3}{23.43} + \frac{11}{23.57}$. Tính tỷ số $\frac{A}{B}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}A &= \frac{4}{35.31} + \frac{6}{35.41} + \frac{9}{50.41} + \frac{7}{50.57} = \frac{1}{31} - \frac{1}{57} \\ \frac{1}{5}A &= \frac{4}{35.31} + \frac{6}{35.41} + \frac{9}{50.41} + \frac{7}{50.57} = \frac{1}{31} - \frac{1}{57} \\ \frac{1}{5}A &= \frac{1}{2}B \text{ suy ra } \frac{A}{B} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Bài 69: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết: $A = 92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100}$ và $B = \frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}$

Lời giải

$$\text{có } A = 92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100} = \left(1 - \frac{1}{9}\right) + \left(1 - \frac{2}{10}\right) + \dots + \left(1 - \frac{92}{100}\right)$$

$$A = \frac{8}{9} + \frac{8}{10} + \dots + \frac{8}{100} = 8\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{100}\right)$$

$$B = \frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{100}\right)$$

Suy ra $\frac{A}{B} = \frac{8}{\frac{1}{5}} = 40$

Vậy $\frac{A}{B} = 40$

Bài 70: Tính $D = \frac{1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+3+\dots+98)}{1.98 + 2.97 + 3.96 + \dots + 98.1}$

Lời giải

$$D = \frac{1+(1+2)+(1+2+3)+\dots+(1+2+3+\dots+98)}{1.98+2.97+3.96+\dots+98.1}$$

Tử số của D có 98 số 1; 97 số 2; 96 số 3;...; 2 số 97 và 1 số 98
 Như vậy tử số của D bằng $1.98+2.97+3.96+\dots+97.2+98.1$, bằng mẫu số
 Vậy $D=1$

Bài 71: Một người mang cam đi chợ bán. Người thứ nhất mua $\frac{1}{6}$ số cam và 5 quả. Người thứ hai mua 20% số cam còn lại và thêm 12 quả. Người thứ ba mua 25% số cam còn lại và thêm 9 quả. Người thứ tư mua $\frac{1}{3}$ số cam còn lại và 12 quả thì vừa hết. Tính số cam người đó mang đi bán ?

Lời giải:

Phần số chỉ 12 quả cam là $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (số cam còn lại sau khi người thứ ba mua)

Số cam còn lại sau khi người thứ ba mua: $12 : \frac{2}{3} = 18$ (quả)

Phần số chỉ $18+9=27$ quả cam là: $1 - 25\% = \frac{3}{4}$ (số cam còn lại sau khi người thứ hai mua)

Số cam còn lại sau khi người thứ hai mua: $27 : \frac{3}{4} = 36$ (quả)

Phần số chỉ 48 quả cam: $1 - 20\% = \frac{4}{5}$ (số cam còn lại sau khi người thứ nhất mua)

Số cam còn lại sau khi người thứ nhất mua: $48 : \frac{4}{5} = 60$ (quả)

Số cam người đó mang đi bán là $(60+5) : \frac{5}{6} = 78$ (quả)

Vậy số cam người đó mang đi bán là 78 (quả)

Bài 72: Trong một đợt phát động quyên góp sách ủng hộ các bạn học sinh vùng lũ, hai lớp 6A và 6B của một trường Trung học cơ sở đã quyên góp được 210 quyển sách giáo khoa Toán 6. Biết rằng số sách quyên góp được của lớp 6A và $\frac{1}{3}$ số sách quyên góp được của lớp 6B bằng số sách quyên góp được của lớp 6B và $\frac{1}{2}$ số sách quyên góp được của lớp 6A. Hỏi mỗi lớp quyên góp được bao nhiêu quyển sách.

Lời giải

Gọi x là số sách quyên góp được của lớp 6A (quyển, $x \in \mathbb{N}^*$, $x < 210$)

Số sách quyên góp được của lớp 6B là: $210 - x$ (quyển)

$\frac{1}{3}$ số sách quyên góp của lớp 6B: $\frac{1}{3}(210 - x) = 70 - \frac{1}{3}x$ (quyển)

$\frac{1}{2}$ số sách quyên góp của lớp 6A: $\frac{1}{2}x$ (quyển)

Theo đề bài ta lập được phương trình sau

$$x + 70 - \frac{1}{3}x = 210 - x + \frac{1}{2}x$$

$$x - \frac{1}{3}x + x - \frac{1}{2}x = 210 - 70$$

$$\frac{7}{6}x = 140$$

$$x = 120 \text{ (nhận)}$$

Vậy số sách quyên góp của lớp 6A là 120 quyển

Số sách quyên góp của lớp 6B là: $210 - 120 = 90$ (quyển)

Bài 73: Hai người đi mua gạo. Người thứ nhất đi mua gạo nếp, người thứ hai đi mua gạo tẻ. Giá gạo tẻ rẻ hơn giá gạo nếp là 20%. Biết khối lượng gạo tẻ mà người thứ hai mua được nhiều hơn khối lượng gạo nếp mà người thứ nhất mua được là 20%. Hỏi người nào trả tiền ít hơn? Ít hơn bao nhiêu phần trăm so với người kia?

Lời giải

Giả sử giá gạo nếp a (đồng / kg); khối lượng gạo nếp mua là b (kg).

Ta có giá gạo tẻ là: $(100\% - 20\%) = \frac{80a}{100}$; (đồng)

Khối lượng gạo tẻ đã mua là $(100\% + 20\%)b = \frac{120}{100}.b$ (kg)

Số tiền người thứ nhất phải trả là: $a.b$ (đồng)

Số tiền mà người thứ hai phải trả là: $\frac{80}{100}.a.\frac{120}{100}.b = \frac{96}{100}.ab < ab$

Vậy người thứ hai trả tiền ít hơn người thứ nhất.

Tỉ lệ phần trăm ít hơn là $(ab - \frac{96}{100}.ab) : ab = 4\%$

Bài 74: Giá một cái ti vi là 30000000 đồng. Sau khi giảm giá số lượng tăng lên 25%. Do đó doanh thu tăng 12,5%. Hỏi giá ti vi sau khi giảm giá là bao nhiêu?

Lời giải

Giả sử giá ti vi lúc đầu là 100%, số lượng bán 100%, doanh thu 100%.

Sau khi giảm giá, số lượng bán là: $100\% + 25\% = 125\%$

Doanh thu là: $100\% + 12,5\% = 112,5\%$

Giá ti vi so với giá ban đầu là: $112,5\% : 125 = 90\%$

Giá của chiếc ti vi sau khi giảm giá là: $30000000.90\% = 27000000$ (đồng)

Bài 75: Anh Nguyễn bơi xuôi dòng từ A đến B hết 5 phút, còn bơi ngược dòng từ B về A hết 7 phút. Hỏi cụm bè trôi từ A đến B trong bao lâu?

Lời giải

Trong 1 phút anh Nguyễn bơi xuôi dòng được:

$$1:5 = \frac{1}{5} \text{ (quãng đường AB)}$$

Trong 1 phút anh Nguyễn bơi ngược dòng được:

$$1:7 = \frac{1}{7} \text{ (quãng đường AB)}$$

Trong 1 phút cụm bè trôi được:

$$\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) : 2 = \frac{1}{35} \text{ (quãng đường AB)}$$

Thời gian cụm bè trôi từ A đến B là:

$$1: \frac{1}{35} = 35 \text{ (phút)}$$

Bài 76: Chứng minh rằng $\frac{3n+1}{9n+6}$ là phân số tối giản với mọi $n \in \mathbb{N}$

Trích đề HSG thành phố Vinh năm 2022 -2023

Lời giải

Gọi d là ƯCLN($3n+1; 9n+6$) ($d \in \mathbb{N}^*$)

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} 3n+1 : d \\ 9n+6 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(3n+1) : d \\ 9n+6 : d \end{cases}$$

Do đó $(9n+6) - 3(3n+1) : d$ hay $3 : d$

$$\Rightarrow d \in U(3) = \{1; 3\} \text{ (vì } d \in \mathbb{N}^*)$$

Vì $3n+1$ không chia hết cho 3, nên $d \neq 3$

Vậy $d=1$ hay $\frac{3n+1}{9n+6}$ là phân số tối giản.

Bài 77: Cho biểu thức $p = \frac{3n-2}{n+1}$ với ($n \neq -1$)

a) Tìm số nguyên n để biểu thức p nhận giá trị nguyên.

b) Tìm số nguyên n để là phân số p tối giản.

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2022 -2023

Lời giải

a). Ta có:

$$p = \frac{3n-2}{n+1} = 3 - \frac{5}{n+1}$$

Để p nguyên thì $5 : n+1 \Rightarrow n+1 \in \{-5; -1; 1; 5\} \Rightarrow n \in \{-6; -2; 0; 4\}$

b). Gọi $d \in UC(3n-2; n+1)$ với $d \in \mathbb{Z}; d \neq 0 \Rightarrow (3n-2) : d$ và $(n-1) : d$

$$\Rightarrow (3n+3) - (3n-2) : d \Rightarrow 5 : d \Rightarrow d \in \{-5; -1; 1; 5\}$$

Để p là phân số tối giản thì $(n+1) : 5 \Rightarrow n+1 = 5k$ (với $k \in \mathbb{Z}; k \neq 0$)

$$\Rightarrow n = 5k + 1$$

CHỦ ĐỀ: PHÂN SỐ

A. PHẦN NỘI DUNG

Các bài toán về tỷ số của hai số; tìm số khi biết giá trị phân số của nó; tìm giá trị phân số của một số; tỷ số phần trăm.

Bài 1: Người ta thả một số bèo vào ao thì sau 6 ngày bèo phủ kín mặt ao. Biết rằng cứ sau một ngày thì diện tích bèo tăng lên gấp đôi. Hỏi:

- Sau mấy ngày bèo phủ kín nửa ao?
- Sau ngày thứ nhất bèo phủ được mấy phần ao?

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

a) Vì cứ sau một ngày thì diện tích bèo tăng lên gấp đôi mà sau 6 ngày bèo phủ kín mặt ao
Suy ra sau ngày thứ 5 bèo phủ kín nửa ao.

b)

Sau ngày thứ 4 bèo phủ kín $\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$ (ao)

Sau ngày thứ 3 bèo phủ kín $\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{8}$ (ao)

Sau ngày thứ 2 bèo phủ kín $\frac{1}{8} : 2 = \frac{1}{16}$ (ao)

Sau ngày thứ nhất bèo phủ kín $\frac{1}{16} : 2 = \frac{1}{32}$ (ao)

Vậy sau ngày thứ nhất bèo phủ kín được $\frac{1}{32}$ (ao)

Bài 2: Cho $E = \frac{1}{1.101} + \frac{1}{2.102} + \frac{1}{3.103} + \dots + \frac{1}{10.110}$

và $F = \frac{1}{1.11} + \frac{1}{2.12} + \frac{1}{3.13} + \dots + \frac{1}{100.110}$. Tính tỉ số $\frac{E}{F}$

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Lời giải

Ta có:

$$E = \frac{1}{1.101} + \frac{1}{2.102} + \dots + \frac{1}{10.110}$$

$$E = \frac{1}{100} \cdot \left(\frac{100}{1.10} + \frac{100}{2.102} + \dots + \frac{100}{10.110} \right)$$

$$= \frac{1}{100} \cdot \left(1 - \frac{1}{101} + \frac{1}{2} - \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{10} - \frac{1}{110} \right)$$

$$= \frac{1}{100} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10} \right) - \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{110} \right) \right]$$

$$F = \frac{1}{1.11} + \frac{1}{2.12} + \dots + \frac{1}{100.110}$$

$$F = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{10}{1.11} + \frac{10}{2.12} + \dots + \frac{10}{100.110} \right)$$

$$F = \frac{1}{10} \cdot \left(1 - \frac{1}{11} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{110} \right)$$

$$F = \frac{1}{10} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} \right) - \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{110} \right) \right]$$

$$F = \frac{1}{10} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10} \right) - \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{110} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{E}{F} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{10}} = \frac{1}{10}$$

Bài 3: Ba máy bơm cùng bơm vào một bể lớn, nếu dùng cả máy một và máy hai thì sau 1 giờ 20 phút bể sẽ đầy, dùng máy hai và máy ba thì sau 1 giờ 30 phút bể sẽ đầy còn nếu dùng máy một và máy ba thì bể sẽ đầy sau 2 giờ 24 phút. Hỏi nếu mỗi máy bơm được dùng một mình thì bể sẽ đầy sau bao lâu ?

Trích đề HSG trường Nguyễn Khuyến năm 20... - 20...

Lời giải

Máy 1 và máy 2 bơm 1 giờ 20 phút hay $\frac{4}{3}$ giờ đầy bể nên 1 giờ máy 1 và 2 bơm được $\frac{3}{4}$ bể

Máy 2 và máy 3 bơm 1 giờ 30 phút hay $\frac{3}{2}$ giờ đầy bể nên 1 giờ máy 2 và 3 bơm được $\frac{2}{3}$ bể

Máy 1 và máy 3 bơm 2 giờ 24 phút hay $\frac{12}{5}$ giờ đầy bể nên 1 giờ máy 1 và 3 bơm được $\frac{5}{12}$ bể.

\Rightarrow Một giờ cả ba máy bơm được $\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{5}{12} \right) : 2 = \frac{11}{12}$ (bể)

Một giờ:

Máy 3 bơm được: $\frac{11}{12} - \frac{3}{4} = \frac{1}{6}$ bể nên máy 3 bơm 1 mình 6 giờ đầy bể

Máy 1 bơm được: $\frac{11}{12} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$ bể nên máy 1 bơm 1 mình 4 giờ đầy bể

Máy 2 bơm được: $\frac{11}{12} - \frac{5}{12} = \frac{1}{2}$ bể nên máy 2 bơm 1 mình 2 giờ đầy bể

Bài 4: Bạn Nga đọc một cuốn sách trong 3 ngày. Ngày thứ nhất đọc được $\frac{1}{4}$ số trang của cuốn sách.

Ngày thứ hai đọc được $\frac{4}{5}$ số trang còn lại. Ngày thứ ba đọc 30 trang cuối cùng.

a) Tính số trang của quyển sách.

b) Quyển sách đó có giá là 80 000 đồng. Khi mua quyển sách, Nga được giảm giá 20%. Tính số tiền mà Nga phải trả cho cô bán hàng?

Trích đề HSG THCS Quỳnh Thiện năm 2022 - 2023

Lời giải

Ngày thứ hai đọc được: $\frac{4}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$ (quyển sách)

30 trang sách chiếm: $1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$ (quyển sách)

Quyển sách có số trang là: $30 : \frac{3}{20} = 200$ (trang)

Số tiền mà Nga phải trả cho cô bán hàng là: $(100\% - 20\%) \cdot 80000 = 64000$ (đồng)

Bài 5: Cho biểu thức : $A = \frac{2n+1}{n-3} + \frac{3n-5}{n-3} - \frac{4n-5}{n-3}$. Tìm giá trị của n để

- a) A là một phân số
b) A là một số nguyên

Trích đề HSG huyện Đoàn Hùng năm 2018-2019

Lời giải

$$a) \frac{2n+1}{n-3} + \frac{3n-5}{n-3} - \frac{4n-5}{n-3} = \frac{2n+1+3n-5-4n+5}{n-3} = \frac{n+1}{n-3}$$

A là phân số khi $n \in \mathbb{Z}, n \neq 3$

$$b) A = \frac{n+1}{n-3} = \frac{n-3+4}{n-3} = 1 + \frac{4}{n-3}$$

A là số nguyên khi $n-3 \in \mathcal{U}(4) = \{1; 2; 4; -1; -2; -4\} \Rightarrow n \in \{4; 5; 7; 2; 1; -1\}$

Bài 6: Với giá trị nào của số tự nhiên a thì $\frac{8a+19}{4a+1}$ có giá trị nguyên

Trích đề HSG cấp huyện 2016-2017

Lời giải

$$N = \frac{8a+19}{4a+1} = \frac{8a+2+17}{4a+1} = 2 + \frac{17}{4a+1}$$

Để N nguyên thì $4a+1$ là ước số của 17

$\Rightarrow a=0, a=4$.

Bài 7: Tổng của hai số là 2015, biết $\frac{6}{7}$ của $\frac{2}{3}$ số thứ nhất nhiều hơn $\frac{5}{6}$ của $\frac{4}{5}$ số thứ hai là 52. Tìm mỗi số.

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2022 - 2023

Lời giải

Gọi 2 số cần tìm là $x; y$.

Theo đề bài ta có: $x + y = 2015$ nên $x = 2015 - y$ (1)

$$\frac{6}{7} \cdot \frac{2}{3} x - \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} y = 52 \text{ nên } \frac{4}{7} x - \frac{2}{3} y = 52 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có $\frac{4}{7}(2015 - y) - \frac{2}{3}y = 52$

$$\frac{26}{21}y = \frac{8060}{7} - 52$$

$$\frac{26}{21}y = \frac{7696}{7}$$

$$y = \frac{23088}{26}$$

$$y = 888$$

$$x = 2015 - 888 = 1127$$

Vậy hai số cần tìm là 1127; 888.

Bài 8: Tìm 3 số có tổng bằng 210, biết rằng $\frac{6}{7}$ số thứ nhất bằng $\frac{9}{11}$ số thứ 2 và $\frac{9}{11}$ số thứ hai bằng $\frac{2}{3}$ số thứ ba.

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2017 -2018

Lời giải

Số thứ nhất bằng: $\frac{9}{11} : \frac{6}{7} = \frac{21}{22}$ (số thứ hai)

Số thứ ba bằng: $\frac{9}{11} : \frac{2}{3} = \frac{27}{22}$ (số thứ hai)

Tổng của 3 số bằng $\frac{21}{22} + \frac{27}{22} + 1$ (số thứ hai) = $\frac{70}{22}$ (số thứ hai)

Số thứ hai là: $210 : \frac{70}{22} = 66$

$$\text{Số thứ nhất là: } \frac{21}{22} \cdot 66 = 63$$

$$\text{Số thứ ba: } \frac{27}{22} \cdot 66 = 81.$$

Bài 9: Tổng số trang của 8 quyển vở loại 1; 9 quyển vở loại 2 và 5 quyển vở loại 3 là 1980 trang. Số trang của một quyển vở loại 2 chỉ bằng $\frac{2}{3}$ số trang của 1 quyển vở loại 1. Số trang của 4 quyển vở loại 3 bằng số trang của 3 quyển vở loại 2. Tính số trang của mỗi quyển vở mỗi loại.

Trích đề HSG huyện Phù Ninh năm 2015 -2016

Lời giải

- Vì số trang của mỗi quyển vở loại 2 bằng $\frac{2}{3}$ số trang của 1 quyển loại 1. Nên số trang của 3 quyển loại 2 bằng số trang của 3 $\cdot \frac{2}{3} = 2$ quyển loại 1.

- Mà số trang của 4 quyển loại 3 bằng 3 quyển loại 2. Nên số trang của 2 quyển loại 1 bằng số trang của 4 quyển loại 3.

- Do đó số trang của 8 quyển loại 1 bằng: $(8:2) \cdot 4 = 16$ (quyển loại 3).

Số trang của 9 quyển loại 2 bằng: $(9:3) \cdot 4 = 12$ (quyển loại 3).

Vậy 1980 chính là số trang của $16 + 12 + 5 = 33$ (quyển loại 3).

- Suy ra: Số trang 1 quyển vở loại 3 là: $1980:33 = 60$ (trang).

Số trang 1 quyển vở loại 2 là: $\frac{60 \cdot 2}{3} = 80$ (trang).

Số trang 1 quyển vở loại 1 là: $\frac{80 \cdot 3}{2} = 120$ (trang).

Bài 10: Tìm hai số biết tỉ số của chúng bằng 5:8 và tích của chúng bằng 360.

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014 -2015

Lời giải

Gọi hai số cần tìm là a và b

Theo đề bài: $\frac{a}{b} = \frac{5}{8}$ nên $8a = 5b$. Do đó $\frac{a}{5} = \frac{b}{8}$

Đặt $\frac{a}{5} = \frac{b}{8} = k$. Ta có $a = 5k$ và $b = 8k$

Ta có: $a \cdot b = 360 = 5k \cdot 8k = 360$

$$40k^2 = 360$$

$$k^2 = 360:40 = 9$$

$$\left[\begin{array}{l} k^2 = (-3)^2 \\ k^2 = 3^2 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} k = -3 \\ k = 3 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a = 5 \cdot (-3) = -15 \\ a = 5 \cdot 3 = 15 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a = 5 \cdot (-3) = -15 \\ a = 5 \cdot 3 = 15 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a = 5 \cdot (-3) = -15 \\ a = 5 \cdot 3 = 15 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} b = 8 \cdot (-3) = -24 \\ b = 8 \cdot 3 = 24 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} b = 8 \cdot (-3) = -24 \\ b = 8 \cdot 3 = 24 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} b = 8 \cdot (-3) = -24 \\ b = 8 \cdot 3 = 24 \end{array} \right.$$

Vậy có 2 cặp số a, b thỏa mãn là $(-15; 24), (15; 24)$.

Bài 11: Cùng một công việc nếu mỗi người làm riêng thì 3 người A, B, C hoàn thành công việc trong thời gian lần lượt là 6 giờ, 8 giờ, 12 giờ. Hai người B và C làm chung trong 2 giờ sau đó người C

chuyển đi làm việc khác, người A cùng làm với người B tiếp tục công việc cho đến khi hoàn thành. Hỏi người A làm trong mấy giờ?

Trích đề HSG huyện Hoài Nhơn 2015-2016

Lời giải

Trong 1 giờ mỗi người A, B, C lần lượt làm được $\frac{1}{6}$ (công việc), $\frac{1}{8}$ (công việc), $\frac{1}{12}$ (công việc), B và

C làm được $\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{24}$ (công việc)

2 giờ B và C làm được $\frac{5}{24} \cdot 2 = \frac{5}{12}$ (công việc)

A và B làm được $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$ (công việc)

1 giờ A và B cùng làm được: $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}$ (công việc)

Thời gian A cùng làm với B là: $\frac{7}{12} : \frac{7}{24} = 2$ giờ.

Bài 12: Trên con đường đi qua 3 địa điểm A, B, C (B nằm giữa A và C), có hai người đi xe máy là Hùng và Dũng. Hùng xuất phát từ A , Dũng xuất phát từ B . Họ cùng khởi hành lúc 8 giờ để cùng đến C vào lúc 11 giờ cùng ngày. Ninh đi xe đạp từ C về phía A , gặp Dũng lúc 9 giờ và gặp Hùng lúc 9 giờ 24 phút. Biết quãng đường AB dài 30km, vận tốc của Ninh bằng $\frac{1}{4}$ vận tốc của Hùng. Tính quãng đường BC .

Trích đề HSG cấp Trường năm 2019-2020

Lời giải

Thời gian đi từ A đến C của Hùng là: $11 - 8 = 3$ (giờ)

Thời gian đi từ B đến C của Dũng là: $11 - 8 = 3$ (giờ)

Quãng đường AB là 30km do đó cứ 1 giờ khoảng cách của Hùng và Dũng bớt đi 10km. Vì vậy lúc 9 giờ Hùng còn cách Dũng là 20km, lúc đó Ninh gặp Dũng nên Ninh cũng cách Hùng 20km.

Đến 9 giờ 24 phút, Ninh gặp Hùng do đó tổng vận tốc của Ninh và Hùng là:

$$20 : \frac{24}{60} = 50 \text{ (km/h)}$$

Do vận tốc của Ninh bằng $\frac{1}{4}$ vận tốc của Hùng nên vận tốc của Hùng là:

$$[50 : (1 + 4)] \cdot 4 = 40 \text{ (km/h)}$$

Từ đó suy ra quãng đường BC là: $40 \cdot 3 - 30 = 90$ (km)

Bài 13: Ba máy bơm cùng bơm vào một bể lớn. Nếu dùng cả máy I và máy III thì sau 1 giờ 20 phút bể sẽ đầy, dùng cả máy II và III thì sau 1 giờ 30 phút bể sẽ đầy, dùng cả máy I và máy III thì sau 2 giờ 24 phút bể sẽ đầy. Hỏi nếu mỗi máy bơm được dùng một mình thì bể sẽ đầy trong bao lâu.

Trích đề HSG huyện Ngọc Lặc năm 2018-2019

Lời giải

Ta quy ước dung tích bể là đơn vị

$$1h20' = \frac{4}{3}h; 1h30' = \frac{3}{2}h; 2h24' = \frac{12}{5}h$$

Như vậy, trong 1 giờ.

Vòi I và II chảy được $\frac{3}{4}$ bể

Vòi II và III chảy được $\frac{2}{3}$ bể

Vòi I và III chảy được: $\frac{5}{12}$ bể

Suy ra trong 1 giờ cả 3 vòi chảy được: $\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{5}{12}\right) : 2 = \frac{11}{12}$ (bể)

Trong 1 giờ,

Vòi III chảy được: $\frac{11}{12} - \frac{3}{4} = \frac{1}{6}$ bể

Vòi I chảy được: $\frac{11}{12} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$ bể

Vòi II chảy được: $\frac{11}{12} - \frac{5}{12} = \frac{1}{2}$ bể

Vậy, vòi I chảy 1 mình 4 h sẽ đầy bể

Vòi II chảy một mình 2 h sẽ đầy bể

Vòi III chảy 1 mình 6 h sẽ đầy bể.

Trắc nghiệm

Bài 14: Trung bình cộng của tử số và mẫu số của một phân số là 68. Cộng thêm vào tử số của phân số đó 4 đơn vị thì được phân số mới bằng phân số $\frac{3}{2}$. Phân số lúc đầu là:

A. $\frac{84}{52}$.

B. $\frac{76}{60}$.

C. $\frac{75}{61}$.

D. $\frac{80}{56}$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: D. $\frac{80}{56}$.

Tự luận

Bài 15. Vào tháng 9, giá bán một chiếc máy tính là 24000000 đồng. Đến tháng 10, cửa hàng tăng giá lên 20%. Đến tháng 11, cửa hàng hạ giá của tháng 10 xuống 20%. Hỏi giá bán của chiếc máy tính đó vào tháng 9 và tháng 11, tháng nào đắt hơn.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Lời giải

Giá bán máy tính trong tháng 10 là: $24000000 + 24000000 \cdot 20\% = 28800000$ (đồng)

Giá bán máy tính trong tháng 11 là: $28800000 - 28800000 \cdot 20\% = 23040000$ (đồng)

Vậy giá bán máy tính đó vào tháng 9 đắt hơn tháng 11.

Bài 16: Hãng ô tô Vinfat có chính sách bán hàng theo hình thức trả góp hàng tháng như sau:

- Số tiền gốc mỗi tháng phải trả = tổng số khoản vay/kỳ hạn vay (tính theo tháng)

- Số tiền lãi hàng tháng phải trả = dư nợ thực tế x lãi suất tháng

Biết rằng: Lãi suất tháng = lãi suất ngân hàng theo năm/12 tháng.

Một khách hàng ký kết hợp đồng mua Ô tô vay trả góp 600 triệu đồng với kỳ hạn 5 năm, lãi suất ngân hàng là 6% / năm

a) Tính số tiền cả gốc và lãi mà khách hàng phải trả trong tháng đầu tiên, tháng thứ hai?

b) Tính tổng số tiền cả gốc và lãi mà khách hàng phải trả cho đến khi trả hết nợ?

Trích đề HSG huyện Kỳ Anh năm 2021 - 2022

Lời giải

a) Kỳ hạn vay tính theo tháng: $5 \cdot 12 = 60$ (tháng)

Số tiền gốc mỗi tháng phải trả: $600 : 60 = 10$ (triệu đồng)

$$\text{Lãi suất tháng: } 6\% : 12 = \frac{6}{100} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100} = 0,5 \cdot \frac{1}{100} = \frac{0,5}{100} = 0,5\%$$

Số tiền gốc và lãi phải trả trong tháng đầu tiên:

$$10 + 0,5\% \cdot 600 = 10 + \frac{0,5}{100} \cdot 600 = 13 \text{ (triệu đồng)}$$

Dư nợ của tháng thứ 2: $600 - 10 = 590$ (triệu đồng)

Số tiền gốc và lãi phải trả trong tháng thứ 2 là:

$$10 + 0,5\% \cdot 590 = 10 + \frac{0,5 \cdot 590}{100} = 10 + 2,95 = 12,95 \text{ (triệu đồng)}$$

b) Tổng số tiền gốc và lãi phải trả từ tháng thứ nhất đến tháng thứ 60 là:

$$600 + 0,5\% \cdot 600 + 0,5\% \cdot (600 - 10) + 0,5\% \cdot (600 - 20)$$

$$+ 0,5\% \cdot (600 - 30) \dots + 0,5\% \cdot (600 - 590)$$

$$= 600 + 0,5\% \cdot (600 + 600 - 10 + 600 - 20 + \dots + 600 - 590)$$

$$= 600 + 0,5\% \cdot \left[60 \cdot 600 - 10 \cdot (1 + 2 + \dots + 59) \right] = 600 + 0,5\% \cdot \left(60 \cdot 600 - 10 \cdot \frac{59 \cdot 60}{2} \right)$$

$$= 600 + 0,5\% \cdot \left(60 \cdot 600 - 600 \cdot \frac{59}{2} \right)$$

$$= 600 + \frac{0,5}{100} \cdot 600 \cdot \frac{120 - 59}{2} = 600 + 3 \cdot \frac{61}{2} = 600 + \frac{183}{2}$$

$$= 600 + 91,5 = 691,5 \text{ (triệu đồng)}$$

Bài 17: Vào tháng 9, giá bán một chiếc máy tính là 24000000 đồng. Đến tháng 10, cửa hàng tăng giá lên 20%. Đến tháng 11, cửa hàng hạ giá của tháng 10 xuống 20%. Hỏi giá bán của chiếc máy tính đó vào tháng 9 và tháng 11, tháng nào đắt hơn.

Trích đề HSG huyện Chí Linh năm 2021-2022

Lời giải

Giá bán máy tính trong tháng 10 là

$$24000000 + 24000000 \cdot 20\% = 28800000 \text{ đồng}$$

Giá bán máy tính trong tháng 11 là

$$28800000 - 28800000 \cdot 20\% = 23040000 \text{ đồng}$$

Vậy giá bán máy tính đó vào tháng 9 đắt hơn tháng 11

Bài 18: Cho hai biểu thức $M = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{37.38}$ và $N = \frac{1}{20.38} + \frac{1}{21.37} + \dots + \frac{1}{38.20}$.

Chứng minh rằng: $\frac{M}{N}$ là một số nguyên.

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } M &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{37} - \frac{1}{38} \\ M &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{37}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{38}\right) \\ M &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{38}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{19}\right) \\ M &= \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{38} \\ \text{Ta có } N &= \frac{1}{20 \cdot 38} + \frac{1}{21 \cdot 37} + \dots + \frac{1}{38 \cdot 20} \\ 58N &= \frac{1}{20} + \frac{1}{38} + \frac{1}{21} + \frac{1}{37} + \dots + \frac{1}{38} + \frac{1}{20} \\ 29N &= \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{38} \\ \text{Suy ra } \frac{M}{N} &= 29 \end{aligned}$$

Bài 19: Cho các số a, b, c khác 0 thỏa mãn $a+b+c=2022$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2021}{2022}$

Tính $M = \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c}$

Trích đề Olipic huyện Hương Sơn năm 2021 -2022
Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M+3 &= \frac{b+c}{a} + 1 + \frac{a+c}{b} + 1 + \frac{a+b}{c} + 1 \\ M+3 &= \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \\ M+3 &= (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 2022 \cdot \frac{2021}{2022} = 2021 \\ M &= 2021 - 3 = 2018. \end{aligned}$$

Bài 20: Cho $B = \frac{n-3}{n+2}$ với $n \in \mathbb{Z}$

- a) Tìm điều kiện của n để B là một phân số.
- b) Tìm tất cả các số nguyên n để B có giá trị là một số nguyên.

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021 - 2022

Lời giải

a) Để B là một phân số thì $n+2 \neq 0$ suy ra $n \neq -2$

$$\text{b) } B = \frac{n-3}{n+2} = \frac{n+2-5}{n+2} = 1 - \frac{5}{n+2}$$

$$\Rightarrow n+2 \in \{-5; -1; 1; 5\}$$

$$\Rightarrow n \in \{-7; -3; -1; 3\}$$

Bài 21: Kỳ thi học sinh giỏi huyện Quế Võ đợt 2 năm học 2021-2022 có 500 học sinh tham gia thuộc các khối 6,7,8. Biết rằng số học sinh khối 6 có 30% tổng số học sinh tham dự và $\frac{10}{17}$ số học sinh khối 7 bằng $\frac{5}{9}$ số học sinh khối 8. Hỏi mỗi khối có bao nhiêu học sinh dự thi?

Trích đề HSG huyện Quế Võ năm 2021 - 2022

Lời giải

Số học sinh khối 6 tham gia dự thi là $500 \cdot 30\% = 150$ (học sinh).

Tổng số học sinh khối 7,8 dự thi là $500 - 150 = 350$ (học sinh).

Gọi số học sinh khối 7 dự thi là a (với $a \in \mathbb{N}^*$).

Ta có $\frac{10}{17}a$ bằng $\frac{5}{9}$ số học sinh khối 8 nên số học sinh khối 8 là $\frac{10}{17}a : \frac{5}{9} = \frac{18}{17}a$ (học sinh).

Suy ra $a + \frac{18}{17}a = 350 \Rightarrow a \cdot \left(1 + \frac{18}{17}\right) = 350 \Rightarrow a \cdot \frac{35}{17} = 350 \Rightarrow a = 170$.

Số học sinh khối 8 dự thi là $350 - 170 = 180$ (học sinh).

Vậy khối 6 có 150 học sinh, khối 7 có 170 học sinh, khối 8 có 180 học sinh.

Bài 22: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để phân số sau có giá trị là số nguyên: $A = \frac{n-3}{n+4}$.

Trích đề HSG huyện Chương Mỹ năm 2021 - 2022

Lời giải

ĐK: $n \neq -4$

Với n là số nguyên, để phân số $A = \frac{n-3}{n+4}$ có giá trị là số nguyên thì $(n-3):(n+4) \Rightarrow (n+4-7):(n+4)$

$\Rightarrow 7:(n+4) \Rightarrow (n+4) \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$

Vậy $n \in \{-11; -5; -3; 3\}$

B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

Các bài toán về tỷ số của hai số; tìm số khi biết giá trị phân số của nó; tìm giá trị phân số của một số; tỷ số phần trăm.

Bài 1: Người ta thả một số bèo vào ao thì sau 6 ngày bèo phủ kín mặt ao. Biết rằng cứ sau một ngày thì diện tích bèo tăng lên gấp đôi. Hỏi:

- Sau mấy ngày bèo phủ kín nửa ao?
- Sau ngày thứ nhất bèo phủ được mấy phần ao?

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Bài 2: Cho $E = \frac{1}{1.101} + \frac{1}{2.102} + \frac{1}{3.103} + \dots + \frac{1}{10.110}$

và $F = \frac{1}{1.11} + \frac{1}{2.12} + \frac{1}{3.13} + \dots + \frac{1}{100.110}$. Tính tỉ số $\frac{E}{F}$

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Bài 3: Ba máy bơm cùng bơm vào một bể lớn, nếu dùng cả máy một và máy hai thì sau 1 giờ 20 phút bể sẽ đầy, dùng máy hai và máy ba thì sau 1 giờ 30 phút bể sẽ đầy còn nếu dùng máy một và máy ba thì bể sẽ đầy sau 2 giờ 24 phút. Hỏi nếu mỗi máy bơm được dùng một mình thì bể sẽ đầy sau bao lâu ?

Trích đề HSG trường Nguyễn Khuyến năm 20... - 20...

Bài 4: Bạn Nga đọc một cuốn sách trong 3 ngày. Ngày thứ nhất đọc được $\frac{1}{4}$ số trang của cuốn sách.

Ngày thứ hai đọc được $\frac{4}{5}$ số trang còn lại. Ngày thứ ba đọc 30 trang cuối cùng.

- Tính số trang của quyển sách.
- Quyển sách đó có giá là 80 000 đồng. Khi mua quyển sách, Nga được giảm giá 20%. Tính số tiền mà Nga phải trả cho cô bán hàng?

Trích đề HSG THCS Quỳnh Thiện năm 2022 - 2023

Bài 5: Cho biểu thức : $A = \frac{2n+1}{n-3} + \frac{3n-5}{n-3} - \frac{4n-5}{n-3}$. Tìm giá trị của n để

- A là một phân số
- A là một số nguyên

Trích đề HSG huyện Đoan Hùng năm 2018-2019

Bài 6: Với giá trị nào của số tự nhiên a thì $\frac{8a+19}{4a+1}$ có giá trị nguyên

Trích đề HSG cấp huyện 2016-2017

Bài 7: Tổng của hai số là 2015, biết $\frac{6}{7}$ của $\frac{2}{3}$ số thứ nhất nhiều hơn $\frac{5}{6}$ của $\frac{4}{5}$ số thứ hai là 52. Tìm mỗi số.

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2022 - 2023

Bài 8: Tìm 3 số có tổng bằng 210, biết rằng $\frac{6}{7}$ số thứ nhất bằng $\frac{9}{11}$ số thứ 2 và $\frac{9}{11}$ số thứ hai bằng $\frac{2}{3}$ số thứ ba.

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2017 -2018

Bài 9: Tổng số trang của 8 quyển vở loại 1; 9 quyển vở loại 2 và 5 quyển vở loại 3 là 1980 trang. Số trang của một quyển vở loại 2 chỉ bằng $\frac{2}{3}$ số trang của 1 quyển vở loại 1. Số trang của 4 quyển vở loại 3 bằng số trang của 3 quyển vở loại 2. Tính số trang của mỗi quyển vở mỗi loại.

Trích đề HSG huyện Phù Ninh năm 2015 -2016

Bài 10: Tìm hai số biết tỉ số của chúng bằng 5:8 và tích của chúng bằng 360.

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014 -2015

Bài 11: Cùng một công việc nếu mỗi người làm riêng thì 3 người A, B, C hoàn thành công việc trong thời gian lần lượt là 6 giờ, 8 giờ, 12 giờ. Hai người B và C làm chung trong 2 giờ sau đó người C chuyển đi làm việc khác, người A cùng làm với người B tiếp tục công việc cho đến khi hoàn thành. Hỏi người A làm trong mấy giờ?

Trích đề HSG huyện Hoài Nhơn 2015-2016

Bài 12: Trên con đường đi qua 3 địa điểm A, B, C (B nằm giữa A và C), có hai người đi xe máy là Hùng và Dũng. Hùng xuất phát từ A , Dũng xuất phát từ B . Họ cùng khởi hành lúc 8 giờ để cùng đến C vào lúc 11 giờ cùng ngày. Ninh đi xe đạp từ C về phía A , gặp Dũng lúc 9 giờ và gặp Hùng lúc 9 giờ 24 phút. Biết quãng đường AB dài 30km, vận tốc của Ninh bằng $\frac{1}{4}$ vận tốc của Hùng. Tính quãng đường BC .

Trích đề HSG cấp Trường năm 2019-2020

Bài 13: Ba máy bơm cùng bơm vào một bể lớn. Nếu dùng cả máy I và máy III thì sau 1 giờ 20 phút bể sẽ đầy, dùng cả máy II và III thì sau 1 giờ 30 phút bể sẽ đầy, dùng cả máy I và máy III thì sau 2 giờ 24 phút bể sẽ đầy. Hỏi nếu mỗi máy bơm được dùng một mình thì bể sẽ đầy trong bao lâu.

Trích đề HSG huyện Ngọc Lặc năm 2018-2019

Trắc nghiệm

Bài 14: Trung bình cộng của tử số và mẫu số của một phân số là 68. Cộng thêm vào tử số của phân số đó 4 đơn vị thì được phân số mới bằng phân số $\frac{3}{2}$. Phân số lúc đầu là:

- A. $\frac{84}{52}$. B. $\frac{76}{60}$. C. $\frac{75}{61}$. D. $\frac{80}{56}$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Tự luận

Bài 15. Vào tháng 9, giá bán một chiếc máy tính là 24000000 đồng. Đến tháng 10, cửa hàng tăng giá lên 20%. Đến tháng 11, cửa hàng hạ giá của tháng 10 xuống 20%. Hỏi giá bán của chiếc máy tính đó vào tháng 9 và tháng 11, tháng nào đắt hơn.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Bài 16: Hãng ô tô Vinfat có chính sách bán hàng theo hình thức trả góp hàng tháng như sau:

- Số tiền gốc mỗi tháng phải trả = tổng số khoản vay/kỳ hạn vay (tính theo tháng)

- Số tiền lãi hàng tháng phải trả = dư nợ thực tế x lãi suất tháng

Biết rằng: Lãi suất tháng = lãi suất ngân hàng theo năm/12 tháng.

Một khách hàng ký kết hợp đồng mua Ô tô vay trả góp 600 triệu đồng với kỳ hạn 5 năm, lãi suất ngân hàng là 6% / năm

a) Tính số tiền cả gốc và lãi mà khách hàng phải trả trong tháng đầu tiên, tháng thứ hai?

b) Tính tổng số tiền cả gốc và lãi mà khách hàng phải trả cho đến khi trả hết nợ?

Trích đề HSG huyện Kỳ Anh năm 2021 - 2022

Bài 17: Vào tháng 9, giá bán một chiếc máy tính là 24000000 đồng. Đến tháng 10, cửa hàng tăng giá lên 20%. Đến tháng 11, cửa hàng hạ giá của tháng 10 xuống 20%. Hỏi giá bán của chiếc máy tính đó vào tháng 9 và tháng 11, tháng nào đắt hơn.

Trích đề HSG huyện Chí Linh năm 2021-2022

Bài 18: Cho hai biểu thức $M = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{37.38}$ và $N = \frac{1}{20.38} + \frac{1}{21.37} + \dots + \frac{1}{38.20}$.

Chứng minh rằng: $\frac{M}{N}$ là một số nguyên.

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021 – 2022

Bài 19: Cho các số a, b, c khác 0 thỏa mãn $a+b+c=2022$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2021}{2022}$

Tính $M = \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c}$

Trích đề Olipic huyện Hương Sơn năm 2021 - 2022

Bài 20: Cho $B = \frac{n-3}{n+2}$ với $n \in \mathbb{Z}$

- Tìm điều kiện của n để B là một phân số.
- Tìm tất cả các số nguyên n để B có giá trị là một số nguyên.

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021 - 2022

Bài 21: Kỳ thi học sinh giỏi huyện Quế Võ đợt 2 năm học 2021-2022 có 500 học sinh tham gia thuộc các khối 6, 7, 8. Biết rằng số học sinh khối 6 có 30% tổng số học sinh tham dự và $\frac{10}{17}$ số học sinh khối 7 bằng $\frac{5}{9}$ số học sinh khối 8. Hỏi mỗi khối có bao nhiêu học sinh dự thi?

Trích đề HSG huyện Quế Võ năm 2021 - 2022

Bài 22: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để phân số sau có giá trị là số nguyên: $A = \frac{n-3}{n+4}$.

Trích đề HSG huyện Chương Mỹ năm 2021 - 2022

C. SỬU TÂM CÁC BÀI TƯƠNG TỰ

Bài 1: Hai người đi mua gạo. Người thứ nhất mua gạo nếp, người thứ hai mua gạo tẻ. Giá gạo tẻ rẻ hơn giá gạo nếp là 20%. Biết khối lượng gạo tẻ người thứ hai mua nhiều hơn khối lượng gạo nếp là 20%. Hỏi người nào trả tiền ít hơn? ít hơn mấy % so với người kia?

Lời giải

Gọi giá gạo nếp là a (đồng/kg); khối lượng gạo nếp đã mua là b (kg)

Suy ra giá gạo tẻ là $\frac{80}{100}.a$; khối lượng gạo tẻ đã mua là $\frac{120}{100}.b$

Số tiền người thứ nhất phải trả là $a.b$ (đồng)

Số tiền người thứ hai phải trả là $\frac{80}{100}.a.\frac{120}{100}.b = \frac{96}{100}.a.b$

Vậy người thứ hai trả ít tiền hơn người thứ nhất. Tỷ lệ % ít hơn là:

$$\left(a.b - \frac{96}{100}.a.b\right) : a.b = 4\%$$

Bài 2: Có ba vòi cùng chảy nước vào một bể. Vòi 1 chảy đầy nước trong 4 giờ, vòi 2 chảy đầy bể nước trong 3 giờ. Vòi 3 muốn chảy đầy nước thì cần thời gian bằng $\frac{21}{24}$ lần thời gian vòi 1 và vòi 2 cùng chảy đầy bể nước. Hỏi nếu mở cả 3 vòi cùng một lúc thì sau bao lâu bể nước đầy? (lúc đầu bể không có nước)

Lời giải

Trong một giờ, vòi 1 chảy được là: $1:4 = \frac{1}{4}$ (bể).

Trong một giờ, vòi 2 chảy được là: $1:3 = \frac{1}{3}$ (bể).

Trong một giờ, vòi 1 và vòi 2 chảy được là: $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$ (bể).

Thời gian mở cả vòi 1 và vòi 2 để chảy đầy bể là: $1 : \frac{7}{12} = \frac{12}{7}$ (giờ).

Thời gian vòi 3 chảy đầy bể là: $\frac{12}{7} \cdot \frac{21}{24} = \frac{3}{2}$ (giờ).

Trong một giờ, vòi 3 chảy được là: $1 : \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$ (bể).

Trong một giờ, cả 3 vòi chảy được là: $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{4}$ (bể).

Thời gian mở cả 3 vòi đầy bể là: $1 : \frac{5}{4} = \frac{4}{5}$ (giờ) = 48 (phút).

Bài 3: Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị là số nguyên

Lời giải

Để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị là nguyên thì $n+3 : 2n-2$

$$2(n+3) : 2n-2 \Rightarrow (2n+6) - (2n-2) : (2n-2)$$

$$\Rightarrow (2n-2n) + (6+2) : 2n-2 \Rightarrow 8 : 2n-2$$

$$\text{Suy ra } (2n-2) \in \{\pm 2; \pm 4; \pm 8\}$$

Sau khi thử các trường hợp $\Rightarrow n = 5$

Bài 4: Tìm tất cả các số nguyên n để:

a) Phân số $\frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên

b) Phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản

Lời giải

a) $\frac{n+1}{n-2}$ là số nguyên khi $(n+1)(n-2)$

Ta có $n+1=(n-2)+3$

Vậy $(n+1):(n-2)$ khi $3:(n-2)$

$$n-2 \in U(3) = \{-3; -1; 1; 3\}$$

$$\Rightarrow n \in \{-1; 1; 3; 5\}$$

b) Gọi d là ƯC của $12n+1$ và $30n+2$ ($d \in \mathbb{N}^*$)

$$\Rightarrow 12n+1:d, 30n+2:d$$

$$[5(12n+1) - 2(30n+2)]:d$$

$$\Leftrightarrow 60n+5-60n-4:d$$

$$\Leftrightarrow 1:d$$

$$\Rightarrow d=1$$

Vậy phân số đã cho tối giản.

Bài 5: Tìm bộ ba số nguyên dương a, b, c sao cho: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4}{5}$.

Lời giải

Không làm mất tính tổng quát, ta giả sử: $a \leq b \leq c$

khi đó ta có: $\frac{3}{a} \geq \frac{4}{5}, a \leq \frac{15}{4}$

Nếu $a=1$ thì không thể được, do đó $a=2$ hoặc $a=3$

Nếu $a=2$ thì $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{10}$

Suy ra $\frac{2}{b} \geq \frac{3}{10}, b \leq \frac{20}{3}$

Suy ra $b=4$ hoặc $b=5$ hoặc $b=6$ vì $\frac{3}{10} < \frac{1}{3}$

Suy ra các số a, b, c thỏa mãn là $(a=2, b=4, c=20)$ và $(a=2, b=5, c=10)$

Nếu $a=3$ thì $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{7}{15}$

từ đó $\frac{2}{b} \geq \frac{7}{15}, b \leq \frac{30}{7}$ suy ra $b=3$ hoặc $b=4$. Không có trường hợp nào thỏa mãn

Vậy có 12 bộ số thỏa mãn là các hoán vị của hai bộ ba số $(2, 4, 20)$ và $(2, 5, 10)$

Bài 6: Trong đợt tổng kết năm học tại một trường THCS, tổng số học sinh giỏi của ba lớp 6A, 6B, 6C là 90 em. Biết rằng $\frac{2}{5}$ số học sinh giỏi của lớp 6A bằng $\frac{1}{3}$ số học sinh giỏi của lớp 6B và bằng $\frac{1}{2}$ số học sinh giỏi của lớp 6C. Tính số học sinh giỏi mỗi lớp.

Lời giải

Số học sinh giỏi của lớp 6B bằng

$$\frac{2}{5} : \frac{1}{3} = \frac{6}{5} \text{ (số học sinh giỏi lớp 6A)}$$

Số học sinh giỏi lớp 6C bằng

$$\frac{2}{5} : \frac{1}{2} = \frac{4}{5} \text{ (số học sinh giỏi lớp 6A)}$$

Số học sinh giỏi của cả 3 lớp bằng

$$1 + \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = 3 \text{ (số học sinh giỏi lớp 6A)}$$

Vậy số học sinh giỏi lớp 6A là $90 : 3 = 30$ học sinh, của lớp 6B là 36 học sinh và của lớp 6C là 24 học sinh

Bài 7:

Tìm một phân số tối giản, biết rằng khi cộng mẫu số vào tử số và cộng mẫu số vào mẫu số của phân số ấy thì được một phân số mới, lớn gấp 2 lần phân số ban đầu

Lời giải

Gọi phân số tối giản lúc đầu là $\frac{a}{b}$. Nếu chỉ cộng mẫu số vào mẫu số ta được phân số $\frac{a}{b+b} = \frac{a}{2b}$; phân số này nhỏ hơn phân số $\frac{a}{b}$ hai lần

Để $\frac{a+b}{2b}$ gấp 2 lần phân số lúc đầu thì $a+b$ phải bằng 4 lần a

\Rightarrow Mẫu số b phải gấp 3 lần tử số a

Phân số tối giản thoả mãn điều kiện trên là $\frac{3}{16}$

Bài 8:

a) Tìm A biết rằng $\frac{11}{6}$ của A là $\frac{\left(29\frac{7}{30} - 27\frac{5}{18}\right) : 4\%}{2\frac{2}{3}}$

b) Tìm B biết $\frac{25}{7}$ của B là $\frac{\left(13\frac{3}{5} - 10\frac{3}{14}\right) \cdot \frac{5}{2}}{(31 - 11,25) : 5\frac{5}{6}}$

Lời giải

a) Thu gọn $\frac{\left(29\frac{7}{30} - 27\frac{5}{18}\right) : 4\%}{2\frac{2}{3}} = \frac{\frac{88}{45} : \frac{1}{25}}{\frac{8}{3}} = \frac{55}{3}$, do đó $A = \frac{55}{3} : \frac{11}{6} = \frac{5 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 10$

b) Thu gọn $\frac{\left(13\frac{3}{5} - 10\frac{3}{14}\right) \cdot \frac{5}{2}}{(31 - 11,25) : 5\frac{5}{6}} = \frac{5}{2}$; suy ra $B = \frac{5}{2} : \frac{25}{7} = \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{25} = \frac{7}{10} = 0,7$

Bài 9: Một cuộn dây dài 150m. Lần thứ nhất người bán hàng cắt đi $\frac{8}{15}$ cuộn dây, lần thứ 2 cắt tiếp $\frac{5}{14}$ phần còn lại. Hỏi sau 2 lần cắt thì phần dây còn lại bao nhiêu?

Lời giải

Cách 1:

Lần thứ nhất cắt đi: $150 \cdot \frac{8}{15} = 80$ (m)

Số dây còn lại sau lần thứ nhất: $150 - 80 = 70$ (m)

Lần thứ hai cắt đi: $70 \cdot \frac{5}{14} = 25$ (m)

Sau 2 lần cắt thì còn lại: $150 - (80 + 25) = 45$ (m)

Đáp số: 45 (m)

Cách 2:

Phần dây còn lại sau lần cắt thứ nhất: $1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$ (cuộn dây)

Phần dây cắt đi lần 2: $\frac{7}{15} \cdot \frac{5}{14} = \frac{1}{6}$ (cuộn dây)

Phần dây còn lại bằng: $1 - \left(\frac{8}{14} + \frac{1}{6}\right) = \frac{3}{10}$ (cuộn dây)

Vậy phần dây còn lại dài: $150 \cdot \frac{3}{10} = 45$ (m)

Đáp số: 45 (m)

Bài 10: Cho a, b là các số nguyên dương sao cho $a^2 + b^2$ chia hết cho tích ab . Hãy tìm thương của phép chia $a^2 + b^2$ cho ab .

Lời giải

Gọi $d = (a, b)$ thì $a = d \cdot m$ và $b = d \cdot n$ với $(m, n) = 1$.

Ta có: $a^2 + b^2 = d^2(m^2 + n^2)$ và $ab = d^2mn$

Vì $a^2 + b^2$ chia hết cho ab nên $m^2 + n^2$ chia hết cho mn . Suy ra $m^2 + n^2$ chia hết cho m và n .

Suy ra m^2 chia hết cho n và n^2 chia hết cho m .

Vì $(m, n) = 1$ nên m chia hết cho n và n chia hết cho m .

Suy ra $m = n = 1$.

Do đó: $\frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{d^2(m^2 + n^2)}{d^2mn} = \frac{2d^2}{d^2} = 2$

Vậy thương của phép chia $a^2 + b^2$ cho ab bằng 2.

Bài 11:

Trong đợt mua bút ủng hộ người khuyết tật của tỉnh Nghệ An, khối 6 của một trường mua một lượng bút nhất định. Lớp 6A mua $\frac{2}{9}$ tổng số bút; lớp 6B mua $\frac{3}{8}$ số bút còn lại; lớp 6C mua $\frac{2}{5}$ số bút còn lại sau khi hai lớp 6A và 6B đã mua; lớp 6D mua hết số bút còn lại là 210 chiếc. Hỏi tổng số bút mà khối 6 trường đó đã mua là bao nhiêu chiếc?

Lời giải

Số phần bút lớp 6B mua là: $\frac{3}{8} \left(1 - \frac{2}{9}\right) = \frac{7}{24}$ (tổng số bút)

Số phần bút lớp 6C mua là: $\frac{2}{5} \left(1 - \frac{2}{9} - \frac{7}{24}\right) = \frac{7}{36}$ (tổng số bút)

Số phần bút lớp 6D mua là: $1 - \frac{2}{9} - \frac{7}{24} - \frac{7}{36} = \frac{7}{24}$ (tổng số bút)

Số bút khối 6 mang bán là: $210 : \frac{7}{24} = 720$ (bút)

Bài 12:

Số sách ở ngăn A bằng $\frac{3}{5}$ số sách ở ngăn B. Nếu chuyển 1 quyển từ ngăn A sang ngăn B thì số sách ở ngăn A bằng $\frac{2}{3}$ số sách ở ngăn B. Tìm số sách ở mỗi ngăn lúc đầu.

Lời giải

Lúc đầu, số sách ở ngăn A chiếm số phần tổng số sách là: $\frac{3}{3+5} = \frac{3}{8}$ (tổng số sách)

Lúc sau, số sách ở ngăn A chiếm số phần tổng số sách là: $\frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$ (tổng số sách)

Số sách ở ngăn A tăng so với lúc đầu là: $\frac{2}{5} - \frac{3}{8} = \frac{1}{40}$ (tổng số sách)

Tổng số sách ở hai ngăn là: $1 : \frac{1}{40} = 40$ (quyển sách)

Vậy, số sách ở ngăn A lúc đầu là: $40 \cdot \frac{3}{8} = 15$ (quyển sách)

Số sách ở ngăn B lúc đầu là: $40 - 15 = 25$ (quyển sách)

Bài 13: Một ca nô xuôi dòng từ A đến B hết 30 phút và ngược dòng từ B về A hết 45 phút. Hỏi một cụm bè trôi từ A về B hết bao lâu

Trích đề HSG huyện Xuân Trường, năm 2010- 2011

Lời giải

Mỗi phút ca nô đi xuôi dòng được số phần khúc sông là: $1 : 30 = \frac{1}{30}$ (khúc sông AB)

Mỗi phút ca nô đi ngược dòng được số phần khúc sông là: $1 : 45 = \frac{1}{45}$ (khúc sông AB)

Vì hiệu vận tốc xuôi dòng và ngược dòng chính là 2 lần vận tốc của dòng nước nên mỗi giờ dòng nước trôi được số phần khúc sông là:

$$\left(\frac{1}{30} - \frac{1}{45} \right) : 2 = \frac{1}{180} \text{ (khúc sông AB)}$$

Thời gian cụm bè trôi theo dòng nước từ A đến B là: $1 : \frac{1}{180} = 180$ (phút) = 3 (giờ)

Bài 14: Một ca nô chạy xuôi khúc sông AB hết 6 giờ và chạy ngược khúc sông ấy hết 9 giờ. Hỏi một phao trôi theo dòng nước từ A đến B trong bao lâu?

Trích đề HSG huyện Hải Hậu, năm 2011- 2012

Lời giải

Trong 1 giờ, ca nô chạy xuôi được $\frac{1}{6}$ AB, ca nô chạy ngược được $\frac{1}{9}$ BA.

Do vận tốc xuôi trừ vận tốc ngược bằng 2 lần vận tốc dòng nước nên trong một giờ dòng nước trôi được:

$$\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9}\right) : 2 = \frac{1}{36} AB$$

Thời gian phao trôi từ A đến B là: $1 : \frac{1}{36} = 36$ (giờ).

Bài 15: Tìm phân số bằng phân số $\frac{20}{39}$, biết ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số đó là 36.

Lời giải

Ta thấy $ƯCLN(20,39)=1$

Nên phân số $\frac{20}{39}$ là phân số tối giản

Mà ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số cần tìm là 36

Nên phân số cần tìm đã được rút gọn thành $\frac{20}{39}$ bằng cách chia cả tử và mẫu cho 36

Vậy phân số cần tìm là: $\frac{20 \cdot 36}{39 \cdot 36} = \frac{720}{1404}$

Bài 16: Trong đợt tổng kết năm học tại một trường THCS, tổng số học sinh giỏi của ba lớp 6A, 6B, 6C là 90 em. Biết rằng $\frac{2}{5}$ số học sinh giỏi của lớp 6A bằng $\frac{1}{3}$ số học sinh giỏi của lớp 6B và bằng $\frac{1}{2}$ số học sinh giỏi của lớp 6C. Tính số học sinh giỏi mỗi lớp.

Trích đề HSG huyện Quỳnh Hợp năm 2015 -2016

Lời giải

Số học sinh giỏi của lớp 6B bằng

$$\frac{2}{5} : \frac{1}{3} = \frac{6}{5} \text{ (số học sinh giỏi lớp 6A)}$$

Số học sinh giỏi lớp 6C bằng

$$\frac{2}{5} : \frac{1}{2} = \frac{4}{5} \text{ (số học sinh giỏi lớp 6A)}$$

Số học sinh giỏi của cả 3 lớp bằng

$$1 + \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = 3 \text{ (số học sinh giỏi lớp 6A)}$$

Vậy số học sinh giỏi lớp 6A là $90 : 3 = 30$ học sinh, của lớp 6B là 36 học sinh và của lớp 6C là 24 học sinh.

Bài 17: Trong một buổi đi tham quan, số nữ đăng kí tham gia bằng $\frac{1}{4}$ số nam. Nhưng sau đó một bạn nữ xin nghỉ, một bạn nam xin đi thêm nên số nữ đi tham quan bằng $\frac{1}{5}$ số nam. Tính số học sinh nữ và học sinh nam đã đi tham quan.

Lời giải

Tổng số học sinh nam và nữ dự định đi tham quan và đã đi tham quan là như nhau nên ta lấy làm đơn vị.

Số hs nữ đăng kí đi tham quan bằng $\frac{1}{4}$ số nam nên bằng $\frac{1}{5}$ tổng số.

Số hs nữ đã đi tham quan bằng $\frac{1}{5}$ số nam đã đi tham quan nên bằng $\frac{1}{6}$ tổng số.

Số nữ dự định đi nhiều hơn số nữ đã đi là: $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$ tổng số hay 1 học sinh

Tổng số hs là $1 : \frac{1}{30} = 30$ (học sinh)

Số hs nữ đã đi tham quan là: $30 \cdot \frac{1}{6} = 5$ (học sinh)

Số hs nam đã đi tham quan là: $30 - 25 = 5$ (học sinh).

Bài 18: Tổng bình phương của 3 số tự nhiên là 2596. Biết rằng tỉ số giữa số thứ nhất và số thứ hai là $\frac{2}{3}$, giữa số thứ hai và số thứ ba là $\frac{5}{6}$. Tìm ba số đó.

Lời giải

Gọi a, b, c là 3 số tự nhiên phải tìm.

Theo đề bài ta có: $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}; \frac{b}{c} = \frac{5}{6}$ (1) và $a^2 + b^2 + c^2 = 2596$ (2)

Từ (1) suy ra $a = \frac{2}{3}b; c = \frac{6}{5}b$, thay vào (2) ta có

$$\frac{4}{9}b^2 + b^2 + \frac{36}{25}b^2 = 2596$$

$$\frac{649}{225}b^2 = 2596$$

$$b^2 = 900$$

Tính được $b = 30, a = \frac{2}{3} \cdot 30 = 20; c = \frac{6}{5} \cdot 30 = 36$.

Vậy 3 số tự nhiên cần tìm là: 30; 20; 36.

Bài 19: Sau buổi biểu diễn văn nghệ, nhà trường tặng cam cho các tiết mục. Lần đầu tiết mục đồng ca hết $\frac{5}{6}$ số cam và $\frac{1}{6}$ quả; lần 2 tặng tiết mục tốp ca hết $\frac{6}{7}$ số cam còn lại và $\frac{1}{7}$ quả; lần 3 tặng tiết mục đơn ca hết $\frac{3}{4}$ số cam còn lại lần 2 và $\frac{1}{4}$ quả thì vừa hết. Tính số cam trường đó đã tặng và số cam riêng cho các tiết mục đồng ca, tốp ca và đơn ca.

Lời giải

Nhận xét: $\frac{1}{4}$ quả cuối cùng chính là $\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ số cam còn lại sau lần 3. Vậy bài này phải tính ngược từ dưới lên.

Tiết mục đơn ca được tặng $\frac{1}{4} : \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{1} = 1$ (quả).

Tương tự trên, tiết mục đơn ca và tốp ca được tặng: $\left(\frac{1}{7} + 1\right) : \frac{1}{7} = 8$ (quả).

Tương tự số cam của trường đó đã tặng: $\left(8 + \frac{1}{6}\right) : \frac{1}{6} = 49$ (quả)

Số cam tặng tiết mục tốp ca : $8 - 1 = 7$ (quả)

Số cam tặng tiết mục đồng ca : $49 - 8 = 41$ (quả).

Bài 20: Trong một buổi đi tham quan, số nữ đăng kí tham gia bằng $\frac{1}{4}$ số nam. Nhưng sau đó có một bạn nữ xin nghỉ, một bạn nam xin đi thêm nên số nữ đi tham quan bằng $\frac{1}{5}$ số nam. Tính số học sinh nữ và nam đã đi tham quan.

Lời giải

Tổng số học sinh nam và nữ dự định đi tham quan và đã đi tham quan là như nhau, ta lấy làm đơn vị. Số nữ dự định đi tham quan bằng $\frac{1}{4}$ số nam nên bằng $\frac{1}{5}$ tổng số nam và nữ.

Số nữ đi tham quan bằng $\frac{1}{5}$ số nam nên bằng $\frac{1}{6}$ tổng số nam và nữ.

Số nữ dự định đi nhiều hơn số nữ đã đi là: $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$ (tổng số học sinh) hay $\frac{1}{30}$ tổng số học sinh tương ứng với 1 học sinh.

Tổng số học sinh là: $1 : \frac{1}{30} = 30$ (học sinh)

Số học sinh nữ đã đi tham quan là: $30 \cdot \frac{1}{6} = 5$ (học sinh)

Số học sinh nam đã đi tham quan là: $30 - 5 = 25$ (học sinh)

Vậy có 5 học sinh nữ và 25 học sinh nam đi tham quan.

Bài 21: Hai ô tô cùng xuất phát từ Hà Nội đi Vinh. Ô tô thứ nhất đi từ 4 giờ 10 phút, ô tô thứ hai đi từ lúc 5 giờ 15 phút.

a) Lúc $11\frac{1}{2}$ giờ cùng ngày hai ô tô cách nhau bao nhiêu km? Biết rằng vận tốc của ô tô thứ nhất là 35 km/h. Vận tốc của ô tô thứ hai là $34\frac{1}{2}$ km/h.

b) Khi ô tô thứ nhất đến Vinh thì ô tô thứ hai cách Vinh bao nhiêu Km? Biết rằng Hà Nội cách Vinh 319 km.

Lời giải

a) Thời gian ô tô thứ nhất đã đi: $11\frac{1}{2} - 4\frac{1}{6} = 7 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = 7 + \frac{1}{3} = 7\frac{1}{3}$ (giờ)

Quãng đường ô tô thứ nhất đã đi được: $35 \cdot 7\frac{1}{3} = 256\frac{2}{3}$ (km)

Thời gian ô tô thứ hai đã đi: $11\frac{1}{2} - 5\frac{1}{4} = 6\frac{1}{4}$ (giờ)

Quãng đường ô tô thứ hai đã đi: $34\frac{1}{2} \cdot 6\frac{1}{4} = 215\frac{5}{8}$ (km)

Lúc 11 giờ 30 phút cùng ngày hai ô tô cách nhau: $256\frac{2}{3} - 215\frac{5}{8} = 41\frac{1}{24}$ (km)

b) Thời gian ô tô thứ nhất đến Vinh là: $319 : 35 = 9\frac{4}{35}$ (giờ)

Ô tô đến Vinh vào lúc: $4\frac{1}{6} + 9\frac{4}{35} = 13\frac{59}{210}$ (giờ)

Khi ô tô thứ nhất đến Vinh thì thời gian ô tô thứ hai đã đi:

$13\frac{59}{210} - 5\frac{1}{4} = 7 + \frac{269}{210} - \frac{1}{4} = 7 + \frac{538}{420} - \frac{105}{420} = 7\frac{433}{420}$ (giờ)

Quãng đường mà ô tô thứ hai đi được: $7\frac{433}{420} \cdot 34\frac{1}{2} \approx 277$ (km)

Vậy ô tô thứ nhất đến Vinh thì ô tô thứ hai cách Vinh là: $319 - 277 = 42$ (km).

Bài 22: Tổng tiền lương của bác công nhân A, B, C là 2500000 đồng. Biết 40% tiền lương của bác A bằng 50% tiền lương của bác B và bằng $\frac{4}{7}$ tiền lương của bác C . Hỏi tiền lương của mỗi bác là bao nhiêu?

Lời giải

$$40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}, \quad 50\% = \frac{1}{2}$$

Quy đồng tử các phân số $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{4}{7}$ được: $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}, \frac{2}{5} = \frac{4}{10}, \frac{4}{7}$

Như vậy: $\frac{4}{10}$ lương của bác A bằng $\frac{4}{8}$ lương của bác B và bằng $\frac{4}{7}$ lương của bác C .

Suy ra, $\frac{1}{10}$ lương của bác A bằng $\frac{1}{8}$ lương của bác B và bằng $\frac{1}{7}$ lương của bác C .

Lương của bác A là : $2500000 : (10 + 8 + 7) \cdot 10 = 1000000$ (đ)

Lương của bác B là : $2500000 : (10 + 8 + 7) \cdot 8 = 800000$ (đ)

Lương của bác C là : $2500000 : (10 + 8 + 7) \cdot 7 = 700000$ (đ).

Bài 23: Một ô tô đi từ A về phía B , một xe máy đi từ B về phía A . Hai xe khởi hành cùng một lúc cho đến khi gặp nhau thì quãng đường ô tô đi được lớn hơn quãng đường của xe máy đi là 50km . Biết 30% quãng đường ô tô đi được bằng 45% quãng đường xe máy đi được. Hỏi quãng đường mỗi xe đi được bằng mấy phần trăm quãng đường AB .

Lời giải

$$30\% = \frac{3}{10} = \frac{9}{30}; \quad 45\% = \frac{9}{20}$$

$\frac{9}{30}$ quãng đường ô tô đi được bằng $\frac{9}{20}$ quãng đường xe máy đi được.

Suy ra, $\frac{1}{30}$ quãng đường ô tô đi được bằng $\frac{1}{20}$ quãng đường xe máy đi được.

Quãng đường ô tô đi được: $50 : (30 - 20) \cdot 30 = 150$ (km)

Quãng đường xe máy đi được: $50 : (30 - 20) \cdot 20 = 100$ (km).

Bài 24: Một lớp học có số học sinh nữ bằng $\frac{5}{3}$ số học sinh nam. Nếu 10 học sinh nam chưa vào lớp thì số học sinh nữ gấp 7 lần số học sinh nam. Tìm số học sinh nam và nữ của lớp đó.

Lời giải

Số học sinh nam bằng $\frac{3}{5}$ số học sinh nữ, nên số HS nam bằng $\frac{3}{8}$ số học sinh cả lớp.

Khi 10 học sinh nam chưa vào lớp thì số học sinh nam bằng $\frac{1}{7}$ số học sinh nữ tức bằng $\frac{1}{8}$ số học sinh cả lớp.

Vậy 10 học sinh biểu thị : $\frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ (học sinh cả lớp)

Nên số học sinh cả lớp là: $10 : \frac{1}{4} = 40$ (học sinh)

Số học sinh nam là : $40 \cdot \frac{3}{8} = 15$ (học sinh)

Số học sinh nữ là : $40 \cdot \frac{5}{8} = 25$ (học sinh).

Bài 15: Có ba thùng gạo. Lấy $\frac{1}{5}$ số gạo ở thùng A đổ vào thùng B, sau đó lấy $\frac{1}{3}$ số gạo có tất cả ở thùng B đổ vào thùng C thì số gạo ở mỗi thùng đều bằng 20kg. Hỏi lúc đầu mỗi thùng có bao nhiêu ki-lô-gam gạo?

Trích đề HSG trường THCS Quế Phú (Quế Sơn) năm 2018 - 2019

Lời giải

Sau khi đổ vào thùng B, số gạo còn lại ở thùng A (so với ban đầu) là: $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ (thùng A)

$\frac{4}{5}$ thùng A bằng 20 kg nên thùng A có: $20 : \frac{4}{5} = 25$ (kg)

Số gạo đã đổ từ A sang B: $25 \cdot \frac{1}{5} = 5$ (kg)

Sau khi đổ vào thùng C, số gạo còn lại ở thùng B (so với lúc chưa đổ qua C): $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}$ thùng B bằng 20 nên thùng B là: $20 : \frac{2}{3} = 30$ (kg)

Thùng B lúc đầu (chưa đổ từ A qua B): $30 - 5 = 25$ (kg)

Số gạo đã đổ từ B sang C: $30 \cdot \frac{1}{3} = 10$ (kg)

Số gạo ban đầu của thùng C: $20 - 10 = 10$ (kg).

Bài 26: Một người đi quãng đường AB dài 20km. Biết rằng 10km đầu người đó đi với vận tốc 20 km/h và 10km sau người đó đi với vận tốc 30 km/h. Hỏi vận tốc trung bình của người đó trên quãng đường AB là bao nhiêu?

Trích đề HSG huyện Vĩnh Tường (Vĩnh Phúc) năm 2019 - 2020

Lời giải

Thời gian người đó đi 10km đầu là $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ (h)

Thời gian người đó đi 10km sau là: $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ (h)

Tổng thời gian người đó đi quãng đường AB là: $20 : \frac{5}{6} = 24$ (km/h).

Bài 27: Xe máy thứ nhất đi từ A đến B mất 4 giờ, xe thứ hai đi từ B đến A mất 3 giờ. Nếu hai xe khởi hành cùng một lúc từ A và B thì sau 1,5 giờ hai xe sẽ còn cách nhau 15km (hai xe chưa gặp nhau). Tính quãng đường AB.

Trích đề HSG huyện Phúc Thọ (Hà Nội) năm 2018 - 2019

Lời giải

Mỗi giờ xe thứ nhất đi được là $1 : 4 = \frac{1}{4}$ (quãng đường AB)

Mỗi giờ xe thứ hai đi được là $1 : 3 = \frac{1}{3}$ (quãng đường AB)

Sau 1,5 giờ cả hai xe đi được $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) \cdot 1,5 = \frac{7}{8}$ (quãng đường AB)

Phần số chỉ 15km là $1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$ (quãng đường AB)

Quãng đường AB là $15 : \frac{1}{8} = 120$ (km)

Bài 28: Một người đi từ A đến B với vận tốc 24 km/h. Một lát sau một người khác cũng đi từ A đến B với vận tốc 40 km/h. Theo dự định hai người sẽ gặp nhau tại B nhưng khi đi được nửa quãng đường AB thì người thứ hai đi tăng vận tốc lên thành 48 km/h. Hỏi hai người sẽ gặp nhau tại địa điểm cách B bao nhiêu km? Biết rằng quãng đường AB dài 160 km.

Trích đề HSG huyện Nga Sơn (Thanh Hoá) năm 2018 - 2019

Lời giải

Hiệu vận tốc của hai người là $40 - 24 = 16$ (km/h)

Thời gian người thứ nhất đi hết quãng đường AB là: $160 : 24 = \frac{20}{3}$ h = 6h 40'

Thời gian người thứ hai đi hết quãng đường AB theo dự kiến: $160 : 40 = 4$ h

Thời gian người thứ nhất đi trước người thứ hai là: $6\text{h}40' - 4\text{h} - 2\text{h}40' = \frac{8}{3}$ h

Quãng đường người thứ nhất đi trước là: $\frac{8}{3} \cdot 24 = 64$ (km)

Khoảng cách giữa hai người khi người thứ hai tăng vận tốc: $64 - 16 \cdot 2 = 32$ (km)

Thời gian từ khi người thứ hai tăng vận tốc đến lúc gặp nhau là: $32 : (48 - 24) = \frac{4}{3}$ h

Đến lúc gặp nhau người thứ hai đã đi quãng đường là: $80 + 48 \cdot \frac{4}{3} = 144$ (km)

Chỗ gặp nhau cách B là: $160 - 144 = 16$ (km)

Bài 29: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết: $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2009}$ và $B = \frac{2008}{1} + \frac{2007}{2} + \frac{2006}{3} + \dots + \frac{1}{2008}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \left(1 + \frac{2007}{2}\right) + \left(1 + \frac{2006}{3}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2008}\right) + 1 = \frac{2009}{2} + \frac{2009}{3} + \frac{2009}{4} + \dots + \frac{2009}{2008} + \frac{2009}{2009} \\ &= 2009 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2008} + \frac{1}{2009}\right) = 2009 \cdot A \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \frac{A}{B} = \frac{A}{2009A} = \frac{1}{2009}.$$

Bài 30: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết: $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}$ và $B = \frac{1}{199} + \frac{2}{198} + \frac{3}{197} + \dots + \frac{198}{2} + \frac{199}{1}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \left(1 + \frac{1}{199}\right) + \left(1 + \frac{2}{198}\right) + \left(1 + \frac{3}{197}\right) + \dots + \left(1 + \frac{198}{2}\right) + 1 = \frac{200}{199} + \frac{200}{198} + \dots + \frac{200}{2} + \frac{200}{200} \\ &= 200 \left(\frac{1}{199} + \frac{1}{198} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{200}\right) = 200 \cdot A \end{aligned}$$

Suy ra $\frac{A}{B} = \frac{A}{200A} = \frac{1}{200}$.

Bài 31: Tính giá trị $\frac{A}{B}$ biết:

$$A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{101.102} \quad \text{và} \quad B = \frac{1}{52.102} + \frac{1}{53.101} + \frac{1}{54.100} + \dots + \frac{1}{102.52} + \frac{2}{77.154}.$$

Lời giải

$$A = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \frac{1}{101} - \frac{1}{102}$$

$$A = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{101} - \frac{1}{102}\right)$$

$$A = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{101} + \frac{1}{102}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{102}\right).$$

$$A = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{102}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{51}\right)$$

$$A = \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{101} + \frac{1}{102}$$

$$A = \left(\frac{1}{52} + \frac{1}{102}\right) + \left(\frac{1}{53} + \frac{1}{101}\right) + \dots + \left(\frac{1}{76} + \frac{1}{78}\right) + \frac{1}{77}$$

$$A = \frac{154}{52.102} + \frac{154}{53.101} + \dots + \frac{154}{76.78} + \frac{154}{77.154}$$

$$A = 154 \left(\frac{1}{52.102} + \frac{1}{53.101} + \dots + \frac{1}{76.78} + \frac{1}{77.154}\right)$$

$$\text{và} \quad B = \left(\frac{1}{52.102} + \frac{1}{102.52}\right) + \left(\frac{1}{53.101} + \frac{1}{101.53}\right) + \dots + \left(\frac{1}{76.78} + \frac{1}{78.76}\right) + \frac{2}{77.154}.$$

$$B = \frac{2}{52.102} + \frac{2}{53.101} + \dots + \frac{2}{76.78} + \frac{2}{77.154}$$

$$B = 2 \left(\frac{1}{52.102} + \frac{1}{53.101} + \dots + \frac{1}{76.78} + \frac{1}{77.154}\right)$$

Suy ra $\frac{A}{B} = \frac{154}{2} = 77$.

Bài 32: Thực hiện phép tính $A = \frac{\frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021}}{5} - \frac{\frac{2}{2021} + \frac{2}{2022} - \frac{2}{2023}}{3} - \frac{\frac{2}{2021} + \frac{2}{2022} - \frac{2}{2023}}{2021 + 2022 - 2023}$

Lời giải

$$A = \frac{\frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021}}{5} - \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2021} + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}\right)}{3} = \frac{1}{5} - \frac{2}{3} = \frac{-7}{15}.$$

Bài 33: Tính $A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2021}}{\frac{2020}{1} + \frac{2019}{2} + \frac{2018}{3} + \dots + \frac{1}{2020}}$.

Lời giải

Nhận thấy mỗi phân số ở mẫu, tổng tử và mẫu đều bằng nhau và bằng 2021.

Nên ta tách 2020 thành 2020 số 1 rồi ghép các số 1 vào các phân số còn lại.

$$\begin{aligned} \text{Ta có} \quad & \frac{2020}{1} + \frac{2019}{2} + \frac{2018}{3} + \dots + \frac{1}{2020} \\ &= \left(1 + \frac{2019}{2}\right) + \left(1 + \frac{2018}{3}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2020}\right) + 1. \\ &= \frac{2021}{2} + \frac{2021}{3} + \dots + \frac{2021}{2020} + \frac{2021}{2021} \\ &= 2021 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2021} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2021}}{2021 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2021} \right)} = \frac{1}{2021}.$$

Bài 34: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết: $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2009}$ và $B = \frac{2008}{1} + \frac{2007}{2} + \frac{2006}{3} + \dots + \frac{1}{2008}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \left(1 + \frac{2007}{2}\right) + \left(1 + \frac{2006}{3}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2008}\right) + 1 \\ &= \frac{2009}{2} + \frac{2009}{3} + \frac{2009}{4} + \dots + \frac{2009}{2008} + \frac{2009}{2009}. \\ &= 2009 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2008} + \frac{1}{2009} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } \frac{A}{B} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2009}}{2009 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2009} \right)} = \frac{1}{2009}$$

Bài 35: Cho phân số $\frac{a}{b}$ ($a < b$) cùng thêm m đơn vị vào tử và mẫu thì phân số mới lớn hơn hay bé hơn $\frac{a}{b}$?

Trích đề HSG cấp trường năm 2017-2018

Lời giải

Theo bài toán cho $a < b$ nên $am < bm$.

Do đó: $ab + am < ab + bm$ hay $a(b+m) < b(a+m)$

$$\text{Vậy } \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}.$$

Bài 36: Trên con đường đi qua 3 địa điểm A, B, C (B nằm giữa A và C), có hai người đi xe máy là Hùng và Dũng. Hùng xuất phát từ A , Dũng xuất phát từ B . Họ cùng khởi hành lúc 8 giờ để cùng đến C vào lúc 11 giờ cùng ngày. Ninh đi xe đạp từ C về phía A , gặp Dũng lúc 9 giờ và gặp Hùng lúc 9 giờ 24 phút. Biết quãng đường AB dài 30km, vận tốc của Ninh bằng $\frac{1}{4}$ vận tốc của Hùng. Tính quãng đường BC .

Trích đề HSG cấp trường năm 2019-2020

Lời giải

Thời gian đi từ A đến C của Hùng là: $11 - 8 = 3$ (giờ)

Thời gian đi từ B đến C của Dũng là: $11-8=3$ (giờ)

Quãng đường AB là 30km, do đó cứ 1 giờ khoảng cách của Hùng và Dũng bớt đi 10km.

Vì vậy lúc 9 giờ Hùng còn cách Dũng là 20 km, lúc đó Ninh gặp Dũng nên Ninh cũng cách Hùng 20 km.

Đến 9 giờ 24 phút, Ninh gặp Hùng do đó tổng vận tốc của Ninh và Hùng là:

$$20 : \frac{24}{60} = 50 \text{ (km/h)}$$

Do vận tốc của Ninh bằng $\frac{1}{4}$ vận tốc của Hùng nên vận tốc của Hùng là:

$$[50 : (1 + \frac{1}{4})] \cdot 4 = 40 \text{ (km/h)}$$

Suy ra quãng đường BC là: $40 \cdot 3 - 30 = 90$ (km).

Bài 37: Tích của hai phân số là $\frac{8}{15}$. Thêm 4 đơn vị vào phân số thứ nhất thì tích mới là $\frac{56}{15}$. Tìm hai phân số đó.

Trích đề HSG cấp trường năm 2019-2020

Lời giải

Tích của hai phân số là $\frac{8}{15}$.

Thêm 4 đơn vị vào phân số thứ nhất thì tích mới là $\frac{56}{15} - \frac{8}{15} = \frac{48}{15}$ đây chính là 4 lần phân số thứ hai.

Suy ra phân số thứ hai là: $\frac{48}{15} : 4 = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

Do đó: phân số thứ nhất là: $\frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$.

Bài 38: Tổng số trang của 8 quyển vở loại 1, 9 quyển vở loại 2 và 5 quyển vở loại 3 là 1980 trang.

Số trang của một quyển vở loại 2 chỉ bằng $\frac{2}{3}$ số trang của 1 quyển vở loại 1. Số trang của 4 quyển vở

loại 3 bằng số trang của 3 quyển vở loại 2. Tính số trang của mỗi quyển vở mỗi loại.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Vì số trang của mỗi quyển vở loại 2 bằng $\frac{2}{3}$ số trang của 1 quyển vở loại 1.

Nên số trang của 3 quyển vở loại 2 bằng số trang của 2 quyển loại 1.

Mà số trang của 4 quyển vở loại 3 bằng 3 quyển vở loại 2.

Nên số trang của 2 quyển vở loại 1 bằng số trang 4 quyển vở loại 3.

Do đó số trang 8 quyển vở loại 1: $4 \cdot 8 : 2 = 16$ (quyển loại 3)

Số trang của 9 quyển loại 2 bằng: $9 \cdot 4 : 3 = 12$ (quyển loại 3)

Vậy 1980 trang chính là số trang của $16+12+5=33$ (quyển loại 3)

Suy ra: Số trang 1 quyển vở loại 3: $1980:33=60$ (trang)

Số trang 1 quyển vở loại 2: $\frac{60.4}{3}=80$ (trang).

Số trang 1 quyển vở loại 1: $\frac{80.3}{2}=120$ (trang).

Bài 39: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết

$$A = \frac{1}{1.101} + \frac{1}{2.102} + \frac{1}{3.103} + \dots + \frac{1}{10.110} \quad \text{và} \quad B = \frac{1}{1.11} + \frac{1}{2.12} + \frac{1}{3.13} + \dots + \frac{1}{100.110}.$$

Lời giải

$$100.A = \frac{100}{1.101} + \frac{100}{2.102} + \frac{100}{3.103} + \dots + \frac{100}{10.110}$$

$$100.A = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{101}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{102}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{103}\right) + \dots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{110}\right)$$

$$100.A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10}\right) - \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{110}\right)$$

Và

$$10.B = \frac{10}{1.11} + \frac{10}{2.12} + \frac{10}{3.13} + \dots + \frac{10}{100.110}$$

$$10.B = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{13}\right) + \dots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{110}\right)$$

$$10.B = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}\right) - \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{110}\right)$$

$$10.B = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10}\right) - \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{110}\right)$$

$$\text{Suy ra: } \frac{A}{B} = \frac{1}{10}.$$

Bài 40: Cho $A = \frac{34}{7.13} + \frac{51}{13.22} + \frac{85}{22.37} + \frac{68}{37.49}$ và $B = \frac{39}{7.16} + \frac{65}{16.31} + \frac{52}{31.43} + \frac{26}{43.49}$. Tính tỉ số $\frac{A}{B}$

Lời giải

$$A = 17. \left(\frac{2}{7.13} + \frac{3}{13.22} + \frac{5}{22.37} + \frac{4}{37.49} \right)$$

$$3.A = 17. \left(\frac{6}{7.13} + \frac{9}{13.22} + \frac{15}{22.37} + \frac{12}{37.49} \right)$$

$$3.A = 17. \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{22} + \frac{1}{22} - \frac{1}{37} + \frac{1}{37} - \frac{1}{49} \right)$$

$$3.A = 17. \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{49} \right).$$

$$B = 13. \left(\frac{3}{7.16} + \frac{5}{16.31} + \frac{4}{31.43} + \frac{2}{43.49} \right)$$

$$3.B = 13. \left(\frac{9}{7.16} + \frac{15}{16.31} + \frac{12}{31.43} + \frac{6}{43.49} \right)$$

$$3.B = 13. \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{31} + \frac{1}{31} - \frac{1}{43} + \frac{1}{43} - \frac{1}{49} \right)$$

$$3.B = 13 \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{49} \right).$$

$$\text{Vậy } \frac{3.A}{3.B} = \frac{17}{13} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{17}{13}.$$

$$\text{Bài 41: Tính } A = \frac{101+100+99+\dots+3+2+1}{101-100+99-\dots+3-2+1}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } 1+2+3+\dots+100+101 = \frac{(101+1) \cdot 101}{2} = 51 \cdot 101$$

$$\begin{aligned} \text{Và } 101-100+99-\dots+3-2+1 \\ &= (101-100) + (99-98) + \dots + (3-2) + 1 \\ &= 1+1+\dots+1+1 = 51 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{51 \cdot 101}{51} = 101.$$

$$\text{Bài 42: Tính } A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}}{\frac{1}{99} + \frac{1}{98} + \frac{1}{97} + \dots + \frac{1}{1}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{99}{1} + \frac{98}{2} + \frac{97}{3} + \dots + \frac{1}{99} \\ &= \left(1 + \frac{98}{2} \right) + \left(1 + \frac{97}{3} \right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{99} \right) + 1 \\ &= \frac{100}{2} + \frac{100}{3} + \dots + \frac{100}{99} + \frac{100}{100}. \\ &= 100 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } A = \frac{1}{100}.$$

$$\text{Bài 43: Tính tỉ số } \frac{A}{B} \text{ biết } A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200} \text{ và } B = \frac{1}{199} + \frac{2}{198} + \frac{3}{197} + \dots + \frac{198}{2} + \frac{199}{1}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \left(1 + \frac{1}{199} \right) + \left(1 + \frac{2}{198} \right) + \left(1 + \frac{3}{197} \right) + \dots + \left(1 + \frac{198}{2} \right) + 1. \\ &= \frac{200}{199} + \frac{200}{198} + \dots + \frac{200}{2} + \frac{200}{200} = 200 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } \frac{A}{B} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}}{200 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200} \right)} = \frac{1}{200}.$$

$$A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}}{100 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} \right)} = \frac{1}{100}.$$

$$\text{Bài 44: Tính tỉ số } \frac{A}{B} \text{ biết } A = \frac{1}{2012} + \frac{2}{2011} + \dots + \frac{2011}{2} + \frac{2011}{1} \text{ và } B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2013}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{1}{2012} + 1\right) + \left(\frac{2}{2011} + 1\right) + \dots + \left(\frac{2011}{2} + 1\right) + 1 \\
 &= \frac{2013}{2012} + \frac{2013}{2011} + \dots + \frac{2013}{2} + \frac{2013}{2013} \\
 &= 2013 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2013}\right).
 \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } \frac{A}{B} = \frac{2013 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2013}\right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2013}} = 2013.$$

Bài 45: Cho $P = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022}$ và $Q = \frac{1}{1012} + \frac{1}{1013} + \frac{1}{1014} + \dots + \frac{1}{2021} + \frac{1}{2022}$.

Tính tỉ số $\frac{P}{Q}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 P &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2021}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2022}\right) \\
 P &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022}\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2022}\right) \\
 P &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1011}\right) \\
 P &= \frac{1}{1012} + \frac{1}{1013} + \frac{1}{1014} + \dots + \frac{1}{2022}
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{P}{Q} = 1.$$

Bài 46: Trong một trường học số học sinh nữ bằng $\frac{6}{5}$ số học sinh nam.

- Tính xem số học sinh nữ bằng mấy phần số học sinh toàn trường.
- Nếu số học sinh toàn trường là 1210 em thì trường đó có bao nhiêu học sinh nam, bao nhiêu học sinh nữ.

Lời giải:

a) Theo đề bài trong trường cứ 5 phần học sinh nam thì có 6 phần học sinh nữ. Như vậy nếu học sinh toàn trường là 11 phần thì số học sinh nữ chiếm 6 phần, nên số học sinh nữ bằng $\frac{6}{11}$ số học sinh toàn trường.

b) Nếu số học sinh toàn trường là 1210 em thì

$$\text{Số học sinh nữ là: } 1210 \cdot \frac{6}{11} = 660 \text{ (em)}$$

$$\text{Số học sinh nam là: } 1210 - 660 = 550 \text{ (em)}.$$

Bài 47: Ba lớp 6 có 102 học sinh. Số học sinh lớp A bằng $\frac{8}{9}$ số học sinh lớp B, số học sinh lớp C bằng

$\frac{17}{16}$ số học sinh lớp A. Hỏi mỗi lớp có bao nhiêu học sinh?

Lời giải:

Số học sinh lớp B bằng $\frac{9}{8}$ số học sinh lớp A (hay bằng $\frac{18}{16}$).

Số học sinh lớp C bằng $\frac{17}{16}$ số học sinh lớp A.

$$\text{Tổng số phần của 3 lớp là: } 16 + 18 + 17 = 51$$

Số học sinh lớp A là: $(102 : 51) \cdot 16 = 32$ (học sinh)

Số học sinh lớp B là: $(102 : 51) \cdot 18 = 36$ (học sinh)

Số học sinh lớp C là: $(102 : 51) \cdot 17 = 34$ (học sinh).

Bài 48: Ba tổ công nhân trồng được tất cả 286 cây ở công viên. Số cây tổ 1 trồng được bằng $\frac{9}{10}$ số cây tổ 2 và số cây tổ 3 trồng được bằng $\frac{24}{25}$ số cây tổ 2. Hỏi mỗi tổ trồng được bao nhiêu cây?

Lời giải:

Số cây tổ 1 bằng $\frac{9}{10}$ số cây tổ 2 (hay bằng $\frac{45}{50}$).

Số cây tổ 3 bằng $\frac{24}{25}$ số cây tổ 2 (hay bằng $\frac{48}{50}$).

Như vậy nếu số cây tổ 2 là 50 phần thì số cây tổ 1 là 45 phần, số cây tổ 3 là 48 phần.

Tổng số phần của 3 tổ là: $50 + 45 + 48 = 143$

Số cây tổ 1 trồng là: $(286 : 143) \cdot 45 = 90$ (cây).

Số cây tổ 2 trồng là: $(286 : 143) \cdot 50 = 100$ (cây).

Số cây tổ 3 trồng là: $(286 : 143) \cdot 48 = 96$ (cây).

Bài 49: Mẹ hơn con 24 tuổi. Cách đây 4 năm tuổi con bằng $\frac{1}{4}$ tuổi mẹ. Hỏi hiện nay mỗi người bao nhiêu tuổi?

Lời giải:

Hiệu số tuổi của hai mẹ con không thay đổi theo thời gian nên cách đây 4 năm mẹ vẫn hơn con 24 tuổi. Ta có sơ đồ khi đó:

Tuổi con: |-----|

Tuổi mẹ: |-----|-----|-----|-----|

Theo sơ đồ tuổi mẹ cách đây 4 năm là: $24 : (4 - 1) \cdot 4 = 32$ (tuổi)

Vì mỗi năm mỗi người tăng lên 1 tuổi nên hiện nay tuổi mẹ là:

$32 + 4 \cdot 1 = 36$ (tuổi)

Tuổi con hiện nay là: $36 - 24 = 12$ (tuổi).

Bài 50: Tổng số trang của 8 quyển vở loại 1 ; 9 quyển vở loại 2 và 5 quyển vở loại 3 là 1980 trang. Số trang của một quyển vở loại 2 chỉ bằng $\frac{2}{3}$ số trang của 1 quyển vở loại 1. Số trang của 4 quyển vở loại 3 bằng số trang của 3 quyển vở loại 2. Tính số trang của mỗi quyển vở mỗi loại.

Lời giải:

Vì số trang của mỗi quyển vở loại 2 bằng $\frac{2}{3}$ số trang của 1 quyển loại 1. Nên số trang của 3 quyển

loại 2 bằng số trang của 2 quyển loại 1

Mà số trang của 4 quyển loại 3 bằng 3 quyển loại 2.

Nên số trang của 2 quyển loại 1 bằng số trang của 4 quyển loại 3

Do đó số trang của 8 quyển loại 1 là $4 \cdot 8 : 2 = 16$ (quyển loại 3)

Số trang của 9 quyển loại 2 là $9 \cdot 4 : 3 = 12$ (quyển loại 3)

Vậy 1980 chính là số trang của $16 + 12 + 15 = 33$ (quyển loại 3)

Suy ra: Số trang 1 quyển vở loại 3 là $1980 : 33 = 60$ (trang)

Số trang 1 quyển vở loại 2 là $\frac{60 \cdot 2}{3} = 80$ (trang)

Số trang 1 quyển vở loại 1 là $\frac{80 \cdot 3}{2} = 120$ (trang).

Bài 51: Bạn Nam hỏi tuổi của bố. Bố bạn Nam trả lời: “Nếu bố sống đến 100 tuổi thì $\frac{6}{7}$ của $\frac{7}{10}$ số

tuổi của bố sẽ lớn hơn $\frac{2}{5}$ của $\frac{7}{8}$ thời gian bố phải sống là 3 năm”. Hỏi bố của bạn Nam bao nhiêu tuổi?

Lời giải:

Ta có: $\frac{6}{7}$ của $\frac{7}{10}$ là $\frac{6}{7} \cdot \frac{7}{10} = \frac{3}{5}$

$\frac{2}{5}$ của $\frac{7}{8}$ là $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{20}$

Gọi số tuổi bố của bạn Nam là x ($x \in \mathbb{N}^*$)

Khi đó thời gian bố phải sống là $100 - x$ ($x < 100$)

Theo bài ra ta có:

$$\frac{3}{5}x = \frac{7}{20}(100 - x) + 3$$

$$12x = 700 - 7x + 60$$

$$19x = 760$$

$$x = 40 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy bố của bạn Nam 40 tuổi.

Bài 52: Lớp 6A có số học sinh Giỏi và Khá chiếm $\frac{7}{12}$ số học sinh cả lớp. Số học sinh Giỏi và Trung bình chiếm $\frac{5}{8}$ số học sinh cả lớp. Số học sinh Khá và Trung bình có 34 bạn, số học sinh giỏi hơn số học sinh Yếu là 10 bạn, lớp không có học sinh kém. Hỏi lớp 6A có bao nhiêu bạn học sinh Giỏi? bao nhiêu học sinh khá? bao nhiêu học sinh Trung bình?

Lời giải:

Phần số chỉ số học sinh giỏi hơn yếu là: $\left(\frac{7}{12} + \frac{5}{8}\right) - 1 = \frac{5}{24}$ (học sinh cả lớp)

Số học sinh cả lớp là: $10 \cdot \frac{24}{5} = 48$ (học sinh)

Số học sinh giỏi và yếu là: $48 - 34 = 14$ (học sinh)

Số học sinh giỏi là: $(14 + 10) : 2 = 12$ (học sinh)

Số học sinh yếu là: $12 - 10 = 2$ (học sinh)

Số học sinh giỏi và trung bình là: $48 \cdot \frac{5}{8} = 30$ (học sinh)

Số học sinh trung bình là: $30 - 12 = 18$ (học sinh)

Số học sinh khá là: $48 - (18 + 2 + 14) = 16$ (học sinh).

Bài 53: Trong một buổi đi tham quan, số nữ đăng ký tham gia bằng $\frac{1}{4}$ số nam. Nhưng sau đó 1 bạn nữ xin nghỉ, 1 bạn nam xin đi thêm nên số nữ đi tham quan bằng $\frac{1}{5}$ số nam. Tính số học sinh nữ và học sinh nam đã đi tham quan.

Lời giải:

Tổng số học sinh nam và nữ dự định đi tham quan và đã đi tham quan là như nhau nên ta lấy làm đơn vị.

Số học sinh nữ đăng ký đi tham quan bằng $\frac{1}{4}$ số nam nên bằng $\frac{1}{5}$ tổng số học sinh.

Số học sinh nữ đã đi tham quan bằng $\frac{1}{5}$ số nam đã đi tham quan nên bằng $\frac{1}{6}$ tổng số học sinh.

Số nữ dự định đi nhiều hơn số nữ đã đi là: $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$ tổng số học sinh.

Tổng số học sinh là: $1 : \frac{1}{30} = 30$ (học sinh)

Số học sinh nữ đã đi tham quan: $30 \cdot \frac{1}{6} = 5$ (học sinh)

Số học sinh nam đã đi tham quan: $30 - 25 = 5$ (học sinh).

Bài 54: Số sách ở ngăn A bằng $\frac{2}{3}$ số sách ở ngăn B. Nếu chuyển 3 quyển từ ngăn A sang ngăn B thì số sách ở ngăn A bằng $\frac{3}{7}$ số sách ở ngăn B. Tìm số sách ở mỗi ngăn.

Lời giải:

Số sách ở ngăn A bằng $\frac{2}{3}$ số sách ở ngăn B thì số sách ở ngăn A bằng $\frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$ số sách cả 2 ngăn.

Sau khi chuyển 3 quyển từ ngăn A sang ngăn B thì số sách ngăn A bằng $\frac{3}{7}$ số sách ở ngăn B hay bằng $\frac{3}{3+7} = \frac{3}{10}$ số sách cả hai ngăn.

Vì số sách ngăn A ban đầu hơn số sách ở ngăn A sau khi chuyển là 3 quyển. Nên ta có phân số chỉ 3 quyển là: $\frac{2}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$

Số sách cả hai ngăn là: $3 : \frac{1}{10} = 30$ (quyển)

Số sách ở ngăn A là: $30 \cdot \frac{2}{5} = 12$ (quyển)

Số sách ngăn B là: $30 - 12 = 18$ (quyển).

Bài 55: Một lớp học có số học sinh nữ bằng $\frac{5}{3}$ số học sinh nam. Nếu 10 học sinh nam chưa vào lớp thì số học sinh nữ gấp 7 lần số học sinh nam. Tìm số học sinh nam và nữ của lớp đó.

Lời giải:

Số học sinh nữ bằng $\frac{5}{3}$ số học sinh nam, nên số học sinh nam bằng $\frac{3}{8}$ số học sinh cả lớp.

Khi 10 học sinh nam chưa vào lớp thì số học sinh nam bằng $\frac{1}{7}$ số học sinh nữ, nên số học sinh nam bằng $\frac{1}{8}$ số học sinh cả lớp.

Vậy 10 học sinh biểu thị $\frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ học sinh cả lớp.

Số học sinh cả lớp là: $10 : \frac{1}{4} = 40$ (học sinh).

Số học sinh nam là: $40 \cdot \frac{3}{8} = 15$ (học sinh).

Số học sinh nữ là: $40 - 15 = 25$ (học sinh).

Bài 56: Một bà đi chợ bán trứng, lần đầu bà bán được $\frac{2}{5}$ số trứng, lần thứ hai bà bán được $\frac{2}{3}$ số trứng còn lại, cuối cùng còn lại 10 quả. Hỏi số trứng ban đầu bà đem đi bán là bao nhiêu quả?

Lời giải

Số trứng còn lại sau lần bán thứ nhất:

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \text{ (số trứng ban đầu)}$$

Số trứng bán được ở lần bán thứ hai:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5} \text{ (số trứng ban đầu)}$$

10 quả trứng ứng với số phần:

$$1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5} \right) = \frac{1}{5} \text{ (số trứng ban đầu)}$$

Vậy ban đầu có:

$$10 : \frac{1}{5} = 50 \text{ (quả trứng).}$$

Đáp số: 50 quả trứng

Bài 57: Ban đầu trong thư viện có số sách khoa học tự nhiên bằng $\frac{4}{5}$ số sách khoa học xã hội, vì thư viện mới cho mượn 40 quyển sách khoa học tự nhiên nên số sách khoa học tự nhiên bằng $\frac{4}{15}$ số sách khoa học xã hội. Hỏi ban đầu thư viện có bao nhiêu quyển sách mỗi loại.

Lời giải

40 quyển sách khoa học tự nhiên bằng:

$$\frac{4}{5} - \frac{4}{15} = \frac{8}{15} \text{ (số sách KHXH)}$$

Số sách KHXH là:

$$40 : \frac{8}{15} = 75 \text{ (quyển)}$$

Số sách KHTN ban đầu là:

$$75 \cdot \frac{4}{5} = 60 \text{ (quyển)}$$

Đáp số: KHTN: 60 quyển; KHXH: 75 quyển

Bài 58: Hiện nay tuổi cháu bằng $\frac{5}{14}$ tuổi bà, cách đây 10 năm tuổi bà gấp 4 lần tuổi cháu. Tính tuổi bà và tuổi cháu hiện nay.

Lời giải

Chú ý: hiệu số tuổi của bà và cháu không đổi.

Hiện nay tuổi cháu bằng $\frac{5}{14-5} = \frac{5}{9}$ (hiệu tuổi bà và cháu)

Cách đây 10 năm tuổi cháu bằng $\frac{1}{4}$ tuổi bà hay tuổi cháu bằng $\frac{1}{3}$ hiệu tuổi bà và cháu, do đó 10 năm

ứng với:

$$\frac{5}{9} - \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \text{ (hiệu tuổi bà và cháu).}$$

Hiệu tuổi bà và cháu là:

$$10 : \frac{2}{9} = 45 \text{ (tuổi)}$$

Tuổi cháu hiện nay là:

$$45 : \frac{5}{9} = 25 \text{ (tuổi)}$$

Tuổi bà hiện nay là:

$$25 + 45 = 70 \text{ (tuổi)}$$

Đáp số: Cháu: 25 tuổi, Bà: 70 tuổi

Bài 59: Tìm 2 số biết rằng 70% số lớn hơn 85% số bé là 1 đơn vị và 68% số lớn hơn 42,5% số bé là 17 đơn vị.

Lời giải

Vì 68% số lớn hơn 42,5% số bé là 17 đơn vị nên 136% số lớn hơn 85% là 34 đơn vị, mà 70% số lớn hơn 85% số bé là 1 đơn vị, nên suy ra:

$$136\% - 70\% = 66\% \text{ số lớn là bằng } 34 - 1 = 33 \text{ đơn vị}$$

Vậy số lớn bằng:

$$33 : 66\% = 50$$

$$85\% \text{ số bé bằng } (70\% \text{ của } 50) - 1 = 50 \cdot 70\% - 1 = 34$$

Do đó số bé bằng:

$$34 : 85\% = 40$$

Bài 60: Một cái sân chơi hình chữ nhật, biết 40% chiều rộng bằng $\frac{2}{9}$ chiều dài, và chiều dài của sân là 90m. Tính chu vi, diện tích của cái sân đó.

Lời giải

$\frac{2}{9}$ chiều dài sân là:

$$90 \cdot \frac{2}{9} = 20(m)$$

Chiều rộng sân là:

$$20 : 40\% = 50(m)$$

Chu vi sân là:

$$(90 + 50) \cdot 2 = 280(m)$$

Diện tích sân là:

$$90 \cdot 50 = 4500(m^2)$$

Đáp số: 280m; 4500m²

Bài 61: Lượng nước trong cỏ tươi 60% , trong cỏ khô là 15% . Hỏi một tấn cỏ tươi có bao nhiêu cỏ khô?

Lời giải

Lượng cỏ nguyên chất trong cỏ tươi chiếm:

$$100\% - 60\% = 40\%$$

Lượng cỏ nguyên chất trong cỏ khô chiếm:

$$100\% - 15\% = 85\%$$

1 tấn cỏ tươi cho số cỏ nguyên chất là:

$$1000.40\% = 400 \text{ (kg)}$$

Vậy 1 tấn cỏ tươi cho số kg cỏ khô là:

$$400.85\% = \frac{8000}{17} \text{ (kg)}$$

$$\text{Đáp số: } \frac{8000}{17} \text{ kg} = \frac{8}{17} \text{ tấn}$$

Bài 62: Tại một phân xưởng lao động, đầu năm số công nhân bậc 2 bằng $\frac{2}{7}$ số công nhân bậc 1. Đến cuối năm có 5 công nhân bậc 1 được lên thành bậc 2 nên số công nhân bậc 2 bằng một nửa số công nhân bậc 1. Tính tổng số công nhân bậc 1 và bậc 2 ở phân xưởng đó.

Lời giải

Đầu năm số công nhân bậc hai chiếm $\frac{2}{2+7} = \frac{2}{9}$ (tổng số công nhân bậc 1, bậc 2)

Cuối năm số công nhân bậc hai chiếm $\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ (tổng số công nhân bậc 1, bậc 2)

5 công nhân ứng với $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$ (tổng số công nhân bậc 1, bậc 2)

Tổng số công nhân bậc 1 và bậc 2 ở phân xưởng đó là: $5 : \frac{1}{9} = 45$ (công nhân)

Đáp số: 45 công nhân

Bài 63: Số sách ở ngăn A bằng $\frac{2}{5}$ tổng số sách ở ngăn A và B. Sau đó người ta bỏ sung vào ngăn A thêm 3 quyển sách nữa thì số sách ở ngăn A tổng số sách ở 2 ngăn A và B. Tính số sách ban đầu ở mỗi ngăn.

Lời giải

(chú ý: số sách ngăn B không đổi)

Ban đầu số sách ngăn A bằng $\frac{2}{5-2} = \frac{2}{3}$ (số sách ngăn B)

Sau khi bỏ sung 3 quyển thì số sách ngăn A bằng $\frac{5}{11-5} = \frac{5}{6}$ (số sách ngăn B)

Vậy 3 quyển sách ứng với: $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ (số sách ngăn B)

Số sách ngăn B là: $3 : \frac{1}{6} = 18$ (quyển)

Số sách ban đầu ngăn A là: $\frac{3}{2} \cdot 18 = 12$ (quyển)

Đáp số: 12 quyển; 18 quyển.

Bài 64: Ba đội xe phải chở một số bao xi măng cho công trường xây dựng, đội thứ nhất chở được $\frac{2}{5}$ tổng số bao, đội thứ hai chở được 45% số bao còn lại, đội thứ ba chở được 140 bao, như vậy so với quy định cả 3 đội đã chở nhiều hơn 8 bao. Hỏi 3 đội chở được bao nhiêu bao xi măng?

Lời giải

Số bao xi măng đội thứ hai chở được chiếm:

$$45\% \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) = 27\% \text{ (tổng số bao)}$$

Theo quy định số bao xi măng đội thứ ba phải chở chiếm:

$$1 - \frac{2}{5} - 27\% = 33\% \text{ (tổng số bao)}$$

Mà theo quy định thì đội ba phải chở là:

$$140 - 8 = 132 \text{ (bao)}$$

Vậy tổng số bao cả 3 đội phải chở theo quy định là:

$$132 : 33\% = 400 \text{ (bao)}$$

Vậy cả ba đội đã chở được:

$$400 + 8 = 408 \text{ (bao)}$$

Đáp số: 408 bao.

Bài 65: Có một đoạn đường cần phải sửa. Nếu cả 2 người cùng làm thì hết 6 ngày sửa xong, nếu làm một mình người thứ nhất thì sửa xong trong 14 ngày. Hỏi đoạn đường đó dài bao nhiêu mét? Biết rằng mỗi ngày người thứ hai sửa nhanh hơn người thứ nhất là $1,5m$.

Lời giải

Một ngày cả 2 người sửa được $\frac{1}{6}$ quãng đường.

Một ngày người thứ nhất sửa được: $\frac{1}{4}$ quãng đường

Một ngày thứ hai sửa được: $\frac{1}{6} - \frac{1}{14} = \frac{2}{21}$ (quãng đường)

Người thứ hai trong một ngày sửa được nhiều hơn người thứ nhất là:

$$\frac{2}{21} - \frac{1}{14} = \frac{1}{42} \text{ (quãng đường)}$$

Đoạn đường đó dài là: $1,5 : \frac{1}{42} = 63(m)$

Đáp số: $63m$

Bài 66 : Cho $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2017}$; $B = \frac{1}{2016} + \frac{2}{2015} + \frac{3}{2014} + \dots + \frac{2015}{2} + \frac{2016}{1}$. Tính $\frac{A}{B}$

Lời giải

$$B = \frac{1}{2016} + \frac{2}{2015} + \frac{3}{2014} + \dots + \frac{2015}{2} + \frac{2016}{1}$$

$$B = \left(\frac{1}{2016} + 1\right) + \left(\frac{2}{2015} + 1\right) + \left(\frac{3}{2014} + 1\right) + \dots + \left(\frac{2015}{2} + 1\right) + 1$$

$$B = \frac{2017}{2016} + \frac{2017}{2015} + \frac{2017}{2014} + \dots + \frac{2017}{2} + \frac{2017}{1}$$

$$B = 2017 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2017}\right)$$

Do đó $\frac{A}{B} = \frac{1}{2017}$

Bài 67: Cho $A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2022}$; $B = \frac{1}{1012} + \frac{1}{1013} + \dots + \frac{1}{2022}$. Tính $\left(\frac{A}{B}\right)^{2022}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2022} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2022}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1011}\right) \\ &= \frac{1}{1012} + \frac{1}{1013} + \dots + \frac{1}{2022} = B \end{aligned}$$

Suy ra: $\frac{A}{B} = 1$

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{2022} = 1^{2022} = 1$$

Vậy $\left(\frac{A}{B}\right)^{2022} = 1$

Bài 68: Cho $A = \frac{4}{7.31} + \frac{6}{7.41} + \frac{9}{10.41} + \frac{7}{10.57}$ và $B = \frac{7}{19.31} + \frac{5}{19.43} + \frac{3}{23.43} + \frac{11}{23.57}$. Tính tỷ số $\frac{A}{B}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}A &= \frac{4}{35.31} + \frac{6}{35.41} + \frac{9}{50.41} + \frac{7}{50.57} = \frac{1}{31} - \frac{1}{57} \\ \frac{1}{5}A &= \frac{4}{35.31} + \frac{6}{35.41} + \frac{9}{50.41} + \frac{7}{50.57} = \frac{1}{31} - \frac{1}{57} \\ \frac{1}{5}A &= \frac{1}{2}B \text{ suy ra } \frac{A}{B} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Bài 69: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết: $A = 92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100}$ và $B = \frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}$

Lời giải

$$\text{có } A = 92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100} = \left(1 - \frac{1}{9}\right) + \left(1 - \frac{2}{10}\right) + \dots + \left(1 - \frac{92}{100}\right)$$

$$A = \frac{8}{9} + \frac{8}{10} + \dots + \frac{8}{100} = 8\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{100}\right)$$

$$B = \frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{100}\right)$$

Suy ra $\frac{A}{B} = \frac{8}{\frac{1}{5}} = 40$

Vậy $\frac{A}{B} = 40$

Bài 70: Tính $D = \frac{1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+3+\dots+98)}{1.98 + 2.97 + 3.96 + \dots + 98.1}$

Lời giải

$$D = \frac{1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+3+\dots+98)}{1.98 + 2.97 + 3.96 + \dots + 98.1}$$

Tử số của D có 98 số 1; 97 số 2; 96 số 3;.....; 2 số 97 và 1 số 98
 Như vậy tử số của D bằng $1.98 + 2.97 + 3.96 + \dots + 97.2 + 98.1$, bằng mẫu số
 Vậy $D = 1$

Bài 71: Một người mang cam đi chợ bán. Người thứ nhất mua $\frac{1}{6}$ số cam và 5 quả. Người thứ hai mua 20% số cam còn lại và thêm 12 quả. Người thứ ba mua 25% số cam còn lại và thêm 9 quả. Người thứ tư mua $\frac{1}{3}$ số cam còn lại và 12 quả thì vừa hết. Tính số cam người đó mang đi bán ?

Lời giải:

Phần số chỉ 12 quả cam là $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (số cam còn lại sau khi người thứ ba mua)

Số cam còn lại sau khi người thứ ba mua: $12 : \frac{2}{3} = 18$ (quả)

Phần số chỉ $18 + 9 = 27$ quả cam là: $1 - 25\% = \frac{3}{4}$ (số cam còn lại sau khi người thứ hai mua)

Số cam còn lại sau khi người thứ hai mua: $27 : \frac{3}{4} = 36$ (quả)

Phần số chỉ 48 quả cam: $1 - 20\% = \frac{4}{5}$ (số cam còn lại sau khi người thứ nhất mua)

Số cam còn lại sau khi người thứ nhất mua: $48 : \frac{4}{5} = 60$ (quả)

Số cam người đó mang đi bán là $(60 + 5) : \frac{5}{6} = 78$ (quả)

Vậy số cam người đó mang đi bán là 78 (quả)

Bài 72: Trong một đợt phát động quyên góp sách ủng hộ các bạn học sinh vùng lũ, hai lớp 6A và 6B của một trường Trung học cơ sở đã quyên góp được 210 quyển sách giáo khoa Toán 6. Biết rằng số sách quyên góp được của lớp 6A và $\frac{1}{3}$ số sách quyên góp được của lớp 6B bằng số sách quyên góp được của lớp 6B và $\frac{1}{2}$ số sách quyên góp được của lớp 6A. Hỏi mỗi lớp quyên góp được bao nhiêu quyển sách.

Lời giải

Gọi x là số sách quyên góp được của lớp 6A (quyển, $x \in \mathbb{N}^*$, $x < 210$)

Số sách quyên góp được của lớp 6B là: $210 - x$ (quyển)

$\frac{1}{3}$ số sách quyên góp của lớp 6B: $\frac{1}{3}(210 - x) = 70 - \frac{1}{3}x$ (quyển)

$\frac{1}{2}$ số sách quyên góp của lớp 6A: $\frac{1}{2}x$ (quyển)

Theo đề bài ta lập được phương trình sau

$$x + 70 - \frac{1}{3}x = 210 - x + \frac{1}{2}x$$

$$x - \frac{1}{3}x + x - \frac{1}{2}x = 210 - 70$$

$$\frac{7}{6}x = 140$$

$$x = 120 \text{ (nhận)}$$

Vậy số sách quyên góp của lớp 6A là 120 quyển

Số sách quyên góp của lớp 6B là: $210 - 120 = 90$ (quyển)

Bài 73: Hai người đi mua gạo. Người thứ nhất đi mua gạo nếp, người thứ hai đi mua gạo tẻ. Giá gạo tẻ rẻ hơn giá gạo nếp là 20%. Biết khối lượng gạo tẻ mà người thứ hai mua được nhiều hơn khối lượng gạo nếp mà người thứ nhất mua được là 20%. Hỏi người nào trả tiền ít hơn? Ít hơn bao nhiêu phần trăm so với người kia?

Lời giải

Giả sử giá gạo nếp a (đồng / kg); khối lượng gạo nếp mua là b (kg).

Ta có giá gạo tẻ là: $(100\% - 20\%) = \frac{80a}{100}$; (đồng)

Khối lượng gạo tẻ đã mua là $(100\% + 20\%)b = \frac{120}{100}b$ (kg)

Số tiền người thứ nhất phải trả là: $a.b$ (đồng)

Số tiền mà người thứ hai phải trả là: $\frac{80}{100}.a \cdot \frac{120}{100}.b = \frac{96}{100}.ab < ab$

Vậy người thứ hai trả tiền ít hơn người thứ nhất.

Tỉ lệ phần trăm ít hơn là $(ab - \frac{96}{100}.ab) : ab = 4\%$

Bài 74: Giá một cái ti vi là 30000000 đồng. Sau khi giảm giá số lượng tăng lên 25%. Do đó doanh thu tăng 12,5%. Hỏi giá ti vi sau khi giảm giá là bao nhiêu?

Lời giải

Giả sử giá ti vi lúc đầu là 100%, số lượng bán 100%, doanh thu 100%.

Sau khi giảm giá, số lượng bán là: $100\% + 25\% = 125\%$

Doanh thu là: $100\% + 12,5\% = 112,5\%$

Giá ti vi so với giá ban đầu là: $112,5\% : 125 = 90\%$

Giá của chiếc ti vi sau khi giảm giá là: $30000000.90\% = 27000000$ (đồng)

Bài 75: Anh Nguyễn bơi xuôi dòng từ A đến B hết 5 phút, còn bơi ngược dòng từ B về A hết 7 phút. Hỏi cụm bè trôi từ A đến B trong bao lâu?

Lời giải

Trong 1 phút anh Nguyễn bơi xuôi dòng được:

$$1:5 = \frac{1}{5} \text{ (quãng đường } AB \text{)}$$

Trong 1 phút anh Nguyễn bơi ngược dòng được:

$$1:7 = \frac{1}{7} \text{ (quãng đường } AB \text{)}$$

Trong 1 phút cụm bè trôi được:

$$\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) : 2 = \frac{1}{35} \text{ (quãng đường } AB \text{)}$$

Thời gian cụm bè trôi từ A đến B là:

$$1: \frac{1}{35} = 35 \text{ (phút)}$$

Bài 76: Chứng minh rằng $\frac{3n+1}{9n+6}$ là phân số tối giản với mọi $n \in \mathbb{N}$

Lời giải

Gọi d là ƯCLN($3n+1; 9n+6$) ($d \in N^*$)

$$\text{Khi đó : } \begin{cases} 3n+1 : d \\ 9n+6 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(3n+1) : d \\ 9n+6 : d \end{cases}$$

Do đó $(9n+6) - 3(3n+1) : d$ hay $3 : d$

$$\Rightarrow d \in U(3) = \{1; 3\} \text{ (vì } d \in N^*)$$

Vì $3n+1$ không chia hết cho 3, nên $d \neq 3$

Vậy $d = 1$ hay $\frac{3n+1}{9n+6}$ là phân số tối giản.

Bài 77: Cho biểu thức $p = \frac{3n-2}{n+1}$ với ($n \neq -1$)

a) Tìm số nguyên n để biểu thức p nhận giá trị nguyên.

b) Tìm số nguyên n để là phân số p tối giản.

Lời giải

a). Ta có:

$$p = \frac{3n-2}{n+1} = 3 - \frac{5}{n+1}$$

Để p nguyên thì $5 : n+1 \Rightarrow n+1 \in \{-5; -1; 1; 5\} \Rightarrow n \in \{-6; -2; 0; 4\}$

b). Gọi $d \in U_C(3n-2; n+1)$ với $d \in Z; d \neq 0 \Rightarrow (3n-2) : d$ và $(n+1) : d$

$$\Rightarrow (3n+3) - (3n-2) : d \Rightarrow 5 : d \Rightarrow d \in \{-5; -1; 1; 5\}$$

Để p là phân số tối giản thì $(n+1) : 5 \Rightarrow n+1 = 5k$ (với $k \in Z; k \neq 0$)

$$\Rightarrow n = 5k + 1.$$

Bài 78: Tìm các giá trị nguyên của n để phân số $A = \frac{3n+2}{n-1}$ có giá trị là số nguyên.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{3n+2}{n-1} = \frac{3n-3+5}{n-1} = \frac{3(n-1)+5}{n-1} = 3 + \frac{5}{n-1}$$

Để A có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \frac{5}{n-1}$ nguyên.

Mà $\frac{5}{n-1}$ nguyên $\Leftrightarrow 5 \mid (n-1)$ hay $n-1$ là ước của 5

Do $U_5 = \{\pm 1; \pm 5\}$

Ta tìm được $n=2; n=0; n=6, n=-4$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

CHỦ ĐỀ: SO SÁNH PHÂN SỐ

A. PHẦN NỘI DUNG

Các bài toán về tỷ số của hai số; tìm số khi biết giá trị phân số của nó; tìm giá trị phân số của một số; tỷ số phần trăm.

Dạng 1: Các phương pháp so sánh: quy đồng mẫu (tử), sử dụng tính chất bắc cầu, xét phần bù, viết dưới dạng hỗn số, so sánh với 1; sử dụng tính chất: với $a, b, m \in \mathbb{N}^*$ thì:

$$*\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m} \quad *\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}$$

Bài 1: Tính tổng của các phân số lớn hơn $\frac{1}{5}$ nhưng nhỏ hơn $\frac{1}{4}$ và có tử là 4.

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{1}{5} = \frac{4}{20}; \frac{1}{4} = \frac{4}{16}$$

Các phân số lớn hơn $\frac{1}{5}$ nhưng nhỏ hơn $\frac{1}{4}$ và có tử là 4 là: $\frac{4}{17}; \frac{4}{18}; \frac{4}{19}$

$$\text{Tổng các phân số là: } \frac{4}{17} + \frac{4}{18} + \frac{4}{19} = \frac{4}{17} + \frac{2}{9} + \frac{4}{19} = \frac{684}{2907} + \frac{646}{2907} + \frac{612}{2907} = \frac{1942}{2907}$$

Bài 2: Có bao nhiêu cách để viết $\frac{7}{12}$ thành tổng của hai phân số tối giản trong đó mẫu số của hai phân số khác nhau và đều không lớn hơn 12.

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\text{Ta có } 7 = 1+6 = 2+5 = 3+4$$

$$\text{Do đó } \frac{7}{12} = \frac{1+6}{12} = \frac{1}{12} + \frac{1}{2};$$

$$\frac{7}{12} = \frac{2+5}{12} = \frac{1}{6} + \frac{5}{12};$$

$$\frac{7}{12} = \frac{3+4}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$$

Vậy có ba cách viết.

Bài 3: So sánh: $A = \frac{17^8 + 5}{17^8 - 8}$ và $B = \frac{17^8 + 6}{17^8 - 7}$.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021 - 2022

Lời giải

$$A = \frac{17^8 + 5}{17^8 - 8} = \frac{17^8 - 8 + 13}{17^8 - 8} = \frac{17^8 - 8}{17^8 - 8} + \frac{13}{17^8 - 8} = 1 + \frac{13}{17^8 - 8}$$

$$B = \frac{17^8 + 6}{17^8 - 7} = \frac{17^8 - 7 + 13}{17^8 - 7} = \frac{17^8 - 7}{17^8 - 7} + \frac{13}{17^8 - 7} = 1 + \frac{13}{17^8 - 7}$$

Vì $0 < 17^8 - 8 < 17^8 - 7$ nên $\frac{13}{17^8 - 8} > \frac{13}{17^8 - 7}$.

Vậy $1 + \frac{13}{17^8 - 8} > 1 + \frac{13}{17^8 - 7}$ hay $A > B$.

Bài 4: So sánh P và Q , biết: $P = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013}$ và $Q = \frac{2010 + 2011 + 2012}{2011 + 2012 + 2013}$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có: $Q = \frac{2010 + 2011 + 2012}{2011 + 2012 + 2013} = \frac{2010}{2011 + 2012 + 2013} + \frac{2011}{2011 + 2012 + 2013} + \frac{2012}{2011 + 2012 + 2013}$

Ta có: $\frac{2010}{2011 + 2012 + 2013} < \frac{2010}{2011}$

$$\frac{2011}{2011 + 2012 + 2013} < \frac{2011}{2012}$$

$$\frac{2012}{2011 + 2012 + 2013} < \frac{2012}{2013}$$

nên $\frac{2010}{2011 + 2012 + 2013} + \frac{2011}{2011 + 2012 + 2013} + \frac{2012}{2011 + 2012 + 2013} < \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013}$

Kết luận: $P > Q$.

Bài 5: So sánh 2 phân số: $\frac{20072007}{20082008}$ và $\frac{200720072007}{200820082008}$

Trích đề HSG huyện Tỉnh Gia năm 2018-2019

Lời giải

$$\frac{20072007}{20082008} = \frac{2007 \cdot 1001}{2008 \cdot 1001} = \frac{2007}{2008}$$

$$\frac{200720072007}{200820082008} = \frac{2007 \cdot 100010001}{2008 \cdot 100010001} = \frac{2007}{2008}$$

Vậy hai phân số trên bằng nhau

Bài 6: So sánh hai phân số $\frac{a-1}{a}$ và $\frac{b+1}{b}$ (với a, b là số nguyên cùng dấu và $a; b \neq 0$)

Trích đề HSG THCS Phan Đình Phùng năm 2018-2019

Lời giải

Có $\frac{a-1}{a} = 1 - \frac{1}{a}$ và $\frac{b+1}{b} = 1 + \frac{1}{b}$

*Nếu $a > 0, b > 0$ suy ra $\frac{1}{a} > 0$ và $\frac{1}{b} > 0$ suy ra $1 - \frac{1}{a} < 1 + \frac{1}{b}$ hay $\frac{a-1}{a} < \frac{b+1}{b}$

*Nếu $a < 0, b < 0$ suy ra $\frac{1}{a} < 0; \frac{1}{b} < 0$ suy ra $1 - \frac{1}{a} > 1 + \frac{1}{b}$ suy ra $\frac{a-1}{a} > \frac{b+1}{b}$

Bài 7: So sánh

$$\text{a) } M = \frac{77772}{77778} \text{ và } N = \frac{88881}{88889}.$$

$$\text{b) } P = \frac{326}{1955} + \frac{988}{1975} + \frac{662}{1985} \text{ và } Q = \frac{3951}{3950} + \frac{1}{5955} + \frac{1}{11730}.$$

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021 – 2022.

Lời giải

$$\text{a) } M = \frac{77772}{77778} = 1 - \frac{6}{77778} = 1 - \frac{1}{12963} = 1 - \frac{8}{103704}$$

$$N = \frac{88881}{88889} = 1 - \frac{8}{88889}$$

$$\text{Vì } \frac{8}{103704} < \frac{8}{88889} \text{ nên } 1 - \frac{8}{103704} > 1 - \frac{8}{88889}$$

Vậy $M > N$.

$$\text{b) } P = \frac{326}{1955} + \frac{988}{1975} + \frac{662}{1985} \text{ và } Q = \frac{3951}{3950} + \frac{1}{5955} + \frac{1}{11730}$$

$$\text{Ta có: } P = \frac{326}{1955} + \frac{988}{1975} + \frac{662}{1985}$$

$$= \frac{326.6}{1955.6} + \frac{988.2}{1975.2} + \frac{662.3}{1985.3}$$

$$= \frac{1956}{11730} + \frac{1976}{3950} + \frac{1986}{5955}$$

$$= \left(\frac{1}{11730} + \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{3951}{3950} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{5955} + \frac{1}{3} \right)$$

$$= Q + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)$$

$$= Q + 0$$

$$= Q$$

Vậy $P = Q$.

Bài 8: So sánh A và B biết: $A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1},$

$$B = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1}$$

Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015 - 2016

Lời giải

$$\text{Vì } A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < 1$$

$$A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < \frac{17^{18} + 1 + 16}{17^{19} + 1 + 16} = \frac{17 \cdot (17^{17} + 1)}{17 \cdot (17^{18} + 1)} = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1} = B$$

Vậy $A = B$.

Bài 9: Không quy đồng mẫu số, hãy so sánh hai phân số: $\frac{37}{67}$ và $\frac{377}{677}.$

Lời giải

Ta có : $\frac{300}{670} > \frac{300}{677}$ mà $\frac{300}{670} = \frac{30}{67} \Rightarrow \frac{30}{67} > \frac{300}{677}$ (1)

$$1 - \frac{37}{67} = \frac{30}{67} \quad \text{và} \quad 1 - \frac{377}{677} = \frac{300}{677} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) nên $\frac{377}{677} > \frac{37}{67}$.

Bài 10: So sánh A và B biết: $A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1}$, $B = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1}$

Trích đề HSG huyện Lương Tài 2015 – 2016

Lời giải

Vì $A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < 1$ nên $A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < \frac{17^{18} + 1 + 16}{17^{19} + 1 + 16} = \frac{17 \cdot (17^{17} + 1)}{17 \cdot (17^{18} + 1)} = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1} = B$

Bài 11: So sánh A và B biết: $A = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2010}$ và $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{17}$

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2018-2019

Lời giải

$$A = \left(1 - \frac{1}{2011}\right) + \left(1 - \frac{1}{2012}\right) + \left(1 + \frac{2}{2010}\right)$$

$$A = 3 + \left(\frac{1}{2010} - \frac{1}{2011}\right) + \left(\frac{1}{2010} - \frac{1}{2012}\right)$$

$$A > 3$$

$$B = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{17}\right)$$

$$B < \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 5 + \frac{1}{8} \cdot 8 \quad \text{nên} \quad B < 3$$

Từ đó suy ra $A > B$

Bài 12: So sánh: $\frac{201201}{202202}$ và $\frac{201201201}{202202202}$.

Trích đề HSG THCS Lý Tự Trọng năm 2015-2016

Lời giải

Ta có: $\frac{201201}{202202} = \frac{201}{202} \cdot \frac{1001}{1001} = \frac{201}{202}$

$$\frac{201201201}{202202202} = \frac{201}{202} \cdot \frac{1001001}{1001001} = \frac{201}{202}$$

Vậy hai phân số đã cho bằng nhau

Bài 13: So sánh $N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}$ và $M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Lời giải

So sánh:

$$\text{Xét: } N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2006}} + \frac{-7}{10^{2006}}$$

$$\text{Và } M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$$

$$\text{Ta có: } \frac{-8}{10^{2006}} > \frac{-8}{10^{2005}}$$

Vậy $N > M$

Bài 14: Không tính giá trị của các biểu thức. Hãy so sánh: $\frac{1717}{8585}$ và $\frac{1313}{5151}$

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Lời giải

$$\frac{1717}{8585} = \frac{17}{85} = \frac{1}{5} = \frac{13}{51} = \frac{1313}{5151} \Rightarrow \frac{1717}{8585} < \frac{1313}{5151}$$

Bài 15: So sánh: $A = \frac{121212}{171717} + \frac{2}{17} - \frac{404}{1717}$ với $B = \frac{10}{17}$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

$$A = \frac{121212}{171717} + \frac{2}{17} - \frac{404}{1717} = \frac{12}{17} + \frac{2}{17} - \frac{4}{17} = \frac{10}{17} \Rightarrow A = B$$

Vậy $A = B$

Bài 16: So sánh: $\frac{-22}{45}$ và $-\frac{51}{103}$

Trích đề HSG năm 2019-2020

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{22}{45} < \frac{22}{44} = \frac{1}{2} = \frac{51}{102} < \frac{51}{101}$$

$$\frac{22}{45} < \frac{51}{101}$$

$$\frac{-22}{45} > \frac{-51}{101}$$

Bài 17: So sánh: $N = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{11}{10^{2006}}$ và $M = \frac{11}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}}$

Trích đề 59 HSG huyện năm 2018- 2019

Lời giải

$$N = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{11}{10^{2006}} = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{11}{10 \cdot 10^{2005}} = \frac{61}{10} \cdot \frac{1}{10^{2005}}$$

$$M = \frac{11}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}} = \frac{11}{10^{2005}} + \frac{5}{10 \cdot 10^{2005}} = \frac{23}{2} \cdot \frac{1}{10^{2005}}$$

Vì $\frac{23}{2} = 11,5 > 6,1 = \frac{61}{10}$ nên $M > N$

Bài 18: Cho $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$.

Chứng minh $A < \frac{3}{4}$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành, năm 2018- 2019

Lời giải

Ta có: $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$

$$A = \frac{1}{\frac{(1+3).2}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+5).3}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+7).4}{2}} + \dots + \frac{1}{\frac{(1+2017).1009}{2}}$$

$$= \frac{2}{2.4} + \frac{2}{3.6} + \frac{2}{4.8} + \dots + \frac{2}{1009.2018} = \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{1009.1009}$$

$$A < \frac{1}{2.2} + \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{1008.1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1008} - \frac{1}{1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1009} \right) \Rightarrow A < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \Rightarrow A < \frac{3}{4}$$

Bài 19: So sánh S với 3, biết $S = \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013} + \frac{2013}{2011}$

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2018 - 2019

Lời giải

$$S = \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013} + \frac{2013}{2011} = \left(1 - \frac{1}{2012} \right) + \left(1 - \frac{1}{2013} \right) + \left(1 + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2011} \right)$$

$$= 3 + \left(\frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} \right) + \left(\frac{1}{2011} - \frac{1}{2013} \right)$$

$$\text{Do } \frac{1}{2011} > \frac{1}{2012}; \frac{1}{2011} > \frac{1}{2013}$$

$$\text{Nên: } \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} > 0, \frac{1}{2011} - \frac{1}{2013} > 0 \Rightarrow 3 + \left(\frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} \right) + \left(\frac{1}{2011} - \frac{1}{2013} \right) > 3$$

Vậy $S > 3$

Bài 20: Không quy đồng mẫu số hãy so sánh:

$$A = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-19}{10^{2011}}; B = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-19}{10^{2010}}$$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018 -2019

Lời giải

Ta có:

$$A = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-19}{10^{2011}} = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-10}{10^{2011}} + \frac{-9}{10^{2011}}$$

$$B = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-19}{10^{2010}} = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-10}{10^{2010}} + \frac{-9}{10^{2010}}$$

Ta thấy $\frac{-10}{10^{2011}} > \frac{-10}{10^{2010}} \Rightarrow A > B$

Bài 21: So sánh $A = \frac{2011^{2012} + 1}{2011^{2013} + 1}$ với $B = \frac{2011^{2013} + 1}{2011^{2014} + 1}$

Trích đề HSG huyện Quế Sơn năm 2018 - 2019

Lời giải

$$2011A = \frac{2011^{2013} + 2011}{2011^{2013} + 1} = 1 + \frac{2010}{2011^{2013} + 1}; 2011B = \frac{2011^{2014} + 2011}{2011^{2014} + 1} = 1 + \frac{2010}{2011^{2014} + 1}$$

$$2011A > 2011B \Rightarrow A > B$$

Bài 22: So sánh phân số: $\frac{15}{301}$ với $\frac{25}{499}$

Trích đề HSG cấp huyện năm học 2016-2017

Lời giải

$$\frac{15}{301} < \frac{15}{300} = \frac{1}{20} = \frac{25}{500} < \frac{25}{499}. \text{ Vậy } \frac{15}{301} < \frac{25}{499}$$

Bài 23: So sánh $\frac{2011 \cdot 2012 - 1}{2011 \cdot 2012}$ và $\frac{2012 \cdot 2013 - 1}{2012 \cdot 2013}$

Trích đề HSG huyện Đoàn Hùng năm 2018-2019

$$\frac{2011 \cdot 2012 - 1}{2011 \cdot 2012} = 1 - \frac{1}{2011 \cdot 2012} \text{ và } \frac{2012 \cdot 2013 - 1}{2012 \cdot 2013} = 1 - \frac{1}{2012 \cdot 2013}$$

$$\forall i \frac{1}{2011 \cdot 2012} > \frac{1}{2012 \cdot 2013} \Rightarrow \frac{2011 \cdot 2012 - 1}{2011 \cdot 2012} < \frac{2012 \cdot 2013 - 1}{2012 \cdot 2013}$$

Bài 24: So sánh: $\frac{-22}{45}$ và $\frac{-51}{103}$

Trích đề HSG trường Nguyễn Khuyến năm 20... - 20...

Lời giải

$$\frac{22}{45} < \frac{22}{44} = \frac{1}{2} = \frac{51}{102} < \frac{51}{101} \Rightarrow \frac{22}{45} < \frac{51}{101} \Rightarrow \frac{-22}{45} > \frac{-51}{101}$$

Bài 25: So sánh P và Q

$$\text{Biết: } P = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013} \text{ và } Q = \frac{2010 + 2011 + 2012}{2011 + 2012 + 2013}$$

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Lời giải

Ta có:

$$Q = \frac{2010 + 2011 + 2012}{2011 + 2012 + 2013} = \frac{2010}{2011 + 2012 + 2013} + \frac{2011}{2011 + 2012 + 2013} + \frac{2012}{2011 + 2012 + 2013}$$

Lần lượt so sánh từng phân số của P và Q với các tử là: 2010; 2011; 2012 thấy được các phân thức của P đều lớn hơn các phân thức của Q .

Vậy $P > Q$

Bài 26: So sánh A và B biết: $A = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2010}$ và $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{17}$

Lời giải

$$A = \left(1 - \frac{1}{2011}\right) + \left(1 - \frac{1}{2012}\right) + \left(1 + \frac{2}{2010}\right)$$

$$A = 3 + \left(\frac{1}{2010} - \frac{1}{2011}\right) + \left(\frac{1}{2010} - \frac{1}{2012}\right)$$

$$A > 3$$

$$B = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{17}\right)$$

$$B < \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 5 + \frac{1}{8} \cdot 8 \text{ suy ra } B < 3$$

Từ đó suy ra $A < B$

Bài 27: So sánh A và B biết: $A = \frac{2013 \cdot 2014 - 1}{2013 \cdot 2014}$ và $B = \frac{2014 \cdot 2015 - 1}{2014 \cdot 2015}$

Lời giải

Ta có:

$$A = \frac{2013 \cdot 2014 - 1}{2013 \cdot 2014} = 1 - \frac{1}{2013 \cdot 2014}$$

$$B = \frac{2014 \cdot 2015 - 1}{2014 \cdot 2015} = 1 - \frac{1}{2014 \cdot 2015}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{2013 \cdot 2014} > \frac{1}{2014 \cdot 2015} \text{ nên } A < B$$

Bài 28: So sánh P và Q

$$\text{Biết : } P = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013} \text{ và } Q = \frac{2010 + 2011 + 2012}{2011 + 2012 + 2013}$$

Lời giải

Ta có:

$$Q = \frac{2010 + 2011 + 2012}{2011 + 2012 + 2013} = \frac{2010}{2011 + 2012 + 2013} + \frac{2011}{2011 + 2012 + 2013} + \frac{2012}{2011 + 2012 + 2013}$$

Lần lượt so sánh từng phân số của P và Q với các tử là : 2011; 2010; 2012 ta thấy

$$P > Q$$

Dạng 2: So sánh hai lũy thừa

Bài 1: So sánh A và B biết :

$$A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1}, \quad B = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1}$$

Lời giải

$$\text{Vì } A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < 1 \text{ suy ra } A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < \frac{17^{18} + 1 + 16}{17^{19} + 1 + 16} = \frac{17(17^{17} + 1)}{17(17^{18} + 1)} = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1} = B$$

Vậy $A < B$

Bài 2: So sánh:

a) 3^{200} và 2^{300}

b) 71^{50} và 37^{75}

Lời giải

a) Ta có: $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$

$$2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$$

mà $8^{100} < 9^{100}$ nên $2^{300} < 3^{200}$

b) Ta thấy: $71^{50} < 72^{50} = (8.9)^{50} = 2^{150} \cdot 3^{100}$ (1)

$$37^{75} > 36^{75} = (4.9)^{75} = 2^{150} \cdot 3^{150} \quad (2)$$

mà $2^{150} \cdot 3^{150} > 2^{150} \cdot 3^{100}$ (3)

Từ (1), (2), và (3) suy ra: $37^{75} > 71^{50}$

Bài 3: Cho $A = 1 + 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{72}$ và $B = 2012^{73} - 1$. So sánh A và B .

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2018 – 2019.

Lời giải

Ta có: $A = 1 + 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{72}$

$$2012A = 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{72} + 2012^{73}$$

Lấy $2012A - A = 2012^{73} - 1$

$$A = \frac{2012^{73} - 1}{2011} < B = 2012^{73} - 1.$$

Vậy $A < B$.

Bài 4: So sánh : 2^{2013} và 3^{1344} .

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018 -2019

Lời giải

Ta có : $2^{2013} = (2^3)^{671} = 8^{671}$

$$3^{1344} = (3^2)^{672} = 9^{672}$$

Do $8 < 9, 671 < 672 \Rightarrow 8^{671} < 9^{672} \Rightarrow 2^{2013} < 3^{1344}$

Vậy $2^{2013} < 3^{1344}$.

Bài 5: So sánh: $N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}$ và $M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2010 -2011

Lời giải

Xét: $N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2006}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

và: $M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Ta có: $\frac{-8}{10^{2006}} > \frac{-8}{10^{2005}}$

Vậy: $N > M$.

Bài 6: Không tính giá trị của các biểu thức. Hãy so sánh: $9^8 \cdot 5^{16}$ và 19^{20}

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Lời giải

Ta có $9^8 \cdot 5^{16} = 3^{16} \cdot 5^{16} = 15^{16} < 19^{16} < 19^{20}$

Vậy $9^8 \cdot 5^{16} < 19^{20}$

Bài 7: Cho $A = 1 + 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{72}$ và $B = 2012^{73} - 1$. So sánh A và B

Trích đề HSG cấp trường Bá Thước năm 2018-2019

Lời giải

Ta có: $2012A = 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{72} + 2012^{73}$

Lấy $2012A - A = 2012^{73} - 1 \Rightarrow A = \frac{2012^{73} - 1}{2011} < B = 2012^{73} - 1$

Vậy $A < B$

Bài 8: So sánh: $E = \frac{2018^{99} - 1}{2018^{100} - 1}$ và $F = \frac{2018^{98} - 1}{2018^{99} - 1}$

Trích đề chọn HSG Nga Sơn năm 2017-2018

Lời giải

Ta có: $E = \frac{2018^{99} - 1}{2018^{100} - 1} \Rightarrow 2018E = \frac{2018^{100} - 2018}{2018^{100} - 1} \Rightarrow 2018 \cdot E = 1 - \frac{2017}{2018^{100} - 1}$

$F = \frac{2018^{98} - 1}{2018^{99} - 1} \Rightarrow 2018 \cdot F = \frac{2018^{99} - 2018}{2018^{99} - 1} \Rightarrow 2018 \cdot F = 1 - \frac{2017}{2018^{99} - 1}$

Vì $\frac{2017}{2018^{100} - 1} < \frac{2017}{2018^{99} - 1} \Rightarrow 1 - \frac{2017}{2018^{100} - 1} > 1 - \frac{2017}{2018^{99} - 1}$

Hay $2018E > 2018F$ nên $E > F$

Vậy $E > F$

Bài 8: So sánh : $A = \frac{2009^{2009} + 1}{2009^{2010} + 1}$ và $B = \frac{2009^{2010} - 2}{2009^{2011} - 2}$

Trích đề HSG năm 2019-2020

Lời giải

Ta có $B = \frac{2009^{2010} - 2}{2009^{2011} - 2} < 1 \Rightarrow B = \frac{2009^{2010} - 2}{2009^{2011} - 2} < \frac{2009^{2010} - 2 + 2011}{2009^{2011} - 2 + 2011} = \frac{2009^{2010} + 2009}{2009^{2011} + 2009}$

$= \frac{2009(2009^{2009} + 1)}{2009(2009^{2010} + 1)} = \frac{2009^{2009} + 1}{2009^{2010} + 1} = A$

Vậy $B < A$

Bài 9: Cho $a = 2^{300}$, $b = 3^{200}$. Kết luận nào sau đây đúng ?

A. $a < b$

B. $a = b$

C. $a > b$

D. $a \geq b$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 -2019

Bài 10: So sánh $C = 3^{210}$ với $D = 2^{310}$

Trích đề HSG huyện Quế Sơn năm 2018 - 2019

Lời giải

$$C = 3^{210} = 3^{10} \cdot 3^{200} = 3^{10} \cdot 9^{100}; \quad D = 2^{310} = 2^{10} \cdot 2^{300} = 2^{10} \cdot 8^{100}$$

Có $3^{10} > 2^{10}$ và $9^{100} > 8^{100}$ nên $C > D$

Bài 11: So sánh $N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}$ và $M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018 - 2019

Lời giải

$$\text{Xét: } N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2006}} + \frac{-7}{10^{2006}}$$

$$\text{Và } M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$$

$$\text{Ta có: } \frac{-8}{10^{2006}} > \frac{-8}{10^{2005}}$$

Vậy $N > M$

Bài 12: So sánh $A = \frac{10^{2016} + 1}{10^{2017} + 1}$ và $B = \frac{10^{2017} + 1}{10^{2018} + 1}$

Trích đề HSG huyện Kim Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

Nhân hai vế của A và B với 10 ta có

$$10.A = \frac{10^{2017} + 10}{10^{2017} + 1} = \frac{10^{2017} + 1 + 9}{10^{2017} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2017} + 1}$$

$$10.B = \frac{10^{2018} + 10}{10^{2018} + 1} = \frac{10^{2018} + 1 + 9}{10^{2018} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2018} + 1}$$

$$\text{Vì } 10^{2017} < 10^{2018} \text{ suy ra } \frac{9}{10^{2017} + 1} > \frac{9}{10^{2018} + 1} \text{ suy ra } A > B$$

Bài 13: So sánh: $E = \frac{2018^{99} - 1}{2018^{100} - 1}$ và $F = \frac{2018^{98} - 1}{2018^{99} - 1}$

Trích đề HSG huyện Kim Môn năm 2017 - 2018

Lời giải

$$\text{Ta có: } E = \frac{2018^{99} - 1}{2018^{100} - 1} \text{ suy ra } 2018E = \frac{2018^{100} - 2018}{2018^{100} - 1} \text{ suy ra } 2018.E = 1 - \frac{2017}{2018^{100} - 1}$$

$$F = \frac{2018^{98} - 1}{2018^{99} - 1} \text{ suy ra } 2018.F = \frac{2018^{99} - 2018}{2018^{99} - 1} \text{ suy ra } 2018.F = 1 - \frac{2017}{2018^{99} - 1}$$

$$\text{Vì } \frac{2017}{2018^{100} - 1} < \frac{2017}{2018^{99} - 1} \text{ suy ra } 1 - \frac{2017}{2018^{100} - 1} > 1 - \frac{2017}{2018^{99} - 1}$$

Hay $2018E > 2018F$ suy ra $E > F$

Vậy $E > F$

Bài 14: So sánh 3^{444} và 4^{333} .

Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Lời giải

$$3^{444} = (3^4)^{111} = 81^{111}$$

$$4^{333} = (4^3)^{111} = 64^{111}$$

$$81^{111} > 64^{111}$$

$$3^{444} < 4^{333}$$

$$\text{Vậy } 3^{444} < 4^{333}$$

Bài 15: So sánh các biểu thức sau: $P = \frac{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{100}}{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{99}}$ và $Q = \frac{1+9+9^2+9^3+\dots+9^{100}}{1+9+9^2+9^3+\dots+9^{99}}$

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Lời giải

$$\text{Ta có: } P = \frac{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{100}}{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{99}} = 1 + \frac{7^{100}}{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{99}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{1}{7^{100}} + \frac{1}{7^{99}} + \frac{1}{7^{98}} + \dots + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7}}$$

$$Q = \frac{1+9+9^2+9^3+\dots+9^{100}}{1+9+9^2+9^3+\dots+9^{99}} = 1 + \frac{9^{100}}{1+9+9^2+9^3+\dots+9^{99}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{1}{9^{100}} + \frac{1}{9^{99}} + \frac{1}{9^{98}} + \dots + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9}}$$

$$\text{Do } 7^{100} < 9^{100} \Rightarrow \frac{1}{7^{100}} > \frac{1}{9^{100}}$$

$$7^{99} < 9^{99} \Rightarrow \frac{1}{7^{99}} > \frac{1}{9^{99}}$$

...

$$7^2 < 9^2 \Rightarrow \frac{1}{7^2} > \frac{1}{9^2}$$

$$7 < 9 \Rightarrow \frac{1}{7} > \frac{1}{9}$$

$$\text{Khi đó: } \frac{1}{7^{100}} + \frac{1}{7^{99}} + \frac{1}{7^{98}} + \dots + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7} > \frac{1}{9^{100}} + \frac{1}{9^{99}} + \frac{1}{9^{98}} + \dots + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{7^{100}} + \frac{1}{7^{99}} + \frac{1}{7^{98}} + \dots + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7}} < \frac{1}{\frac{1}{9^{100}} + \frac{1}{9^{99}} + \frac{1}{9^{98}} + \dots + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9}}$$

Vậy $P < Q$.

Bài 16: So sánh A và B , biết: $A = \frac{17^{18}+1}{17^{19}+1}, B = \frac{17^{17}+1}{17^{18}+1}$

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\text{Vì } A = \frac{17^{18}+1}{17^{19}+1} < 1 \Rightarrow A = \frac{17^{18}+1}{17^{19}+1} < \frac{17^{18}+1+16}{17^{19}+1+16} = \frac{17 \cdot (17^{17}+1)}{17 \cdot (17^{18}+1)} = \frac{17^{17}+1}{17^{18}+1} = B$$

Vậy $A < B$

B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

(copy đề bài ở các dạng trên để làm phiếu phô tô cho HS)

Dạng 1: Các phương pháp so sánh: quy đồng mẫu (từ), sử dụng tính chất bắc cầu, xét phần bù, viết dưới dạng hỗn số, so sánh với 1; sử dụng tính chất: với $a, b, m \in \mathbb{N}^*$ thì:

$$*\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m} \quad *\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}$$

Bài 1: Tính tổng của các phân số lớn hơn $\frac{1}{5}$ nhưng nhỏ hơn $\frac{1}{4}$ và có tử là 4.

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021 - 2022

Bài 2: Có bao nhiêu cách để viết $\frac{7}{12}$ thành tổng của hai phân số tối giản trong đó mẫu số của hai phân số khác nhau và đều không lớn hơn 12.

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021 - 2022

Bài 3: So sánh: $A = \frac{17^8 + 5}{17^8 - 8}$ và $B = \frac{17^8 + 6}{17^8 - 7}$.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021 - 2022

Bài 4: So sánh P và Q , biết: $P = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013}$ và $Q = \frac{2010 + 2011 + 2012}{2011 + 2012 + 2013}$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Bài 5: So sánh 2 phân số: $\frac{20072007}{20082008}$ và $\frac{200720072007}{200820082008}$

Trích đề HSG huyện Tĩnh Gia năm 2018-2019

Bài 6: So sánh hai phân số $\frac{a-1}{a}$ và $\frac{b+1}{b}$ (với a, b là số nguyên cùng dấu và $a; b \neq 0$)

Trích đề HSG THCS Phan Đình Phùng năm 2018-2019

Bài 7: So sánh

a) $M = \frac{77772}{77778}$ và $N = \frac{88881}{88889}$.

b) $P = \frac{326}{1955} + \frac{988}{1975} + \frac{662}{1985}$ và $Q = \frac{3951}{3950} + \frac{1}{5955} + \frac{1}{11730}$.

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021 - 2022.

Bài 8: So sánh A và B biết: $A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1}$, $B = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1}$

Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015 - 2016

Bài 9: Không quy đồng mẫu số, hãy so sánh hai phân số: $\frac{37}{67}$ và $\frac{377}{677}$.

Trích đề HSG huyện Phù Ninh năm 2015 - 2016

Bài 10: So sánh A và B biết: $A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1}$, $B = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1}$

Trích đề HSG huyện Lương Tài 2015 - 2016

Bài 11: So sánh A và B biết: $A = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2010}$ và $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{17}$

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2018-2019

Bài 12: So sánh: $\frac{201201}{202202}$ và $\frac{201201201}{202202202}$.

Trích đề HSG THCS Lý Tự Trọng năm 2015-2016

Bài 13: So sánh $N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}$ và $M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Bài 14: Không tính giá trị của các biểu thức. Hãy so sánh: $\frac{1717}{8585}$ và $\frac{1313}{5151}$

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Bài 15: So sánh: $A = \frac{121212}{171717} + \frac{2}{17} - \frac{404}{1717}$ với $B = \frac{10}{17}$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 16: So sánh: $\frac{-22}{45}$ và $-\frac{51}{103}$

Trích đề HSG năm 2019-2020

Bài 17: So sánh: $N = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{11}{10^{2006}}$ và $M = \frac{11}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}}$

Trích đề 59 HSG huyện năm 2018-2019

Bài 18: Cho $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$.

Chứng minh $A < \frac{3}{4}$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành, năm 2018-2019

Bài 19: So sánh S với 3, biết $S = \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013} + \frac{2013}{2011}$

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2018 - 2019

Bài 20: Không quy đồng mẫu số hãy so sánh:

$$A = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-19}{10^{2011}}; B = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-19}{10^{2010}}$$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018 - 2019

Bài 21: So sánh $A = \frac{2011^{2012} + 1}{2011^{2013} + 1}$ với $B = \frac{2011^{2013} + 1}{2011^{2014} + 1}$

Trích đề HSG huyện Quế Sơn năm 2018 - 2019

Bài 22: So sánh phân số: $\frac{15}{301}$ với $\frac{25}{499}$

Trích đề HSG cấp huyện năm học 2016-2017

Bài 23: So sánh $\frac{2011.2012-1}{2011.2012}$ và $\frac{2012.2013-1}{2012.2013}$

Bài 24: So sánh: $\frac{-22}{45}$ và $\frac{-51}{103}$

Trích đề HSG trường Nguyễn Khuyến năm 20... - 20...

Bài 25: So sánh P và Q

Biết: $P = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013}$ và $Q = \frac{2010+2011+2012}{2011+2012+2013}$

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Bài 26: So sánh A và B biết: $A = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2010}$ và $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{17}$

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2018 - 2019

Bài 27: So sánh A và B biết: $A = \frac{2013 \cdot 2014 - 1}{2013 \cdot 2014}$ và $B = \frac{2014 \cdot 2015 - 1}{2014 \cdot 2015}$

Trích đề HSG huyện Bạch Thông năm 2018 - 2019

Bài 28: So sánh P và Q

Biết: $P = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013}$ và $Q = \frac{2010+2011+2012}{2011+2012+2013}$

Trích đề HSG Tỉnh Đồng Tháp năm 2018 - 2019

Dạng 2: So sánh hai lũy thừa

Bài 1: So sánh A và B biết:

$$A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1}, \quad B = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1}$$

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Bài 2: So sánh:

a) 3^{200} và 2^{300}

b) 71^{50} và 37^{75}

Trích đề HSG THCS Lý Tự Trọng năm 2015-2016

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Bài 3: Cho $A = 1 + 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{72}$ và $B = 2012^{73} - 1$. So sánh A và B .

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2018 - 2019.

Bài 4: So sánh: 2^{2013} và 3^{1344} .

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018 - 2019

Bài 5: So sánh: $N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}$ và $M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2010 - 2011

Bài 6: Không tính giá trị của các biểu thức. Hãy so sánh: $9^8 \cdot 5^{16}$ và 19^{20}

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Bài 7: Cho $A = 1 + 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{72}$ và $B = 2012^{73} - 1$. So sánh A và B

Bài 8: So sánh: $E = \frac{2018^{99} - 1}{2018^{100} - 1}$ và $F = \frac{2018^{98} - 1}{2018^{99} - 1}$

Trích đề chọn HSG Nga Sơn năm 2017-2018

Bài 8: So sánh : $A = \frac{2009^{2009} + 1}{2009^{2010} + 1}$ và $B = \frac{2009^{2010} - 2}{2009^{2011} - 2}$

Trích đề HSG năm 2019-2020

Bài 9: Cho $a = 2^{300}, b = 3^{200}$. Kết luận nào sau đây đúng ?

A. $a < b$

B. $a = b$

C. $a > b$

D. $a \geq b$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 -2019

Bài 10: So sánh $C = 3^{210}$ với $D = 2^{310}$

Trích đề HSG huyện Quế Sơn năm 2018 - 2019

Bài 11: So sánh $N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}$ và $M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018 - 2019

Bài 12: So sánh $A = \frac{10^{2016} + 1}{10^{2017} + 1}$ và $B = \frac{10^{2017} + 1}{10^{2018} + 1}$

Trích đề HSG huyện Kim Sơn năm 2021 - 2022

Bài 13: So sánh: $E = \frac{2018^{99} - 1}{2018^{100} - 1}$ và $F = \frac{2018^{98} - 1}{2018^{99} - 1}$

Trích đề HSG huyện Kim Môn năm 2017 - 2018

Bài 14: So sánh 3^{444} và 4^{333} .

Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Bài 15: So sánh các biểu thức sau: $P = \frac{1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{100}}{1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{99}}$ và $Q = \frac{1 + 9 + 9^2 + 9^3 + \dots + 9^{100}}{1 + 9 + 9^2 + 9^3 + \dots + 9^{99}}$

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Bài 16: So sánh A và B , biết: $A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1}, B = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1}$

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021 - 2022

C. SỬU TÂM CÁC BÀI TRONG CÁC ĐỀ CỦA NHỮNG NĂM TRƯỚC ĐÓ

(Phần này lấy các câu từ những năm trước, trước năm 2020-2021, tối thiểu 10 bài)

Bài 1: So sánh A và B biết: $A = \frac{2013.2014 - 1}{2013.2014}$ và $B = \frac{2014.2015 - 1}{2014.2015}$.

Lời giải

Ta có: $A = \frac{2013.2014 - 1}{2013.2014} = 1 - \frac{1}{2013.2014}$
 $B = \frac{2014.2015 - 1}{2014.2015} = 1 - \frac{1}{2014.2015}$

$$\text{Vì } \frac{1}{2013.2014} > \frac{1}{2014.2015} \text{ nên } -\frac{1}{2013.2014} < -\frac{1}{2014.2015}$$

$$\text{hay } -\frac{1}{2013.2014} + 1 < -\frac{1}{2014.2015} + 1$$

Từ đó suy ra $A > B$.

Bài 2: So sánh hai phân số $\frac{a-1}{a}$ và $\frac{b+1}{b}$ (với a, b là số nguyên cùng dấu và $a, b \neq 0$)

Trích đề HSG trường THCS Phan Đình Phùng năm 2018-2019

Lời giải

$$\text{Có } \frac{a-1}{a} = 1 - \frac{1}{a} \text{ và } \frac{b+1}{b} = 1 + \frac{1}{b}$$

$$* \text{ Nếu } a > 0, b > 0 \text{ thì } \frac{1}{a} > 0 \text{ và } \frac{1}{b} > 0 \text{ nên } 1 - \frac{1}{a} < 1 + \frac{1}{b} \text{ hay } \frac{a-1}{a} < \frac{b+1}{b}.$$

$$* \text{ Nếu } a < 0, b < 0 \text{ thì } \frac{1}{a} < 0 \text{ và } \frac{1}{b} < 0 \text{ nên } 1 - \frac{1}{a} > 1 + \frac{1}{b} \text{ hay } \frac{a-1}{a} > \frac{b+1}{b}.$$

Bài 3: So sánh: $A = \frac{2008^{2008} + 1}{2008^{2009} + 1}$ và $B = \frac{2008^{2007} + 1}{2008^{2008} + 1}$.

Lời giải

$$A = \frac{2008^{2008} + 1}{2008^{2009} + 1} < 1$$

$$A < \frac{2008^{2008} + 1 + 2007}{2008^{2009} + 1 + 2007} = \frac{2008^{2008} + 2008}{2008^{2009} + 2008} = \frac{2008(2008^{2007} + 1)}{2008(2008^{2008} + 1)} = B$$

$$A < \frac{2008^{2008} + 1 + 2007}{2008^{2009} + 1 + 2007} = \frac{2008^{2008} + 2008}{2008^{2009} + 2008} = \frac{2008(2008^{2007} + 1)}{2008(2008^{2008} + 1)} = B$$

Vậy $A < B$

Bài 4: So sánh: $A = \frac{1999^{1999} + 1}{1999^{1998} + 1}$ và $B = \frac{1999^{2000} + 1}{1999^{1999} + 1}$.

Lời giải

$$B = \frac{1999^{2000} + 1}{1999^{1999} + 1} > 1$$

$$B > \frac{1999^{2000} + 1 + 1998}{1999^{1999} + 1 + 1998} = \frac{1999^{2000} + 1999}{1999^{1999} + 1999} = \frac{1999(1999^{1999} + 1)}{1999(1999^{1998} + 1)} = A$$

Vậy $A < B$

Bài 5: So sánh: $A = \frac{15^{23} - 3}{15^{22} - 138}$ và $B = \frac{15^{22} + 4}{15^{21} - 5}$

Lời giải

$$A = \frac{15^{23} - 3}{15^{22} - 138} > 1$$

$$A > \frac{15^{23} - 3 + 63}{15^{22} - 138 + 63} = \frac{15^{23} + 60}{15^{22} - 75} = \frac{15(15^{22} + 4)}{15(15^{21} - 5)} = B$$

Vậy $A > B$.

Bài 6: So sánh: $A = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$ và $B = \frac{n^2 + 3}{n^2 + 4}$ với $n > 1$.

Lời giải

$$A = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = \frac{n^2 + 1 - 2}{n^2 + 1} = 1 + \frac{-2}{n^2 + 1}$$

$$B = \frac{n^2 + 3}{n^2 + 4} = \frac{n^2 + 4 - 1}{n^2 + 4} = 1 + \frac{-1}{n^2 + 4} = 1 + \frac{-2}{2n^2 + 8}$$

Ta có: $n^2 + 1 < 2n^2 + 8$ suy ra $\frac{2}{n^2 + 1} > \frac{2}{2n^2 + 8}$ do đó $\frac{-2}{n^2 + 1} < \frac{-2}{2n^2 + 8}$

suy ra $1 + \frac{-2}{n^2 + 1} < 1 + \frac{-2}{2n^2 + 8}$

Vậy $A < B$

Bài 7: So sánh: $A = \frac{4}{7} + 5 + \frac{3}{7^2} + \frac{5}{7^3} + \frac{6}{7^4}$ và $B = \frac{5}{7^4} + 5 + \frac{6}{7^2} + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3}$.

Lời giải

$$A = \left(5 + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3}\right) + \left(\frac{3}{7^2} + \frac{6}{7^4}\right) = \left(5 + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3}\right) + \left(\frac{3}{7^2} + \frac{5}{7^4} + \frac{1}{7^4}\right)$$

$$B = \left(5 + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3}\right) + \left(\frac{6}{7^2} + \frac{5}{7^4}\right) = \left(5 + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3}\right) + \left(\frac{3}{7^2} + \frac{3}{7^2} + \frac{5}{7^4}\right)$$

Ta có: $\frac{3}{7^2} > \frac{1}{7^4}$ suy ra $\left(5 + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3}\right) + \left(\frac{3}{7^2} + \frac{3}{7^2} + \frac{5}{7^4}\right) > \left(5 + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3}\right) + \left(\frac{3}{7^2} + \frac{5}{7^4} + \frac{1}{7^4}\right)$

Vậy $A < B$

Bài 8: So sánh $A = \frac{2012^{37} + 37^{2012} + 1}{2012^{38}}$ với $B = \frac{2012^{38} + 37^{2012} + 2}{2012^{39}}$.

Lời giải

Thực hiện qui đồng mẫu số:

$$A = \frac{2012^{37} + 37^{2012} + 1}{2012^{38}} = \frac{2012^{76} + 37^{2012} \cdot 2012^{39} + 2012^{39}}{2012^{38} \cdot 2012^{39}}$$

$$B = \frac{2012^{38} + 37^{2012} + 2}{2012^{39}} = \frac{2012^{76} + 37^{2012} \cdot 2012^{38} + 2 \cdot 2012^{38}}{2012^{39} \cdot 2012^{38}}$$

$$37^{2012} \cdot 2012^{39} + 2012^{39} = 2012^{38} (37^{2012} \cdot 2012 + 2012)$$

$$37^{2012} \cdot 2012^{38} + 2 \cdot 2012^{38} = 2012^{38} (37^{2012} \cdot 2012 + 2)$$

Từ đó suy ra $A > B$.

Bài 9: Cho $A = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$ So sánh A với $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta thấy tích A gồm 99 số âm:

$$A = \left(\frac{1}{4} - 1\right) \left(\frac{1}{9} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{10000} - 1\right) = -\left(\frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \dots \frac{99.101}{100.100}\right) = \frac{-101}{200}$$

Ta có $\frac{101}{200} > \frac{1}{2}$ nên $\frac{-101}{200} < \frac{-1}{2}$.

$$\text{Vậy } A < \frac{-1}{2}.$$

Bài 10: a) Cho $a, b, n \in \mathbb{Q}^*$. Hãy so sánh $\frac{a+n}{b+n}$ và $\frac{a}{b}$.

b) Cho $A = \frac{10^{11}-1}{10^{12}-1}$; $B = \frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$. So sánh A và B.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

a) Ta xét 3 trường hợp

TH1: $\frac{a}{b} = 1$ suy ra $a = b$ nên $\frac{a+n}{b+n} = \frac{a}{b} = 1$.

TH2: $\frac{a}{b} > 1$, suy ra $a > b$ nên $a+n > b+n$, mà $\frac{a+n}{b+n}$ có phần thừa so với 1 là $\frac{a-b}{b+n}$.

$\frac{a}{b}$ có phần thừa so với 1 là $\frac{a-b}{b}$.

vì $\frac{a-b}{b+n} < \frac{a-b}{b}$ nên $\frac{a+n}{b+n} < \frac{a}{b}$.

TH3: $\frac{a}{b} < 1$ suy ra $a < b$ nên $a+n < b+n$.

Khi đó: $\frac{a+n}{b+n}$ có phần bù tới 1 là $\frac{a-b}{b}$.

vì $\frac{a-b}{b} < \frac{b-a}{b+n}$ nên $\frac{a+n}{b+n} > \frac{a}{b}$.

b) Cho $A = \frac{10^{11}-1}{10^{12}-1}$ rõ ràng $A < 1$ nên theo câu a,

$\frac{a}{b} < 1$, suy ra $\frac{a+n}{b+n} > \frac{a}{b}$ nên $A < \frac{(10^{11}-1)+11}{(10^{12}-1)+11} = \frac{10^{11}+10}{10^{12}+10}$

Do đó $A < \frac{10^{11}+10}{10^{12}+10} = \frac{10(10^{10}+1)}{10 \cdot (10^{11}+1)} = \frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$.

Bài 11: So sánh $A = \frac{10^{15}+1}{10^{16}+1}$ và $B = \frac{10^{16}+1}{10^{17}+1}$

Lời giải

$$10.A = \frac{10^{16}+10}{10^{16}+1} = \frac{10^{16}+1+9}{10^{16}+1} = 1 + \frac{9}{10^{16}+1}.$$

$$10.B = \frac{10^{17}+10}{10^{17}+1} = \frac{10^{17}+1+9}{10^{17}+1} = 1 + \frac{9}{10^{17}+1}.$$

Mà $\frac{9}{10^{16}+1} > \frac{9}{10^{17}+1}$ nên $10.A > 10.B \Rightarrow A > B$.

Bài 12: So sánh $A = \frac{10^{2019}+1}{10^{2020}+1}$ và $B = \frac{10^{2020}+1}{10^{2021}+1}$.

Lời giải

$$10.A = \frac{10^{2020}+10}{10^{2020}+1} = \frac{10^{2020}+1+9}{10^{2020}+1} = 1 + \frac{9}{10^{2020}+1}.$$

$$10.B = \frac{10^{2021} + 10}{10^{2021} + 1} = \frac{10^{2021} + 1 + 9}{10^{2021} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2021} + 1}.$$

Mà $\frac{9}{10^{2020} + 1} > \frac{9}{10^{2021} + 1}$ nên $10.A > 10.B \Rightarrow A > B$.

Bài 13: So sánh $A = \frac{20^{21} - 3}{20^{22} + 4}$ và $B = \frac{20^{22} - 3}{20^{23} + 4}$.

Lời giải

$$20.A = \frac{20^{22} - 60}{20^{22} + 4} = \frac{20^{22} + 4 - 64}{20^{22} + 4} = 1 + \frac{-64}{20^{22} + 4}.$$

$$20.B = \frac{20^{23} - 60}{20^{23} + 4} = \frac{20^{23} + 4 - 64}{20^{23} + 4} = 1 + \frac{-64}{20^{23} + 4}.$$

Mà $\frac{64}{20^{22} + 4} > \frac{64}{20^{23} + 4} \Rightarrow \frac{-64}{20^{22} + 4} < \frac{-64}{20^{23} + 4}$ nên $20.A < 20.B \Rightarrow A < B$.

Bài 14: So sánh $A = \frac{15^{22} - 6}{15^{21} - 1}$ và $B = \frac{15^{23} - 6}{15^{22} - 1}$.

Lời giải

$$\frac{1}{15}.A = \frac{15^{22} - 6}{15^{22} - 15} = \frac{15^{22} - 15 + 9}{15^{22} - 15} = 1 + \frac{9}{15^{22} - 15}.$$

$$\frac{1}{15}.B = \frac{15^{23} - 6}{15^{23} - 15} = \frac{15^{23} - 15 + 9}{15^{23} - 15} = 1 + \frac{9}{15^{23} - 15}.$$

Mà $\frac{9}{15^{22} - 15} > \frac{9}{15^{23} - 15}$ nên $\frac{1}{15}.A > \frac{1}{15}.B \Rightarrow A > B$.

Bài 15: So sánh $A = \frac{10}{2^7} + \frac{10}{2^6}$ và $B = \frac{11}{2^7} + \frac{9}{2^6}$.

Lời giải

$$A = \frac{10}{2^7} + \frac{9+1}{2^6} = \frac{10}{2^7} + \frac{9}{2^6} + \frac{1}{2^6}.$$

$$B = \frac{10+1}{2^7} + \frac{9}{2^6} = \frac{10}{2^7} + \frac{1}{2^7} + \frac{9}{2^6}.$$

Mà $\frac{1}{2^6} > \frac{1}{2^7} \Rightarrow A > B$.

Bài 16: So sánh $A = \frac{2006}{2007} + \frac{2007}{2008} + \frac{2008}{2009} + \frac{2009}{2006}$ với $B = 4$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{2007-1}{2007} + \frac{2008-1}{2008} + \frac{2009-1}{2009} + \frac{2006+3}{2006} \\ &= 1 - \frac{1}{2007} + 1 - \frac{1}{2008} + 1 - \frac{1}{2009} + 1 + \frac{3}{2006} \\ &= 4 + \left(\frac{1}{2006} - \frac{1}{2007} \right) + \left(\frac{1}{2006} - \frac{1}{2008} \right) + \left(\frac{1}{2006} - \frac{1}{2009} \right) > 4. \end{aligned}$$

Vậy $A > B$.

Bài 17: So sánh $A = \frac{-15}{2^{300}} + \frac{-17}{3^{200}}$ và $B = \frac{-17}{2^{300}} + \frac{-15}{3^{200}}$.

Lời giải

$$A = \frac{-15}{2^{300}} + \frac{-15-2}{3^{200}} = \frac{-15}{2^{300}} + \frac{-15}{3^{200}} + \frac{-2}{3^{200}}$$

$$B = \frac{-15-2}{2^{300}} + \frac{-15}{3^{200}} = \frac{-15}{2^{300}} + \frac{-2}{2^{300}} + \frac{-15}{3^{200}}$$

Ta so sánh $\frac{-2}{3^{200}}$ và $\frac{-2}{2^{300}}$.

$$\text{Lại có } \frac{2}{3^{200}} = \frac{2}{(3^2)^{100}} = \frac{2}{9^{100}} \text{ và } \frac{2}{2^{300}} = \frac{2}{(2^3)^{100}} = \frac{2}{8^{100}}.$$

Nhận thấy $\frac{2}{9^{100}} < \frac{2}{8^{100}} \Rightarrow \frac{-2}{9^{100}} > \frac{-2}{8^{100}} \Rightarrow \frac{-2}{3^{200}} > \frac{-2}{2^{300}}$ nên $A > B$.

Bài 18: So sánh $A = \frac{-7}{10^{205}} + \frac{-15}{10^{206}}$ và $B = \frac{-15}{10^{205}} + \frac{-7}{10^{206}}$.

Lời giải

$$A = \frac{-7}{10^{205}} + \frac{-8-7}{10^{206}} = \frac{-7}{10^{205}} + \frac{-8}{10^{206}} + \frac{-7}{10^{206}}.$$

$$B = \frac{-7-8}{10^{205}} + \frac{-7}{10^{206}} = \frac{-7}{10^{205}} + \frac{-8}{10^{205}} + \frac{-7}{10^{206}}.$$

Mà $\frac{-8}{10^{206}} > \frac{-8}{10^{205}} \Rightarrow A > B$.

Bài 19: So sánh P và Q biết $P = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013}$ và $Q = \frac{2010+2011+2012}{2011+2012+2013}$

Lời giải:

Ta có:

$$Q = \frac{2010+2011+2012}{2011+2012+2013} = \frac{2010}{2011+2012+2013} + \frac{2011}{2011+2012+2013} + \frac{2012}{2011+2012+2013}$$

Lần lượt so sánh từng phân số của P và Q với các tử là: 2010; 2011; 2012 thấy được các phân số của P đều lớn hơn các phân số của Q .

Vậy $P > Q$

Bài 20: So sánh không qua quy đồng: $A = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}$; $B = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Lời giải:

Ta có

$$A = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2006}} + \frac{-7}{10^{2006}}$$

$$B = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$$

Ta thấy $\frac{-8}{10^{2006}} > \frac{-8}{10^{2005}} \Rightarrow A > B$

Bài 21: Không quy đồng mẫu số hãy so sánh:

$$A = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-19}{10^{2011}}; B = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-19}{10^{2010}}$$

Lời giải:

Ta có:

$$A = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-19}{10^{2011}} = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-10}{10^{2011}} + \frac{-9}{10^{2011}}$$

$$B = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-19}{10^{2010}} = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-10}{10^{2010}} + \frac{-9}{10^{2010}}$$

Ta thấy $\frac{-10}{10^{2011}} > \frac{-10}{10^{2010}} \Rightarrow A > B$

Bài 22: Cho $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$.

So sánh A với $\frac{3}{4}$?

Lời giải:

Ta có: $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$

$$A = \frac{1}{(1+3).2} + \frac{1}{(1+5).3} + \frac{1}{(1+7).4} + \dots + \frac{1}{(1+2017).1009}$$

$$= \frac{2}{2.4} + \frac{2}{3.6} + \frac{2}{4.8} + \dots + \frac{2}{1009.2018} = \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{1009.1009}$$

$$A < \frac{1}{2.2} + \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{1008.1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1008} - \frac{1}{1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1009} \right) \Rightarrow A < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \Rightarrow A < \frac{3}{4}.$$

Bài 23: So sánh A và B biết: $A = \frac{2013.2014-1}{2013.2014}$ và $B = \frac{2014.2015-1}{2014.2015}$

Lời giải:

Ta có:

$$A = \frac{2013.2014-1}{2013.2014} = 1 - \frac{1}{2013.2014}$$

$$B = \frac{2014.2015-1}{2014.2015} = 1 - \frac{1}{2014.2015}$$

Vì $\frac{1}{2013.2014} > \frac{1}{2014.2015}$ nên $A < B$.

Bài 24: Cho: $A = \frac{10^{2001}+1}{10^{2002}+1}$; $B = \frac{10^{2002}+1}{10^{2003}+1}$. Hãy so sánh A và B .

Lời giải:

$$\text{Ta có: } 10A = \frac{10^{2002}+10}{10^{2002}+1} = 1 + \frac{9}{10^{2002}+1} \quad (1)$$

Tương tự: $10B = \frac{10^{2003} + 10}{10^{2003} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2003} + 1}$ (2)

Từ (1) và (2) ta thấy: $\frac{9}{10^{2002} + 1} > \frac{9}{10^{2003} + 1} \Rightarrow 10A > 10B \Rightarrow A > B$.

Bài 25: So sánh $N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}$ và $M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$.

Lời giải:

Xét: $N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2006}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Và $M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Ta có: $\frac{-8}{10^{2006}} > \frac{-8}{10^{2005}}$

Vậy $N > M$

Bài 26: So sánh: $N = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{11}{10^{2006}}$ và $M = \frac{11}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}}$.

Lời giải:

$N = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{11}{10^{2006}} = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{6}{10^{2006}} + \frac{5}{10^{2006}}$

Và $M = \frac{11}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}} = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{6}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}}$

Ta có: $\frac{6}{10^{2006}} < \frac{6}{10^{2005}}$

Vậy $N < M$.

Bài 27: So sánh A và B biết:

$A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1}, \quad B = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1}$

Lời giải:

Vì $A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < 1 \Rightarrow A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < \frac{17^{18} + 1 + 16}{17^{19} + 1 + 16} = \frac{17 \cdot (17^{17} + 1)}{17 \cdot (17^{18} + 1)} = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1} = B$

Bài 28: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$

Lời giải:

Ta thấy: $\frac{1}{41}$ đến $\frac{1}{80}$ có 40 phân số.

Vậy $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80}$

$= \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{61} + \frac{1}{62} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} \right)$ (1)

$$\text{Vì } \frac{1}{41} > \frac{1}{42} > \dots > \frac{1}{60} \text{ và } \frac{1}{61} > \frac{1}{62} > \dots > \frac{1}{80} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{80} + \dots + \frac{1}{80} + \frac{1}{80} \right) \\ &= \frac{20}{60} + \frac{20}{80} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12} \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (1), (2), (3) Suy ra:

$$\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$$

Bài 29. So sánh $A = \frac{2006^{2006} + 1}{2006^{2007} + 1}$ và $B = \frac{2006^{2005} + 1}{2006^{2006} + 1}$

Ta có nếu $\frac{a}{b} < 1$ suy ra: $\frac{a}{b} < \frac{a+n}{b+n}$ ($n \in \mathbb{Q}^*$)

$$\begin{aligned} A &= \frac{2006^{2006} + 1}{2006^{2007} + 1} < \frac{2006^{2006} + 1 + 2005}{2006^{2007} + 2005 + 1} = \frac{2006^{2006} + 2006}{2006^{2007} + 2006} \\ &= \frac{2006 \cdot (2006^{2005} + 1)}{2006 \cdot (2006^{2006} + 1)} = \frac{2006^{2005} + 1}{2006^{2006} + 1} = B \end{aligned}$$

Vậy $A < B$

Bài 30: So sánh hai phân số sau: $A = \frac{10^{19} + 1}{10^{20} + 1}$ và $B = \frac{10^{20} + 1}{10^{21} + 1}$

Lời giải:

Quy đồng mẫu hai phân số với MC: $(10^{20} + 1)(10^{21} + 1)$, ta có:

$$A = \frac{(10^{19} + 1)(10^{21} + 1)}{(10^{20} + 1)(10^{21} + 1)} = \frac{10^{40} + 10^{21} + 10^{19} + 1}{(10^{20} + 1)(10^{21} + 1)};$$

$$B = \frac{(10^{20} + 1)(10^{20} + 1)}{(10^{20} + 1)(10^{21} + 1)} = \frac{10^{40} + 10^{20} + 10^{20} + 1}{(10^{20} + 1)(10^{21} + 1)}$$

Hãy chứng tỏ rằng $10^{21} + 10^{19} > 10^{20} + 10^{20}$ để suy ra $10^{40} + 10^{21} + 10^{19} + 1 > 10^{40} + 10^{20} + 10^{20} + 1$.

Từ đó có $A > B$.

Bài 31: So sánh các phân số sau: $A = \frac{2489 - 36}{7467 - 108}$; $B = \frac{2929 - 303}{8787 + 1717}$.

Lời giải:

$$A = \frac{2489 - 36}{3 \cdot (2489 - 36)} = \frac{1}{3}; \quad B = \frac{101 \cdot (29 - 3)}{101 \cdot (87 + 17)} = \frac{26}{104} = \frac{1}{4}$$

Vì $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ nên $A > B$.

Bài 32: So sánh các phân số sau: $A = \frac{8056}{2012 \cdot 16 - 1982}$; $B = \frac{1 \cdot 2 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot 12 + 4 \cdot 8 \cdot 24 + 7 \cdot 14 \cdot 42}{1 \cdot 6 \cdot 9 + 2 \cdot 12 \cdot 18 + 4 \cdot 24 \cdot 36 + 7 \cdot 42 \cdot 63}$

$$B = \frac{100^{10} - 1}{100^{10} - 3} = 1 + \frac{2}{100^{10} - 3} \quad (2)$$

Vì $\frac{2}{100^{10} - 1} < \frac{2}{100^{10} - 3}$ nên từ (1) và (2) suy ra $A < B$.

Bài 37. So sánh: $A = \frac{2003.2004 - 1}{2003.2004}$ và $B = \frac{2004.2005 - 1}{2004.2005}$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } A = \frac{2003.2004 - 1}{2003.2004} = \frac{2003.2004}{2003.2004} - \frac{1}{2003.2004} = 1 - \frac{1}{2003.2004}$$

$$B = \frac{2004.2005 - 1}{2004.2005} = \frac{2004.2005}{2004.2005} - \frac{1}{2004.2005} = 1 - \frac{1}{2004.2005}$$

Vì $\frac{1}{2003.2004} > \frac{1}{2004.2005}$ nên $A < B$.

Bài 38: So sánh phân số sau bằng cách nhanh nhất:

a) $\frac{2012}{2013}$ và $\frac{2013}{2014}$

b) $\frac{1006}{1007}$ và $\frac{2013}{2015}$

Lời giải:

a) Ta có: $1 - \frac{2012}{2013} = \frac{1}{2013}$; $1 - \frac{2013}{2014} = \frac{1}{2014}$.

Vì $\frac{1}{2013} > \frac{1}{2014}$ nên $\frac{2012}{2013} < \frac{2013}{2014}$

b) Ta có: $1 - \frac{1006}{1007} = \frac{1}{1007} = \frac{2}{2014}$; $1 - \frac{2013}{2015} = \frac{2}{2015}$.

Vì $\frac{2}{2014} > \frac{2}{2015}$ nên $\frac{1006}{1007} < \frac{2013}{2015}$.

Bài 39: So sánh $A = \frac{10^{2014} + 2016}{10^{2015} + 2016}$ và $B = \frac{10^{2015} + 2016}{10^{2016} + 2016}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \frac{10^{2014} + 2016}{10^{2015} + 2016} = \frac{(10^{2014} + 2016)(10^{2016} + 2016)}{(10^{2015} + 2016)(10^{2016} + 2016)} \\ &= \frac{10^{4030} + 2016 \cdot (10^{2014} + 10^{2016}) + 2016^2}{(10^{2015} + 2016)(10^{2016} + 2016)} \\ &= \frac{10^{4030} + 2016 \cdot 10^{2014} \cdot 101 + 2016^2}{(10^{2015} + 2016)(10^{2016} + 2016)} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } B &= \frac{10^{2015} + 2016}{10^{2016} + 2016} = \frac{(10^{2015} + 2016)(10^{2015} + 2016)}{(10^{2016} + 2016)(10^{2015} + 2016)} \\ &= \frac{10^{4030} + 2 \cdot 2016 \cdot 10^{2015} + 2016^2}{(10^{2016} + 2016)(10^{2015} + 2016)} \end{aligned}$$

$$= \frac{10^{4030} + 20 \cdot 2016 \cdot 10^{2014} + 2016^2}{(10^{2016} + 2016)(10^{2015} + 2016)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A > B$.

Vậy $A > B$.

Bài 40: Cho tổng $T = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2016}{2^{2015}} + \frac{2017}{2^{2016}}$. So sánh T với 3.

Lời giải

$$\text{Ta có: } T = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2016}{2^{2015}} + \frac{2017}{2^{2016}}$$

$$2T = 2 + \frac{3}{2^1} + \frac{4}{2^2} + \dots + \frac{2016}{2^{2014}} + \frac{2017}{2^{2015}}$$

$$2T - T = 2 + \frac{3}{2^1} - \frac{2}{2^1} + \frac{4}{2^2} - \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{2016}{2^{2014}} - \frac{2015}{2^{2014}} + \frac{2017}{2^{2015}} - \frac{2016}{2^{2015}} - \frac{2017}{2^{2016}}$$

$$= 2 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2015}} - \frac{2017}{2^{2016}}$$

$$\text{Đặt } N = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2015}}$$

$$\text{Ta có } 2N = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2014}}$$

$$2N - N = 1 - \frac{1}{2^{2015}}$$

$$N < 1.$$

$$\text{Nên } T < 2 + 1 - \frac{2017}{2^{2016}} = 3 - \frac{2017}{2^{2016}}.$$

Vậy $T < 3$.

Bài 41: So sánh M và N biết: $M = \frac{19^{30} + 5}{19^{31} + 5}$; $N = \frac{19^{31} + 5}{19^{32} + 5}$.

Lời giải

$$M = \frac{19^{30} + 5}{19^{31} + 5} \text{ nên } 19M = \frac{19 \cdot (19^{30} + 5)}{19^{31} + 5} = \frac{19^{31} + 95}{19^{31} + 5} = 1 + \frac{90}{19^{31} + 5}.$$

$$N = \frac{19^{31} + 5}{19^{32} + 5} \text{ nên } 19N = \frac{19 \cdot (19^{31} + 5)}{19^{32} + 5} = \frac{19^{32} + 95}{19^{32} + 5} = 1 + \frac{90}{19^{32} + 5}$$

$$\text{Vì } \frac{90}{19^{31} + 5} > \frac{90}{19^{32} + 5}$$

$$\text{Suy ra } 1 + \frac{90}{19^{31} + 5} > 1 + \frac{90}{19^{32} + 5}$$

$$\text{Hay } 19M > 19N$$

Nên $M > N$.

Bài 42: Cho $A = \frac{10^{2004} + 1}{10^{2005} + 1}$ và $B = \frac{10^{2005} + 1}{10^{2006} + 1}$. So sánh A và B .

Lời giải

$$A = \frac{10^{2004} + 1}{10^{2005} + 1} \text{ nên } 10A = 10 \cdot \frac{10^{2004} + 1}{10^{2005} + 1} = \frac{10^{2005} + 10}{10^{2005} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2005} + 1}.$$

$$B = \frac{10^{2005} + 1}{10^{2006} + 1} \text{ nên } 10B = 10 \cdot \frac{10^{2005} + 1}{10^{2006} + 1} = \frac{10^{2006} + 10}{10^{2006} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2006} + 1}.$$

Hai phân số có tử số bằng nhau, $10^{2005} + 1 < 10^{2006} + 1$ nên $10A > 10B$.

Từ đó suy ra $A > B$.

Bài 43: So sánh các biểu thức : $A = \frac{121212}{171717} + \frac{2}{17} - \frac{404}{1717}$ với $B = \frac{10}{17}$.

Lời giải

$$\text{Ta có : } A = \frac{121212}{171717} + \frac{2}{17} - \frac{404}{1717} = \frac{121212:10101}{171717:10101} + \frac{2}{17} - \frac{404:101}{1717:101} = \frac{12}{17} + \frac{2}{17} - \frac{4}{17} = \frac{12+2-4}{17}.$$

$$A = \frac{10}{17}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{10}{17} \text{ hay } A = B = \frac{10}{17}.$$

Bài 44: So sánh A và B biết $A = \frac{1+5+5^2+\dots+5^9}{1+5+5^2+\dots+5^8}$; $B = \frac{1+3+3^2+\dots+3^9}{1+3+3^2+\dots+3^8}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{1+5+5^2+\dots+5^9}{1+5+5^2+\dots+5^8} = \frac{1+(5+5^2+\dots+5^9)}{1+5+5^2+\dots+5^8} = \frac{1+5(1+5+5^2+\dots+5^8)}{1+5+5^2+\dots+5^8} = \\ &= \frac{1}{1+5+5^2+\dots+5^8} + 5 > 5 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tương tự } B &= \frac{1+3+3^2+\dots+3^9}{1+3+3^2+\dots+3^8} = \frac{1+(3+3^2+\dots+3^9)}{1+3+3^2+\dots+3^8} = \frac{1+3(1+3+3^2+\dots+3^8)}{1+3+3^2+\dots+3^8} = \\ &= \frac{1}{1+3+3^2+\dots+3^8} + 3 < 4 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có : } A = \frac{1}{1+5+5^2+\dots+5^8} + 5 > 5 > 4 > \frac{1}{1+3+3^2+\dots+3^8} + 3 = B.$$

Nên $A > B$.

Bài 45: So sánh $A = \frac{2012^{37} + 37^{2012} + 1}{2012^{38}}$ với $B = \frac{2012^{38} + 37^{2012} + 2}{2012^{39}}$.

Lời giải

Thực hiện qui đồng mẫu số:

$$A = \frac{2012^{37} + 37^{2012} + 1}{2012^{38}} = \frac{2012^{76} + 37^{2012} \cdot 2012^{39} + 2012^{39}}{2012^{39} \cdot 2012^{38}}$$

$$B = \frac{2012^{38} + 37^{2012} + 2}{2012^{39}} = \frac{2012^{76} + 37^{2012} \cdot 2012^{38} + 2 \cdot 2012^{38}}{2012^{39} \cdot 2012^{38}}$$

$$\text{Ta có : } 37^{2012} \cdot 2012^{39} + 2012^{39} = 2012^{38} (37^{2012} \cdot 2012 + 2012)$$

$$\text{Và: } 37^{2012} \cdot 2012^{38} + 2 \cdot 2012^{38} = 2012^{38} (37^{2012} + 2)$$

Từ đó suy ra : $A > B$.

Bài 46: So sánh: $P = \frac{-7}{10^{2013}} + \frac{-15}{10^{2014}}$ và $Q = \frac{-15}{10^{2013}} + \frac{-7}{10^{2014}}$.

Lời giải

$$\text{Xét: } P = \frac{-7}{10^{2013}} + \frac{-15}{10^{2014}} = \frac{-7}{10^{2013}} + \frac{-8}{10^{2014}} + \frac{-7}{10^{2014}}$$

$$\text{và: } Q = \frac{-15}{10^{2013}} + \frac{-7}{10^{2014}} = \frac{-7}{10^{2013}} + \frac{-8}{10^{2013}} + \frac{-7}{10^{2014}}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{-8}{10^{2014}} > \frac{-8}{10^{2013}}.$$

Vậy: $P > Q$.

Bài 47: Các phân số sau có bằng nhau không? Vì sao? $\frac{23}{99}$; $\frac{23232323}{99999999}$; $\frac{2323}{9999}$; $\frac{232323}{999999}$.

Lời giải

$$\text{Ta thấy: } \frac{23}{99} = \frac{23.101}{99.101} = \frac{2323}{9999}$$

$$\frac{23}{99} = \frac{23.10101}{99.10101} = \frac{232323}{999999}$$

$$\frac{23}{99} = \frac{23.1010101}{99.1010101} = \frac{23232323}{99999999}$$

$$\text{Vậy } \frac{23}{99} = \frac{2323}{9999} = \frac{232323}{999999} = \frac{23232323}{99999999}.$$

Bài 48: So sánh A và B biết. $A = \frac{2^{18} - 3}{2^{20} - 3}$ và $B = \frac{2^{20} - 3}{2^{22} - 3}$.

Lời giải

$$A = \frac{2^{18} - 3}{2^{20} - 3} \text{ nên } 2^2 \cdot A = \frac{2^2 \cdot (2^{18} - 3)}{2^{22} - 3} = \frac{2^{20} - 12}{2^{20} - 3} = 1 - \frac{9}{2^{20} - 3}$$

$$B = \frac{2^{20} - 3}{2^{22} - 3} \text{ nên } 2^2 \cdot B = \frac{2^2 \cdot (2^{20} - 3)}{2^{22} - 3} = \frac{2^{22} - 12}{2^{22} - 3} = 1 - \frac{9}{2^{22} - 3}$$

Vì $\frac{9}{2^{20} - 3} > \frac{9}{2^{22} - 3}$ Suy ra $1 - \frac{9}{2^{20} - 3} < 1 - \frac{9}{2^{22} - 3}$ Hay $2^2 A < 2^2 B$. Nên $A < B$

Bài 49: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$

Lời giải

Ta thấy: $\frac{1}{41}$ đến $\frac{1}{80}$ có 40 phân số.

$$\text{Vậy } \frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80}$$

$$= \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{61} + \frac{1}{62} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} \right) \quad (1)$$

$$\text{Vì } \frac{1}{41} > \frac{1}{42} > \dots > \frac{1}{60} \text{ và } \frac{1}{61} > \frac{1}{62} > \dots > \frac{1}{80} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{80} + \dots + \frac{1}{80} + \frac{1}{80} \right) \\ &= \frac{20}{60} + \frac{20}{80} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12} \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (1), (2), (3) Suy ra:

$$\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$$

$$\text{Bài 50: So sánh: } N = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{11}{10^{2006}} \text{ và } M = \frac{11}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}}.$$

Lời giải

$$N = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{11}{10^{2006}} = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{6}{10^{2006}} + \frac{5}{10^{2006}}$$

$$\text{Và } M = \frac{11}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}} = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{6}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}}$$

$$\text{Ta có: } \frac{6}{10^{2006}} < \frac{6}{10^{2005}}$$

Vậy $N < M$.

$$\text{Bài 51: So sánh: } M = \frac{1999^{1999} + 1}{1999^{2000} + 1} \text{ và } N = \frac{1999^{1989} + 1}{1999^{2009} + 1}.$$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } 1999^{1999} + 1 > 1999^{1989} + 1$$

$$1999^{2000} + 1 < 1999^{2009} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1999^{1999} + 1}{1999^{2000} + 1} > \frac{1999^{1989} + 1}{1999^{2009} + 1}$$

Vậy $M > N$.

Bài 52: Hãy so sánh hai phân số sau bằng tất cả các cách có thể được:

$$\text{a) } \frac{1999}{2000}; \frac{19992000}{20002000}$$

$$\text{b) } \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{32} > 2$$

Lời giải:

a) Cách 1 : Qui đồng mẫu số rồi so sánh tử.

$$\text{Cách 2: } \frac{1999}{2000} = \frac{19991999}{20002000} < \frac{19992000}{20002000}$$

$$\text{Cách 3: Ta có: } \frac{1999}{2000} + \frac{1}{2000} = \frac{19992000}{20002000} + \frac{10000}{20002000} = 1$$

$$\text{mà } \frac{1}{2000} = \frac{10000}{20000000} > \frac{10000}{20002000} \Rightarrow \frac{1999}{2000} < \frac{19992000}{20002000}$$

$$\text{b) } \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} = \frac{4n-1}{4n^2-2n} > \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}; n \geq 2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{32} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{8} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2$$

$$\text{Bài 53: So sánh các phân số sau: } A = \frac{2489-36}{7467-108}; B = \frac{2929-303}{8787+1717}.$$

Lời giải:

$$A = \frac{2489-36}{3 \cdot (2489-36)} = \frac{1}{3}; \quad B = \frac{101 \cdot (29-3)}{101 \cdot (87+17)} = \frac{26}{104} = \frac{1}{4}.$$

Vì $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ nên $A > B$.

Bài 54: So sánh các biểu thức sau: $A = \frac{1000^{10} + 1}{1000^{10} - 1}$; $B = \frac{1000^{10} - 1}{1000^{10} - 3}$

Lời giải:

$$A = \frac{1000^{10} + 1}{1000^{10} - 1} = 1 + \frac{2}{1000^{10} - 1} \quad (1)$$

$$B = \frac{1000^{10} - 1}{1000^{10} - 3} = 1 + \frac{2}{1000^{10} - 3} \quad (2)$$

Vì $\frac{2}{1000^{10} - 1} < \frac{2}{1000^{10} - 3}$ nên từ (1) và (2) suy ra $A < B$.

Bài 55: So sánh M và N biết: $M = \frac{10^{2021} + 1}{10^{2022} + 1}$ và $N = \frac{10^{2022} + 1}{10^{2023} + 1}$

Trích đề HSG huyện năm 202 -2023

Lời giải

$$\text{Ta có: } M = \frac{10^{2021} + 1}{10^{2022} + 1}$$

$$\begin{aligned} 10M &= \frac{10^{2022} + 10}{10^{2022} + 1} \\ &= \frac{10^{2022} + 1 + 9}{10^{2022} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2022} + 1} \end{aligned}$$

$$N = \frac{10^{2022} + 1}{10^{2023} + 1}$$

$$10N = \frac{10^{2023} + 10}{10^{2023} + 1} = \frac{10^{2023} + 1 + 9}{10^{2023} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2023} + 1}$$

$$\text{Vì } 10^{2022} + 1 < 10^{2023} + 1 \Rightarrow \frac{9}{10^{2022} + 1} > \frac{9}{10^{2023} + 1}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{9}{10^{2022} + 1} > 1 + \frac{9}{10^{2023} + 1}$$

$$\Rightarrow 10M > 10N \Rightarrow M > N$$

Bài 56: So sánh: $A = \frac{2006^{2006} + 1}{2007^{2007} + 1}$ và $B = \frac{2006^{2005} + 1}{2006^{2006} + 1}$.

Trích đề HSG huyện Vụ Bản, năm 2013- 2014

Lời giải

$$A = \frac{2006^{2006} + 1}{2006^{2007} + 1} < \frac{2006^{2006} + 1 + 2005}{2006^{2007} + 2005 + 1}$$

$$= \frac{2006^{2006} + 2006}{2006^{2007} + 2006} = \frac{2006(2006^{2005} + 1)}{2006(2006^{2006} + 1)} = \frac{2006^{2005} + 1}{2006^{2006} + 1} = B$$

Vậy $A < B$.

Bài 57: Cho $A = \frac{10^{2001} + 1}{10^{2002} + 1}$; $B = \frac{10^{2002} + 1}{10^{2003} + 1}$. Hãy so sánh A và B .

Trích đề HSG huyện Trần Yên, năm 2013- 2014

Lời giải

$$\text{Ta có: } 10A = \frac{10^{2002} + 10}{10^{2002} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2002} + 1} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } 10B = \frac{10^{2003} + 10}{10^{2003} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2003} + 1} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thấy :

$$\frac{9}{10^{2002} + 1} > \frac{9}{10^{2003} + 1}$$

$$\Rightarrow 10A > 10B$$

$$\Rightarrow A > B.$$

Vậy $A > B$.

Bài 58: So sánh A và B biết: $A = \frac{2013.2014 - 1}{2013.2014}$ và $B = \frac{2014.2015 - 1}{2014.2015}$

Trích đề HSG huyện Bạch Thông năm 2019 - 2020

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{2013.2014 - 1}{2013.2014} = 1 - \frac{1}{2013.2014}; \quad B = \frac{2014.2015 - 1}{2014.2015} = 1 - \frac{1}{2014.2015}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{2013.2014} > \frac{1}{2014.2015} \text{ nên } A < B$$

Bài 59: So sánh P và Q biết: $P = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013}$ và $Q = \frac{2010 + 2011 + 2012}{2011 + 2012 + 2013}$

Trích đề HSG huyện Gia Viễn năm 2018 - 2019

Lời giải

Ta có:

$$Q = \frac{2010 + 2011 + 2012}{2011 + 2012 + 2013} = \frac{2010}{2011 + 2012 + 2013} + \frac{2011}{2011 + 2012 + 2013} + \frac{2012}{2011 + 2012 + 2013}$$

Lần lượt so sánh từng phân số của P và Q với các tử là: 2010; 2011; 2012 thấy được các phân thức của P đều lớn hơn các phân thức của Q .

Vậy $P > Q$

Bài 60: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

Trích đề HSG huyện Duy Xuyên năm 2019 - 2020

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} < 1$$

Bài 61: Cho biểu thức : $B = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$. Chứng tỏ rằng $\frac{1}{6} < B < \frac{1}{4}$

Trích đề HSG huyện Giao Thủy năm 2018 - 2019

Lời giải

$$B = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

$$B = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$B < \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$B = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2} > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{100.101}$$

$$B = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2} > \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101}$$

$$B > \frac{1}{5} - \frac{1}{101}$$

$$B > \frac{96}{505}$$

$$B > \frac{96}{576}$$

$$B > \frac{1}{6} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$$

Bài 62: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2021} < \frac{3}{4}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 1+2+3+\dots+n = \frac{n.(n+1)}{2}.$$

Khi đó:

$$A = \frac{1}{\frac{(1+3).2}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+5).3}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+7).4}{2}} + \dots + \frac{1}{\frac{(1+2021).1011}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{2.4} + \frac{2}{3.6} + \frac{2}{4.8} + \dots + \frac{2}{1011.2022} \\
&= \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{1011.1011} \\
&< \frac{1}{2.2} + \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{1010.1011} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1011} = \frac{3}{4} - \frac{1}{1011} < \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Bài 63: So sánh $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$ và $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Ta có:

$$A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

$$A < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$A < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{100}$$

$$A < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}$$

$$A < \frac{3}{4}$$

Vậy $A < \frac{3}{4}$

Bài 64: Cho biểu thức: $T = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2020}{2^{2019}} + \frac{2021}{2^{2020}}$. So sánh T với 3.

Lời giải

$$T = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2020}{2^{2019}} + \frac{2021}{2^{2020}}$$

$$2T = 2 \left(\frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2020}{2^{2019}} + \frac{2021}{2^{2020}} \right) = 2 + \frac{3}{2^1} + \frac{4}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2020}{2^{2018}} + \frac{2021}{2^{2019}}$$

$$2T - T = 2 + \frac{3}{2^1} - \frac{2}{2^1} + \frac{4}{2^2} - \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{2020}{2^{2018}} - \frac{2019}{2^{2018}} + \frac{2021}{2^{2019}} - \frac{2020}{2^{2019}} - \frac{2021}{2^{2020}}$$

$$T = 2 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2019}} - \frac{2021}{2^{2020}}$$

Đặt $N = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2019}}$

$$2N = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2018}} \text{ suy ra } 2N - N = 1 - \frac{1}{2^{2019}} < 1$$

Vậy $N < 1$ nên $T < 2 + 1 - \frac{2021}{2^{2020}} = 3 - \frac{2021}{2^{2020}} < 3$ suy ra $T < 3$.

Bài 65: So sánh $A = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{2020}{2^{2020}}$ và $B = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ (Với $a, b \in \mathbb{Q}^*$).

Lời giải

$$A = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{2020}{2^{2020}}$$

$$2A = 1 + 1 + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2019}{2^{2018}} + \frac{2020}{2^{2019}}$$

$$2A - A = \left(1 + 1 + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2019}{2^{2018}} + \frac{2020}{2^{2019}}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{2020}{2^{2020}}\right)$$

$$A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2019}}\right) - \frac{2020}{2^{2020}}$$

$$A = C - \frac{2020}{2^{2020}}$$

$$C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2019}}$$

$$2C = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{2017}} + \frac{1}{2^{2018}}$$

$$2C - C = C = 2 - \frac{1}{2^{2019}}$$

$$A = C - \frac{2020}{2^{2020}} = 2 - \frac{1}{2^{2019}} - \frac{2020}{2^{2020}} < 2$$

Xét $B = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ($a, b \in \mathbb{Q}^*$)

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b$.

Đặt $b = a + m$ ($m \in \mathbb{Q}^*$)

$$B = \frac{a}{a+m} + \frac{a+m}{a} = \frac{(a+m)-m}{a+m} + \frac{a+m}{a}$$

$$B = 1 - \frac{m}{a+m} + 1 + \frac{m}{a} = 2 + m \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+m} \right)$$

$$B \geq 2$$

Vậy $A < B$.

Bài 66: Cho $M = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2021^2}$. So sánh M với $\frac{2020}{2021}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2021^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2021} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} = 1 - \frac{1}{2021} = \frac{2020}{2021} \end{aligned}$$

Vậy $M < \frac{2020}{2021}$.

Bài 67: Cho $D = 2021 - \frac{1}{4} - \frac{2}{5} - \frac{3}{6} - \dots - \frac{2021}{2024}$ và $E = \frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{10120}$. So sánh D và E

Lời giải

$$D = 2021 - \frac{1}{4} - \frac{2}{5} - \frac{3}{6} - \dots - \frac{2021}{2024} = 1 - \frac{1}{4} + 1 - \frac{2}{5} + 1 - \frac{3}{6} + \dots + 1 - \frac{2021}{2024} = \frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{3}{6} + \dots + \frac{3}{2024}$$

$$= 3 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2024} \right).$$

$$E = \frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{10120} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2024} \right)$$

Ta thấy: $3 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2024} \right) > \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2024} \right)$

Suy ra $D > E$.

Bài 68: So sánh $A = \frac{10^{2021} + 1}{10^{2022} + 1}$ và $B = \frac{10^{2022} + 1}{10^{2023} + 1}$

Lời giải

Ta có:

$$A = \frac{10^{2021} + 1}{10^{2022} + 1} \text{ suy ra } 10A = \frac{10^{2022} + 10}{10^{2022} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2022} + 1}$$

$$B = \frac{10^{2022} + 1}{10^{2023} + 1} \text{ suy ra } 10B = \frac{10^{2023} + 10}{10^{2023} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2023} + 1}$$

Vì $10^{2022} + 1 < 10^{2023} + 1$ nên $\frac{9}{10^{2022} + 1} > \frac{9}{10^{2023} + 1}$

Suy ra $A > B$.

Bài 69: Cho $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{9999}{10000}$. So sánh A với $0,01$

Lời giải

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{9999}{10000}, \text{ đặt } B = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{10000}{10001}$$

Vì $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}; \frac{3}{4} < \frac{4}{5}; \dots; \frac{9999}{10000} < \frac{10000}{10001}$ nên $A < B$ mà $A > 0; B > 0$.

$$A^2 < A \cdot B = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{9999}{10000} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{10000}{10001} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{9999}{10000} \cdot \frac{10000}{10001} = \frac{1}{10001} < \frac{1}{10000} = (0,01)^2$$

$$A^2 < (0,01)^2 \text{ suy ra } A < 0,01$$

Bài 70: Cho $D = \frac{1}{7^2} - \frac{2}{7^3} + \frac{3}{7^4} - \frac{4}{7^5} + \dots + \frac{201}{7^{202}} - \frac{202}{7^{203}}$. Hãy so sánh D với $\frac{1}{64}$.

Lời giải

$$D = \frac{1}{7^2} - \frac{2}{7^3} + \frac{3}{7^4} - \frac{4}{7^5} + \dots + \frac{201}{7^{202}} - \frac{202}{7^{203}}$$

$$7D = \frac{1}{7} - \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} - \frac{4}{7^4} + \dots + \frac{201}{7^{201}} - \frac{202}{7^{202}}$$

$$8D = \frac{1}{7} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{7^4} + \dots - \frac{1}{7^{202}} - \frac{202}{7^{203}}$$

$$56D = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^3} + \dots - \frac{1}{7^{201}} - \frac{202}{7^{202}}$$

Cộng (3) với (4) theo vế ta có:

$$64D = 1 - \frac{203}{7^{202}} - \frac{202}{7^{203}}$$

$$64D = 1 - \left(\frac{203}{7^{202}} + \frac{202}{7^{203}} \right) < 1$$

$$\text{Suy ra } D < \frac{1}{64}$$

Bài 71: So sánh các biểu thức sau: $P = \frac{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{100}}{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{99}}$ và $Q = \frac{1+9+9^2+9^3+\dots+9^{100}}{1+9+9^2+9^3+\dots+9^{99}}$

Lời giải

Ta có:

$$P = \frac{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{100}}{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{99}} = \frac{1+7(1+7+7^2+\dots+7^{99})}{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{99}} = 7 + \frac{1}{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{99}} < 8$$

$$\left(\text{Do } 0 < \frac{1}{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{99}} < 1 \right)$$

$$Q = \frac{1+9+9^2+9^3+\dots+9^{100}}{1+9+9^2+9^3+\dots+9^{99}} = \frac{1+9(1+9+9^2+\dots+9^{99})}{1+9+9^2+\dots+9^{99}} = 9 + \frac{1}{1+9+9^2+\dots+9^{99}} > 9$$

$$\left(\text{Do } \frac{1}{1+9+9^2+\dots+9^{99}} > 0 \right)$$

Từ đó suy ra $P < Q$

PHIẾU BÀI TẬP SỐ 2

Bài 1: So sánh A và B biết: $A = \frac{2013 \cdot 2014 - 1}{2013 \cdot 2014}$ và $B = \frac{2014 \cdot 2015 - 1}{2014 \cdot 2015}$.

Bài 2: So sánh hai phân số $\frac{a-1}{a}$ và $\frac{b+1}{b}$ (với a, b là số nguyên cùng dấu và $a, b \neq 0$)

Trích đề HSG trường THCS Phan Đình Phùng năm 2018-2019

Bài 3: So sánh: $A = \frac{2008^{2008} + 1}{2008^{2009} + 1}$ và $B = \frac{2008^{2007} + 1}{2008^{2008} + 1}$.

Bài 4: So sánh: $A = \frac{1999^{1999} + 1}{1999^{1998} + 1}$ và $B = \frac{1999^{2000} + 1}{1999^{1999} + 1}$.

Bài 5: So sánh: $A = \frac{15^{23} - 3}{15^{22} - 138}$ và $B = \frac{15^{22} + 4}{15^{21} - 5}$

Bài 6: So sánh: $A = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$ và $B = \frac{n^2 + 3}{n^2 + 4}$ với $n > 1$.

Bài 7: So sánh: $A = \frac{4}{7} + 5 + \frac{3}{7^2} + \frac{5}{7^3} + \frac{6}{7^4}$ và $B = \frac{5}{7^4} + 5 + \frac{6}{7^2} + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3}$.

Bài 8: So sánh $A = \frac{2012^{37} + 37^{2012} + 1}{2012^{38}}$ với $B = \frac{2012^{38} + 37^{2012} + 2}{2012^{39}}$.

Bài 9: Cho $A = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right)\left(\frac{1}{3^2} - 1\right)\left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$ So sánh A với $-\frac{1}{2}$.

Bài 10: a) Cho $a, b, n \in \mathbb{Q}^*$. Hãy so sánh $\frac{a+n}{b+n}$ và $\frac{a}{b}$.

b) Cho $A = \frac{10^{11} - 1}{10^{12} - 1}$; $B = \frac{10^{10} + 1}{10^{11} + 1}$. So sánh A và B .

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 11: So sánh $A = \frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1}$ và $B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1}$

Bài 12: So sánh $A = \frac{10^{2019} + 1}{10^{2020} + 1}$ và $B = \frac{10^{2020} + 1}{10^{2021} + 1}$.

Bài 13: So sánh $A = \frac{20^{21} - 3}{20^{22} + 4}$ và $B = \frac{20^{22} - 3}{20^{23} + 4}$.

Bài 14: So sánh $A = \frac{15^{22} - 6}{15^{21} - 1}$ và $B = \frac{15^{23} - 6}{15^{22} - 1}$.

Bài 15: So sánh $A = \frac{10}{2^7} + \frac{10}{2^6}$ và $B = \frac{11}{2^7} + \frac{9}{2^6}$.

Bài 16: So sánh $A = \frac{2006}{2007} + \frac{2007}{2008} + \frac{2008}{2009} + \frac{2009}{2006}$ với $B = 4$.

Bài 17: So sánh $A = \frac{-15}{2^{300}} + \frac{-17}{3^{200}}$ và $B = \frac{-17}{2^{300}} + \frac{-15}{3^{200}}$.

Bài 18: So sánh $A = \frac{-7}{10^{205}} + \frac{-15}{10^{206}}$ và $B = \frac{-15}{10^{205}} + \frac{-7}{10^{206}}$.

Lời giải

Bài 19: So sánh P và Q biết $P = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013}$ và $Q = \frac{2010 + 2011 + 2012}{2011 + 2012 + 2013}$

Bài 20: So sánh không qua quy đồng: $A = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}$; $B = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Bài 21: Không quy đồng mẫu số hãy so sánh:

$$A = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-19}{10^{2011}}; B = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-19}{10^{2010}}$$

Bài 22: Cho $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$.

So sánh A với $\frac{3}{4}$?

Bài 23: So sánh A và B biết: $A = \frac{2013 \cdot 2014 - 1}{2013 \cdot 2014}$ và $B = \frac{2014 \cdot 2015 - 1}{2014 \cdot 2015}$

Bài 24: Cho: $A = \frac{10^{2001} + 1}{10^{2002} + 1}$; $B = \frac{10^{2002} + 1}{10^{2003} + 1}$. Hãy so sánh A và B .

Bài 25: So sánh $N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}$ và $M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$.

Bài 58: So sánh A và B biết: $A = \frac{2013 \cdot 2014 - 1}{2013 \cdot 2014}$ và $B = \frac{2014 \cdot 2015 - 1}{2014 \cdot 2015}$

Trích đề HSG huyện Bạch Thông năm 2019 - 2020

Bài 59: So sánh P và Q biết: $P = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013}$ và $Q = \frac{2010 + 2011 + 2012}{2011 + 2012 + 2013}$

Trích đề HSG huyện Gia Viễn năm 2018 - 2019

Bài 60: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

Trích đề HSG huyện Duy Xuyên năm 2019 - 2020

Bài 61: Cho biểu thức: $B = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$. Chứng tỏ rằng $\frac{1}{6} < B < \frac{1}{4}$

Trích đề HSG huyện Giao Thủy năm 2018 - 2019

Bài 62: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2021} < \frac{3}{4}$

Bài 63: So sánh $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$ và $\frac{3}{4}$.

Bài 64: Cho biểu thức: $T = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2020}{2^{2019}} + \frac{2021}{2^{2020}}$. So sánh T với 3.

Bài 65: So sánh $A = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{2020}{2^{2020}}$ và $B = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ (Với $a, b \in \mathbb{Q}^*$).

Bài 66: Cho $M = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2021^2}$. So sánh M với $\frac{2020}{2021}$.

Bài 67: Cho $D = 2021 - \frac{1}{4} - \frac{2}{5} - \frac{3}{6} - \dots - \frac{2021}{2024}$ và $E = \frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{10120}$. So sánh D và E

Bài 68: So sánh $A = \frac{10^{2021} + 1}{10^{2022} + 1}$ và $B = \frac{10^{2022} + 1}{10^{2023} + 1}$

Bài 69: Cho $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{9999}{10000}$. So sánh A với 0,01

Bài 70: Cho $D = \frac{1}{7^2} - \frac{2}{7^3} + \frac{3}{7^4} - \frac{4}{7^5} + \dots + \frac{201}{7^{202}} - \frac{202}{7^{203}}$. Hãy so sánh D với $\frac{1}{64}$.

Bài 71: So sánh các biểu thức sau: $P = \frac{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{100}}{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{99}}$ và $Q = \frac{1+9+9^2+9^3+\dots+9^{100}}{1+9+9^2+9^3+\dots+9^{99}}$

CHỦ ĐỀ: SO SÁNH PHÂN SỐ

A. PHẦN NỘI DUNG

Dạng 1: Các phương pháp so sánh: quy đồng mẫu (từ), sử dụng tính chất bắc cầu, xét phân bù, viết dưới dạng hỗn số, so sánh với 1; sử dụng tính chất: với $a, b, m \in \mathbb{N}^*$ thì:

$$*\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m} \quad *\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}$$

Bài 1: So sánh: $N = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{11}{10^{2006}}$ và $M = \frac{11}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}}$

Trích đề 59 HSG huyện năm 2018- 2019

Lời giải

$$N = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{11}{10^{2006}} = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{11}{10 \cdot 10^{2005}} = \frac{61}{10} \cdot \frac{1}{10^{2005}}$$

$$M = \frac{11}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}} = \frac{11}{10^{2005}} + \frac{5}{10 \cdot 10^{2005}} = \frac{23}{2} \cdot \frac{1}{10^{2005}}$$

Vì $\frac{23}{2} = 11,5 > 6,1 = \frac{61}{10}$ nên $M > N$

Bài 2: Cho $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$.

Chứng minh $A < \frac{3}{4}$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành, năm 2018- 2019

Lời giải

Ta có: $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\frac{(1+3) \cdot 2}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+5) \cdot 3}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+7) \cdot 4}{2}} + \dots + \frac{1}{\frac{(1+2017) \cdot 1009}{2}} \\ &= \frac{2}{2 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 6} + \frac{2}{4 \cdot 8} + \dots + \frac{2}{1009 \cdot 2018} = \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{1009 \cdot 1009} \end{aligned}$$

$$A < \frac{1}{2 \cdot 2} + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{1008 \cdot 1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1008} - \frac{1}{1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1009} \right) \Rightarrow A < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \Rightarrow A < \frac{3}{4}$$

Bài 3: So sánh S với 3, biết $S = \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013} + \frac{2013}{2011}$

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2018 - 2019

Lời giải

$$S = \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013} + \frac{2013}{2011} = \left(1 - \frac{1}{2012}\right) + \left(1 - \frac{1}{2013}\right) + \left(1 + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2011}\right)$$

$$= 3 + \left(\frac{1}{2011} - \frac{1}{2012}\right) + \left(\frac{1}{2011} - \frac{1}{2013}\right)$$

$$\text{Do } \frac{1}{2011} > \frac{1}{2012}; \frac{1}{2011} > \frac{1}{2013}$$

$$\text{Nên: } \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} > 0, \frac{1}{2011} - \frac{1}{2013} > 0 \Rightarrow 3 + \left(\frac{1}{2011} - \frac{1}{2012}\right) + \left(\frac{1}{2011} - \frac{1}{2013}\right) > 3$$

Vậy $S > 3$

Bài 4: Không quy đồng mẫu số hãy so sánh:

$$A = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-19}{10^{2011}}; B = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-19}{10^{2010}}$$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018 - 2019

Lời giải

Ta có:

$$A = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-19}{10^{2011}} = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-10}{10^{2011}} + \frac{-9}{10^{2011}}$$

$$B = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-19}{10^{2010}} = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-10}{10^{2010}} + \frac{-9}{10^{2010}}$$

$$\text{Ta thấy } \frac{-10}{10^{2011}} > \frac{-10}{10^{2010}} \Rightarrow A > B$$

$$\text{Bài 5: So sánh } A = \frac{2011^{2012} + 1}{2011^{2013} + 1} \text{ với } B = \frac{2011^{2013} + 1}{2011^{2014} + 1}$$

Trích đề HSG huyện Quế Sơn năm 2018 - 2019

Lời giải

$$2011A = \frac{2011^{2013} + 2011}{2011^{2013} + 1} = 1 + \frac{2010}{2011^{2013} + 1}; 2011B = \frac{2011^{2014} + 2011}{2011^{2014} + 1} = 1 + \frac{2010}{2011^{2014} + 1}$$

$$2011A > 2011B \Rightarrow A > B$$

$$\text{Bài 6: So sánh phân số: } \frac{15}{301} \text{ với } \frac{25}{499}$$

Trích đề HSG cấp huyện năm học 2016-2017

Lời giải

$$\frac{15}{301} < \frac{15}{300} = \frac{1}{20} = \frac{25}{500} < \frac{25}{499}. \text{ Vậy } \frac{15}{301} < \frac{25}{499}$$

$$\text{Bài 7: So sánh } \frac{2011 \cdot 2012 - 1}{2011 \cdot 2012} \text{ và } \frac{2012 \cdot 2013 - 1}{2012 \cdot 2013}$$

Trích đề HSG huyện Đuan Hùng năm 2018-2019

$$\frac{2011 \cdot 2012 - 1}{2011 \cdot 2012} = 1 - \frac{1}{2011 \cdot 2012} \text{ và } \frac{2012 \cdot 2013 - 1}{2012 \cdot 2013} = 1 - \frac{1}{2012 \cdot 2013}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{2011 \cdot 2012} > \frac{1}{2012 \cdot 2013} \Rightarrow \frac{2011 \cdot 2012 - 1}{2011 \cdot 2012} < \frac{2012 \cdot 2013 - 1}{2012 \cdot 2013}$$

$$\text{Bài 8: So sánh: } \frac{-22}{45} \text{ và } \frac{-51}{103}$$

Trích đề HSG trường Nguyễn Khuyến năm 20... - 20...

Lời giải

$$\frac{22}{45} < \frac{22}{44} = \frac{1}{2} = \frac{51}{102} < \frac{51}{101} \Rightarrow \frac{22}{45} < \frac{51}{101} \Rightarrow \frac{-22}{45} > \frac{-51}{101}$$

Bài 9: So sánh P và Q

Biết: $P = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013}$ và $Q = \frac{2010+2011+2012}{2011+2012+2013}$

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Lời giải

Ta có:

$$Q = \frac{2010+2011+2012}{2011+2012+2013} = \frac{2010}{2011+2012+2013} + \frac{2011}{2011+2012+2013} + \frac{2012}{2011+2012+2013}$$

Lần lượt so sánh từng phân số của P và Q với các tử là: 2010; 2011; 2012 thấy được các phân thức của P đều lớn hơn các phân thức của Q .

Vậy $P > Q$

Bài 10: So sánh

a) $M = \frac{77772}{77778}$ và $N = \frac{88881}{88889}$.

b) $P = \frac{326}{1955} + \frac{988}{1975} + \frac{662}{1985}$ và $Q = \frac{3951}{3950} + \frac{1}{5955} + \frac{1}{11730}$.

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021 – 2022.

Lời giải

a) $M = \frac{77772}{77778} = 1 - \frac{6}{77778} = 1 - \frac{1}{12963} = 1 - \frac{8}{103704}$

$$N = \frac{88881}{88889} = 1 - \frac{8}{88889}$$

Vì $\frac{8}{103704} < \frac{8}{88889}$ nên $1 - \frac{8}{103704} > 1 - \frac{8}{88889}$

Vậy $M > N$.

b) $P = \frac{326}{1955} + \frac{988}{1975} + \frac{662}{1985}$ và $Q = \frac{3951}{3950} + \frac{1}{5955} + \frac{1}{11730}$

Ta có: $P = \frac{326}{1955} + \frac{988}{1975} + \frac{662}{1985}$

$$= \frac{326.6}{1955.6} + \frac{988.2}{1975.2} + \frac{662.3}{1985.3}$$

$$= \frac{1956}{11730} + \frac{1976}{3950} + \frac{1986}{5955}$$

$$= \left(\frac{1}{11730} + \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{3951}{3950} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{5955} + \frac{1}{3} \right)$$

$$= Q + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)$$

$$= Q + 0$$

$$= Q$$

Vậy $P = Q$.

Bài 11: So sánh A và B biết: $A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1}$, $B = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1}$

Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015 - 2016

Lời giải

Vì $A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < 1$

$$A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < \frac{17^{18} + 1 + 16}{17^{19} + 1 + 16} = \frac{17 \cdot (17^{17} + 1)}{17 \cdot (17^{18} + 1)} = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1} = B$$

Vậy $A = B$.

Bài 12: Không quy đồng mẫu số, hãy so sánh hai phân số: $\frac{37}{67}$ và $\frac{377}{677}$.

Trích đề HSG huyện Phù Ninh năm 2015 - 2016

Lời giải

Ta có: $\frac{300}{670} > \frac{300}{677}$ mà $\frac{300}{670} = \frac{30}{67} \Rightarrow \frac{30}{67} > \frac{300}{677}$ (1)

$$1 - \frac{37}{67} = \frac{30}{67} \text{ và } 1 - \frac{377}{677} = \frac{300}{677} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) nên $\frac{377}{677} > \frac{37}{67}$.

Bài 13: So sánh A và B biết: $A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1}$, $B = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1}$

Trích đề HSG huyện Lương Tài 2015 – 2016

Lời giải

Vì $A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < 1$ nên $A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < \frac{17^{18} + 1 + 16}{17^{19} + 1 + 16} = \frac{17 \cdot (17^{17} + 1)}{17 \cdot (17^{18} + 1)} = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1} = B$

Bài 14: So sánh A và B biết: $A = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2010}$ và $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{17}$

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2018-2019

Lời giải

$$A = \left(1 - \frac{1}{2011}\right) + \left(1 - \frac{1}{2012}\right) + \left(1 + \frac{2}{2010}\right)$$

$$A = 3 + \left(\frac{1}{2010} - \frac{1}{2011}\right) + \left(\frac{1}{2010} - \frac{1}{2012}\right)$$

$$A > 3$$

$$B = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{17}\right)$$

$$B < \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 5 + \frac{1}{8} \cdot 8 \text{ nên } B < 3$$

Từ đó suy ra $A > B$

Bài 15: So sánh: $\frac{201201}{202202}$ và $\frac{201201201}{202202202}$.

Trích đề HSG THCS Lý Tự Trọng năm 2015-2016

Lời giải

Ta có: $\frac{201201}{202202} = \frac{201}{202} \cdot \frac{1001}{1001} = \frac{201}{202}$

$$\frac{201201201}{202202202} = \frac{201}{202} \cdot \frac{1001001}{1001001} = \frac{201}{202}$$

Vậy hai phân số đã cho bằng nhau

Bài 16: So sánh $N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}$ và $M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Lời giải

So sánh:

Xét: $N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2006}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Và $M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Ta có: $\frac{-8}{10^{2006}} > \frac{-8}{10^{2005}}$

Vậy $N > M$

Bài 17: Không tính giá trị của các biểu thức. Hãy so sánh: $\frac{1717}{8585}$ và $\frac{1313}{5151}$

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Lời giải

$$\frac{1717}{8585} = \frac{17}{85} = \frac{1}{5} = \frac{13}{51} = \frac{1313}{5151} \Rightarrow \frac{1717}{8585} < \frac{1313}{5151}$$

Bài 18: So sánh: $A = \frac{121212}{171717} + \frac{2}{17} - \frac{404}{1717}$ với $B = \frac{10}{17}$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

$$A = \frac{121212}{171717} + \frac{2}{17} - \frac{404}{1717} = \frac{12}{17} + \frac{2}{17} - \frac{4}{17} = \frac{10}{17} \Rightarrow A = B$$

Vậy $A = B$

Bài 19: So sánh: $\frac{-22}{45}$ và $-\frac{51}{103}$

Trích đề HSG năm 2019-2020

Lời giải

Ta có $\frac{22}{45} < \frac{22}{44} = \frac{1}{2} = \frac{51}{102} < \frac{51}{101}$

$$\frac{22}{45} < \frac{51}{101}$$

$$\frac{-22}{45} > \frac{-51}{101}$$

$$* \frac{a}{b} < 1, \text{ suy ra } \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}.$$

$$* \frac{a}{b} > 1, \text{ suy ra } \frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}.$$

Bài 20: Tính tổng của các phân số lớn hơn $\frac{1}{5}$ nhưng nhỏ hơn $\frac{1}{4}$ và có tử là 4.

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{1}{5} = \frac{4}{20}; \frac{1}{4} = \frac{4}{16}$$

Các phân số lớn hơn $\frac{1}{5}$ nhưng nhỏ hơn $\frac{1}{4}$ và có tử là 4 là: $\frac{4}{17}; \frac{4}{18}; \frac{4}{19}$

$$\text{Tổng các phân số là: } \frac{4}{17} + \frac{4}{18} + \frac{4}{19} = \frac{4}{17} + \frac{2}{9} + \frac{4}{19} = \frac{684}{2907} + \frac{646}{2907} + \frac{612}{2907} = \frac{1942}{2907}.$$

Bài 21: Có bao nhiêu cách để viết $\frac{7}{12}$ thành tổng của hai phân số tối giản trong đó mẫu số của hai phân số khác nhau và đều không lớn hơn 12.

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\text{Ta có } 7 = 1+6 = 2+5 = 3+4$$

$$\text{Do đó } \frac{7}{12} = \frac{1+6}{12} = \frac{1}{12} + \frac{1}{2};$$

$$\frac{7}{12} = \frac{2+5}{12} = \frac{1}{6} + \frac{5}{12};$$

$$\frac{7}{12} = \frac{3+4}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$$

Vậy có ba cách viết.

Bài 22: So sánh: $A = \frac{17^8 + 5}{17^8 - 8}$ và $B = \frac{17^8 + 6}{17^8 - 7}$.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021 - 2022

Lời giải

$$A = \frac{17^8 + 5}{17^8 - 8} = \frac{17^8 - 8 + 13}{17^8 - 8} = \frac{17^8 - 8}{17^8 - 8} + \frac{13}{17^8 - 8} = 1 + \frac{13}{17^8 - 8}$$

$$B = \frac{17^8 + 6}{17^8 - 7} = \frac{17^8 - 7 + 13}{17^8 - 7} = \frac{17^8 - 7}{17^8 - 7} + \frac{13}{17^8 - 7} = 1 + \frac{13}{17^8 - 7}$$

$$\text{Vì } 0 < 17^8 - 8 < 17^8 - 7 \text{ nên } \frac{13}{17^8 - 8} > \frac{13}{17^8 - 7}.$$

Vậy $1 + \frac{13}{17^8 - 8} > 1 + \frac{13}{17^8 - 7}$ hay $A > B$.

Bài 23: So sánh P và Q , biết: $P = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013}$ và $Q = \frac{2010 + 2011 + 2012}{2011 + 2012 + 2013}$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có: $Q = \frac{2010 + 2011 + 2012}{2011 + 2012 + 2013} = \frac{2010}{2011 + 2012 + 2013} + \frac{2011}{2011 + 2012 + 2013} + \frac{2012}{2011 + 2012 + 2013}$

Ta có: $\frac{2010}{2011 + 2012 + 2013} < \frac{2010}{2011}$

$\frac{2011}{2011 + 2012 + 2013} < \frac{2011}{2012}$

$\frac{2012}{2011 + 2012 + 2013} < \frac{2012}{2013}$

nên $\frac{2010}{2011 + 2012 + 2013} + \frac{2011}{2011 + 2012 + 2013} + \frac{2012}{2011 + 2012 + 2013} < \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013}$

Kết luận: $P > Q$.

Bài 24: So sánh 2 phân số: $\frac{20072007}{20082008}$ và $\frac{200720072007}{200820082008}$

Trích đề HSG huyện Tĩnh Gia năm 2018-2019

Lời giải

$\frac{20072007}{20082008} = \frac{2007 \cdot 1001}{2008 \cdot 1001} = \frac{2007}{2008}$

$\frac{200720072007}{200820082008} = \frac{2007 \cdot 100010001}{2008 \cdot 100010001} = \frac{2007}{2008}$

Vậy hai phân số trên bằng nhau

Bài 25: So sánh hai phân số $\frac{a-1}{a}$ và $\frac{b+1}{b}$ (với a, b là số nguyên cùng dấu và $a; b \neq 0$)

Trích đề HSG THCS Phan Đình Phùng năm 2018-2019

Lời giải

Có $\frac{a-1}{a} = 1 - \frac{1}{a}$ và $\frac{b+1}{b} = 1 + \frac{1}{b}$

*Nếu $a > 0, b > 0$ suy ra $\frac{1}{a} > 0$ và $\frac{1}{b} > 0$ suy ra $1 - \frac{1}{a} < 1 + \frac{1}{b}$ hay $\frac{a-1}{a} < \frac{b+1}{b}$

*Nếu $a < 0, b < 0$ suy ra $\frac{1}{a} < 0; \frac{1}{b} < 0$ suy ra $1 - \frac{1}{a} > 1 + \frac{1}{b}$ suy ra $\frac{a-1}{a} > \frac{b+1}{b}$

Bài 26: So sánh A và B biết: $A = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2010}$ và $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{17}$

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2018 - 2019

Lời giải

$A = \left(1 - \frac{1}{2011}\right) + \left(1 - \frac{1}{2012}\right) + \left(1 + \frac{2}{2010}\right)$

$$A = 3 + \left(\frac{1}{2010} - \frac{1}{2011} \right) + \left(\frac{1}{2010} - \frac{1}{2012} \right)$$

$$A > 3$$

$$B = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{17} \right)$$

$$B < \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 5 + \frac{1}{8} \cdot 8 \text{ suy ra } B < 3$$

Từ đó suy ra $A < B$

Bài 27: So sánh A và B biết: $A = \frac{2013 \cdot 2014 - 1}{2013 \cdot 2014}$ và $B = \frac{2014 \cdot 2015 - 1}{2014 \cdot 2015}$

Trích đề HSG huyện Bạch Thông năm 2018 - 2019
Lời giải

Ta có:

$$A = \frac{2013 \cdot 2014 - 1}{2013 \cdot 2014} = 1 - \frac{1}{2013 \cdot 2014}$$

$$B = \frac{2014 \cdot 2015 - 1}{2014 \cdot 2015} = 1 - \frac{1}{2014 \cdot 2015}$$

Vì $\frac{1}{2013 \cdot 2014} > \frac{1}{2014 \cdot 2015}$ nên $A < B$

Bài 28: So sánh P và Q

Biết: $P = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013}$ và $Q = \frac{2010 + 2011 + 2012}{2011 + 2012 + 2013}$

Trích đề HSG Tỉnh Đồng Tháp năm 2018 - 2019
Lời giải

Ta có:

$$Q = \frac{2010 + 2011 + 2012}{2011 + 2012 + 2013} = \frac{2010}{2011 + 2012 + 2013} + \frac{2011}{2011 + 2012 + 2013} + \frac{2012}{2011 + 2012 + 2013}$$

Lần lượt so sánh từng phân số của P và Q với các tử là: 2011; 2010; 2012 ta thấy

$$P > Q$$

Dạng 2: So sánh hai lũy thừa

Bài 1: Cho $a = 2^{300}$, $b = 3^{200}$. Kết luận nào sau đây đúng ?

A. $a < b$

B. $a = b$

C. $a > b$

D. $a \geq b$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019

Bài 2: So sánh $C = 3^{210}$ với $D = 2^{310}$

Trích đề HSG huyện Quế Sơn năm 2018 - 2019

Lời giải

$$C = 3^{210} = 3^{10} \cdot 3^{200} = 3^{10} \cdot 9^{100}; \quad D = 2^{310} = 2^{10} \cdot 2^{300} = 2^{10} \cdot 8^{100}$$

Có $3^{10} > 2^{10}$ và $9^{100} > 8^{100}$ nên $C > D$

Bài 3: So sánh $N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}$ và $M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018 - 2019

Lời giải

$$\text{Xét: } N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2006}} + \frac{-7}{10^{2006}}$$

$$\text{Và } M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$$

$$\text{Ta có: } \frac{-8}{10^{2006}} > \frac{-8}{10^{2005}}$$

Vậy $N > M$

Bài 4: So sánh:

a) 3^{200} và 2^{300}

b) 71^{50} và 37^{75}

Trích đề HSG THCS Lý Tự Trọng năm 2015-2016

Lời giải

a) Ta có: $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$

$$2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$$

mà $8^{100} < 9^{100}$ nên $2^{300} < 3^{200}$

b) Ta thấy: $71^{50} < 72^{50} = (8.9)^{50} = 2^{150} \cdot 3^{100}$ (1)

$$37^{75} > 36^{75} = (4.9)^{75} = 2^{150} \cdot 3^{150} \quad (2)$$

mà $2^{150} \cdot 3^{150} > 2^{150} \cdot 3^{100}$ (3)

Từ (1), (2), và (3) suy ra: $37^{75} > 71^{50}$

Bài 5: Cho $A = 1 + 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{72}$ và $B = 2012^{73} - 1$. So sánh A và B .

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2018 – 2019.

Lời giải

Ta có: $A = 1 + 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{72}$

$$2012A = 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{72} + 2012^{73}$$

Lấy $2012A - A = 2012^{73} - 1$

$$A = \frac{2012^{73} - 1}{2011} < B = 2012^{73} - 1.$$

Vậy $A < B$.

Bài 6: So sánh: 2^{2013} và 3^{1344} .

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018 -2019

Lời giải

Ta có: $2^{2013} = (2^3)^{671} = 8^{671}$

$$3^{1344} = (3^2)^{672} = 9^{672}$$

Do $8 < 9, 671 < 672 \Rightarrow 8^{671} < 9^{672} \Rightarrow 2^{2013} < 3^{1344}$

Vậy $2^{2013} < 3^{1344}$.

Bài 7: So sánh: $N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}$ và $M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2010 -2011

Lời giải

$$\text{Xét: } N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2006}} + \frac{-7}{10^{2006}}$$

$$\text{và: } M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$$

$$\text{Ta có: } \frac{-8}{10^{2006}} > \frac{-8}{10^{2005}}$$

Vậy: $N > M$.

Bài 8: Không tính giá trị của các biểu thức. Hãy so sánh: $9^8 \cdot 5^{16}$ và 19^{20}

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Lời giải

$$\text{Ta có } 9^8 \cdot 5^{16} = 3^{16} \cdot 5^{16} = 15^{16} < 19^{16} < 19^{20}$$

$$\text{Vậy } 9^8 \cdot 5^{16} < 19^{20}$$

Bài 9: Cho $A = 1 + 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{72}$ và $B = 2012^{73} - 1$. So sánh A và B

Trích đề HSG cấp trường Bá Thước năm 2018-2019

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2012A = 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{72} + 2012^{73}$$

$$\text{Lấy } 2012A - A = 2012^{73} - 1 \Rightarrow A = \frac{2012^{73} - 1}{2011} < B = 2012^{73} - 1$$

Vậy $A < B$

Bài 10: So sánh: $E = \frac{2018^{99} - 1}{2018^{100} - 1}$ và $F = \frac{2018^{98} - 1}{2018^{99} - 1}$

Trích đề chọn HSG Nga Sơn năm 2017-2018

Lời giải

$$\text{Ta có: } E = \frac{2018^{99} - 1}{2018^{100} - 1} \Rightarrow 2018E = \frac{2018^{100} - 2018}{2018^{100} - 1} \Rightarrow 2018 \cdot E = 1 - \frac{2017}{2018^{100} - 1}$$

$$F = \frac{2018^{98} - 1}{2018^{99} - 1} \Rightarrow 2018 \cdot F = \frac{2018^{99} - 2018}{2018^{99} - 1} \Rightarrow 2018 \cdot F = 1 - \frac{2017}{2018^{99} - 1}$$

$$\text{Vì } \frac{2017}{2018^{100} - 1} < \frac{2017}{2018^{99} - 1} \Rightarrow 1 - \frac{2017}{2018^{100} - 1} > 1 - \frac{2017}{2018^{99} - 1}$$

Hay $2018E > 2018F$ nên $E > F$

Vậy $E > F$

Bài 11: So sánh: $A = \frac{2009^{2009} + 1}{2009^{2010} + 1}$ và $B = \frac{2009^{2010} - 2}{2009^{2011} - 2}$

Trích đề HSG năm 2019-2020

Lời giải

$$\text{Ta có } B = \frac{2009^{2010} - 2}{2009^{2011} - 2} < 1 \Rightarrow B = \frac{2009^{2010} - 2}{2009^{2011} - 2} < \frac{2009^{2010} - 2 + 2011}{2009^{2011} - 2 + 2011} = \frac{2009^{2010} + 2009}{2009^{2011} + 2009}$$

$$= \frac{2009(2009^{2009} + 1)}{2009(2009^{2010} + 1)} = \frac{2009^{2009} + 1}{2009^{2010} + 1} = A$$

Vậy $B < A$

Bài 12: So sánh A và B biết :

$$A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1}, \quad B = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1}$$

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Lời giải

$$\text{Vì } A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < 1 \text{ suy ra } A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < \frac{17^{18} + 1 + 16}{17^{19} + 1 + 16} = \frac{17(17^{17} + 1)}{17(17^{18} + 1)} = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1} = B$$

Vậy $A < B$

Bài 13: So sánh $A = \frac{10^{2016} + 1}{10^{2017} + 1}$ và $B = \frac{10^{2017} + 1}{10^{2018} + 1}$

Trích đề HSG huyện Kim Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

Nhân hai vế của A và B với 10 ta có

$$10.A = \frac{10^{2017} + 10}{10^{2017} + 1} = \frac{10^{2017} + 1 + 9}{10^{2017} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2017} + 1}$$

$$10.B = \frac{10^{2018} + 10}{10^{2018} + 1} = \frac{10^{2018} + 1 + 9}{10^{2018} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2018} + 1}$$

$$\text{Vì } 10^{2017} < 10^{2018} \text{ suy ra } \frac{9}{10^{2017} + 1} > \frac{9}{10^{2018} + 1} \text{ suy ra } A > B$$

Bài 14: So sánh: $E = \frac{2018^{99} - 1}{2018^{100} - 1}$ và $F = \frac{2018^{98} - 1}{2018^{99} - 1}$

Trích đề HSG huyện Kim Môn năm 2017 - 2018

Lời giải

$$\text{Ta có: } E = \frac{2018^{99} - 1}{2018^{100} - 1} \text{ suy ra } 2018E = \frac{2018^{100} - 2018}{2018^{100} - 1} \text{ suy ra } 2018.E = 1 - \frac{2017}{2018^{100} - 1}$$

$$F = \frac{2018^{98} - 1}{2018^{99} - 1} \text{ suy ra } 2018.F = \frac{2018^{99} - 2018}{2018^{99} - 1} \text{ suy ra } 2018.F = 1 - \frac{2017}{2018^{99} - 1}$$

$$\text{Vì } \frac{2017}{2018^{100} - 1} < \frac{2017}{2018^{99} - 1} \text{ suy ra } 1 - \frac{2017}{2018^{100} - 1} > 1 - \frac{2017}{2018^{99} - 1}$$

Hay $2018E > 2018F$ suy ra $E > F$

Vậy $E > F$

Bài 15: So sánh 3^{444} và 4^{333} .

Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Lời giải

$$3^{444} = (3^4)^{111} = 81^{111}$$

$$4^{333} = (4^3)^{111} = 64^{111}$$

$$81^{111} > 64^{111}$$

$$3^{444} < 4^{333}$$

$$\text{Vậy } 3^{444} < 4^{333}$$

Bài 16: So sánh các biểu thức sau: $P = \frac{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{100}}{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{99}}$ và $Q = \frac{1+9+9^2+9^3+\dots+9^{100}}{1+9+9^2+9^3+\dots+9^{99}}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } P = \frac{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{100}}{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{99}} = 1 + \frac{7^{100}}{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{99}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{1}{7^{100}} + \frac{1}{7^{99}} + \frac{1}{7^{98}} + \dots + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7}}$$

$$Q = \frac{1+9+9^2+9^3+\dots+9^{100}}{1+9+9^2+9^3+\dots+9^{99}} = 1 + \frac{9^{100}}{1+9+9^2+9^3+\dots+9^{99}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{1}{9^{100}} + \frac{1}{9^{99}} + \frac{1}{9^{98}} + \dots + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9}}$$

$$\text{Do } 7^{100} < 9^{100} \Rightarrow \frac{1}{7^{100}} > \frac{1}{9^{100}}$$

$$7^{99} < 9^{99} \Rightarrow \frac{1}{7^{99}} > \frac{1}{9^{99}}$$

...

$$7^2 < 9^2 \Rightarrow \frac{1}{7^2} > \frac{1}{9^2}$$

$$7 < 9 \Rightarrow \frac{1}{7} > \frac{1}{9}$$

$$\text{Khi đó: } \frac{1}{7^{100}} + \frac{1}{7^{99}} + \frac{1}{7^{98}} + \dots + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7} > \frac{1}{9^{100}} + \frac{1}{9^{99}} + \frac{1}{9^{98}} + \dots + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{7^{100}} + \frac{1}{7^{99}} + \frac{1}{7^{98}} + \dots + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7}} < \frac{1}{\frac{1}{9^{100}} + \frac{1}{9^{99}} + \frac{1}{9^{98}} + \dots + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9}}$$

Vậy $P < Q$.

Bài 17: So sánh A và B , biết: $A = \frac{17^{18}+1}{17^{19}+1}, B = \frac{17^{17}+1}{17^{18}+1}$

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\text{Vì } A = \frac{17^{18}+1}{17^{19}+1} < 1 \Rightarrow A = \frac{17^{18}+1}{17^{19}+1} < \frac{17^{18}+1+16}{17^{19}+1+16} = \frac{17 \cdot (17^{17}+1)}{17 \cdot (17^{18}+1)} = \frac{17^{17}+1}{17^{18}+1} = B$$

Vậy $A < B$.

B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

Dạng 1: Các phương pháp so sánh: quy đồng mẫu (từ), sử dụng tính chất bắc cầu, xét phần bù, viết dưới dạng hỗn số, so sánh với 1; sử dụng tính chất: với $a, b, m \in \mathbb{N}^*$ thì:

$$\left(\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m} \quad \frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m} \right)$$

Bài 1: So sánh: $N = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{11}{10^{2006}}$ và $M = \frac{11}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}}$

Trích đề 59 HSG huyện năm 2018- 2019

Bài 2: Cho $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$.

Chứng minh $A < \frac{3}{4}$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành, năm 2018- 2019

Bài 3: So sánh S với 3, biết $S = \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013} + \frac{2013}{2011}$

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2018 - 2019

Bài 4: Không quy đồng mẫu số hãy so sánh:

$$A = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-19}{10^{2011}}; B = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-19}{10^{2010}}$$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018 -2019

Bài 5: So sánh $A = \frac{2011^{2012} + 1}{2011^{2013} + 1}$ với $B = \frac{2011^{2013} + 1}{2011^{2014} + 1}$

Trích đề HSG huyện Quế Sơn năm 2018 - 2019

Bài 6: So sánh phân số: $\frac{15}{301}$ với $\frac{25}{499}$

Trích đề HSG cấp huyện năm học 2016-2017

Bài 7: So sánh $\frac{2011 \cdot 2012 - 1}{2011 \cdot 2012}$ và $\frac{2012 \cdot 2013 - 1}{2012 \cdot 2013}$

Trích đề HSG huyện Đoan Hùng năm 2018-2019

Bài 8: So sánh: $\frac{-22}{45}$ và $\frac{-51}{103}$

Trích đề HSG trường Nguyễn Khuyến năm 20... - 20...

Bài 9: So sánh P và Q

Biết: $P = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013}$ và $Q = \frac{2010 + 2011 + 2012}{2011 + 2012 + 2013}$

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Bài 10: So sánh

a) $M = \frac{77772}{77778}$ và $N = \frac{88881}{88889}$.

b) $P = \frac{326}{1955} + \frac{988}{1975} + \frac{662}{1985}$ và $Q = \frac{3951}{3950} + \frac{1}{5955} + \frac{1}{11730}$.

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021 – 2022.

Bài 11: So sánh A và B biết: $A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1}$, $B = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1}$

Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015 - 2016

Bài 12: Không quy đồng mẫu số, hãy so sánh hai phân số: $\frac{37}{67}$ và $\frac{377}{677}$.

Trích đề HSG huyện Phù Ninh năm 2015 - 2016

Bài 13: So sánh A và B biết: $A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1}$, $B = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1}$

Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015 - 2016

Bài 14: So sánh A và B biết: $A = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2010}$ và $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{17}$

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2018-2019

Bài 15: So sánh: $\frac{201201}{202202}$ và $\frac{201201201}{202202202}$.

Trích đề HSG THCS Lý Tự Trọng năm 2015-2016

Bài 16: So sánh $N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}$ và $M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Bài 17: Không tính giá trị của các biểu thức. Hãy so sánh: $\frac{1717}{8585}$ và $\frac{1313}{5151}$

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Bài 18: So sánh: $A = \frac{121212}{171717} + \frac{2}{17} - \frac{404}{1717}$ với $B = \frac{10}{17}$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 19: So sánh: $-\frac{22}{45}$ và $-\frac{51}{103}$

Trích đề HSG năm 2019-2020

Bài 20: Tính tổng của các phân số lớn hơn $\frac{1}{5}$ nhưng nhỏ hơn $\frac{1}{4}$ và có tử là 4.

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021 - 2022

Bài 21: Có bao nhiêu cách để viết $\frac{7}{12}$ thành tổng của hai phân số tối giản trong đó mẫu số của hai phân số khác nhau và đều không lớn hơn 12.

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021 - 2022

Bài 22: So sánh: $A = \frac{17^8 + 5}{17^8 - 8}$ và $B = \frac{17^8 + 6}{17^8 - 7}$.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021 - 2022

Bài 23: So sánh P và Q , biết: $P = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013}$ và $Q = \frac{2010 + 2011 + 2012}{2011 + 2012 + 2013}$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Bài 24: So sánh 2 phân số: $\frac{20072007}{20082008}$ và $\frac{200720072007}{200820082008}$

Trích đề HSG huyện Tĩnh Gia năm 2018-2019

Bài 25: So sánh hai phân số $\frac{a-1}{a}$ và $\frac{b+1}{b}$ (với a, b là số nguyên cùng dấu và $a; b \neq 0$)

Trích đề HSG THCS Phan Đình Phùng năm 2018-2019

Bài 26: So sánh A và B biết: $A = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2010}$ và $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{17}$

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2018 – 2019

Bài 27: So sánh A và B biết: $A = \frac{2013.2014-1}{2013.2014}$ và $B = \frac{2014.2015-1}{2014.2015}$

Trích đề HSG huyện Bạch Thông năm 2018 – 2019

Bài 28: So sánh P và Q

Biết : $P = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013}$ và $Q = \frac{2010+2011+2012}{2011+2012+2013}$

Trích đề HSG Tỉnh Đồng Tháp năm 2018 -2019

Dạng 2: So sánh hai lũy thừa

Bài 1: Cho $a = 2^{300}, b = 3^{200}$. Kết luận nào sau đây đúng ?

A. $a < b$

B. $a = b$

C. $a > b$

D. $a \geq b$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 -2019

Bài 2: So sánh $C = 3^{210}$ với $D = 2^{310}$

Trích đề HSG huyện Quế Sơn năm 2018 - 2019

Bài 3: So sánh $N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}$ và $M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018 – 2019

Bài 4: So sánh:

a) 3^{200} và 2^{300}

b) 71^{50} và 37^{75}

Trích đề HSG THCS Lý Tự Trọng năm 2015-2016

Bài 5: Cho $A = 1 + 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{72}$ và $B = 2012^{73} - 1$. So sánh A và B .

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2018 – 2019.

Bài 6: So sánh : 2^{2013} và 3^{1344} .

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018 -2019

Bài 7: So sánh: $N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}$ và $M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2010 -2011

Bài 8: Không tính giá trị của các biểu thức. Hãy so sánh: $9^8.5^{16}$ và 19^{20}

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Bài 9: Cho $A = 1 + 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{72}$ và $B = 2012^{73} - 1$. So sánh A và B

Trích đề HSG cấp trường Bá Thước năm 2018-2019

Bài 10: So sánh: $E = \frac{2018^{99} - 1}{2018^{100} - 1}$ và $F = \frac{2018^{98} - 1}{2018^{99} - 1}$

Bài 11: So sánh : $A = \frac{2009^{2009} + 1}{2009^{2010} + 1}$ và $B = \frac{2009^{2010} - 2}{2009^{2011} - 2}$

Trích đề HSG năm 2019-2020

Bài 12: So sánh A và B biết :

$$A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1}, \quad B = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1}$$

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Bài 13: So sánh $A = \frac{10^{2016} + 1}{10^{2017} + 1}$ và $B = \frac{10^{2017} + 1}{10^{2018} + 1}$

Trích đề HSG huyện Kim Sơn năm 2021 – 2022

Bài 14: So sánh: $E = \frac{2018^{99} - 1}{2018^{100} - 1}$ và $F = \frac{2018^{98} - 1}{2018^{99} - 1}$

Trích đề HSG huyện Kim Môn năm 2017 - 2018

Bài 15: So sánh 3^{444} và 4^{333} .

Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Bài 16: So sánh các biểu thức sau: $P = \frac{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{100}}{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{99}}$ và $Q = \frac{1+9+9^2+9^3+\dots+9^{100}}{1+9+9^2+9^3+\dots+9^{99}}$

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Bài 17: So sánh A và B , biết: $A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1}$, $B = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1}$

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021 - 2022

C. SỬU TÂM CÁC BÀI TƯƠNG TỰ

Bài 1: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$

Lời giải

Ta thấy: $\frac{1}{41}$ đến $\frac{1}{80}$ có 40 phân số.

$$\begin{aligned} \text{Vậy } & \frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} \\ &= \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{61} + \frac{1}{62} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{41} > \frac{1}{42} > \dots > \frac{1}{60} \text{ và } \frac{1}{61} > \frac{1}{62} > \dots > \frac{1}{80} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{80} + \dots + \frac{1}{80} + \frac{1}{80} \right) \\ &= \frac{20}{60} + \frac{20}{80} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12} \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (1), (2), (3) Suy ra:

$$\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$$

Bài 2: So sánh: $N = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{11}{10^{2006}}$ và $M = \frac{11}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}}$.

Lời giải

$$N = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{11}{10^{2006}} = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{6}{10^{2006}} + \frac{5}{10^{2006}}$$

$$\text{Và } M = \frac{11}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}} = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{6}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}}$$

$$\text{Ta có: } \frac{6}{10^{2006}} < \frac{6}{10^{2005}}$$

Vậy $N < M$.

Bài 3: So sánh: $M = \frac{1999^{1999} + 1}{1999^{2000} + 1}$ và $N = \frac{1999^{1989} + 1}{1999^{2009} + 1}$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & 1999^{1999} + 1 > 1999^{1989} + 1 \\ & 1999^{2000} + 1 < 1999^{2009} + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1999^{1999} + 1}{1999^{2000} + 1} > \frac{1999^{1989} + 1}{1999^{2009} + 1}$$

Vậy $M > N$.

Bài 4: Hãy so sánh hai phân số sau bằng tất cả các cách có thể được:

a) $\frac{1999}{2000}; \frac{19992000}{20002000}$

b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{32} > 2$

Lời giải:

a) Cách 1 : Qui đồng mẫu số rồi so sánh tử.

$$\text{Cách 2: } \frac{1999}{2000} = \frac{19991999}{20002000} < \frac{19992000}{20002000}$$

$$\text{Cách 3: Ta có: } \frac{1999}{2000} + \frac{1}{2000} = \frac{19992000}{20002000} + \frac{10000}{20002000} = 1$$

$$\text{mà } \frac{1}{2000} = \frac{10000}{20000000} > \frac{10000}{20002000} \Rightarrow \frac{1999}{2000} < \frac{19992000}{20002000}$$

$$\text{b) } \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} = \frac{4n-1}{4n^2-2n} > \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}; n \geq 2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{32} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{8} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2$$

$$\text{Bài 5: So sánh các phân số sau: } A = \frac{2489-36}{7467-108}; \quad B = \frac{2929-303}{8787+1717}.$$

Lời giải:

$$A = \frac{2489-36}{3 \cdot (2489-36)} = \frac{1}{3}; \quad B = \frac{101 \cdot (29-3)}{101 \cdot (87+17)} = \frac{26}{104} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vì } \frac{1}{3} > \frac{1}{4} \text{ nên } A > B.$$

$$\text{Bài 6: So sánh các biểu thức sau: } A = \frac{1000^{10}+1}{1000^{10}-1}; \quad B = \frac{1000^{10}-1}{1000^{10}-3}$$

Lời giải:

$$A = \frac{1000^{10}+1}{1000^{10}-1} = 1 + \frac{2}{1000^{10}-1} \quad (1)$$

$$B = \frac{1000^{10}-1}{1000^{10}-3} = 1 + \frac{2}{1000^{10}-3} \quad (2)$$

$$\text{Vì } \frac{2}{1000^{10}-1} < \frac{2}{1000^{10}-3} \text{ nên từ (1) và (2) suy ra } A < B.$$

$$\text{Bài 7: So sánh } M \text{ và } N \text{ biết: } M = \frac{10^{2021}+1}{10^{2022}+1} \text{ và } N = \frac{10^{2022}+1}{10^{2023}+1}$$

Trích đề HSG huyện năm 202 -2023

Lời giải

$$\text{Ta có: } M = \frac{10^{2021}+1}{10^{2022}+1}$$

$$\begin{aligned} 10M &= \frac{10^{2022}+10}{10^{2022}+1} \\ &= \frac{10^{2022}+1+9}{10^{2022}+1} = 1 + \frac{9}{10^{2022}+1} \end{aligned}$$

$$N = \frac{10^{2022}+1}{10^{2023}+1}$$

$$10N = \frac{10^{2023}+10}{10^{2023}+1} = \frac{10^{2023}+1+9}{10^{2023}+1} = 1 + \frac{9}{10^{2023}+1}$$

$$\text{Vì } 10^{2022}+1 < 10^{2023}+1 \Rightarrow \frac{9}{10^{2022}+1} > \frac{9}{10^{2023}+1}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{9}{10^{2022}+1} > 1 + \frac{9}{10^{2023}+1}$$

$$\Rightarrow 10M > 10N \Rightarrow M > N$$

Bài 8: So sánh: $A = \frac{2006^{2006} + 1}{2007^{2007} + 1}$ và $B = \frac{2006^{2005} + 1}{2006^{2006} + 1}$.

Trích đề HSG huyện Vụ Bản, năm 2013- 2014

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{2006^{2006} + 1}{2006^{2007} + 1} < \frac{2006^{2006} + 1 + 2005}{2006^{2007} + 2005 + 1} \\ &= \frac{2006^{2006} + 2006}{2006^{2007} + 2006} = \frac{2006(2006^{2005} + 1)}{2006(2006^{2006} + 1)} = \frac{2006^{2005} + 1}{2006^{2006} + 1} = B \end{aligned}$$

Vậy $A < B$.

Bài 9: Cho $A = \frac{10^{2001} + 1}{10^{2002} + 1}$; $B = \frac{10^{2002} + 1}{10^{2003} + 1}$. Hãy so sánh A và B .

Trích đề HSG huyện Trần Yên, năm 2013- 2014

Lời giải

Ta có: $10A = \frac{10^{2002} + 10}{10^{2002} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2002} + 1}$ (1)

Tương tự: $10B = \frac{10^{2003} + 10}{10^{2003} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2003} + 1}$ (2)

Từ (1) và (2) ta thấy :

$$\frac{9}{10^{2002} + 1} > \frac{9}{10^{2003} + 1}$$

$$\Rightarrow 10A > 10B$$

$$\Rightarrow A > B.$$

Vậy $A > B$.

Bài 10. So sánh: $A = \frac{2003.2004 - 1}{2003.2004}$ và $B = \frac{2004.2005 - 1}{2004.2005}$

Lời giải:

Ta có: $A = \frac{2003.2004 - 1}{2003.2004} = \frac{2003.2004}{2003.2004} - \frac{1}{2003.2004} = 1 - \frac{1}{2003.2004}$

$$B = \frac{2004.2005 - 1}{2004.2005} = \frac{2004.2005}{2004.2005} - \frac{1}{2004.2005} = 1 - \frac{1}{2004.2005}$$

Vì $\frac{1}{2003.2004} > \frac{1}{2004.2005}$ nên $A < B$.

Bài 11: So sánh $A = \frac{10^{2014} + 2016}{10^{2015} + 2016}$ và $B = \frac{10^{2015} + 2016}{10^{2016} + 2016}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \frac{10^{2014} + 2016}{10^{2015} + 2016} = \frac{(10^{2014} + 2016)(10^{2016} + 2016)}{(10^{2015} + 2016)(10^{2016} + 2016)} \\ &= \frac{10^{4030} + 2016 \cdot (10^{2014} + 10^{2016}) + 2016^2}{(10^{2015} + 2016)(10^{2016} + 2016)} \\ &= \frac{10^{4030} + 2016 \cdot 10^{2014} \cdot 101 + 2016^2}{(10^{2015} + 2016)(10^{2016} + 2016)} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } B &= \frac{10^{2015} + 2016}{10^{2016} + 2016} = \frac{(10^{2015} + 2016)(10^{2015} + 2016)}{(10^{2016} + 2016)(10^{2015} + 2016)} \\ &= \frac{10^{4030} + 2 \cdot 2016 \cdot 10^{2015} + 2016^2}{(10^{2016} + 2016)(10^{2015} + 2016)} \\ &= \frac{10^{4030} + 20 \cdot 2016 \cdot 10^{2014} + 2016^2}{(10^{2016} + 2016)(10^{2015} + 2016)} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $A > B$.

Vậy $A > B$.

Bài 12: Cho tổng $T = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2016}{2^{2015}} + \frac{2017}{2^{2016}}$. So sánh T với 3.

Lời giải

$$\text{Ta có : } T = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2016}{2^{2015}} + \frac{2017}{2^{2016}}$$

$$2T = 2 + \frac{3}{2^1} + \frac{4}{2^2} + \dots + \frac{2016}{2^{2014}} + \frac{2017}{2^{2015}}$$

$$\begin{aligned} 2T - T &= 2 + \frac{3}{2^1} - \frac{2}{2^1} + \frac{4}{2^2} - \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{2016}{2^{2014}} - \frac{2015}{2^{2014}} + \frac{2017}{2^{2015}} - \frac{2016}{2^{2015}} - \frac{2017}{2^{2016}} \\ &= 2 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2015}} - \frac{2017}{2^{2016}} \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } N = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2015}}$$

$$\text{Ta có } 2N = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2014}}$$

$$2N - N = 1 - \frac{1}{2^{2015}}$$

$$N < 1.$$

$$\text{Nên } T < 2 + 1 - \frac{2017}{2^{2016}} = 3 - \frac{2017}{2^{2016}}.$$

Vậy $T < 3$.

Bài 13: So sánh M và N biết: $M = \frac{19^{30} + 5}{19^{31} + 5}$; $N = \frac{19^{31} + 5}{19^{32} + 5}$.

Lời giải

$$M = \frac{19^{30} + 5}{19^{31} + 5} \text{ nên } 19M = \frac{19 \cdot (19^{30} + 5)}{19^{31} + 5} = \frac{19^{31} + 95}{19^{31} + 5} = 1 + \frac{90}{19^{31} + 5}.$$

$$N = \frac{19^{31} + 5}{19^{32} + 5} \text{ nên } 19N = \frac{19 \cdot (19^{31} + 5)}{19^{32} + 5} = \frac{19^{32} + 95}{19^{32} + 5} = 1 + \frac{90}{19^{32} + 5}$$

$$\text{Vì } \frac{90}{19^{31} + 5} > \frac{90}{19^{32} + 5}$$

$$\text{Suy ra } 1 + \frac{90}{19^{31} + 5} > 1 + \frac{90}{19^{32} + 5}$$

Hay $19M > 19N$

Nên $M > N$.

Bài 14: Cho $A = \frac{10^{2004} + 1}{10^{2005} + 1}$ và $B = \frac{10^{2005} + 1}{10^{2006} + 1}$. So sánh A và B .

Lời giải

$$A = \frac{10^{2004} + 1}{10^{2005} + 1} \text{ nên } 10A = 10 \cdot \frac{10^{2004} + 1}{10^{2005} + 1} = \frac{10^{2005} + 10}{10^{2005} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2005} + 1}.$$

$$B = \frac{10^{2005} + 1}{10^{2006} + 1} \text{ nên } 10B = 10 \cdot \frac{10^{2005} + 1}{10^{2006} + 1} = \frac{10^{2006} + 10}{10^{2006} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2006} + 1}.$$

Hai phân số có tử số bằng nhau, $10^{2005} + 1 < 10^{2006} + 1$ nên $10A > 10B$.

Từ đó suy ra $A > B$.

Bài 15: So sánh các biểu thức : $A = \frac{121212}{171717} + \frac{2}{17} - \frac{404}{1717}$ với $B = \frac{10}{17}$.

Lời giải

$$\text{Ta có : } A = \frac{121212}{171717} + \frac{2}{17} - \frac{404}{1717} = \frac{121212 : 10101}{171717 : 10101} + \frac{2}{17} - \frac{404 : 101}{1717 : 101} = \frac{12}{17} + \frac{2}{17} - \frac{4}{17} = \frac{12 + 2 - 4}{17}.$$

$$A = \frac{10}{17}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{10}{17} \text{ hay } A = B = \frac{10}{17}.$$

Bài 16: So sánh A và B biết $A = \frac{1+5+5^2+\dots+5^9}{1+5+5^2+\dots+5^8}$; $B = \frac{1+3+3^2+\dots+3^9}{1+3+3^2+\dots+3^8}$.

Lời giải

$$\text{Ta có : } A = \frac{1+5+5^2+\dots+5^9}{1+5+5^2+\dots+5^8} = \frac{1+(5+5^2+\dots+5^9)}{1+5+5^2+\dots+5^8} = \frac{1+5(1+5+5^2+\dots+5^8)}{1+5+5^2+\dots+5^8} =$$

$$= \frac{1}{1+5+5^2+\dots+5^8} + 5 > 5 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } B = \frac{1+3+3^2+\dots+3^9}{1+3+3^2+\dots+3^8} = \frac{1+(3+3^2+\dots+3^9)}{1+3+3^2+\dots+3^8} = \frac{1+3(1+3+3^2+\dots+3^8)}{1+3+3^2+\dots+3^8} =$$

$$= \frac{1}{1+3+3^2+\dots+3^8} + 3 < 4 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có : } A = \frac{1}{1+5+5^2+\dots+5^8} + 5 > 5 > 4 > \frac{1}{1+3+3^2+\dots+3^8} + 3 = B.$$

Nên $A > B$.

Bài 17: So sánh $A = \frac{2012^{37} + 37^{2012} + 1}{2012^{38}}$ với $B = \frac{2012^{38} + 37^{2012} + 2}{2012^{39}}$.

Lời giải

Thực hiện qui đồng mẫu số:

$$A = \frac{2012^{37} + 37^{2012} + 1}{2012^{38}} = \frac{2012^{76} + 37^{2012} \cdot 2012^{39} + 2012^{39}}{2012^{39} \cdot 2012^{38}}$$

$$B = \frac{2012^{38} + 37^{2012} + 2}{2012^{39}} = \frac{2012^{76} + 37^{2012} \cdot 2012^{38} + 2 \cdot 2012^{38}}{2012^{39} \cdot 2012^{38}}$$

Ta có : $37^{2012} \cdot 2012^{39} + 2012^{39} = 2012^{38} (37^{2012} \cdot 2012 + 2012)$

Và: $37^{2012} \cdot 2012^{38} + 2 \cdot 2012^{38} = 2012^{38} (37^{2012} + 2)$

Từ đó suy ra : $A > B$.

Bài 18: So sánh: $P = \frac{-7}{10^{2013}} + \frac{-15}{10^{2014}}$ và $Q = \frac{-15}{10^{2013}} + \frac{-7}{10^{2014}}$.

Lời giải

Xét: $P = \frac{-7}{10^{2013}} + \frac{-15}{10^{2014}} = \frac{-7}{10^{2013}} + \frac{-8}{10^{2014}} + \frac{-7}{10^{2014}}$

và: $Q = \frac{-15}{10^{2013}} + \frac{-7}{10^{2014}} = \frac{-7}{10^{2013}} + \frac{-8}{10^{2013}} + \frac{-7}{10^{2014}}$.

Ta có: $\frac{-8}{10^{2014}} > \frac{-8}{10^{2013}}$.

Vậy: $P > Q$.

Bài 19: Các phân số sau có bằng nhau không? Vì sao? $\frac{23}{99}$; $\frac{23232323}{99999999}$; $\frac{2323}{9999}$; $\frac{232323}{999999}$.

Lời giải

Ta thấy: $\frac{23}{99} = \frac{23 \cdot 101}{99 \cdot 101} = \frac{2323}{9999}$

$$\frac{23}{99} = \frac{23 \cdot 10101}{99 \cdot 10101} = \frac{232323}{999999}$$

$$\frac{23}{99} = \frac{23 \cdot 1010101}{99 \cdot 1010101} = \frac{23232323}{99999999}$$

Vậy $\frac{23}{99} = \frac{2323}{9999} = \frac{232323}{999999} = \frac{23232323}{99999999}$.

Bài 20: So sánh A và B biết. $A = \frac{2^{18} - 3}{2^{20} - 3}$ và $B = \frac{2^{20} - 3}{2^{22} - 3}$.

Lời giải

$$A = \frac{2^{18} - 3}{2^{20} - 3} \text{ nên } 2^2 \cdot A = \frac{2^2 \cdot (2^{18} - 3)}{2^{22} - 3} = \frac{2^{20} - 12}{2^{22} - 3} = 1 - \frac{9}{2^{22} - 3}$$

$$B = \frac{2^{20} - 3}{2^{22} - 3} \text{ nên } 2^2 \cdot B = \frac{2^2 \cdot (2^{20} - 3)}{2^{22} - 3} = \frac{2^{22} - 12}{2^{22} - 3} = 1 - \frac{9}{2^{22} - 3}$$

Vì $\frac{9}{2^{20} - 3} > \frac{9}{2^{22} - 3}$ Suy ra $1 - \frac{9}{2^{20} - 3} < 1 - \frac{9}{2^{22} - 3}$ Hay $2^2 A < 2^2 B$. Nên $A < B$

Bài 21: So sánh A và B biết: $A = \frac{2013 \cdot 2014 - 1}{2013 \cdot 2014}$ và $B = \frac{2014 \cdot 2015 - 1}{2014 \cdot 2015}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{2013 \cdot 2014 - 1}{2013 \cdot 2014} = 1 - \frac{1}{2013 \cdot 2014}$$

$$B = \frac{2014 \cdot 2015 - 1}{2014 \cdot 2015} = 1 - \frac{1}{2014 \cdot 2015}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{2013 \cdot 2014} > \frac{1}{2014 \cdot 2015} \text{ nên } -\frac{1}{2013 \cdot 2014} < -\frac{1}{2014 \cdot 2015}$$

$$\text{hay } -\frac{1}{2013 \cdot 2014} + 1 < -\frac{1}{2014 \cdot 2015} + 1$$

Từ đó suy ra $A > B$.

Bài 22: So sánh hai phân số $\frac{a-1}{a}$ và $\frac{b+1}{b}$ (với a, b là số nguyên cùng dấu và $a, b \neq 0$)

Trích đề HSG trường THCS Phan Đình Phùng năm 2018-2019

Lời giải

$$\text{Có } \frac{a-1}{a} = 1 - \frac{1}{a} \text{ và } \frac{b+1}{b} = 1 + \frac{1}{b}$$

$$* \text{ Nếu } a > 0, b > 0 \text{ thì } \frac{1}{a} > 0 \text{ và } \frac{1}{b} > 0 \text{ nên } 1 - \frac{1}{a} < 1 + \frac{1}{b} \text{ hay } \frac{a-1}{a} < \frac{b+1}{b}.$$

$$* \text{ Nếu } a < 0, b < 0 \text{ thì } \frac{1}{a} < 0 \text{ và } \frac{1}{b} < 0 \text{ nên } 1 - \frac{1}{a} > 1 + \frac{1}{b} \text{ hay } \frac{a-1}{a} > \frac{b+1}{b}.$$

Bài 23: So sánh: $A = \frac{2008^{2008} + 1}{2008^{2009} + 1}$ và $B = \frac{2008^{2007} + 1}{2008^{2008} + 1}$.

Lời giải

$$A = \frac{2008^{2008} + 1}{2008^{2009} + 1} < 1$$

$$A < \frac{2008^{2008} + 1 + 2007}{2008^{2009} + 1 + 2007} = \frac{2008^{2008} + 2008}{2008^{2009} + 2008} = \frac{2008(2008^{2007} + 1)}{2008(2008^{2008} + 1)} = B$$

$$A < \frac{2008^{2008} + 1 + 2007}{2008^{2009} + 1 + 2007} = \frac{2008^{2008} + 2008}{2008^{2009} + 2008} = \frac{2008(2008^{2007} + 1)}{2008(2008^{2008} + 1)} = B$$

Vậy $A < B$

Bài 24: So sánh: $A = \frac{1999^{1999} + 1}{1999^{1998} + 1}$ và $B = \frac{1999^{2000} + 1}{1999^{1999} + 1}$.

Lời giải

$$B = \frac{1999^{2000} + 1}{1999^{1999} + 1} > 1$$

$$B > \frac{1999^{2000} + 1 + 1998}{1999^{1999} + 1 + 1998} = \frac{1999^{2000} + 1999}{1999^{1999} + 1999} = \frac{1999(1999^{1999} + 1)}{1999(1999^{1998} + 1)} = A$$

Vậy $A < B$

Bài 25: So sánh: $A = \frac{15^{23} - 3}{15^{22} - 138}$ và $B = \frac{15^{22} + 4}{15^{21} - 5}$

Lời giải

$$A = \frac{15^{23} - 3}{15^{22} - 138} > 1$$

$$A > \frac{15^{23} - 3 + 63}{15^{22} - 138 + 63} = \frac{15^{23} + 60}{15^{22} - 75} = \frac{15(15^{22} + 4)}{15(15^{21} - 5)} = B$$

Vậy $A > B$.

Bài 26: So sánh: $A = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$ và $B = \frac{n^2 + 3}{n^2 + 4}$ với $n > 1$.

Lời giải

$$A = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = \frac{n^2 + 1 - 2}{n^2 + 1} = 1 + \frac{-2}{n^2 + 1}$$

$$B = \frac{n^2 + 3}{n^2 + 4} = \frac{n^2 + 4 - 1}{n^2 + 4} = 1 + \frac{-1}{n^2 + 4} = 1 + \frac{-2}{2n^2 + 8}$$

Ta có: $n^2 + 1 < 2n^2 + 8$ suy ra $\frac{2}{n^2 + 1} > \frac{2}{2n^2 + 8}$ do đó $\frac{-2}{n^2 + 1} < \frac{-2}{2n^2 + 8}$

suy ra $1 + \frac{-2}{n^2 + 1} < 1 + \frac{-2}{2n^2 + 8}$

Vậy $A < B$

Bài 27: So sánh: $A = \frac{4}{7} + 5 + \frac{3}{7^2} + \frac{5}{7^3} + \frac{6}{7^4}$ và $B = \frac{5}{7^4} + 5 + \frac{6}{7^2} + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3}$.

Lời giải

$$A = \left(5 + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3}\right) + \left(\frac{3}{7^2} + \frac{6}{7^4}\right) = \left(5 + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3}\right) + \left(\frac{3}{7^2} + \frac{5}{7^4} + \frac{1}{7^4}\right)$$

$$B = \left(5 + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3}\right) + \left(\frac{6}{7^2} + \frac{5}{7^4}\right) = \left(5 + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3}\right) + \left(\frac{3}{7^2} + \frac{3}{7^2} + \frac{5}{7^4}\right)$$

Ta có: $\frac{3}{7^2} > \frac{1}{7^4}$ suy ra $\left(5 + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3}\right) + \left(\frac{3}{7^2} + \frac{3}{7^2} + \frac{5}{7^4}\right) > \left(5 + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3}\right) + \left(\frac{3}{7^2} + \frac{5}{7^4} + \frac{1}{7^4}\right)$

Vậy $A < B$

Bài 28: So sánh $A = \frac{2012^{37} + 37^{2012} + 1}{2012^{38}}$ với $B = \frac{2012^{38} + 37^{2012} + 2}{2012^{39}}$.

Lời giải

Thực hiện qui đồng mẫu số:

$$A = \frac{2012^{37} + 37^{2012} + 1}{2012^{38}} = \frac{2012^{76} + 37^{2012} \cdot 2012^{39} + 2012^{39}}{2012^{38} \cdot 2012^{39}}$$

$$B = \frac{2012^{38} + 37^{2012} + 2}{2012^{39}} = \frac{2012^{76} + 37^{2012} \cdot 2012^{38} + 2 \cdot 2012^{38}}{2012^{39} \cdot 2012^{38}}$$

$$37^{2012} \cdot 2012^{39} + 2012^{39} = 2012^{38} (37^{2012} \cdot 2012 + 2012)$$

$$37^{2012} \cdot 2012^{38} + 2 \cdot 2012^{38} = 2012^{38} (37^{2012} \cdot 2012 + 2)$$

Từ đó suy ra $A > B$.

Bài 29: Cho $A = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$ So sánh A với $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta thấy tích A gồm 99 số âm:

$$A = \left(\frac{1}{4} - 1\right) \left(\frac{1}{9} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{10000} - 1\right) = -\left(\frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \dots \frac{99.101}{100.100}\right) = \frac{-101}{200}$$

Ta có $\frac{101}{200} > \frac{1}{2}$ nên $\frac{-101}{200} < -\frac{1}{2}$.

Vậy $A < -\frac{1}{2}$.

Bài 30: a) Cho $a, b, n \in \mathbb{Q}^*$. Hãy so sánh $\frac{a+n}{b+n}$ và $\frac{a}{b}$.

b) Cho $A = \frac{10^{11} - 1}{10^{12} - 1}$; $B = \frac{10^{10} + 1}{10^{11} + 1}$. So sánh A và B .

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

a) Ta xét 3 trường hợp

TH1: $\frac{a}{b} = 1$ suy ra $a = b$ nên $\frac{a+n}{b+n} = \frac{a}{b} = 1$.

TH2: $\frac{a}{b} > 1$, suy ra $a > b$ nên $a+n > b+n$, mà $\frac{a+n}{b+n}$ có phần thừa so với 1 là $\frac{a-b}{b+n}$.

$\frac{a}{b}$ có phần thừa so với 1 là $\frac{a-b}{b}$.

vì $\frac{a-b}{b+n} < \frac{a-b}{b}$ nên $\frac{a+n}{b+n} < \frac{a}{b}$.

TH3: $\frac{a}{b} < 1$ suy ra $a < b$ nên $a+n < b+n$.

Khi đó: $\frac{a+n}{b+n}$ có phần bù tới 1 là $\frac{a-b}{b}$.

vì $\frac{a-b}{b} < \frac{b-a}{b+n}$ nên $\frac{a+n}{b+n} > \frac{a}{b}$.

b) Cho $A = \frac{10^{11} - 1}{10^{12} - 1}$ rõ ràng $A < 1$ nên theo câu a,

$\frac{a}{b} < 1$, suy ra $\frac{a+n}{b+n} > \frac{a}{b}$ nên $A < \frac{(10^{11} - 1) + 11}{(10^{12} - 1) + 11} = \frac{10^{11} + 10}{10^{12} + 10}$

Do đó $A < \frac{10^{11} + 10}{10^{12} + 10} = \frac{10(10^{10} + 1)}{10 \cdot (10^{11} + 1)} = \frac{10^{10} + 1}{10^{11} + 1}$.

Bài 31: So sánh $A = \frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1}$ và $B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1}$

Lời giải

$$10.A = \frac{10^{16} + 10}{10^{16} + 1} = \frac{10^{16} + 1 + 9}{10^{16} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{16} + 1}.$$

$$10.B = \frac{10^{17} + 10}{10^{17} + 1} = \frac{10^{17} + 1 + 9}{10^{17} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{17} + 1}.$$

Mà $\frac{9}{10^{16} + 1} > \frac{9}{10^{17} + 1}$ nên $10.A > 10.B \Rightarrow A > B$.

Bài 32: So sánh $A = \frac{10^{2019} + 1}{10^{2020} + 1}$ và $B = \frac{10^{2020} + 1}{10^{2021} + 1}$.

Lời giải

$$10.A = \frac{10^{2020} + 10}{10^{2020} + 1} = \frac{10^{2020} + 1 + 9}{10^{2020} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2020} + 1}.$$

$$10.B = \frac{10^{2021} + 10}{10^{2021} + 1} = \frac{10^{2021} + 1 + 9}{10^{2021} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2021} + 1}.$$

Mà $\frac{9}{10^{2020} + 1} > \frac{9}{10^{2021} + 1}$ nên $10.A > 10.B \Rightarrow A > B$.

Bài 33: So sánh $A = \frac{20^{21} - 3}{20^{22} + 4}$ và $B = \frac{20^{22} - 3}{20^{23} + 4}$.

Lời giải

$$20.A = \frac{20^{22} - 60}{20^{22} + 4} = \frac{20^{22} + 4 - 64}{20^{22} + 4} = 1 + \frac{-64}{20^{22} + 4}.$$

$$20.B = \frac{20^{23} - 60}{20^{23} + 4} = \frac{20^{23} + 4 - 64}{20^{23} + 4} = 1 + \frac{-64}{20^{23} + 4}.$$

Mà $\frac{64}{20^{22} + 4} > \frac{64}{20^{23} + 4} \Rightarrow \frac{-64}{20^{22} + 4} < \frac{-64}{20^{23} + 4}$ nên $20.A < 20.B \Rightarrow A < B$.

Bài 34: So sánh $A = \frac{15^{22} - 6}{15^{21} - 1}$ và $B = \frac{15^{23} - 6}{15^{22} - 1}$.

Lời giải

$$\frac{1}{15}.A = \frac{15^{22} - 6}{15^{22} - 15} = \frac{15^{22} - 15 + 9}{15^{22} - 15} = 1 + \frac{9}{15^{22} - 15}.$$

$$\frac{1}{15}.B = \frac{15^{23} - 6}{15^{23} - 15} = \frac{15^{23} - 15 + 9}{15^{23} - 15} = 1 + \frac{9}{15^{23} - 15}.$$

Mà $\frac{9}{15^{22} - 15} > \frac{9}{15^{23} - 15}$ nên $\frac{1}{15}.A > \frac{1}{15}.B \Rightarrow A > B$.

Bài 35: So sánh $A = \frac{10}{2^7} + \frac{10}{2^6}$ và $B = \frac{11}{2^7} + \frac{9}{2^6}$.

Lời giải

$$A = \frac{10}{2^7} + \frac{9+1}{2^6} = \frac{10}{2^7} + \frac{9}{2^6} + \frac{1}{2^6}.$$

$$B = \frac{10+1}{2^7} + \frac{9}{2^6} = \frac{10}{2^7} + \frac{1}{2^7} + \frac{9}{2^6}.$$

Mà $\frac{1}{2^6} > \frac{1}{2^7} \Rightarrow A > B.$

Bài 36: So sánh $A = \frac{2006}{2007} + \frac{2007}{2008} + \frac{2008}{2009} + \frac{2009}{2006}$ với $B = 4.$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{2007-1}{2007} + \frac{2008-1}{2008} + \frac{2009-1}{2009} + \frac{2006+3}{2006} \\ &= 1 - \frac{1}{2007} + 1 - \frac{1}{2008} + 1 - \frac{1}{2009} + 1 + \frac{3}{2006} \\ &= 4 + \left(\frac{1}{2006} - \frac{1}{2007} \right) + \left(\frac{1}{2006} - \frac{1}{2008} \right) + \left(\frac{1}{2006} - \frac{1}{2009} \right) > 4. \end{aligned}$$

Vậy $A > B.$

Bài 37: So sánh $A = \frac{-15}{2^{300}} + \frac{-17}{3^{200}}$ và $B = \frac{-17}{2^{300}} + \frac{-15}{3^{200}}.$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{-15}{2^{300}} + \frac{-15-2}{3^{200}} = \frac{-15}{2^{300}} + \frac{-15}{3^{200}} + \frac{-2}{3^{200}} \\ B &= \frac{-15-2}{2^{300}} + \frac{-15}{3^{200}} = \frac{-15}{2^{300}} + \frac{-2}{2^{300}} + \frac{-15}{3^{200}} \end{aligned}$$

Ta so sánh $\frac{-2}{3^{200}}$ và $\frac{-2}{2^{300}}.$

Lại có $\frac{2}{3^{200}} = \frac{2}{(3^2)^{100}} = \frac{2}{9^{100}}$ và $\frac{2}{2^{300}} = \frac{2}{(2^3)^{100}} = \frac{2}{8^{100}}.$

Nhận thấy $\frac{2}{9^{100}} < \frac{2}{8^{100}} \Rightarrow \frac{-2}{9^{100}} > \frac{-2}{8^{100}} \Rightarrow \frac{-2}{3^{200}} > \frac{-2}{2^{300}}$ nên $A > B.$

Bài 38: So sánh $A = \frac{-7}{10^{205}} + \frac{-15}{10^{206}}$ và $B = \frac{-15}{10^{205}} + \frac{-7}{10^{206}}.$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{-7}{10^{205}} + \frac{-8-7}{10^{206}} = \frac{-7}{10^{205}} + \frac{-8}{10^{206}} + \frac{-7}{10^{206}}. \\ B &= \frac{-7-8}{10^{205}} + \frac{-7}{10^{206}} = \frac{-7}{10^{205}} + \frac{-8}{10^{205}} + \frac{-7}{10^{206}}. \end{aligned}$$

Mà $\frac{-8}{10^{206}} > \frac{-8}{10^{205}} \Rightarrow A > B.$

Bài 39: So sánh P và Q biết $P = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013}$ và $Q = \frac{2010+2011+2012}{2011+2012+2013}$

Lời giải:

Ta có:

$$Q = \frac{2010+2011+2012}{2011+2012+2013} = \frac{2010}{2011+2012+2013} + \frac{2011}{2011+2012+2013} + \frac{2012}{2011+2012+2013}$$

Lần lượt so sánh từng phân số của P và Q với các tử là: 2010; 2011; 2012 thấy được các phân số của P đều lớn hơn các phân số của $Q.$

Vậy $P > Q$

Bài 40: So sánh không qua quy đồng: $A = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}; B = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Lời giải:

Ta có

$$A = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2006}} + \frac{-7}{10^{2006}}$$

$$B = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$$

Ta thấy $\frac{-8}{10^{2006}} > \frac{-8}{10^{2005}} \Rightarrow A > B$

Bài 41: Không quy đồng mẫu số hãy so sánh:

$$A = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-19}{10^{2011}}; B = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-19}{10^{2010}}$$

Lời giải:

Ta có:

$$A = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-19}{10^{2011}} = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-10}{10^{2011}} + \frac{-9}{10^{2011}}$$

$$B = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-19}{10^{2010}} = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-10}{10^{2010}} + \frac{-9}{10^{2010}}$$

Ta thấy $\frac{-10}{10^{2011}} > \frac{-10}{10^{2010}} \Rightarrow A > B$

Bài 42: Cho $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$.

So sánh A với $\frac{3}{4}$?

Lời giải:

Ta có: $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$

$$A = \frac{1}{\frac{(1+3).2}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+5).3}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+7).4}{2}} + \dots + \frac{1}{\frac{(1+2017).1009}{2}}$$

$$= \frac{2}{2.4} + \frac{2}{3.6} + \frac{2}{4.8} + \dots + \frac{2}{1009.2018} = \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{1009.1009}$$

$$A < \frac{1}{2.2} + \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{1008.1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1008} - \frac{1}{1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1009} \right) \Rightarrow A < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \Rightarrow A < \frac{3}{4}.$$

Bài 43: So sánh A và B biết: $A = \frac{2013 \cdot 2014 - 1}{2013 \cdot 2014}$ và $B = \frac{2014 \cdot 2015 - 1}{2014 \cdot 2015}$

Lời giải:

Ta có:

$$A = \frac{2013 \cdot 2014 - 1}{2013 \cdot 2014} = 1 - \frac{1}{2013 \cdot 2014}$$

$$B = \frac{2014 \cdot 2015 - 1}{2014 \cdot 2015} = 1 - \frac{1}{2014 \cdot 2015}$$

Vì $\frac{1}{2013 \cdot 2014} > \frac{1}{2014 \cdot 2015}$ nên $A < B$.

Bài 44: Cho: $A = \frac{10^{2001} + 1}{10^{2002} + 1}$; $B = \frac{10^{2002} + 1}{10^{2003} + 1}$. Hãy so sánh A và B .

Lời giải:

Ta có: $10A = \frac{10^{2002} + 10}{10^{2002} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2002} + 1}$ (1)

Tương tự: $10B = \frac{10^{2003} + 10}{10^{2003} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2003} + 1}$ (2)

Từ (1) và (2) ta thấy: $\frac{9}{10^{2002} + 1} > \frac{9}{10^{2003} + 1} \Rightarrow 10A > 10B \Rightarrow A > B$.

Bài 45: So sánh $N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}$ và $M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$.

Lời giải:

Xét: $N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2006}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Và $M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Ta có: $\frac{-8}{10^{2006}} > \frac{-8}{10^{2005}}$

Vậy $N > M$

Bài 46: So sánh: $N = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{11}{10^{2006}}$ và $M = \frac{11}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}}$.

Lời giải:

$N = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{11}{10^{2006}} = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{6}{10^{2006}} + \frac{5}{10^{2006}}$

Và $M = \frac{11}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}} = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{6}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}}$

Ta có: $\frac{6}{10^{2006}} < \frac{6}{10^{2005}}$

Vậy $N < M$.

Bài 47: So sánh A và B biết:

$$A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1}, \quad B = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1}$$

Lời giải:

$$\text{Vì } A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < 1 \Rightarrow A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < \frac{17^{18} + 1 + 16}{17^{19} + 1 + 16} = \frac{17 \cdot (17^{17} + 1)}{17 \cdot (17^{18} + 1)} = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1} = B$$

Bài 48: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$

Lời giải:

Ta thấy: $\frac{1}{41}$ đến $\frac{1}{80}$ có 40 phân số.

$$\begin{aligned} \text{Vậy } & \frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} \\ &= \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{61} + \frac{1}{62} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{41} > \frac{1}{42} > \dots > \frac{1}{60} \text{ và } \frac{1}{61} > \frac{1}{62} > \dots > \frac{1}{80} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{80} + \dots + \frac{1}{80} + \frac{1}{80} \right) \\ &= \frac{20}{60} + \frac{20}{80} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12} \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (1), (2), (3) Suy ra:

$$\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$$

Bài 49. So sánh $A = \frac{2006^{2006} + 1}{2006^{2007} + 1}$ và $B = \frac{2006^{2005} + 1}{2006^{2006} + 1}$

Ta có nếu $\frac{a}{b} < 1$ suy ra: $\frac{a}{b} < \frac{a+n}{b+n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$\begin{aligned} A &= \frac{2006^{2006} + 1}{2006^{2007} + 1} < \frac{2006^{2006} + 1 + 2005}{2006^{2007} + 2005 + 1} = \frac{2006^{2006} + 2006}{2006^{2007} + 2006} \\ &= \frac{2006 \cdot (2006^{2005} + 1)}{2006 \cdot (2006^{2006} + 1)} = \frac{2006^{2005} + 1}{2006^{2006} + 1} = B \end{aligned}$$

Vậy $A < B$

Bài 50: So sánh hai phân số sau: $A = \frac{10^{19} + 1}{10^{20} + 1}$ và $B = \frac{10^{20} + 1}{10^{21} + 1}$

Lời giải:

a) $\frac{26}{27}$ và $\frac{96}{97}$

b) $\frac{102}{103}$ và $\frac{103}{105}$

Lời giải:

a) Ta có $\frac{26}{27} + \frac{1}{27} = 1$; mà $\frac{1}{27} > \frac{1}{97}$ suy ra $\frac{26}{27} < \frac{96}{97}$

b) Ta có $\frac{102}{103} + \frac{1}{103} = 1$; $\frac{103}{105} + \frac{2}{105} = 1$ mà $\frac{102}{103} > \frac{103}{105}$ suy ra $\frac{1}{103} = \frac{2}{206} < \frac{2}{105}$.

Bài 55: So sánh: a) $\frac{19}{18}$ và $\frac{2005}{2004}$

b) $\frac{72}{73}$ và $\frac{98}{99}$

Lời giải:

a) Ta có: $\frac{19}{18} - \frac{1}{18} = 1$ và $\frac{2005}{2004} - \frac{1}{2004} = 1$; Vì $\frac{1}{18} > \frac{1}{2004}$ suy ra $\frac{19}{18} > \frac{2005}{2004}$

b) Ta có: $\frac{72}{73} + \frac{1}{73} = 1$ và $\frac{98}{99} + \frac{1}{99} = 1$; Vì $\frac{1}{73} > \frac{1}{99}$. Suy ra $\frac{72}{73} < \frac{98}{99}$

Bài 56: So sánh các biểu thức sau: $A = \frac{100^{10} + 1}{100^{10} - 1}$; $B = \frac{100^{10} - 1}{100^{10} - 3}$

Lời giải:

$$A = \frac{100^{10} + 1}{100^{10} - 1} = 1 + \frac{2}{100^{10} - 1} \quad (1)$$

$$B = \frac{100^{10} - 1}{100^{10} - 3} = 1 + \frac{2}{100^{10} - 3} \quad (2)$$

Vì $\frac{2}{100^{10} - 1} < \frac{2}{100^{10} - 3}$ nên từ (1) và (2) suy ra $A < B$.

Bài 57: So sánh phân số sau bằng cách nhanh nhất:

a) $\frac{2012}{2013}$ và $\frac{2013}{2014}$

b) $\frac{1006}{1007}$ và $\frac{2013}{2015}$

Lời giải:

a) Ta có: $1 - \frac{2012}{2013} = \frac{1}{2013}$; $1 - \frac{2013}{2014} = \frac{1}{2014}$.

Vì $\frac{1}{2013} > \frac{1}{2014}$ nên $\frac{2012}{2013} < \frac{2013}{2014}$

b) Ta có: $1 - \frac{1006}{1007} = \frac{1}{1007} = \frac{2}{2014}$; $1 - \frac{2013}{2015} = \frac{2}{2015}$.

Vì $\frac{2}{2014} > \frac{2}{2015}$ nên $\frac{1006}{1007} < \frac{2013}{2015}$.

Bài 58: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2021} < \frac{3}{4}$

Lời giải

Ta có: $1+2+3+\dots+n = \frac{n.(n+1)}{2}$.

Khi đó:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{(1+3).2} + \frac{1}{(1+5).3} + \frac{1}{(1+7).4} + \dots + \frac{1}{(1+2021).1011} \\
 &= \frac{2}{2.4} + \frac{2}{3.6} + \frac{2}{4.8} + \dots + \frac{2}{1011.2022} \\
 &= \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{1011.1011} \\
 &< \frac{1}{2.2} + \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{1010.1011} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1011} = \frac{3}{4} - \frac{1}{1011} < \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

Bài 59: So sánh $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$ và $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Ta có:

$$A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

$$A < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$A < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{100}$$

$$A < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}$$

$$A < \frac{3}{4}$$

$$\text{Vậy } A < \frac{3}{4}$$

Bài 60: Cho biểu thức: $T = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2020}{2^{2019}} + \frac{2021}{2^{2020}}$. So sánh T với 3.

Lời giải

$$T = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2020}{2^{2019}} + \frac{2021}{2^{2020}}$$

$$2T = 2 \left(\frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2020}{2^{2019}} + \frac{2021}{2^{2020}} \right) = 2 + \frac{3}{2^1} + \frac{4}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2020}{2^{2018}} + \frac{2021}{2^{2019}}$$

$$2T - T = 2 + \frac{3}{2^1} - \frac{2}{2^1} + \frac{4}{2^2} - \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{2020}{2^{2018}} - \frac{2019}{2^{2018}} + \frac{2021}{2^{2019}} - \frac{2020}{2^{2019}} - \frac{2021}{2^{2020}}$$

$$T = 2 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2019}} - \frac{2021}{2^{2020}}$$

$$\text{Đặt } N = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2019}}$$

$$2N = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2018}} \text{ suy ra } 2N - N = 1 - \frac{1}{2^{2019}} < 1$$

Vậy $N < 1$ nên $T < 2 + 1 - \frac{2021}{2^{2020}} = 3 - \frac{2021}{2^{2020}} < 3$ suy ra $T < 3$.

Bài 61: So sánh $A = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{2020}{2^{2020}}$ và $B = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ (Với $a, b \in \mathbb{Q}^*$).

Lời giải

$$A = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{2020}{2^{2020}}$$

$$2A = 1 + 1 + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2019}{2^{2018}} + \frac{2020}{2^{2019}}$$

$$2A - A = \left(1 + 1 + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2019}{2^{2018}} + \frac{2020}{2^{2019}} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{2020}{2^{2020}} \right)$$

$$A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2019}} \right) - \frac{2020}{2^{2020}}$$

$$A = C - \frac{2020}{2^{2020}}$$

$$C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2019}}$$

$$2C = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{2017}} + \frac{1}{2^{2018}}$$

$$2C - C = C = 2 - \frac{1}{2^{2019}}$$

$$A = C - \frac{2020}{2^{2020}} = 2 - \frac{1}{2^{2019}} - \frac{2020}{2^{2020}} < 2$$

Xét $B = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ($a, b \in \mathbb{Q}^*$)

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b$.

Đặt $b = a + m$ ($m \in \mathbb{Q}^*$)

$$B = \frac{a}{a+m} + \frac{a+m}{a} = \frac{(a+m)-m}{a+m} + \frac{a+m}{a}$$

$$B = 1 - \frac{m}{a+m} + 1 + \frac{m}{a} = 2 + m \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+m} \right)$$

$$B \geq 2$$

Vậy $A < B$.

Bài 62: Cho $M = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2021^2}$. So sánh M với $\frac{2020}{2021}$.

Lời giải

$$M = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2021^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2020.2021}$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} = 1 - \frac{1}{2021} = \frac{2020}{2021}$$

Vậy $M < \frac{2020}{2021}$.

Bài 63: Cho $D = 2021 - \frac{1}{4} - \frac{2}{5} - \frac{3}{6} - \dots - \frac{2021}{2024}$ và $E = \frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{10120}$. So sánh D và E

Lời giải

$$\begin{aligned} D &= 2021 - \frac{1}{4} - \frac{2}{5} - \frac{3}{6} - \dots - \frac{2021}{2024} = 1 - \frac{1}{4} + 1 - \frac{2}{5} + 1 - \frac{3}{6} + \dots + 1 - \frac{2021}{2024} = \frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{3}{6} + \dots + \frac{3}{2024} \\ &= 3 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2024} \right). \end{aligned}$$

$$E = \frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{10120} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2024} \right)$$

Ta thấy: $3 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2024} \right) > \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2024} \right)$

Suy ra $D > E$.

Bài 64: So sánh $A = \frac{10^{2021} + 1}{10^{2022} + 1}$ và $B = \frac{10^{2022} + 1}{10^{2023} + 1}$

Lời giải

Ta có:

$$A = \frac{10^{2021} + 1}{10^{2022} + 1} \text{ suy ra } 10A = \frac{10^{2022} + 10}{10^{2022} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2022} + 1}$$

$$B = \frac{10^{2022} + 1}{10^{2023} + 1} \text{ suy ra } 10B = \frac{10^{2023} + 10}{10^{2023} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2023} + 1}$$

Vì $10^{2022} + 1 < 10^{2023} + 1$ nên $\frac{9}{10^{2022} + 1} > \frac{9}{10^{2023} + 1}$

Suy ra $A > B$.

Bài 65: Cho $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{9999}{10000}$. So sánh A với $0,01$

Lời giải

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{9999}{10000}, \text{ đặt } B = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{10000}{10001}$$

Vì $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}; \frac{3}{4} < \frac{4}{5}; \dots; \frac{9999}{10000} < \frac{10000}{10001}$ nên $A < B$ mà $A > 0; B > 0$.

$$A^2 < A \cdot B = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{9999}{10000} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{10000}{10001} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{9999}{10000} \cdot \frac{10000}{10001} = \frac{1}{10001} < \frac{1}{10000} = (0,01)^2$$

$A^2 < (0,01)^2$ suy ra $A < 0,01$

Bài 66: Cho $D = \frac{1}{7^2} - \frac{2}{7^3} + \frac{3}{7^4} - \frac{4}{7^5} + \dots + \frac{201}{7^{202}} - \frac{202}{7^{203}}$. Hãy so sánh D với $\frac{1}{64}$.

Lời giải

$$D = \frac{1}{7^2} - \frac{2}{7^3} + \frac{3}{7^4} - \frac{4}{7^5} + \dots + \frac{201}{7^{202}} - \frac{202}{7^{203}}$$

$$7D = \frac{1}{7} - \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} - \frac{4}{7^4} + \dots + \frac{201}{7^{201}} - \frac{202}{7^{202}}$$

$$8D = \frac{1}{7} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{7^4} + \dots - \frac{1}{7^{202}} - \frac{202}{7^{203}}$$

$$56D = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^3} + \dots - \frac{1}{7^{201}} - \frac{202}{7^{202}}$$

Cộng (3) với (4) theo vế ta có:

$$64D = 1 - \frac{203}{7^{202}} - \frac{202}{7^{203}}$$

$$64D = 1 - \left(\frac{203}{7^{202}} + \frac{202}{7^{203}} \right) < 1$$

$$\text{Suy ra } D < \frac{1}{64}$$

Bài 67: So sánh các biểu thức sau: $P = \frac{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{100}}{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{99}}$ và $Q = \frac{1+9+9^2+9^3+\dots+9^{100}}{1+9+9^2+9^3+\dots+9^{99}}$

Lời giải

Ta có:

$$P = \frac{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{100}}{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{99}} = \frac{1+7(1+7+7^2+\dots+7^{99})}{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{99}} = 7 + \frac{1}{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{99}} < 8$$

$$\left(\text{Do } 0 < \frac{1}{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{99}} < 1 \right)$$

$$Q = \frac{1+9+9^2+9^3+\dots+9^{100}}{1+9+9^2+9^3+\dots+9^{99}} = \frac{1+9(1+9+9^2+\dots+9^{99})}{1+9+9^2+\dots+9^{99}} = 9 + \frac{1}{1+9+9^2+\dots+9^{99}} > 9$$

$$\left(\text{Do } \frac{1}{1+9+9^2+\dots+9^{99}} > 0 \right)$$

Từ đó suy ra $P < Q$

Bài 68: So sánh A và B biết: $A = \frac{2013 \cdot 2014 - 1}{2013 \cdot 2014}$ và $B = \frac{2014 \cdot 2015 - 1}{2014 \cdot 2015}$

Trích đề HSG huyện Bạch Thông năm 2019 - 2020

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{2013 \cdot 2014 - 1}{2013 \cdot 2014} = 1 - \frac{1}{2013 \cdot 2014}; \quad B = \frac{2014 \cdot 2015 - 1}{2014 \cdot 2015} = 1 - \frac{1}{2014 \cdot 2015}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{2013 \cdot 2014} > \frac{1}{2014 \cdot 2015} \text{ nên } A < B$$

Bài 69: So sánh P và Q biết: $P = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013}$ và $Q = \frac{2010+2011+2012}{2011+2012+2013}$

Trích đề HSG huyện Gia Viễn năm 2018 - 2019

Lời giải

Ta có:

$$Q = \frac{2010+2011+2012}{2011+2012+2013} = \frac{2010}{2011+2012+2013} + \frac{2011}{2011+2012+2013} + \frac{2012}{2011+2012+2013}$$

Lần lượt so sánh từng phân số của P và Q với các tử là: 2010; 2011; 2012 thấy được các phân thức của P đều lớn hơn các phân thức của Q .

Vậy $P > Q$

Bài 70: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

Trích đề HSG huyện Duy Xuyên năm 2019 - 2020

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} < 1$$

Bài 71: Cho biểu thức : $B = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$. Chứng tỏ rằng $\frac{1}{6} < B < \frac{1}{4}$

Trích đề HSG huyện Giao Thủy năm 2018 - 2019

Lời giải

$$B = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

$$B = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$B < \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$B = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2} > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{100.101}$$

$$B = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2} > \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101}$$

$$B > \frac{1}{5} - \frac{1}{101}$$

$$B > \frac{96}{505}$$

$$B > \frac{96}{576}$$

$$B > \frac{1}{6} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}.$$

CHỦ ĐỀ: TÍNH TOÁN VỚI SỐ TỰ NHIÊN, SỐ NGUYÊN, PHÂN SỐ**A. PHẦN NỘI DUNG****I. Thực hiện các phép tính.****Dạng 1: Thực hiện phép tính.****Trắc nghiệm**

Bài 1: Giá trị của biểu thức $A = \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+59}$ là:

- A. $A = \frac{19}{60}$. B. $A = \frac{19}{50}$. C. $A = \frac{19}{40}$. D. $A = \frac{19}{30}$.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: D. $A = \frac{19}{30}$.

Bài 2: Tính giá trị của biểu thức $2x^2y - 1$ với $x = -2$, $y = -3$.

- A. 25. B. 123. C. -23. D. -25.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: D. -25.

Bài 3: Kết quả của phép tính $5.(-3)^2 + 4.(-7) - (-16)$ là:

- A. 33. B. -17. C. 17. D. -33.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: A. 33.

Bài 4: Kết quả của phép tính $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 99 - 100$ bằng:

- A. 50. B. -50. C. -100. D. 0.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: B. -50.

Bài 5: Một người leo núi với vận tốc 2km/h, lúc xuống núi với vận tốc 6km/h. Vận tốc trung bình của người đó trong toàn hành trình lên và xuống là:

- A. 3,5 km/h B. 4,5 km/h C. 4 km/h D. 3 km/h

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021 - 2022

Bài 6: Giá trị của $T = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{12} \cdot \dots \cdot \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64}$ bằng

- A. $\frac{1}{36^2}$ B. $\frac{1}{2^{30}}$ C. $\frac{1}{2^{36}}$ D. $\frac{1}{2^{32}}$

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021 - 2022

Bài 7: Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{2.8^4.27^2 + 4.6^9}{2^7.6^7 + 2^7.40.9^4}$ ta được kết quả là:

- A. $\frac{2}{9}$ B. $\frac{8}{9}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{2}{3}$

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021 - 2022

Tự luận

Bài 1: Thực hiện phép tính $P = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \cdot \left\{ 400 - \left[673 - 2^3 \cdot (7^3 : 7 + 1) \right] \right\}$.

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 400 - \left[673 - 2^3 \cdot (7^3 : 7 + 1) \right] \right\} \\ &= 8.125 - 3 \cdot \left\{ 400 - \left[673 - 8 \cdot (7^2 + 1) \right] \right\} \\ &= 1000 - 3 \cdot \left\{ 400 - \left[673 - 8 \cdot 50 \right] \right\} \\ &= 1000 - 3 \cdot \left\{ 400 - \left[673 - 400 \right] \right\} \\ &= 1000 - 3 \cdot 127 = 1000 - 381 = 619 \end{aligned}$$

Bài 2: Tính giá trị các biểu thức sau: $A = -5^{22} - \left\{ -222 - \left[-122 - (100 - 5^{22}) + 2022 \right] \right\}$

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= -5^{22} - \left\{ -222 - \left[-122 - (100 - 5^{22}) + 2022 \right] \right\} \\ A &= -5^{22} + 222 - 122 - 100 + 5^{22} + 2022 \\ A &= (-5^{22} + 5^{22}) + (222 - 122 - 100) + 2022 \\ A &= 2022 \end{aligned}$$

Bài 3: Tính $B = \frac{7.9 + 14.27 + 21.36}{21.27 + 42.81 + 63.108}$

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

$$B = \frac{7.9 + 14.27 + 21.36}{21.27 + 42.81 + 63.108} = \frac{7.9(1 + 2.3 + 3.4)}{21.27(1 + 2.3 + 3.4)} = \frac{1}{9}$$

Bài 4: Thực hiện phép tính: $B = 2 + 5 + 9 + 14 + \dots + 4949 + 5049$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= 2 + 5 + 9 + 14 + \dots + 4949 + 5049 \\ 2B &= 4 + 10 + 18 + 28 + \dots + 9898 + 10098 \\ 2B &= 1.4 + 2.5 + 3.6 + 4.7 + \dots + 98.101 + 99.102 \\ 2B &= 1.(2 + 2) + 2.(2 + 3) + 3.(2 + 4) + 4.(2 + 5) + \dots + 98.(2 + 99) + 99.(100 + 2) \\ 2B &= (1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + 98.99 + 99.100) + 2(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99) \\ &= 333300 + 9900 = 343200 \end{aligned}$$

Suy ra $B = 171600$.

Bài 5: Tính giá trị của các biểu thức sau: $41,54 - 3,18 + 23,17 + 8,46 - 5,82 - 3,17$.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} &41,54 - 3,18 + 23,17 + 8,46 - 5,82 - 3,17 \\ &= (41,54 + 8,46) - (3,18 + 5,82) + (23,17 - 3,17) \\ &= 50 - 9 + 20 = 61. \end{aligned}$$

Bài 6: Kết quả của phép tính $-2022.74 - 2022.27 + 2022$

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned}
 &= -(2022.74 + 2022.27 - 2022.1) \\
 &= -2022(74 + 27 - 1) \\
 &= -2022.100 = -202200
 \end{aligned}$$

Bài 7: Thực hiện phép tính.

$$a) A = (-10)^2 - [(-2)^3 \cdot (7^{11} : 7^9 + 2022^0)]$$

$$b) B = \left(\frac{2121}{2323} + \frac{212121}{232323} + \frac{21212121}{23232323} \right) : \frac{21}{23}$$

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021 - 2022

Lời giải

$$a) A = (-10)^2 - [(-2)^3 \cdot (7^{11} : 7^9 + 2022^0)]$$

$$A = (-10)^2 - [(-2)^3 \cdot (7^{11} : 7^9 + 2022^0)]$$

$$= 100 - [-8 \cdot (7^2 + 1)]$$

$$= 100 - (-8.50)$$

$$= 100 - (-400)$$

$$= 100 + 400$$

$$= 500$$

$$b) B = \left(\frac{2121}{2323} + \frac{212121}{232323} + \frac{21212121}{23232323} \right) : \frac{21}{23}$$

$$B = \left(\frac{21.101}{23.101} + \frac{21.10101}{23.10101} + \frac{21.1010101}{23.1010101} \right) : \frac{21}{23}$$

$$B = \left(\frac{21}{23} + \frac{21}{23} + \frac{21}{23} \right) \cdot \frac{23}{21}$$

$$B = 3 \cdot \frac{21}{23} \cdot \frac{23}{21} = 3$$

Bài 8: Tính giá trị biểu thức:

$$a) A = \left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10} \right) \cdot \frac{21}{24}$$

$$b) B = \frac{5}{6} + 6 \frac{5}{6} \left(11 \frac{5}{20} - 9 \frac{1}{4} \right) : 8 \frac{1}{3}$$

Trích đề HSG Liên trường năm 2021 - 2022

Lời giải

$$a) A = \left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10} \right) \cdot \frac{21}{24} = \left(\frac{272}{30} - \frac{168}{30} + \frac{186}{30} \right) \cdot \frac{21}{24}$$

$$= \frac{29}{3} \cdot \frac{21}{24} = \frac{203}{24} = 8 \frac{11}{24}$$

$$b) B = \frac{5}{6} + 6 \frac{5}{6} \left(11 \frac{5}{20} - 9 \frac{1}{4} \right) : 8 \frac{1}{3} = \frac{5}{6} + \frac{41}{6} \left(11 \frac{1}{4} - 9 \frac{1}{4} \right) : \frac{25}{3} = \frac{5}{6} + \frac{41}{6} \cdot 2 \cdot \frac{3}{25}$$

$$= \frac{5}{6} + \frac{41}{25} = \frac{125}{150} + \frac{246}{150} = \frac{371}{150} = 2 \frac{71}{150}$$

Bài 9: Thực hiện phép tính:

$$a) A = (7-4)^2 \cdot 2 + [(-5) + (-7)] : (-3+5)^2$$

$$b) B = \frac{2^{15} \cdot 13 + 2^{15} \cdot 65}{2^{13} \cdot 104}$$

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Lời giải

$$a) A = (7-4)^2 \cdot 2 + [(-5) + (-7)] : (-3+5)^2 = 3^2 \cdot 2 + (-12) : 2^2$$

$$= 9.2 + (-12) : 4 = 18 + (-3) = 15$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{2^{15} \cdot 13 + 2^{15} \cdot 65}{2^{13} \cdot 104} = \frac{2^{15} \cdot 78}{2^{13} \cdot 104} \\ &= \frac{4 \cdot 78}{104} = 3 \end{aligned}$$

Bài 10: Tính giá trị các biểu thức sau: $C = \frac{5 \cdot 4^6 \cdot 9^4 - 3^9 \cdot (-8)^4}{4 \cdot 2^{13} \cdot 3^8 + 2 \cdot 8^4 \cdot (-27)^3}$.

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Lời giải

$$C = \frac{5 \cdot 4^6 \cdot 9^4 - 3^9 \cdot (-8)^4}{4 \cdot 2^{13} \cdot 3^8 + 2 \cdot 8^4 \cdot (-27)^3}$$

$$C = \frac{5 \cdot 4^6 \cdot 9^4 - 3^9 \cdot 8^4}{4 \cdot 2^{13} \cdot 3^8 - 2 \cdot 8^4 \cdot 27^3}$$

$$C = \frac{5 \cdot 2^{12} \cdot 3^8 - 3^9 \cdot 2^{12}}{2^{15} \cdot 3^8 - 2^{13} \cdot 3^9}$$

$$C = \frac{2^{12} \cdot 3^8 \cdot (5 - 3)}{2^{13} \cdot 3^8 \cdot (2^2 - 3)} = \frac{2^{12} \cdot 3^8 \cdot 2}{2^{13} \cdot 3^8} = 1.$$

Bài 11: Thực hiện phép tính:

$$C = \frac{20 - \frac{20}{7} - \frac{20}{289} - \frac{20}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} : \frac{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{169} + \frac{5}{91}}{7 + \frac{7}{13} + \frac{7}{169} + \frac{7}{91}}$$

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Lời giải

$$C = \frac{20 - \frac{20}{7} - \frac{20}{289} - \frac{20}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} : \frac{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{169} + \frac{5}{91}}{7 + \frac{7}{13} + \frac{7}{169} + \frac{7}{91}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{20}{4} : \frac{5}{7} \\ &= 5 \cdot \frac{7}{5} = 7 \end{aligned}$$

Bài 12: Thực hiện phép tính:

$$\text{a) } P = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 400 - \left[673 - 2^3 \cdot (7^3 : 7 + 1) \right] \right\} \quad \text{b) } Q = \frac{4^3 \cdot 9^2 + 6^3 \cdot 120}{-8^2 \cdot 3^6 + 6^5}$$

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

$$P = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 400 - \left[673 - 2^3 \cdot (7^3 : 7 + 1) \right] \right\}$$

$$= 8 \cdot 125 - 3 \{ 400 - [673 - 8 \cdot 50] \}$$

$$\text{a) } = 1000 - 3 \cdot [400 - 473]$$

$$= 1000 - 3 \cdot (-73)$$

$$= 1219$$

$$\text{b) } Q = \frac{4^3 \cdot 9^2 + 6^3 \cdot 120}{-8^2 \cdot 3^6 + 6^5} = \frac{2^6 \cdot 3^4 + 2^3 \cdot 3^3 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 5}{-2^6 \cdot 3^6 + 6^5} = \frac{2^6 \cdot 3^4 + 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5}{-2^6 \cdot 3^6 + 2^5 \cdot 3^5} = \frac{2^6 \cdot 3^4 \cdot 2.3}{2^5 \cdot 3^5 \cdot (-5)} = \frac{-4}{5}$$

Bài 13: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) A = 68.74 + 27.68 - 68$$

$$b) B = 2^3.5^3 - 3\{539 - [639 - 8.(7^8 : 7^6 + 2017^0)]\}$$

$$c) C = \left(\frac{151515}{161616} + \frac{17^9}{17^{10}}\right) - \left(\frac{1500}{1600} - \frac{1616}{1717}\right)$$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Lời giải

$$a) A = 68.74 + 27.68 - 68 = 68.(74 + 27 - 1) = 68.100 = 6800$$

$$b) B = 2^3.5^3 - 3\{539 - [639 - 8.(7^8 : 7^6 + 2017^0)]\}$$

$$= 8.125 - 3.\{539 - [639 - 8.(7^2 + 1)]\}$$

$$= 1000 - 3.\{539 - [639 + 8.50]\}$$

$$= 1000 - 3.300 = 1000 - 900 = 100$$

$$c) C = \left(\frac{151515}{161616} + \frac{17^9}{17^{10}}\right) - \left(\frac{1500}{1600} - \frac{1616}{1717}\right) = \left(\frac{15}{16} + \frac{1}{17}\right) - \left(\frac{15}{16} - \frac{16}{17}\right)$$

$$= \left(\frac{15}{16} - \frac{15}{16}\right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{16}{17}\right) = 0 + 1 = 1$$

Bài 14: Thực hiện phép tính

$$a) A = \frac{5.(2^2.3^2)^9.(2^2)^6 - 2.(2^2.3)^{14}.3^4}{5.2^{28}.3^{18} - 7.2^{29}.3^{18}}$$

$$B = 81. \left[\frac{12 - \frac{12}{7} - \frac{12}{289} - \frac{12}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} \cdot \frac{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{169} + \frac{5}{91}}{6 + \frac{6}{13} + \frac{6}{169} + \frac{6}{91}} \right] \cdot \frac{158158158}{711711711}$$

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Lời giải

a) Ta có:

$$A = \frac{5.(2^2.3^2)^9.(2^2)^6 - 2.(2^2.3)^{14}.3^4}{5.2^{28}.3^{18} - 7.2^{29}.3^{18}}$$

$$= \frac{5.2^{18}.3^{18}.2^{12} - 2.2^{28}.3^{14}.3^4}{5.2^{28}.3^{18} - 7.2^{29}.3^{18}} = \frac{5.2^{30}.3^{18} - 2^{29}.3^{18}}{2^{28}.3^{18}.(5 - 7.2)}$$

$$= \frac{2^{29}.3^{18}.(5.2 - 1)}{2^{28}.3^{18}.(5 - 14)} = \frac{2.9}{-9} = -2$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned}
B &= 81 \cdot \left[\frac{12 - \frac{12}{7} - \frac{12}{289} - \frac{12}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} : \frac{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{169} + \frac{5}{91}}{6 + \frac{6}{13} + \frac{6}{169} + \frac{6}{91}} \right] \cdot \frac{158158158}{711711711} \\
&= 81 \cdot \left[\frac{12 \cdot \left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{289} - \frac{1}{85}\right)}{4 \cdot \left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{289} - \frac{1}{85}\right)} : \frac{5 \cdot \left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{169} + \frac{1}{91}\right)}{6 \cdot \left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{169} + \frac{1}{91}\right)} \right] \cdot \frac{158.1001001}{711.1001001} \\
&= 81 \cdot \left(\frac{12}{4} : \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{158}{711} = 81 \cdot \frac{18}{5} \cdot \frac{2}{9} = \frac{324}{5} = 64,8
\end{aligned}$$

Bài 15: Tính: 1) $A = \frac{5}{6} + 6 \cdot \frac{5}{6} \left(11 \frac{5}{20} - 9 \frac{1}{4}\right) : 8 \frac{1}{3}$

2) $B = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 400 - \left[673 - 2^9 \cdot (7^8 : 7^6 + 7^0) \right] \right\}$

3) $C = \frac{5}{2.1} + \frac{4}{1.11} + \frac{3}{11.2} + \frac{1}{2.15} + \frac{13}{15.4}$

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

1) $A = \frac{5}{6} + 6 \cdot \frac{5}{6} \left(11 \frac{5}{20} - 9 \frac{1}{4}\right) : 8 \frac{1}{3}$

$$A = \frac{5}{6} + 6 \cdot \frac{5}{6} \left(11 \frac{1}{4} - 9 \frac{1}{4}\right) : 8 \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{5}{6} + 6 \cdot \frac{5}{6} \cdot 2 : 8 \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{5}{6} + \frac{41}{6} \cdot 2 \cdot \frac{3}{25}$$

$$A = \frac{5}{6} + \frac{41}{25}$$

$$A = \frac{371}{150}$$

2) $B = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 400 - \left[673 - 2^9 \cdot (7^8 : 7^6 + 7^0) \right] \right\} 873$

$$B = 10^3 - 3 \left\{ 400 - \left[673 - 2^9 \cdot (7^2 + 1) \right] \right\}$$

$$B = 1000 - 3 \left\{ 400 - 673 + 2^9 \cdot 50 \right\}$$

$$B = -200 - 3 \left\{ -673 + 25600 \right\}$$

$$B = -200 + 3 \cdot 673 - 76800$$

$$B = -77000 + 3 \cdot 673$$

$$B = -74981$$

3) $C = \frac{5}{2.1} + \frac{4}{1.11} + \frac{3}{11.2} + \frac{1}{2.15} + \frac{13}{15.4}$

$$C = \frac{5}{2.1} + \left(\frac{4}{1.11} + \frac{3}{11.2} \right) + \left(\frac{1}{2.15} + \frac{13}{15.4} \right)$$

$$C = \frac{5}{2.1} + \left(\frac{8}{2.11} + \frac{3}{11.2} \right) + \left(\frac{2}{4.15} + \frac{13}{15.4} \right)$$

$$C = \frac{5}{2.1} + \frac{11}{2.11} + \frac{15}{4.15}$$

$$C = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$C = \frac{10}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$C = \frac{13}{4}$$

Bài 16: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = 68.74 + 27.68 - 68$

b) $B = 2^3.5^3 - 3\{539 - [639 - 8.(7^8 : 7^6 + 2017^0)]\}$

c) $C = \left(\frac{151515}{161616} + \frac{17^9}{17^{10}}\right) - \left(\frac{1500}{1600} - \frac{1616}{1717}\right)$

d) $D = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right)\left(\frac{1}{3^2} - 1\right)\left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018- 2019

Lời giải

a) $A = 68.74 + 27.68 - 68 = 68.(74 + 27 - 1) = 68.100 = 6800$

b) $B = 2^3.5^3 - 3\{539 - [639 - 8.(7^8 : 7^6 + 2017^0)]\}$

$$= 8.125 - 3.\{539 - [639 - 8.(7^2 + 1)]\}$$

$$= 1000 - 3.\{539 - [639 + 8.50]\}$$

$$= 1000 - 3.300 = 1000 - 900 = 100$$

c) $C = \left(\frac{151515}{161616} + \frac{17^9}{17^{10}}\right) - \left(\frac{1500}{1600} - \frac{1616}{1717}\right) = \left(\frac{15}{16} + \frac{1}{17}\right) - \left(\frac{15}{16} - \frac{16}{17}\right)$

$$= \left(\frac{15}{16} - \frac{15}{16}\right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{16}{17}\right) = 0 + 1 = 1$$

d) $D = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right)\left(\frac{1}{3^2} - 1\right)\left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right) = \left(\frac{1-4}{2^2}\right)\left(\frac{1-9}{3^2}\right) \dots \dots \left(\frac{1-1000}{100^2}\right)$

$$= \frac{-3}{2^2} \cdot \frac{-8}{3^2} \cdot \frac{-15}{4^2} \dots \dots \frac{-9999}{100^2} = -\frac{1.3}{2.3} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \dots \dots \frac{99.1010}{100.100}$$

$$= -\frac{(1.2.3 \dots \dots 99).(3.4.5 \dots \dots 101)}{(2.3.4 \dots \dots 100).(2.3.4 \dots \dots 100)} = -\frac{101}{200}$$

Bài 17: Tính

$B = (-528) + (-12) + (-211) + 540 + 2225$

Lời giải

$$B = (-528) + (-12) + (-211) + 540 + 2225$$

$$= (-528) + (-12) + 540 + (-211 + 211) + 2014 = 2014$$

Bài 18: Thực hiện phép tính (hợp lí nếu có thể)

a) $1941 + [15 + (-1941) + (-5)]$

b) $(3,7 - 59,4) - (40,6 - 6,3)$

c) $\frac{2}{9} \cdot \frac{-3}{37} + \frac{-2}{9} \cdot \frac{34}{37} + 1 \frac{2}{9}$

Trích đề HSG trường THCS Quỳnh Thiện năm 2021 – 2022

Lời giải

a) $1941 + [15 + (-1941) + (-5)] = (1941 - 1941) + (15 - 5) = 0 + 10 = 10$

b) $(3,7 - 59,4) - (40,6 - 6,3) = 3,7 - 59,4 - 40,6 + 6,3 = (3,7 + 6,3) - (59,4 + 40,6)$
 $= 10 - 100 = -90$

c) $\frac{2}{9} \cdot \frac{-3}{37} + \frac{-2}{9} \cdot \frac{34}{37} + 1 \frac{2}{9}$

$$= \frac{-2}{9} \cdot \left(\frac{3}{37} + \frac{34}{37} \right) + 1 \frac{2}{9}$$

$$= \frac{-2}{9} \cdot 1 + 1 + \frac{2}{9}$$

$$= \frac{-2}{9} + \frac{2}{9} + 1 = 0 + 1 = 1$$

Bài 19: Tính $N = \frac{5 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^9 \cdot (2^2)^6 - 2 \cdot (2^2 \cdot 3)^{14} \cdot 3^{16}}{5 \cdot 2^{28} \cdot 3^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}}$

Trích đề HSG huyện Đoàn Hùng năm 2018-2019

Lời giải

Ta có $N = \frac{5 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^9 \cdot (2^2)^6 - 2 \cdot (2^2 \cdot 3)^{14} \cdot 3^6}{5 \cdot 2^{28} \cdot 3^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}}$

$$= \frac{5 \cdot 2^{30} \cdot 3^{18} - 2^{29} \cdot 3^{20}}{2^{28} \cdot 3^{18} \cdot (5 \cdot 3 - 7 \cdot 2)} = \frac{2^{29} \cdot 3^{18} \cdot (5 \cdot 2 - 3^2)}{2^{28} \cdot 3^{18} \cdot (15 - 14)} = \frac{2}{1} = 2$$

Bài 20: Thực hiện các phép tính sau một cách hợp lý:

a) $(10^2 + 11^2 + 12^2) : (13^2 + 14^2)$

b) $1.2.3 \dots 9 - 1.2.3 \dots 8 - 1.2.3 \dots 7 \cdot 8^2$

$$c) \frac{(3.4.2^{16})^2}{11.2^{13}.4^{11} - 16^9}$$

$$d) 1152 - (374 + 1152) + (-65 + 374)$$

$$e) 13 - 12 + 11 + 10 - 9 + 8 - 7 - 6 + 5 - 4 + 3 + 2 - 1$$

Trích đề HSG huyện Nông Công năm 2019-2020

Lời giải

$$a) (10^2 + 11^2 + 12^2) : (13^2 + 14^2) = (100 + 121 + 144) : (169 + 196) = 365 : 365 = 1$$

$$b) 1.2.3 \dots 9 - 1.2.3 \dots 7.8 - 1.2.3 \dots 7.8^2 = 1.2.3 \dots 7.8 \cdot (9 - 1 - 8) = 1.2.3 \dots 7.8 \dots \times 0 = 0$$

$$c) \frac{(3.4.2^{16})^2}{11.2^{13}.4^{11} - 16^9} = \frac{(3.2^2.2^{16})^2}{11.2^{13} \cdot (2^2)^{11} - (2^4)^9} = \frac{3^2 \cdot (2^{18})^2}{11.2^{13} \cdot 2^{22} - 2^{36}}$$

$$= \frac{3^2 \cdot 2^{36}}{11.2^{35} - 2^{36}} = \frac{3^2 \cdot 2^{36}}{2^{35} \cdot (11 - 2)} = \frac{3^2 \cdot 2}{9} = 2$$

$$d) 1152 - (374 + 1152) + (-65 + 374)$$

$$= 1152 - 374 - 1152 + -65 + 374 = (1152 - 1152) + (374 - 374) - 65 = -65$$

$$e) 13 - 12 + 11 + 10 - 9 + 8 - 7 - 6 + 5 - 4 + 3 + 2 - 1$$

$$= 13 - (12 - 11 - 10 + 9) + (8 - 7 - 6 + 5) - (4 - 3 - 2 - 1) = 13$$

Bài 21:

Tính giá trị của biểu thức $M = \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{1 \frac{1}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}} \right) : \frac{2021}{2022}$.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có:

$$M = \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{1 \frac{1}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}} \right) : \frac{2021}{2022} = \left(\frac{2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right)}{7 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right)} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{2 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right)} \right) : \frac{2021}{2022}$$

$$= \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{\frac{7}{2}} \right) : \frac{2021}{2022} = \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{7} \right) : \frac{2021}{2022} = 0$$

$$\text{Vậy } M = 0$$

Bài 22: Tính tổng: $S = \frac{27 \cdot 4500 + 135 \cdot 550 \cdot 2}{2 + 4 + 6 + \dots + 18}$

Lời giải

$$\text{Xét tử : } 27 \cdot 4500 + 135 \cdot 550 \cdot 2 = 270 \cdot 450 + 270 \cdot 550 = 270000$$

$$\text{Xét mẫu: } 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 18 = \frac{(2+18) \cdot 9}{2} = 90$$

$$\Rightarrow S = 270000 : 90 = 3000$$

Bài 23: Tính:

$$\text{a) } A = \frac{101+100+99+98+\dots+3+2+1}{101-100+99-98+\dots+3-2+1}$$

$$\text{b) } B = \frac{423134 \cdot 846267 - 423133}{423133 \cdot 846267 + 423134}$$

Trích đề HSG huyện năm 2019-2020

Lời giải

$$\text{a) } A = \frac{101 \cdot 51}{51} = 101$$

$$\text{b) } \frac{423133 \cdot 846267 + 846267 - 423133}{423133 \cdot 846267 + 423134} = 1$$

Bài 24: Tính hợp lý

$$\text{a) } 53 \cdot 81 - 47 \cdot 14 + 81 \cdot 47 - 14 \cdot 53$$

$$\text{b) } |1 - 2^{100}| + |5^{50} - 2^{100}| - |11 - 5^{50}|$$

$$\text{c) } \left(\frac{20162016}{20172017} + \frac{2017^{2016}}{2017^{2017}} \right) - \left(\frac{2016}{2017} - \frac{2016^{2017} \cdot 2017^{2016}}{2017^{2017} \cdot 2016^{2016}} \right)$$

$$\text{d) } \frac{6^{36} \cdot (50 \cdot 5^{40} - 10 \cdot 5^{34})}{30^{30} \cdot 10^4 \cdot (100 \cdot 15^5 - 4 \cdot 3^5)}$$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Lời giải

$$\text{a) } 53 \cdot 81 - 47 \cdot 14 + 81 \cdot 47 - 14 \cdot 53$$

$$= 81 \cdot (53 + 47) - 14 \cdot (47 + 53)$$

$$= 81 \cdot 100 - 14 \cdot 100$$

$$= 100 \cdot (81 - 14)$$

$$= 100 \cdot 67 = 6700$$

$$\text{b) } |1 - 2^{100}| + |5^{50} - 2^{100}| - |11 - 5^{50}|$$

$$= 2^{100} - 1 + 5^{50} - 2^{100} - 5^{50} + 11 = 10$$

$$\text{c) } \left(\frac{20162016}{20172017} + \frac{2017^{2016}}{2017^{2017}} \right) - \left(\frac{2016}{2017} - \frac{2016^{2017} \cdot 2017^{2016}}{2017^{2017} \cdot 2016^{2016}} \right)$$

$$= \frac{2016}{2017} + \frac{1}{2017} - \frac{2016}{2017} + \frac{2016}{2017} = 1$$

$$d) \frac{6^{36} \cdot (50 \cdot 5^{40} - 10 \cdot 5^{34})}{30^{30} \cdot 10^4 \cdot (100 \cdot 15^5 - 4 \cdot 3^5)}$$

$$= \frac{2^{36} \cdot 3^{36} \cdot 5^{35} \cdot (2 \cdot 5^2 \cdot 5^{40} - 2 \cdot 5 \cdot 5^{34})}{(2 \cdot 3 \cdot 5)^{30} \cdot 2^4 \cdot 5^4 \cdot (2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^5 \cdot 5^5 - 2^2 \cdot 3^5)} = \frac{2^{36} \cdot 3^{36} \cdot 2 \cdot 5^{35} \cdot (5^7 - 1)}{2^{34} \cdot 3^{30} \cdot 5^{34} \cdot 2^2 \cdot 3^5 \cdot (5^7 - 1)}$$

$$= \frac{2^{37} \cdot 3^{36} \cdot 5^{35} \cdot (5^7 - 1)}{2^{36} \cdot 3^{35} \cdot 5^{34} \cdot (5^7 - 1)} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

Bài 25: Cho biểu thức $A = \frac{5 \cdot 4^{2017} - 4^{2018} - 1}{1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{2016}}$. Chứng tỏ rằng biểu thức A có giá trị là một số nguyên.

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Lời giải

Trước hết tính $M = 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{2016}$

$$4M = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{2016} + 4^{2017} = M - 1 + 4^{2017}$$

$$\Rightarrow 3M = 4^{2017} - 1$$

$$A = \frac{(4+1) \cdot 4^{2017} - 4^{2018} - 1}{1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{2016}} = \frac{4^{2018} + 4^{2017} - 4^{2018} - 1}{M} = \frac{4^{2017} - 1}{M} = 3$$

Bài 26: Tính hợp lý:

$$a) A = 2018^2 - 2017 \cdot 2018$$

$$b) B = (-1) \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^4 \dots (-1)^{99} \cdot (-1)^{100}$$

$$c) C = \frac{88 - \frac{1}{6} - \frac{2}{7} - \frac{3}{8} - \dots - \frac{88}{93}}{\frac{-1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} - \dots - \frac{1}{186}}$$

Trích đề HSG huyện Ứng Hòa năm 2022 - 2023

Lời giải

$$a) A = 2018 \cdot (2018 - 2017) = 2018 \cdot 1 = 2018$$

$$b) B = (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \dots (-1) \cdot 1 \text{ (Có 50 thừa số } -1 \text{) nên } B = 1.$$

$$c) C = \frac{88 - \frac{1}{6} - \frac{2}{7} - \frac{3}{8} - \dots - \frac{88}{93}}{\frac{-1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} - \dots - \frac{1}{186}}$$

$$C = \frac{\frac{5}{6} + \frac{5}{7} + \frac{5}{8} + \dots + \frac{5}{93}}{\frac{-1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} - \dots - \frac{1}{186}}$$

$$C = \frac{5 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{93} \right)}{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{93} \right)}$$

$$C = -10.$$

Bài 27: Thực hiện các phép tính sau một cách hợp lý:

$$a) A = 1152 - (374 + 1152) + (-65 + 374)$$

$$b) \frac{101 + 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1}{101 - 100 + 99 - 98 + \dots + 3 - 2 + 1}$$

Trích đề HSG đề xuất năm 2021 - 2022

Lời giải

$$a) A = 1152 - (374 + 1152) + (-65 + 374)$$

$$A = 1152 - 374 - 1152 - 65 + 374$$

$$A = (1152 - 1152) + (-374 + 374) - 65$$

$$A = -65.$$

b) Ta có:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 + 101 = [(101 - 1) : 1 + 1](101 + 1) : 2 = \frac{101 \cdot 102}{2} \quad (1)$$

$$101 - 100 + 99 - 98 + \dots + 3 - 2 + 1 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 51 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\frac{101 + 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1}{101 - 100 + 99 - 98 + \dots + 3 - 2 + 1} = \frac{101 \cdot 102 : 2}{51} = 101.$$

$$\text{Vậy } \frac{101 + 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1}{101 - 100 + 99 - 98 + \dots + 3 - 2 + 1} = 101$$

Bài 28: Tính $2022.121 - 2022.11.11 + 2023$.

Trích đề HSG đề xuất năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} & 2022.121 - 2022.11.11 + 2023 \\ &= 2022.11.11 - 2022.11.11 + 2023 \\ &= 0 + 2023 \\ &= 2023 \end{aligned}$$

Bài 29: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) A = -5^{22} - \left\{ -222 - \left[-122 - (100 - 5^{22}) + 2022 \right] \right\}$$

$$b) B = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{20}(1+2+3+\dots+20)$$

Trích đề HSG đề xuất năm 2021 - 2022

Lời giải

$$a) A = -5^{22} - \left\{ -222 - \left[-122 - (100 - 5^{22}) + 2022 \right] \right\}$$

$$A = -5^{22} + 222 - 122 - 100 + 5^{22} + 2022$$

$$A = (-5^{22} + 5^{22}) + (222 - 122 - 100) + 2022$$

$$A = 2022.$$

$$b) B = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{20}(1+2+3+\dots+20)$$

$$B = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + \dots + \frac{1}{20} \cdot \frac{20 \cdot 21}{2}$$

$$B = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{21}{2}$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 20)$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} = 105.$$

Bài 30: Tính:

a) $A = -21 \cdot 7^2 + 17 \cdot 7^2 - 90 \cdot 7^2 + 94 \cdot (-51)$

b) $C = \frac{5 \cdot 6 + 2 \cdot 10 \cdot 12 - 3 \cdot 15 \cdot 18 - 7 \cdot 35 \cdot 42}{3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 10 - 3 \cdot 9 \cdot 15 - 7 \cdot 21 \cdot 35} + \frac{2022 \cdot 2022 \cdot 2021 - 2021 \cdot 2021 \cdot 2022}{2^2 + 3^3 + 4^4 + \dots + 2022^{2022}}$

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2021 - 2022

Lời giải

a) $A = -21 \cdot 7^2 + 17 \cdot 7^2 - 90 \cdot 7^2 + 94 \cdot (-51)$

$$= 7^2 \cdot (-21 + 17 - 90) + 94 \cdot (-51)$$

$$= 7^2 \cdot (-94) + 94 \cdot (-51)$$

$$= 94 \cdot [(-49) + (-51)]$$

$$= 94 \cdot (-100)$$

$$= -9400.$$

b) $\frac{5 \cdot 6 + 2 \cdot 10 \cdot 12 - 3 \cdot 15 \cdot 18 - 7 \cdot 35 \cdot 42}{3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 10 - 3 \cdot 9 \cdot 15 - 7 \cdot 21 \cdot 35} + \frac{2022 \cdot 2022 \cdot 2021 - 2021 \cdot 2021 \cdot 2022}{2^2 + 3^3 + 4^4 + \dots + 2022^{2022}}$

$$= \frac{5 \cdot 6(1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 3 - 7 \cdot 7 \cdot 7)}{3 \cdot 5(1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 3 - 7 \cdot 7 \cdot 7)} + \frac{2022 \cdot 10001 \cdot 2021 - 2021 \cdot 10001 \cdot 2022}{2^2 + 3^3 + 4^4 + \dots + 2022^{2022}}$$

$$= \frac{5 \cdot 6}{3 \cdot 5} + \frac{0}{2^2 + 3^3 + 4^4 + \dots + 2022^{2022}}$$

$$= 2.$$

Bài 31: Tính giá trị các biểu thức sau (*Tính hợp lí nếu có thể*):

a) $A = -674 \cdot 168 + 2022 \cdot (-44)$

b) $B = -\frac{10}{13} + \frac{5}{17} - \frac{3}{13} + \frac{12}{17} + \frac{195}{1890}$

Trích đề HSG huyện Nam Định năm 2021 - 2022

Lời giải

a) $A = -674 \cdot 168 + 2022 \cdot (-44)$

$$A = -674 \cdot 3 \cdot 56 + 2022 \cdot (-44)$$

$$A = -2022 \cdot 56 + 2022 \cdot (-44)$$

$$A = -2022(56 + 44)$$

$$A = -2022 \cdot 100$$

$$A = -202200$$

b) $B = -\frac{10}{13} + \frac{5}{17} - \frac{3}{13} + \frac{12}{17} + \frac{195}{1890}$

$$= -\frac{10}{13} - \frac{3}{13} + \frac{5}{17} + \frac{12}{17} + \frac{195}{1890}$$

$$= -1 + 1 + \frac{195}{1890}$$

$$= \frac{195}{1890}$$

Bài 32: Thực hiện phép tính bằng cách hợp lý:

a) $A = -2013 \cdot 2014 + 1007 \cdot 26$

b) $B = \left(\frac{1313}{1414} + \frac{10}{160} \right) - \left(\frac{130}{140} - \frac{1515}{1616} \right)$

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2017 -2018

Lời giải

a) $A = -2013 \cdot 2014 + 1007 \cdot 26$

$$A = -2013 \cdot 2014 + 2014 \cdot 13$$

$$A = 2014(-2013 + 13)$$

$$A = 2014 \cdot (-2000)$$

$$A = -4028000.$$

b) $B = \left(\frac{1313}{1414} + \frac{10}{160} \right) - \left(\frac{130}{140} - \frac{1515}{1616} \right)$

$$B = \left(\frac{13}{14} + \frac{1}{16} \right) - \left(\frac{13}{14} - \frac{15}{16} \right)$$

$$B = \frac{13}{14} + \frac{1}{16} - \frac{13}{14} + \frac{15}{16}$$

$$B = \left(\frac{13}{14} - \frac{13}{14} \right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{15}{16} \right)$$

$$B = 0 + 1$$

$$B = 1.$$

Bài 33:

1) Tính $A = \frac{3}{4} + \frac{7}{8} : 7 - \frac{1}{32} \cdot (-4)^2$.

2) Tính nhanh hợp lý: $B = 2022 \cdot 2022 - 2025 \cdot 2019$.

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2017 -2018

Lời giải

1) $A = \frac{3}{4} + \frac{7}{8} : 7 - \frac{1}{32} \cdot (-4)^2 = \frac{3}{4} + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} - \frac{1}{32} \cdot 16 = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

2) $B = 2022 \cdot 2022 - 2025 \cdot 2019 = 2022 \cdot (2025 - 3) - 2025 \cdot (2020 - 1)$

$$= 2022 \cdot 2025 - 2022 \cdot 3 - 2025 \cdot 2020 + 2025$$

$$= 2025 \cdot (2022 - 2020) - 2022 \cdot 3 + 2025$$

$$= 2025 \cdot 2 + 2025 - 2022 \cdot 3$$

$$= 3 \cdot 2025 - 2022 \cdot 3$$

$$= 3 \cdot 3 = 9.$$

Bài 34: Rút gọn $\frac{10 \cdot 11 + 50 \cdot 55 + 70 \cdot 77}{11 \cdot 12 + 55 \cdot 60 + 77 \cdot 84}$

Trích đề HSG huyện Tam Dương năm 2021 -2022

Lời giải

Ta có:

$$\frac{10.11+50.55+70.77}{11.12+55.60+77.84} = \frac{10.11.(1+5.5+7.7)}{11.12.(1+5.5+7.7)} = \frac{5}{6}$$

Bài 35: Thực hiện phép tính:

$$a) A = \frac{24.47-23}{24+47-23} \cdot \frac{3+\frac{3}{7}-\frac{3}{11}+\frac{3}{1001}-\frac{3}{13}}{\frac{9}{1001}-\frac{9}{13}+\frac{9}{7}-\frac{9}{11}+9}$$

$$b) M = \frac{1+2+2^2+2^3+\dots+2^{2012}}{2^{2014}-2}$$

Trích đề HSG huyện Kim Sơn năm 2021 -2022

Lời giải

a) Đặt $A = B.C$

$$B = \frac{24.47-23}{24+47-23} = \frac{1128-23}{71-23} = \frac{1105}{48}$$

$$C = \frac{3+\frac{3}{7}-\frac{3}{11}+\frac{3}{1001}-\frac{3}{13}}{\frac{9}{1001}-\frac{9}{13}+\frac{9}{7}-\frac{9}{11}+9} = \frac{3\left(1+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{1001}-\frac{1}{13}\right)}{9\left(\frac{1}{1001}-\frac{1}{13}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+1\right)} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Suy ra } A = \frac{1105}{144}$$

$$b) M = \frac{1+2+2^2+2^3+\dots+2^{2012}}{2^{2014}-2}$$

$$\text{Đặt } A = 1+2+2^2+2^3+\dots+2^{2012}$$

$$2A = 2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{2012}+2^{2013}$$

$$2A - A = (2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{2012}+2^{2013}) - (1+2+2^2+2^3+\dots+2^{2012})$$

$$A = 2^{2013} - 1$$

$$\text{Đặt: } B = 2^{2014} - 2 = 2(2^{2013} - 1).$$

$$M = \frac{1+2+2^2+2^3+\dots+2^{2012}}{2^{2014}-2} = \frac{2^{2013}-1}{2(2^{2013}-1)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } M = \frac{1}{2}.$$

Bài 36: Thực hiện phép tính:

$$a) A = 4,5 \cdot \frac{1}{9} + \left(2\frac{2}{3} - \frac{4}{9}\right) : 25\%$$

$$b) B = 2011 - [39 - (2^3 \cdot 3 - 21)^2] : (-3) + 2021^0$$

$$c) C = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2018.2020}\right)$$

Trích đề HSG huyện Kinh Môn năm 2019 -2020

Lời giải

$$a) A = 4,5 \cdot \frac{1}{9} + \left(2\frac{2}{3} - \frac{4}{9}\right) : 25\%$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{9} + \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{9} \right) : \frac{1}{4} \\
 &= \frac{1}{2} + \left(\frac{24}{9} - \frac{4}{9} \right) \cdot 4 \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{20}{9} \cdot 4 \\
 &= \frac{9}{18} + \frac{160}{18} = \frac{169}{18}.
 \end{aligned}$$

$$b) B = 2011 - [39 - (2^3 \cdot 3 - 21)^2] : (-3) + 2021^0$$

$$B = 2011 - [39 - (3)^2] : (-3) + 1$$

$$B = 2011 + 10 + 1 = 2022$$

$$\begin{aligned}
 c) C &= \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2018.2020}\right) = \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \dots \frac{2019^2}{2018.2020} \\
 &= \frac{(2.3.4 \dots 2019)(2.3.4 \dots 2019)}{(1.2.3 \dots 2.18)(3.4.5 \dots 2020)} = \frac{2019 \cdot 2}{2020} = \frac{2019}{1010}.
 \end{aligned}$$

Bài 37:

$$a) \text{ Rút gọn biểu thức: } A = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2499}\right)$$

$$b) \text{ Tính nhanh: } B = \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}}{2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27}} : \frac{4 + \frac{4}{7} + \frac{4}{49} - \frac{4}{343}}{1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343}}$$

Trích đề HSG huyện Kinh Môn năm 2018 -201

Lời giải

$$a) A = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2499}\right)$$

$$A = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15} \dots \frac{2500}{2499}$$

$$A = \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{3.3}{2.4} \cdot \frac{4.4}{3.5} \dots \frac{50.50}{49.51}$$

$$A = \frac{2.3.4 \dots 50}{1.2.3 \dots 49} \cdot \frac{2.3.4 \dots 50}{3.4.5 \dots 51}$$

$$A = \frac{50}{1} \cdot \frac{2}{51}$$

$$A = \frac{100}{51}.$$

$$\text{Vậy } A = \frac{100}{51}.$$

$$b) B = \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}}{2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27}} : \frac{4 + \frac{4}{7} + \frac{4}{49} - \frac{4}{343}}{1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343}}$$

$$B = \frac{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}\right)}{2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}\right)} : \frac{4 \cdot \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343}\right)}{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343}\right)}$$

$$B = \frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Vậy } B = \frac{1}{8}.$$

Bài 38: Tính:

a) $1152 - (374 + 1152) + (374 - 65)$

b) $\frac{7}{12} + \frac{5}{6} + \frac{1}{4} - \frac{3}{7} - \frac{5}{12}$

Trích đề HSG huyện Ba Vì năm 2018 -2019

Lời giải

a) $A = 1152 - (374 + 1152) + (374 - 65)$

$$A = 1152 - 374 - 1152 + 374 - 65$$

$$A = (1152 - 1152) + (374 - 374) - 65$$

$$A = -65.$$

Vậy $A = -65.$

b) $B = \frac{7}{12} + \frac{5}{6} + \frac{1}{4} - \frac{3}{7} - \frac{5}{12}$

$$B = \left(\frac{7}{12} - \frac{5}{12}\right) + \frac{5}{6} + \frac{1}{4} - \frac{3}{7}$$

$$B = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} + \frac{1}{4} - \frac{3}{7}$$

$$B = 1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{7}$$

$$B = \frac{5}{4} - \frac{3}{7}$$

$$B = \frac{35}{28} - \frac{12}{28}$$

$$B = \frac{23}{28}.$$

Vậy $B = \frac{23}{28}.$

Bài 39: Tính: $M = \frac{\frac{7}{2012} + \frac{7}{9} - \frac{1}{4}}{\frac{5}{9} - \frac{3}{2012} - \frac{1}{2}}$

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2018 -2019

Lời giải

$$M = \frac{\frac{7}{2012} + \frac{7}{9} - \frac{1}{4}}{\frac{5}{9} - \frac{3}{2012} - \frac{1}{2}}$$

$$M = \frac{7.9.2 + 7.2012.2 - 1006.9}{5.2012.2 - 3.9.2 - 2012.9}$$

$$M = \frac{7.2021 - 503.9}{5.2012 - 3.9 - 1006.9}$$

$$M = \frac{9620}{979}$$

$$\text{Vậy } M = \frac{9620}{979}$$

Bài 40: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $2 \cdot [(6^2 - 24) : 4] + 2014$

b) $\left(1 + 2\frac{1}{3} - 3\frac{1}{4}\right) : \left(1 + 3\frac{7}{12} - 4\frac{1}{2}\right)$

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018 -2019

Lời giải

a) $2 \cdot [(6^2 - 24) : 4] + 2014 = 2 \cdot [(36 - 24) : 4] + 2014 = 2020$.

b) $\left(1 + 2\frac{1}{3} - 3\frac{1}{4}\right) : \left(1 + 3\frac{7}{12} - 4\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{7}{12} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12} : \frac{1}{12} = 1$.

Bài 41: Thực hiện phép tính:

a) $A = [540 : (23,7 - 19,7)] + 42(132 + 75 - 36) - 7317$

b) Tìm tích: $\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{4} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100} - 1\right)$.

Trích đề HSG huyện Bạch Thông năm 2018 -2019

Lời giải

a) $A = [540 : (23,7 - 19,7)] + 42(132 + 75 - 36) - 7317$

$$A = (540 : 4) + 42.171 - 7317$$

$$A = 135 + 7182 - 7317$$

$$A = 0$$

Vậy $A = 0$.

b) $B = \left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{4} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{99} - 1\right)\left(\frac{1}{100} - 1\right)$

$$B = \frac{-1}{2} \cdot \frac{-2}{3} \cdot \frac{-3}{4} \dots \frac{-99}{100}$$

$$B = \frac{-(1.2.3.4 \dots 99)}{2.3.4 \dots 99.100}$$

$$B = \frac{-1}{100}$$

Vậy $B = \frac{-1}{100}$.

Bài 42: Thực hiện phép tính (tính nhanh nếu có thể)

$$a) M = \left(\frac{-5}{7} + \frac{5}{11}\right) : \left(\frac{-10}{3}\right) + \left(\frac{-2}{7} + \frac{6}{11}\right) : \left(\frac{-10}{3}\right)$$

$$b) P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{100}}$$

Trích đề HSG huyện Phúc Thọ năm 2018 -2019

Lời giải

$$a) M = \left(\frac{-5}{7} + \frac{5}{11}\right) : \left(\frac{-10}{3}\right) + \left(\frac{-2}{7} + \frac{6}{11}\right) : \left(\frac{-10}{3}\right)$$

$$M = \frac{-2}{10} \cdot \left(\frac{-5}{7} + \frac{5}{11} + \frac{-2}{7} + \frac{6}{11}\right)$$

$$M = \frac{-3}{10} \cdot (-1+1)$$

$$M = \frac{-3}{10} \cdot 0$$

$$M = 0.$$

Vậy $M = 0$.

$$b) P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{100}} \quad (1)$$

$$2P = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{99}} \quad (2)$$

$$2P - P = \left(2 + \frac{1}{2^{99}}\right) - \left(\frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{100}}\right)$$

$$P = 2 + \frac{1}{2^{99}} - \frac{1}{2^{99}}$$

$$P = 2.$$

Vậy $P = 2$.

Bài 43: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) A = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} : 5 - \frac{1}{18} \cdot (-3)^2$$

$$b) B = 3 \cdot \left\{ 5 \cdot \left[(5^2 + 2^3) : 11 \right] - 16 \right\} + 2015$$

$$c) C = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2014.2016}\right)$$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hoá năm 2018 -2019

Lời giải

$$a) A = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} : 5 - \frac{1}{18} \cdot (-3)^2$$

$$A = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{18} \cdot 9$$

$$A = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} - \frac{3}{6}$$

$$A = \frac{5}{6} - \frac{3}{6}$$

$$A = \frac{2}{6}$$

$$A = \frac{1}{3}$$

Vậy $A = \frac{1}{3}$.

b) $B = 3 \cdot \{5 \cdot [(5^2 + 2^3) : 11] - 16\} + 2015$

$$B = 3 \cdot \{5 \cdot [33 : 11] - 16\} + 2015$$

$$B = (-3) + 2015$$

$$B = 2012.$$

Vậy $B = 2012$.

c) $C = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2014.2016}\right)$

$$C = \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \dots \frac{2015^2}{2014.2016}$$

$$C = \frac{(2.3.4 \dots 2015) \cdot (2.3.4 \dots 2015)}{(1.2.3 \dots 2014) \cdot (3.4.5 \dots 2016)}$$

$$C = \frac{2015}{1008}$$

Vậy $C = \frac{2015}{1008}$.

Bài 44: Tính nhanh: $16 + (27 - 7.6) - (94.7 - 27.99)$.

Trích đề HSG huyện Quỳnh Lưu năm 2018 -2019

Lời giải

$$16 + (27 - 7.6) - (94.7 - 27.99) = 16 + 27 - 7.6 - 94.7 + 27.99 = 16 + 27 + 27.99 - 7.6 - 94.7$$

$$= 16 + 27.100 - 7.100 = 16 + 100 \cdot (27 - 7) = 16 + 100 \cdot 20 = 16 + 2000 = 2016.$$

Bài 45: Tính hợp lý

a) $21.7^2 - 11.7^2 + 90.7^2 + 49.125.16$

b)
$$B = \frac{2.2014}{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2014}}$$

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021 -2022

Lời giải

a) $A = 21.7^2 - 11.7^2 + 90.7^2 + 49.125.16$

$$A = 7^2 \cdot (21 - 11 + 90) + 49.125.16$$

$$A = 49.100 + 49.25.5.4.4$$

$$A = 49.100 + 49.100.20$$

$$A = 49.100 \cdot (1 + 20)$$

$$A = 49.100.21 = 102900.$$

Vậy $A = 102900$.

b)

Ta có $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}(n+1)n$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Do đó } \frac{1}{1+2+3+\dots+n} = 2 \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } B &= \frac{2.2014}{1+2 \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} \right) \right]} \\ &= \frac{2.2014}{1+2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2015} \right)} = \frac{2.2014}{2 - \frac{2}{2015}} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } 2 - \frac{2}{2015} = \frac{2.2015 - 2}{2015} = \frac{2(2015-1)}{2015} = \frac{2.2014}{2015}.$$

$$B = \frac{2.2014.2015}{2.2014}$$

$$B = 2015.$$

Vậy $B = 2015$.

Bài 46: Thực hiện phép tính:

$$A = 1800 : \left\{ 450 : \left[450 - (4.5^3 - 2^3.5^2) \right] \right\}$$

$$B = \frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^{10}.6^{19} - 7.2^{29}.27^6}$$

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Lời giải

$$A = 1800 : \left\{ 450 : \left[450 - (4.5^3 - 2^3.5^2) \right] \right\}$$

$$= 1800 : \left\{ 450 : \left[450 - (4.125 - 8.25) \right] \right\}$$

$$= 1800 : \left\{ 450 : [450 - 300] \right\}$$

$$= 1800 : \{450 : 150\}$$

$$= 1800 : 3 = 600.$$

$$B = \frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^{10}.6^{19} - 7.2^{29}.27^6}$$

$$= \frac{5.2^{2.15}.3^{2.9} - 2^2.3^{20}.2^{3.9}}{5.2^{10}.2^{19}.3^{19} - 7.2^{29}.3^{3.6}}$$

$$= \frac{5.2^{30}.3^{18} - 2^2.3^{20}.2^{27}}{5.2^{29}.3^{19} - 7.2^{29}.3^{18}}$$

$$= \frac{2^{29} \cdot 3^{18} (5 \cdot 2 - 3^2)}{2^{29} \cdot 3^{18} (5 \cdot 3 - 7)}$$

$$= \frac{10 - 9}{15 - 7} = \frac{1}{8}$$

Bài 47: Thực hiện phép tính:

$$A = 12 - 3 - [(2021 - 2022)^{100} - 10^2 + 3^2] + (-2022)^0$$

$$B = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right)$$

Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Lời giải

$$A = 12 - 3 - [(2021 - 2022)^{100} - 10^2 + 3^2] + (-2022)^0$$

$$A = 9 - [(-1)^{100} - 100 + 9] + 1$$

$$A = 9 - [1 - 100 + 9] + 1$$

$$A = 9 - 1 + 100 - 9 + 1$$

$$A = (9 - 9) + (1 - 1) + 100$$

$$A = 100$$

Vậy $A = 100$.

$$B = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right)$$

$$B = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100}$$

$$B = \frac{3 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \dots \cdot 99}{4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot \dots \cdot 100}$$

$$B = \frac{(1 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 5) \cdot \dots \cdot (9 \cdot 11)}{(2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 4) \cdot \dots \cdot (10 \cdot 10)}$$

$$B = \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9) \cdot (3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 10 \cdot 11)}{(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 9 \cdot 10) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 10)}$$

$$B = \frac{11}{20}$$

Vậy $B = \frac{11}{20}$.

Bài 48: Tính giá trị của các biểu thức sau bằng cách hợp lý:

$$A = 35.34 + 35.86 + 65.75 + 65.45$$

$$B = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2022}\right)$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 A &= 35.34 + 35.86 + 65.75 + 65.45 \\
 &= 35(34 + 86) + 65(75 + 45) \\
 &= 35.120 + 65.120 \\
 &= 120(35 + 65) \\
 &= 120.100 \\
 &= 12000 \\
 B &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2022}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2021}{2022} \\
 &= \frac{1}{2022}
 \end{aligned}$$

Bài 49: Tính giá trị của biểu thức

- 1) $A = 22 + (27 - 7.6) - (94.7 - 27.99)$
- 2) $B = 3 \cdot \left\{ 5 \cdot \left[(5^2 + 2^3) : 11 \right] - 16 \right\} + 2025$
- 3) $C = 1 + \frac{1}{2} \cdot (1 + 2) + \frac{1}{3} \cdot (1 + 2 + 3) + \frac{1}{4} \cdot (1 + 2 + 3 + 4) + \dots + \frac{1}{200} \cdot (1 + 2 + \dots + 200)$

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned}
 1) \quad A &= 22 + (27 - 7.6) - (94.7 - 27.99) \\
 &= 22 + 27 - 7.6 - 94.7 + 27.99 \\
 &= 22 + 27 + 27.99 - 7.6 - 94.7 \\
 &= 22 + 27(99 + 1) - 7 \cdot (6 + 94) \\
 &= 22 + 27.100 - 7 \cdot 100 \\
 &= 22 + 100(27 - 7) \\
 &= 22 + 100.20 = 22 + 2000 = 2022 \\
 2) \quad B &= 3 \cdot \left\{ 5 \cdot \left[(5^2 + 2^3) : 11 \right] - 16 \right\} + 2025 \\
 &= 3 \cdot \left\{ 5 \cdot [33 : 11] - 16 \right\} + 2025 \\
 &= 3 \cdot \{15 - 16\} + 2025
 \end{aligned}$$

$$= 3 \cdot (-1) + 2025 = 2022$$

3) Từ $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ được:

$$E = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} + \dots + \frac{1}{200} \cdot \frac{200 \cdot 201}{2}$$

$$= 1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{201}{2}$$

$$E + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{201}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(1+2+4+\dots+201)$$

$$E = \frac{1}{2}(1+2+4+\dots+201) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{201 \cdot 202}{2} - \frac{1}{2} = 10150$$

Bài 50: Thực hiện phép tính

1) $936 - [508 - 5(5^{10} : 5^8 + 2022^0)]$

2) $\frac{2^6 \cdot 18 + 2^7}{2^6 \cdot 5^2 - 2^6 \cdot 3}$

3) $A = x - y$ với x là số nguyên dương nhỏ nhất và y là số nguyên âm lớn nhất.

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Lời giải

1) $936 - [508 - 5(5^{10} : 5^8 + 2022^0)]$

$$= 936 - [508 - 5(5^2 + 1)]$$

$$= 936 - (508 - 5 \cdot 26)$$

$$= 936 - (508 - 130)$$

$$= 936 - 378$$

$$= 558$$

2) $\frac{2^6 \cdot 18 + 2^7}{2^6 \cdot 5^2 - 2^6 \cdot 3} = \frac{2^6(18+2)}{2^6(5^2-3)} = \frac{18+2}{25-3} = \frac{20}{22} = \frac{10}{11}$

3) Vì x là số nguyên dương nhỏ nhất và y là số nguyên âm lớn nhất.

$$\Rightarrow x = 1, y = -1$$

$$\Rightarrow A = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$$

Bài 51: Thực hiện phép tính.

- a) $\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{22}{19} - \frac{15}{21} \right) + \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{-3}{19} + \frac{-2}{7} \right)$
 b) $\frac{-3}{4} \cdot 4 \frac{8}{13} - 0,75 \cdot 3 \frac{5}{13};$
 c) $96.7^2 - 37.7^2 + 15.7^2 - 49.174$

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021-2022

Lời giải

- a) $\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{22}{19} - \frac{15}{21} \right) + \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{-3}{19} + \frac{-2}{7} \right)$
 $= \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{22}{19} + \frac{-3}{19} \right) + \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{-15}{21} + \frac{-2}{7} \right)$
 $= \frac{2}{7} \cdot \frac{19}{19} + \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{-5}{7} + \frac{-2}{7} \right) = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \cdot (-1) = 0$
 b) $\frac{-3}{4} \cdot 4 \frac{8}{13} - 0,75 \cdot 3 \frac{5}{13} = \frac{-3}{4} \cdot \left(4 + \frac{8}{13} \right) - \frac{3}{4} \cdot \left(3 + \frac{5}{13} \right)$
 $= \frac{-3}{4} \cdot \left(4 + \frac{8}{13} + 3 + \frac{5}{13} \right) = \frac{-3}{4} \cdot 8 = -6$
 c) $96.7^2 - 37.7^2 + 15.7^2 - 49.174$
 $= 96.49 - 37.49 + 15.49 - 49.174$
 $= 49(96 - 37 + 15 - 174) = 49 \cdot (-100) = -4900$

Bài 52: Tính: $3 \frac{1}{4} : \left[4 \cdot (-3) - 2^3 : \frac{16}{15} \right]$

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2021 - 2022

Lời giải

$$3 \frac{1}{4} : \left[4 \cdot (-3) - 2^3 : \frac{16}{15} \right] = \frac{13}{4} : \left(-12 - 8 \cdot \frac{15}{16} \right)$$

$$= \frac{13}{4} : \left(-12 - \frac{15}{2} \right) = \frac{13}{4} : \left(\frac{-39}{2} \right)$$

$$= \frac{-1}{6}$$

Bài 53: Tính $\left\{ 20 - \left[(700 + 2 \cdot 10^2) : 30 \right] \right\} : 5$

Trích đề HSG huyện Tiền Hải năm 2021 – 2022

Lời giải

$$\left\{ 20 - \left[(700 + 2 \cdot 10^2) : 30 \right] \right\} : 5$$

$$\begin{aligned}
&= \{20 - [(700 + 200) : 30]\} : 5 \\
&= (20 - 900 : 30) : 5 \\
&= (20 - 30) : 5 \\
&= -10 : 5 = -2
\end{aligned}$$

Bài 54:

1. Tính giá trị các biểu thức:

$$A = 1,4 \cdot \frac{15}{49} - \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3}\right) : 2\frac{1}{5}; \quad B = \frac{25^{13} \cdot 9^6 \cdot 24^7}{50^{12} \cdot 81^5 \cdot 40^3}.$$

2. Tính nhanh:

$$\begin{aligned}
C &= \frac{5}{12 \cdot 17} + \frac{3}{34 \cdot 10} + \frac{7}{60 \cdot 9} + \frac{8}{27 \cdot 35}; \\
D &= \left(\frac{7}{20} + 1\right) \left(\frac{7}{33} + 1\right) \left(\frac{7}{48} + 1\right) \left(\frac{7}{65} + 1\right) \left(\frac{7}{84} + 1\right) \left(\frac{7}{105} + 1\right).
\end{aligned}$$

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021 – 2022.

Lời giải

1. Tính giá trị các biểu thức:

$$\begin{aligned}
A &= 1,4 \cdot \frac{15}{49} - \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3}\right) : 2\frac{1}{5} \\
&= \frac{14}{10} \cdot \frac{15}{49} - \frac{12+10}{15} : \frac{11}{5} \\
&= \frac{3}{7} - \frac{22}{15} \cdot \frac{5}{11} \\
&= \frac{3}{7} - \frac{2}{3} \\
&= \frac{9-14}{21} \\
&= -521.
\end{aligned}$$

Vậy $A = -521$

$$B = \frac{25^{13} \cdot 9^6 \cdot 24^7}{50^{12} \cdot 81^5 \cdot 40^3} = \frac{25^{13} \cdot 9^6 \cdot 3^7 \cdot 8^7}{25^{12} \cdot 2^{12} \cdot 9^{10} \cdot 5^3 \cdot 8^3} = \frac{25 \cdot 3^7 \cdot 8^4}{2^{12} \cdot 9^3 \cdot 5^3} = \frac{5^2 \cdot 3^7 \cdot 2^{12}}{2^{12} \cdot 3^6 \cdot 5^3} = \frac{3}{5}.$$

Vậy $B = \frac{3}{5}$

2. Tính nhanh:

$$\begin{aligned}
C &= \frac{5}{12 \cdot 17} + \frac{3}{34 \cdot 10} + \frac{7}{60 \cdot 9} + \frac{8}{27 \cdot 35} \\
&= \frac{5}{12 \cdot 17} + \frac{3}{17 \cdot 20} + \frac{7}{20 \cdot 27} + \frac{8}{27 \cdot 35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{12} - \frac{1}{17} + \frac{1}{17} - \frac{1}{20} + \frac{1}{20} - \frac{1}{27} + \frac{1}{27} - \frac{1}{35} \\
&= \frac{1}{12} - \frac{1}{35} \\
&= \frac{23}{420}.
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } C = \frac{23}{420}$$

$$\begin{aligned}
D &= \left(\frac{7}{20} + 1\right) \left(\frac{7}{33} + 1\right) \left(\frac{7}{48} + 1\right) \left(\frac{7}{65} + 1\right) \left(\frac{7}{84} + 1\right) \left(\frac{7}{105} + 1\right) \\
&= \frac{27}{20} \cdot \frac{40}{33} \cdot \frac{55}{48} \cdot \frac{72}{65} \cdot \frac{91}{84} \cdot \frac{112}{105} \\
&= \frac{9 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 6 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 14}{2 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 6 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 15} \\
&= \frac{8 \cdot 9}{2 \cdot 15} \\
&= \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5}.
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } D = \frac{12}{5}$$

Bài 55: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$1) A = -5^{22} - \left\{ -222 - \left[-122 - (100 - 5^{22}) + 2022 \right] \right\}$$

$$2) B = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{20}(1+2+3+\dots+20)$$

$$3) C = \frac{5 \cdot 4^6 \cdot 9^4 - 3^9 \cdot (-8)^4}{4 \cdot 2^{13} \cdot 3^8 + 2 \cdot 8^4 \cdot (-27)^3}.$$

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2021-2022

Lời giải

$$1) \text{ Ta có: } A = -5^{22} - \left\{ -222 - \left[-122 - (100 - 5^{22}) + 2022 \right] \right\}$$

$$A = -5^{22} + 222 + \left[-122 - (100 - 5^{22}) + 2022 \right]$$

$$A = -5^{22} + 222 - 122 - (100 - 5^{22}) + 2022$$

$$A = -5^{22} + 222 - 122 - 100 + 5^{22} + 2022$$

$$A = (-5^{22} + 5^{22}) + (222 - 122 - 100) + 2022 = 2022.$$

$$\text{Vậy } A = 2022.$$

2) Ta có:

$$B = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{20}(1+2+3+\dots+20)$$

$$B = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + \dots + \frac{1}{20} \cdot \frac{20 \cdot 21}{2}$$

$$B = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{21}{2}$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot (1+2+3+4+\dots+21)$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} = 105.$$

Vậy $B = 105$

$$3) \text{ Ta có: } C = \frac{5 \cdot 4^6 \cdot 9^4 - 3^9 \cdot (-8)^4}{4 \cdot 2^{13} \cdot 3^8 + 2 \cdot 8^4 \cdot (-27)^3} = \frac{5 \cdot (2^2)^6 \cdot (3^2)^4 - 3^9 \cdot ((-2)^3)^4}{2^2 \cdot 2^{13} \cdot 3^8 + 2 \cdot (2^3)^4 \cdot ((-3)^3)^3}$$

$$C = \frac{5 \cdot 2^{12} \cdot 3^8 - 3^9 \cdot 2^{12}}{2^{15} \cdot 3^8 - 2^{13} \cdot 3^9} = \frac{2^{12} \cdot 3^8 (5-3)}{2^{13} \cdot 3^8 (2^2-3)} = \frac{2^{12} \cdot 3^8 \cdot 2}{2^{13} \cdot 3^8 \cdot 1} = 1$$

Vậy $C = 1$.

Bài 56: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$1) A = 2021 - (374 + 2021) + (-2022 + 374).$$

$$2) B = \left(\frac{-2}{5} \cdot \frac{13}{131} + \frac{2}{131} \cdot \frac{-118}{5} \right) : \frac{4}{5}.$$

$$3) C = \frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{11}{12} + \frac{19}{20} + \frac{29}{30} + \frac{41}{42} + \frac{55}{56} + \frac{71}{72} + \frac{89}{90}.$$

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021-2022

Lời giải

$$1) A = 2021 - (374 + 2021) + (-2022 + 374)$$

$$A = 2021 - 374 - 2021 - 2022 + 374$$

$$A = (2021 - 2021) + (-374 + 374) - 2022$$

$$A = 0 + 0 - 2022$$

$$A = -2022$$

Vậy $A = -2022$

$$2) B = \left(\frac{-2}{5} \cdot \frac{13}{131} + \frac{2}{131} \cdot \frac{-118}{5} \right) : \frac{4}{5}$$

$$B = \left(\frac{-2}{5} \cdot \frac{1}{131} \cdot 13 + \frac{-2}{5} \cdot \frac{1}{131} \cdot 118 \right) : \frac{4}{5}$$

$$B = \frac{-2}{5} \cdot \frac{1}{131} (13 + 118) : \frac{4}{5}$$

$$B = \frac{-2}{5} \cdot \frac{1}{131} \cdot 131 \cdot \frac{5}{4}$$

$$B = \frac{-2}{5} \cdot \frac{5}{4}$$

$$B = \frac{-1}{2}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{-1}{2}.$$

$$3) C = \frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{11}{12} + \frac{19}{20} + \frac{29}{30} + \frac{41}{42} + \frac{55}{56} + \frac{71}{72} + \frac{89}{90}$$

$$C = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{6}\right) + \left(1 - \frac{1}{12}\right) + \left(1 - \frac{1}{20}\right) + \left(1 - \frac{1}{30}\right) + \left(1 - \frac{1}{42}\right) + \left(1 - \frac{1}{56}\right) + \left(1 - \frac{1}{72}\right) + \left(1 - \frac{1}{90}\right)$$

$$C = \left(1 - \frac{1}{1.2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2.3}\right) + \left(1 - \frac{1}{3.4}\right) + \left(1 - \frac{1}{4.5}\right) + \left(1 - \frac{1}{5.6}\right) + \left(1 - \frac{1}{6.7}\right) + \left(1 - \frac{1}{7.8}\right) + \left(1 - \frac{1}{8.9}\right) + \left(1 - \frac{1}{9.10}\right)$$

$$C = 9.1 - \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{9.10}\right)$$

$$C = 9 - \left(\frac{2-1}{1.2} + \frac{3-2}{2.3} + \frac{4-3}{3.4} + \dots + \frac{10-9}{9.10}\right)$$

$$C = 9.1 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right)$$

$$C = 9 - \left(1 - \frac{1}{10}\right)$$

$$C = 9 - \frac{9}{10}$$

$$C = \frac{81}{10}$$

$$\text{Vậy } C = \frac{81}{10}.$$

Bài 57: Thực hiện phép tính: $A = 2016 \cdot \left[\frac{6 - \frac{6}{7} - \frac{6}{289} - \frac{6}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} \cdot \frac{3 + \frac{3}{13} + \frac{3}{169} + \frac{3}{91}}{6 + \frac{6}{13} + \frac{6}{169} + \frac{6}{91}} \right] \cdot \frac{304304304}{945945945}$

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015-2016

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 2016 \cdot \left[\frac{6 - \frac{6}{7} - \frac{6}{289} - \frac{6}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} \cdot \frac{3 + \frac{3}{13} + \frac{3}{169} + \frac{3}{91}}{6 + \frac{6}{13} + \frac{6}{169} + \frac{6}{91}} \right] \cdot \frac{304304304}{945945945}$$

$$= 2016 \cdot \left[\frac{6 \left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{289} - \frac{1}{85}\right)}{4 \left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{289} - \frac{1}{85}\right)} \cdot \frac{3 \left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{169} + \frac{1}{91}\right)}{6 \left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{169} + \frac{1}{91}\right)} \right] \cdot \frac{304.1001001}{945.1001001}$$

$$= 2016 \cdot \left(\frac{6}{4} : \frac{3}{6} \right) \cdot \frac{304}{945}$$

$$= 2016 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{304}{945} = \frac{9728}{5}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{9728}{5}$$

Bài 58: Thực hiện phép tính:

$$\text{a) } A = 81 \cdot \left[\frac{12 - \frac{12}{7} - \frac{12}{289} - \frac{12}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} : \frac{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{169} + \frac{5}{91}}{6 + \frac{6}{13} + \frac{6}{169} + \frac{6}{91}} \right] \cdot \frac{158158158}{711711711}$$

$$\text{b) } B = \frac{5 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^9 \cdot (2^2)^6 - 2 \cdot (2^2 \cdot 3)^{14} \cdot 3^4}{5 \cdot 2^{28} \cdot 3^{18} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}}$$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014-2015

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } A = 81 \cdot \left[\frac{12 - \frac{12}{7} - \frac{12}{289} - \frac{12}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} : \frac{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{169} + \frac{5}{91}}{6 + \frac{6}{13} + \frac{6}{169} + \frac{6}{91}} \right] \cdot \frac{158158158}{711711711}$$

$$= 81 \cdot \left[\frac{12 \left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{289} - \frac{1}{85} \right)}{4 \left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{289} - \frac{1}{85} \right)} : \frac{5 \left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{169} + \frac{1}{91} \right)}{6 \left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{169} + \frac{1}{91} \right)} \right] \cdot \frac{158.1001001}{711.1001001}$$

$$= 81 \cdot \left(\frac{12}{4} : \frac{5}{6} \right) \cdot \frac{158}{711}$$

$$= 81 \cdot \frac{18}{5} \cdot \frac{2}{9} = \frac{324}{5}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{324}{5}$$

$$\text{b) Ta có: } B = \frac{5 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^9 \cdot (2^2)^6 - 2 \cdot (2^2 \cdot 3)^{14} \cdot 3^4}{5 \cdot 2^{28} \cdot 3^{18} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}}$$

$$= \frac{5 \cdot 2^{18} \cdot 3^{18} \cdot 2^{12} - 2 \cdot 2^{28} \cdot 3^{14} \cdot 3^4}{5 \cdot 2^{28} \cdot 3^{18} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}}$$

$$= \frac{5 \cdot 2^{30} \cdot 3^{18} - 2^{29} \cdot 3^{18}}{2^{28} \cdot 3^{18} (5 - 7 \cdot 2)}$$

$$= \frac{2^{29} \cdot 3^{18} (5 \cdot 2 - 1)}{2^{28} \cdot 3^{18} (5 - 14)}$$

$$= \frac{2 \cdot 9}{-9} = -2.$$

Vậy $B = -2$

Bài 59: 1. Thực hiện phép tính:

$$\text{a) } P = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 400 - \left[673 - 2^3 \cdot (7^3 : 7 + 1) \right] \right\}; \quad \text{b) } Q = \frac{4^3 \cdot 9^2 + 6^3 \cdot 120}{-8^2 \cdot 3^6 + 6^5}.$$

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Lời giải

a) Ta có

$$P = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 400 - \left[673 - 2^3 \cdot (7^3 : 7 + 1) \right] \right\}$$

$$= 8 \cdot 125 - 3 \cdot \{ 400 - [673 - 8 \cdot 50] \}$$

$$= 1000 - 3 \cdot [400 - 473]$$

$$= 1000 - 3 \cdot (-73)$$

$$= 1219.$$

Vậy $P = 1219$.

$$\text{b) Ta có } Q = \frac{4^3 \cdot 9^2 + 6^3 \cdot 120}{-8^2 \cdot 3^6 + 6^5} = \frac{2^6 \cdot 3^4 + 2^3 \cdot 3^3 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 5}{-2^6 \cdot 3^6 + 6^5} = \frac{2^6 \cdot 3^4 + 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5}{-2^6 \cdot 3^6 + 2^5 \cdot 3^5} = \frac{2^6 \cdot 3^4 \cdot 2 \cdot 3}{2^5 \cdot 3^5 \cdot (-5)} = \frac{-4}{5}.$$

$$\text{Vậy } Q = \frac{-4}{5}.$$

Bài 60: Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{8^{10} \cdot 3^{15} - 2^{30} \cdot 9^7}{2^{30} \cdot 27^5 - 4^{15} \cdot 3^{14}}.$

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Lời giải

$$A = \frac{8^{10} \cdot 3^{15} - 2^{30} \cdot 9^7}{2^{30} \cdot 27^5 - 4^{15} \cdot 3^{14}}$$

$$A = \frac{(2^3)^{10} \cdot 3^{15} - 2^{30} \cdot (3^2)^7}{2^{30} \cdot (3^3)^5 - (2^2)^{15} \cdot 3^{14}}$$

$$A = \frac{2^{30} \cdot 3^{15} - 2^{30} \cdot 3^{14}}{2^{30} \cdot 3^{15} - 2^{30} \cdot 3^{14}}$$

$$A = \frac{2^{30} \cdot (3^{15} - 3^{14})}{2^{30} \cdot (3^{15} - 3^{14})}$$

$$A=1.$$

Vậy $A=1$.

Bài 61: Tính giá trị của các biểu thức sau bằng cách hợp lý (nếu có thể):

$$A = (-2013) \cdot 2014 + 1007 \cdot 26$$

$$B = \left(\frac{1313}{1414} + \frac{10}{160} \right) - \left(\frac{130}{140} - \frac{1515}{1616} \right).$$

$$C = \left(1 - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2021} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2022} \right).$$

$$D = x \cdot \frac{1}{3} + 2x \cdot \frac{3}{6} - 3x \cdot \frac{4}{9} \text{ với } x = 2022^{2021}.$$

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= (-2013) \cdot 2014 + 1007 \cdot 26 = (-2013) \cdot 2014 + 1007 \cdot 2 \cdot 13 = (-2013) \cdot 2014 + 2014 \cdot 13 \\ &= 2014 \cdot (-2013 + 13) = 2014 \cdot (-2000) = -4028. \end{aligned}$$

Vậy $A = -4028$.

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{1313}{1414} + \frac{10}{160} \right) - \left(\frac{130}{140} - \frac{1515}{1616} \right) = \left(\frac{13 \cdot 101}{14 \cdot 101} + \frac{1}{16} \right) - \left(\frac{13}{14} - \frac{15 \cdot 101}{16 \cdot 101} \right) = \left(\frac{13}{14} + \frac{1}{16} \right) - \left(\frac{13}{14} - \frac{15}{16} \right) \\ &= \frac{13}{14} + \frac{1}{16} - \frac{13}{14} + \frac{15}{16} = \left(\frac{13}{14} - \frac{13}{14} \right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{15}{16} \right) = 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Vậy $B = 1$.

$$C = \left(1 - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2021} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2022} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2020}{2021} \cdot \frac{2021}{2022} = \frac{1}{2022}.$$

$$\text{Vậy } C = \frac{1}{2022}.$$

$$D = x \cdot \frac{1}{3} + 2x \cdot \frac{3}{6} - 3x \cdot \frac{4}{9} \text{ với } x = 2022^{2021}.$$

$$\text{Ta có: } D = x \cdot \frac{1}{3} + 2x \cdot \frac{3}{6} - 3x \cdot \frac{4}{9} = x \cdot \frac{1}{3} + x \cdot 1 - x \cdot \frac{4}{3} = x \cdot \left(\frac{1}{3} + 1 - \frac{4}{3} \right) = x \cdot 0 = 0.$$

Nên giá trị của biểu thức D khi $x = 2022^{2021}$ là 0.

Bài 62: Tính hợp lí

$$\text{a) } A = \frac{5}{6} - \frac{-1}{12} + \frac{2}{3} - \frac{-2}{7} + \frac{1}{25} - \frac{-1}{4} - \frac{5}{42}$$

$$\text{b) } \frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}$$

Trích đề HSG THCS Ái Thượng năm 2021-2022

Lời giải

$$\text{a) } A = \left(\frac{2}{3} - \frac{-1}{4} - \frac{-1}{12} \right) + \left(\frac{5}{6} - \frac{-2}{7} - \frac{5}{42} \right) + \frac{1}{25} \quad 2 = 2 + \frac{1}{25} = \frac{51}{25}.$$

$$\text{Vậy } A = \frac{51}{25}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } & \frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^9.6^{19} - 7.2^{29}.27^6} \\
 &= \frac{5.2^{30}.3^{18} - 2^2.3^{20}.2^{27}}{5.2^9.2^{19}.3^{19} - 7.2^{29}.3^{18}} \\
 &= \frac{2^{29}.3^{18}(5.2 - 3^2)}{2^{28}.3^{18}(5.3 - 7.2)} = 2.
 \end{aligned}$$

Bài 63: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$1) A = (-16) : (-8) + 6(2021 - 2022)^{2019} + 2026.$$

$$2) B = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{8}\right) \left(1 + \frac{1}{15}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{624}\right).$$

Trích đề HSG Huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Lời giải

$$1) A = (-16) : (-8) + 6(2021 - 2022)^{2019} + 2026$$

$$= 2 + 6 \cdot (-1)^{2019} + 2026 = 2 + 6 \cdot (-1) + 2026$$

$$= 2 - 6 + 2026 = 2022.$$

Vậy $A = 2022$.

$$2) B = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{8}\right) \left(1 + \frac{1}{15}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{624}\right)$$

$$= \frac{3+1}{3} \cdot \frac{8+1}{8} \cdot \frac{15+1}{15} \dots \frac{624+1}{624}$$

$$= \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{3.3}{2.4} \cdot \frac{4.4}{3.5} \dots \frac{25.25}{24.26}$$

$$= \frac{2}{1} \cdot \frac{25}{26} = \frac{25}{13}.$$

Vậy $B = \frac{25}{13}$.

Bài 64: Thực hiện phép tính (tính hợp lý nếu có thể)

$$\text{a) } 1968 : 16 + 5136 : 16 - 704 : 16.$$

$$\text{b) } 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 400 - \left[673 - 2^3 \cdot (7^8 : 7^6 + 7^0) \right] \right\}.$$

Trích đề HSG Huyện Lương Tài năm 2015-2016

Lời giải

$$\text{a) } 1968 : 16 + 5136 : 16 - 704 : 16$$

$$= 16 \cdot (123 + 321 - 44) : 16 = 400$$

$$\text{b) } 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 400 - \left[673 - 2^3 \cdot (7^8 : 7^6 + 7^0) \right] \right\}$$

$$= 8 \cdot 125 - 3 \cdot \{ 400 - [673 - 8 \cdot 50] \}$$

$$= 1000 - 3 \cdot \{ 400 - 273 \} = 619.$$

Bài 65: Tính: $M = \frac{\frac{7}{2012} + \frac{7}{9} - \frac{1}{4}}{\frac{5}{9} - \frac{3}{2012} - \frac{1}{2}}$.

Trích đề HSG Huyện Lý Nhân năm 2018-20219

Lời giải

$$N = \frac{\left(\frac{7}{2012} + \frac{7}{9} - \frac{1}{4}\right) \cdot 2012 \cdot 9 \cdot 2}{\left(\frac{5}{9} - \frac{3}{2012} - \frac{1}{2}\right) \cdot 2012 \cdot 9 \cdot 2} = \frac{7 \cdot 9 \cdot 2 + 7 \cdot 2012 \cdot 2 - 1006 \cdot 9}{5 \cdot 2012 \cdot 2 - 3 \cdot 9 \cdot 2 - 2012 \cdot 9} = \frac{7 \cdot 2021 - 503 \cdot 9}{5 \cdot 2012 - 3 \cdot 9 - 1006 \cdot 9} = \frac{9620}{979}.$$

Vậy $N = \frac{9620}{979}$.

Bài 66: Tính nhanh:

a) $\frac{7}{13} \cdot \frac{7}{15} - \frac{5}{12} \cdot \frac{21}{39} + \frac{49}{91} \cdot \frac{8}{15}$.

b) $\left(\frac{12}{199} + \frac{23}{200} - \frac{34}{201}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)$.

Trích đề HSG THCS Lý Tự Trọng năm 2015-2016

Lời giải

a) $\frac{7}{13} \cdot \frac{7}{15} - \frac{5}{12} \cdot \frac{21}{39} + \frac{49}{91} \cdot \frac{8}{15}$
 $= \frac{7}{13} \cdot \frac{7}{15} - \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{13} + \frac{7}{13} \cdot \frac{8}{15}$
 $= \frac{7}{13} \cdot \left(\frac{7}{15} - \frac{7}{13} + \frac{8}{15}\right)$
 $= \frac{7}{13} \cdot \left(1 - \frac{5}{12}\right)$
 $= \frac{7}{13} \cdot \frac{7}{12} = \frac{49}{156}$.

b) $\left(\frac{12}{199} + \frac{23}{200} - \frac{34}{201}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)$
 $= \left(\frac{12}{199} + \frac{23}{200} - \frac{34}{201}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)$
 $= \left(\frac{12}{199} + \frac{23}{200} - \frac{34}{201}\right) \cdot 0 = 0$.

Dạng 2: Tính tổng dãy số tự nhiên theo quy luật.

Trắc nghiệm

Bài 1: Kết quả của phép tính $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 99 - 100$ là:

A. 50.

B. -50.

C. -100.

D. 0.

*Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022***Lời giải****Đáp án:** B. -50.**Bài 2:** Cho 7 ô liên tiếp sau:

	-13		a			-27
--	-----	--	-----	--	--	-----

Biết rằng tổng ba ô liên tiếp bất kỳ luôn bằng 0. Khi đó giá trị của a là:

A. -13.

B. -27.

C. 13.

D. 27.

*Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022***Lời giải****Đáp án:** C. 13.**Bài 31:** Kết quả của phép tính $1-2+3-4+5-6+\dots+99-100$ bằng:

A. 50

B. -50

C. -100

D. 0

*Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019***Tự luận****Bài 1:** Tính tổng $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$ *Trích đề HSG cấp trường năm 2019-2020***Lời giải**

$$S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$$

$$3S = (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100).3$$

$$= 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + \dots + 99.100.3$$

$$= 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + 99.100.(101-98)$$

$$= 1.2.3 - 1.2.3 + 2.3.4 - 2.3.4 + 3.4.5 - \dots - 98.99.100 + 99.100.101$$

$$S = 99.101 : 3 = 33.100.101$$

Bài 2: Cho $E = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{200}(1+2+\dots+200)$ và $F = \frac{20300}{3}$.Tính $\frac{E}{F}$.*Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022***Lời giải**

$$E = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{200}(1+2+\dots+200)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+2).2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+3).3}{2} + \dots + \frac{1}{200} \cdot \frac{(1+200).200}{2}$$

$$= 1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{201}{2}$$

$$= \frac{2+3+4+\dots+201}{2}$$

$$= 10150$$

$$\frac{E}{F} = 10150 \cdot \frac{3}{20300} = \frac{3}{2}$$

Bài 3: Kết quả của phép tính $1-2+3-4+\dots+99-100$ là:

Lời giải

$$\begin{aligned}
& 1-2+3-4+\dots+99-100 \\
& = (1-2)+(3-4)+(5-6)+\dots+(99-100) \\
& = -1+(-1)+(-1)+\dots+(-1) \\
& = 50.(-1) \\
& = -50
\end{aligned}$$

Bài 4: Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$1) -1-2+3+4-5-6+7+8-\dots-2013-2014+2015+2016$$

$$2) B = \left(\frac{1}{2}-1\right) : \left(\frac{1}{3}-1\right) : \left(\frac{1}{4}-1\right) : \left(\frac{1}{5}-1\right) : \dots : \left(\frac{1}{98}-1\right) : \left(\frac{1}{99}-1\right) : \left(\frac{1}{100}-1\right)$$

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Lời giải

$$1) A = -1-2+3+4-5-6+7+8-9-10+\dots-2013-2014+2015+2016$$

$$= (-1-2+3+4)+(-5-6+7+8)+(-9-10+11+12)+\dots+(-2013-2014+2015+2016)$$

Ta có tổng A có 2016 số hạng nên có $2016:4=504$ nhóm

$$A = 4+4+4+\dots+4 \text{ (tổng có 504 số 4)}$$

$$A = 4.504 = 2016$$

$$2) B = \left(\frac{1}{2}-1\right) : \left(\frac{1}{3}-1\right) : \left(\frac{1}{4}-1\right) : \left(\frac{1}{5}-1\right) : \dots : \left(\frac{1}{98}-1\right) : \left(\frac{1}{99}-1\right) : \left(\frac{1}{100}-1\right)$$

$$B = \left(-\frac{1}{2}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{3}{4}\right) : \dots : \left(-\frac{98}{99}\right) : \left(-\frac{99}{100}\right)$$

$$B = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(-\frac{99}{98}\right) \cdot \left(-\frac{100}{99}\right)$$

Ta thấy tích B có 99 thừa số âm nên mang dấu âm

$$B = -\frac{1.3.4.5.6.\dots.98.99.100}{2.2.3.4.5.\dots.97.98.99} = \frac{-100}{2.2} = -25$$

Bài 5: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \left(\frac{1}{2}-1\right) : \left(\frac{1}{3}-1\right) : \left(\frac{1}{4}-1\right) : \left(\frac{1}{5}-1\right) : \dots : \left(\frac{1}{98}-1\right) : \left(\frac{1}{99}-1\right) : \left(\frac{1}{100}-1\right)$$

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Lời giải

$$A = \left(\frac{1}{2}-1\right) : \left(\frac{1}{3}-1\right) : \left(\frac{1}{4}-1\right) : \left(\frac{1}{5}-1\right) : \dots : \left(\frac{1}{98}-1\right) : \left(\frac{1}{99}-1\right) : \left(\frac{1}{100}-1\right)$$

$$A = \left(-\frac{1}{2}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{3}{4}\right) : \dots : \left(-\frac{98}{99}\right) : \left(-\frac{99}{100}\right)$$

$$A = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{-99}{98}\right) \cdot \left(-\frac{100}{99}\right)$$

Ta thấy tích A có 99 thừa số âm nên mang dấu âm

$$A = -\frac{1.3.4.5.6.\dots.98.99.100}{2.2.3.4.5.\dots.97.98.99} = \frac{-100}{2.2} = -25$$

Bài 6: Tính $B = \frac{1.2021 + 2.2020 + 3.2019 + \dots + 2021.1}{1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 2021.2022}$.

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2021 - 2022

Lời giải

Với $n \in \mathbb{N}$, ta có $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow n(n+1) = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n)$

Do đó $1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 2021.2022$

$$= 2.1 + 2.(1+2) + 2.(1+2+3) + \dots + 2.(1+2+3+\dots+2021)$$

$$= 2.(1.2021 + 2.2020 + 3.2019 + \dots + 2021.1)$$

Suy ra $B = \frac{1}{2}$

Bài 7: Tính tổng $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2019 – 2020.

Lời giải

$$S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$$

$$3S = (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100).3$$

$$= 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + \dots + 99.100.3$$

$$= 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + 99.100.(101-98)$$

$$= 1.2.3 - 1.2.3 + 2.3.4 - 2.3.4 + 3.4.5 - \dots - 98.99.100 + 99.100.101$$

$$S = 99.11.101 : 3 = 33.100.101 = 33300$$

Vậy $S = 33300$.

Bài 8: Cho $A = 4 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$. Hỏi A có chia hết cho 128 không ?

Trích đề HSG trường Tân Lập năm 2018-2019

Lời giải

$$A = 4 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$$

$$A = 4 + (2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20})$$

$$A - 4 = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$$

$$2(A - 4) = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{21}$$

$$2(A - 4) - (A - 4) = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{21} - 2^2 - 2^3 - 2^4 - \dots - 2^{20}$$

$$A - 4 = 2^{21} - 2^2$$

$$A - 4 = 2^{21} - 4$$

$$A = 2^{21}$$

Mà $2^{21} : 2^7$ Do đó $A : 128$.

Bài 9: Cho $A = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 99 - 100$.

- Tính A
- A có chia hết cho 2, cho 3, cho 5 không?
- A có bao nhiêu ước tự nhiên? Bao nhiêu ước nguyên?

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2018 - 2019

Lời giải

a) Tính A

$$\begin{aligned} A &= 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 99 - 100 \\ &= (1 - 2) + (3 - 4) + \dots + (99 - 100) \\ &= (-1) + (-1) + \dots + (-1) \\ &= (-1) \cdot 50 = -50. \end{aligned}$$

b) $A : 2$, $A : 5$, A không chia hết cho 3.

c) A có bao nhiêu ước tự nhiên? Bao nhiêu ước nguyên?

$$50 = 2 \cdot 5^2$$

A có 6 ước tự nhiên là $\{1; 2; 5; 10; 25; 50\}$ và có 12 ước nguyên là $\{\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10; \pm 25; \pm 50\}$.

Dạng 3: Tính toán với tổng của dãy lũy thừa.

Bài 1. Cho tổng $A = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2008}$. Tính giá trị biểu thức: $B = 8A - 3^{2010}$

Trích đề HSG Liên trường năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2008} \\ 9A &= 3^2 + 3^4 + 3^6 + 3^8 + \dots + 3^{2010} \\ 9A - A &= 8A = 3^{2010} - 1 \\ B &= 8A - 3^{2010} = 3^{2010} - 1 - 3^{2010} = -1 \end{aligned}$$

Bài 2: Cho x là tổng của tất cả các số nguyên có 2 chữ số, y là số nguyên âm lớn nhất. Hãy tính giá trị của biểu thức $A = 2009 \cdot x^{2006} - 2008 \cdot y^{2007}$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018 - 2019

Lời giải

Theo bài ta có: $x = -99 + (-98) + \dots + (-11) + (-10) + 10 + 11 + \dots + 98 + 99$

Suy ra $x = 0$ suy ra $x^{2006} = 0$; $y = -1$ suy ra $\Rightarrow y^{2007} = -1$

$$A = 2009 \cdot x^{2006} - 2008 \cdot y^{2007} = 0 - (-2008) = 2008$$

Bài 3: Cho $A = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{2012}$ và $B = \left(\frac{3}{2}\right)^{2013} : 2$. Tính $B - A$

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Lời giải

Ta có:

$$A = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{2012} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}A = \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{2013} \quad (2)$$

Lấy (2) trừ (1) ta được:

$$\frac{3}{2}A - A = \left(\frac{3}{2}\right)^{2013} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}A = \left(\frac{3}{2}\right)^{2013} - \frac{5}{4} \Rightarrow A = \frac{3^{2013}}{2^{2012}} + \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } B - A = \frac{3^{2013}}{2^{2014}} - \frac{3^{2013}}{2^{2012}} + \frac{5}{2}$$

Bài 4: Cho $S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$

a) Chứng minh rằng S là bội của -20

b) Tính S , từ đó suy ra 3^{100} chia cho 4 dư 1

Trích đề HSG 059 năm 2018-2019

Lời giải

a) Tổng S có 100 số hạng chia thành 25 nhóm, mỗi nhóm 4 số hạng

$$\begin{aligned} S &= 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99} \\ &= (1 + 3 + 3^2 - 3^3) + (3^4 - 3^5 + 3^6 - 3^7) + \dots + (3^{96} - 3^{97} + 3^{98} - 3^{99}) \\ &= (-20) + 3^4 \cdot (-20) + \dots + 3^{96} \cdot (-20) \Rightarrow S : -20 \end{aligned}$$

$$b) S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$$

$$3S = 3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 + \dots + 3^{99} - 3^{100}$$

$$\Rightarrow 3S + S = 4S = \frac{1 - 3^{100}}{4}$$

$$\Rightarrow 3^{100} - 1 : 4 \Rightarrow 3^{100} \text{ chia cho 4 dư 1.}$$

Bài 5: Tính hợp lý: $B = \frac{35 \cdot 6^{10} \cdot 2^{23} \cdot 3^6 - 2^{22} \cdot 5 \cdot 6^{15}}{9 \cdot 6^{19} \cdot 2^9 - 4 \cdot 3^{17} \cdot 2^{26}}$.

Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021-2022

Lời giải

$$B = \frac{35 \cdot 6^{10} \cdot 2^{23} \cdot 3^6 - 2^{22} \cdot 5 \cdot 6^{15}}{9 \cdot 6^{19} \cdot 2^9 - 4 \cdot 3^{17} \cdot 2^{26}}$$

$$B = \frac{35 \cdot 2^{33} \cdot 3^{16} - 2^{37} \cdot 3^{15} \cdot 5}{2^{28} \cdot 3^{21} - 2^{28} \cdot 3^{17}}$$

$$B = \frac{5 \cdot 2^{33} \cdot 3^{15} \cdot (7 \cdot 3 - 2^4)}{2^{28} \cdot 3^{17} \cdot (3^4 - 1)}$$

$$B = \frac{5 \cdot 2^5 \cdot 5}{3^2 \cdot 80}$$

$$B = \frac{5 \cdot 2^4 \cdot 10}{2^4 \cdot 5 \cdot 9} = \frac{10}{9}$$

Bài 6: Tính hợp lý: $\frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}$.

Trích đề HSG huyện Nam Đàn năm 2021-2022

Lời giải

$$\frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6} = \frac{5 \cdot 2^{30} \cdot 3^{18} - 2^2 \cdot 3^{20} \cdot 2^{27}}{5 \cdot 2^9 \cdot 2^{19} \cdot 3^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}} = \frac{2^{29} \cdot 3^{18} \cdot (5 \cdot 2 - 3^2)}{2^{28} \cdot 3^{18} \cdot (5 \cdot 3 - 7 \cdot 2)} = 2.$$

Bài 7: Thực hiện phép tính: $B = \frac{2^{10} \cdot 13 + 2^{10} \cdot 65}{2^8 \cdot 104}$.

Trích đề HSG huyện Bạch Thông năm 2018 -2019

Lời giải

$$B = \frac{2^{10} \cdot 13 + 2^{10} \cdot 65}{2^8 \cdot 104}$$

$$B = \frac{2^{10} \cdot 13 \cdot (1+5)}{2^8 \cdot 8 \cdot 13}$$

$$B = \frac{2^{10} \cdot 13 \cdot (1+5)}{2^8 \cdot 8 \cdot 13}$$

$$B = \frac{2^{10} \cdot 13 \cdot 6}{2^8 \cdot 2^3 \cdot 13} = 3.$$

Vậy $B = 3$.

Bài 8: Tính:

a) $\frac{11 \cdot 3^{22} \cdot 3^7 - 9^{15}}{(2 \cdot 3^{14})^2}$.

b) $\frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{3^2} \cdot \frac{15}{4^2} \cdots \frac{899}{30^2}$.

Trích đề HSG huyện Ba Vì năm 2018 -2019

Lời giải

a) $A = \frac{11 \cdot 3^{22} \cdot 3^7 - 9^{15}}{(2 \cdot 3^{14})^2}$

$$A = \frac{11 \cdot 3^{29} - 3^{30}}{2^2 \cdot 3^{28}}$$

$$A = \frac{3^{29} \cdot (11-3)}{2^2 \cdot 3^{28}}$$

$$A = \frac{3^{29} \cdot 2^3}{2^2 \cdot 3^{28}} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Vậy $A = 6$.

$$b) B = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{3^2} \cdot \frac{15}{4^2} \cdots \frac{899}{30^2}$$

$$B = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdots \frac{29.31}{30.30}$$

$$B = \frac{1.2.3 \cdots 29}{2.3.4 \cdots 30} \cdot \frac{3.4.5 \cdots 31}{2.3.4 \cdots 30}$$

$$B = \frac{1}{30} \cdot \frac{31}{2}$$

$$B = \frac{31}{60}.$$

Vậy $B = \frac{31}{60}$.

Bài 9: Rút gọn $C = \frac{5 \cdot 4^6 \cdot 9^4 - 3^9 \cdot (-8)^4}{4 \cdot 2^{13} \cdot 3^8 + 2 \cdot 8^4 \cdot (-27)^3}$.

Trích đề HSG đề xuất năm 2021 -2022

Lời giải

$$C = \frac{5 \cdot 4^6 \cdot 9^4 - 3^9 \cdot (-8)^4}{4 \cdot 2^{13} \cdot 3^8 + 2 \cdot 8^4 \cdot (-27)^3}$$

$$C = \frac{5 \cdot 4^6 \cdot 9^4 - 3^9 \cdot 8^4}{4 \cdot 2^{13} \cdot 3^8 - 2 \cdot 8^4 \cdot 27^3}$$

$$C = \frac{5 \cdot 2^{12} \cdot 3^8 - 3^9 \cdot 2^{12}}{2^{15} \cdot 3^8 - 2^{13} \cdot 3^9}$$

$$C = \frac{2^{12} \cdot 3^8 \cdot (5-3)}{2^{13} \cdot 3^8 \cdot (2^2-3)}$$

$$C = \frac{2^{12} \cdot 3^8 \cdot 2}{2^{13} \cdot 3^8} = 1.$$

Bài 10: Rút gọn

$$a) B = \left(\frac{2016 \cdot 2016}{2017 \cdot 2017} + \frac{2017^{2016}}{2017^{2017}} \right) - \left(\frac{2016}{2017} - \frac{2016^{2017} \cdot 2017^{2016}}{2017^{2017} \cdot 2016^{2016}} \right)$$

$$b) C = \frac{6^{36} \cdot (50 \cdot 5^{40} - 10 \cdot 5^{34})}{30^{30} \cdot 10^4 \cdot (100 \cdot 15^5 - 4 \cdot 3^5)}$$

Trích đề HSG đề Khoái Châu năm 2021 -2022

Lời giải

$$a) B = \left(\frac{2016 \cdot 2016}{2017 \cdot 2017} + \frac{2017^{2016}}{2017^{2017}} \right) - \left(\frac{2016}{2017} - \frac{2016^{2017} \cdot 2017^{2016}}{2017^{2017} \cdot 2016^{2016}} \right) = \frac{2016}{2017} + \frac{1}{2017} - \frac{2016}{2017} + \frac{2016}{2017} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } C &= \frac{6^{36} \cdot (50 \cdot 5^{40} - 10 \cdot 5^{34})}{30^{30} \cdot 10^4 \cdot (100 \cdot 15^5 - 4 \cdot 3^5)} \\ C &= \frac{2^{36} \cdot 3^{36} \cdot 5^{35} \cdot (2 \cdot 5^2 \cdot 5^{40} - 2 \cdot 5 \cdot 5^{34})}{(2 \cdot 3 \cdot 5)^{30} \cdot 2^4 \cdot 5^4 \cdot (2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^5 \cdot 5^5 - 2^2 \cdot 3^5)} \\ C &= \frac{2^{36} \cdot 3^{36} \cdot 2 \cdot 5^{35} \cdot (5^7 - 1)}{2^{34} \cdot 3^{30} \cdot 5^{34} \cdot 2^2 \cdot 3^5 \cdot (5^7 - 1)} \\ C &= \frac{2^{37} \cdot 3^{36} \cdot 5^{35} \cdot (5^7 - 1)}{2^{36} \cdot 3^{35} \cdot 5^{34} \cdot (5^7 - 1)} \\ C &= 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30. \end{aligned}$$

Bài 11: Thực hiện phép tính: $C = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2022}$

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } C &= 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2022} \\ \Rightarrow 3^2 C &= 3^2(1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2022}) \\ \Rightarrow 9C &= 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2024} \\ \Rightarrow 9C - C &= (3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2024}) - (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2022}) \\ \Rightarrow 8C &= 3^{2024} - 1 \\ \Rightarrow C &= \frac{3^{2024} - 1}{8} \end{aligned}$$

Bài 12: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$D = 15 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + \dots + 2^{2020}.$$

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021-2022

Lời giải

$$\begin{aligned} D &= 15 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + \dots + 2^{2020} \\ E &= 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + \dots + 2^{2020} \\ 2E &= 2^5 + 2^6 + 2^7 + \dots + 2^{2020} + 2^{2021} \\ 2E - E &= (2^5 + 2^6 + 2^7 + \dots + 2^{2020} + 2^{2021}) - (2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + \dots + 2^{2020}) \\ E &= 2^5 + 2^6 + 2^7 + \dots + 2^{2020} + 2^{2021} - 2^4 - 2^5 - 2^6 - 2^7 - \dots - 2^{2020} \\ E &= (2^5 - 2^5) + (2^6 - 2^6) + (2^7 - 2^7) + \dots + (2^{2020} - 2^{2020}) + (2^{2021} - 2^4) \\ E &= 2^{2021} - 16. \\ D &= 15 + E = 15 + 2^{2021} - 16 = 2^{2021} - 1. \\ \text{Vậy } D &= 2^{2021} - 1. \end{aligned}$$

Bài 13: Cho $A = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{2012}$ và $B = \left(\frac{3}{2}\right)^{2013} : 2$

Tính $B - A$.

Trích đề HSG huyện Đồng Tháp năm 2018-2019

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{2012} \quad (1)$$

$$\frac{3}{2}A = \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{2012} + \left(\frac{3}{2}\right)^{2013} \quad (2)$$

Lấy (2) – (1) ta được:

$$\frac{3}{2}A - A = \left(\frac{3}{2}\right)^{2013} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$$

$$A = \frac{3^{2013}}{2^{2012}} + \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } B - A = \frac{3^{2013}}{2^{2014}} - \frac{3^{2013}}{2^{2012}} + \frac{5}{2}$$

Bài 14: Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2010}$

a) Rút gọn A .

b) Tìm x để $2A + 3 = 3^x$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2019 -2020

Lời giải

a) Rút gọn A

$$A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2010}$$

$$3A = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2011}$$

$$3A - A = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2011} - 3 - 3^2 - 3^3 - \dots - 3^{2010}$$

$$2A = 3^{2011} - 3$$

$$A = \frac{3^{2011} - 3}{2}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{3^{2011} - 3}{2}$$

b) Tìm x để $2A + 3 = 3^x$

$$2A + 3 = 3^x$$

$$2 \cdot \frac{3^{2011} - 3}{2} + 3 = 3^x$$

$$3^{2011} - 3 + 3 = 3^x$$

$$3^{2011} = 3^x$$

$$x = 2011$$

Vậy $x = 2011$.

Dạng 4: Tổng dãy phân số theo quy luật.

Bài 1: Cho $A = \frac{4}{7.31} + \frac{6}{7.41} + \frac{9}{10.41} + \frac{7}{10.57}$; $B = \frac{7}{19.31} + \frac{5}{19.43} + \frac{3}{23.43} + \frac{11}{23.57}$

Tỷ số $\frac{A}{B}$ là:

- A. $\frac{7}{4}$. B. $\frac{7}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{11}{4}$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: C. $\frac{5}{2}$.

Tự luận

Bài 1: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100}$.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có:
$$\begin{aligned} & \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{99}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{99}\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{50}\right) \\ &= \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100} \end{aligned}$$

Vậy $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100}$.

Bài 2: Tính giá trị của các biểu thức sau: $K = \frac{4}{11.16} + \frac{4}{16.21} + \frac{4}{21.26} + \dots + \frac{4}{61.66}$.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có: $K = 4 \left(\frac{1}{11.16} + \frac{1}{16.21} + \frac{1}{21.26} + \dots + \frac{1}{61.66} \right)$

$$5K = 4 \left(\frac{5}{11.16} + \frac{5}{16.21} + \frac{5}{21.26} + \dots + \frac{5}{61.66} \right)$$

$$5K = 4 \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{61} - \frac{1}{66} \right)$$

$$5K = 4 \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{66} \right) \Rightarrow 5K = 4 \cdot \frac{55}{11.66}$$

$$K = \frac{4}{66} = \frac{2}{33}$$

Vậy $K = \frac{2}{33}$.

Bài 3: Cho $E = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{200}(1+2+3+\dots+200)$ và $F = \frac{20300}{3}$. Tính $\frac{E}{F}$.

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} E &= 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{200}(1+2+\dots+200) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+2) \cdot 2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+3) \cdot 3}{2} + \dots + \frac{1}{200} \cdot \frac{(1+200) \cdot 200}{2} \\ &= 1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{201}{2} \\ &= \frac{2+3+4+\dots+201}{2} \\ &= 10150 \\ \frac{E}{F} &= 10150 \cdot \frac{3}{20300} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Bài 4: Tính giá trị các biểu thức sau: $B = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{20}(1+2+3+\dots+20)$

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{20}(1+2+3+\dots+20) \\ B &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + \dots + \frac{1}{20} \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} \\ B &= \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{21}{2} \\ B &= \frac{1}{2} \cdot (1+2+3+\dots+20) \\ B &= \frac{1}{2} \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} = 105. \end{aligned}$$

Bài 5: Tính $B = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2499}\right)$.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2499}\right) \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15} \dots \frac{2500}{2499} \\ &= \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \dots \frac{50 \cdot 50}{49 \cdot 51} \\ &= \frac{2 \cdot 50}{51} = \frac{100}{51} \end{aligned}$$

Bài 6: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$, biết: $A = \frac{1}{3.8} + \frac{1}{8.13} + \frac{1}{13.18} + \frac{1}{18.21}$; $B = \frac{1}{3.7} + \frac{1}{7.11} + \frac{1}{11.15} + \frac{1}{15.19} + \frac{1}{19.23}$

A. $\frac{A}{B} = \frac{5}{4}$

B. $\frac{A}{B} = 1$

C. $\frac{A}{B} = \frac{4}{5}$

D. $\frac{A}{B} = 20$.

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 7: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$D = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Lời giải

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right) = \left(\frac{1-4}{2^2}\right) \left(\frac{1-9}{3^2}\right) \dots \left(\frac{1-10000}{100^2}\right) \\ &= \frac{-3}{2^2} \cdot \frac{-8}{3^2} \cdot \frac{-15}{4^2} \dots \frac{-9999}{100^2} = -\frac{1.3}{2.3} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \dots \frac{99.101}{100.100} \\ &= -\frac{(1.2.3 \dots 99) \cdot (3.4.5 \dots 101)}{(2.3.4 \dots 100) \cdot (2.3.4 \dots 100)} = -\frac{101}{200} \end{aligned}$$

Bài 8: Tính: $\left[92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100}\right] : \left[\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}\right]$

Trích đề HSG trường Nguyễn Khuyến năm 20...-20...

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \left[92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100}\right] : \left[\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}\right] \\ B &= \frac{\left(1 - \frac{1}{9}\right) + \left(1 - \frac{2}{10}\right) + \dots + \left(1 - \frac{92}{100}\right)}{\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}} = \frac{\frac{8}{9} + \frac{8}{10} + \dots + \frac{8}{100}}{\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{100}\right)} = 8 : \frac{1}{5} = 40 \end{aligned}$$

Bài 9: Cho $A = \frac{4}{7.31} + \frac{6}{7.41} + \frac{9}{10.41} + \frac{7}{10.57}$ và $B = \frac{7}{19.31} + \frac{5}{19.43} + \frac{3}{23.43} + \frac{11}{23.57}$

Tỷ số $\frac{A}{B}$ là bao nhiêu

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Lời giải

$$A = \frac{4}{7.31} + \frac{6}{7.41} + \frac{9}{10.41} + \frac{7}{10.57}$$

$$\frac{A}{5} = \frac{4}{35.31} + \frac{6}{35.41} + \frac{9}{50.41} + \frac{7}{50.57}$$

$$\frac{A}{5} = \frac{1}{31} - \frac{1}{35} + \frac{1}{35} - \frac{1}{41} + \frac{1}{41} - \frac{1}{50} + \frac{1}{50} - \frac{1}{57}$$

$$\frac{A}{5} = \frac{1}{31} - \frac{1}{57} \Rightarrow A = 5 \cdot \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{57}\right)$$

$$\frac{B}{2} = \frac{7}{38.31} + \frac{5}{38.43} + \frac{3}{46.43} + \frac{11}{46.57}$$

$$\frac{B}{2} = \frac{1}{31} - \frac{1}{38} + \frac{1}{38} - \frac{1}{43} + \frac{1}{43} - \frac{1}{46} + \frac{1}{46} - \frac{1}{57}$$

$$\frac{B}{2} = \frac{1}{31} - \frac{1}{57}$$

$$\Rightarrow B = 2 \cdot \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{57} \right)$$

$$\frac{A}{B} = \frac{5 \cdot \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{57} \right)}{2 \cdot \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{57} \right)} = \frac{5}{2}$$

Bài 10: Tính giá trị biểu thức sau:

$$B = \left(2017 - \frac{1}{4} - \frac{2}{5} - \frac{3}{6} - \frac{4}{7} - \dots - \frac{2017}{2020} \right) : \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \frac{1}{30} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{10100} \right)$$

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Lời giải

$$\text{Đặt } B_1 = 2017 - \frac{1}{4} - \frac{2}{5} - \frac{3}{6} - \frac{4}{7} - \dots - \frac{2017}{2020}$$

$$\Rightarrow B_1 = \left(1 - \frac{1}{4} \right) + \left(1 - \frac{2}{5} \right) + \left(1 - \frac{3}{6} \right) + \left(1 - \frac{4}{7} \right) + \dots + \left(1 - \frac{2017}{2020} \right)$$

$$\Rightarrow B_1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{3}{6} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{3}{2020}$$

$$\Rightarrow B_1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2020} \right)$$

$$\text{Đặt } B_2 = \frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \frac{1}{30} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{10100}$$

$$\Rightarrow B_2 = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2020} \right)$$

$$B = \frac{B_1}{B_2} = \frac{3}{\frac{1}{5}} = 15$$

Bài 11: Tính nhanh:

$$\text{a) } \frac{3^2}{1.4} + \frac{3^2}{4.7} + \frac{3^2}{7.10} + \dots + \frac{3^2}{97.100}$$

$$\text{b) } M = \frac{1+3+3^2+3^3+\dots+3^{2012}}{3^{2004}-3}$$

$$\text{c) } D = \frac{2}{20} + \frac{2}{30} + \frac{2}{42} + \frac{2}{56} + \frac{2}{72} + \frac{2}{90}$$

Trích đề 59 HSG huyện năm 2018- 2019

Lời giải

$$\text{a) } A = \frac{3^2}{1.4} + \frac{3^2}{4.7} + \frac{3^2}{7.10} + \dots + \frac{3^2}{97.100} = 3 \cdot \left(\frac{3}{1.4} + \frac{3}{4.7} + \frac{3}{7.10} + \dots + \frac{3}{97.100} \right)$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{100} \right) = 3 \cdot \frac{99}{100} = \frac{297}{100}$$

$$b) M = \frac{1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2012}}{3^{2014} - 3}$$

$$A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2012} \Rightarrow A = 3^{2013} - 1$$

$$B = 3^{2014} - 3 \Rightarrow B = 3 \cdot (3^{2013} - 1)$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{3}$$

$$c) D = 2 \cdot \left(\frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{9.10} \right)$$

$$\Rightarrow D = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right)$$

$$\Rightarrow D = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10} \right)$$

$$\Rightarrow D = 2 \cdot \frac{6}{40} = \frac{3}{10}$$

Bài 12: Cho biểu thức $D = \frac{(2!)^2}{1^2} + \frac{(2!)^2}{3^2} + \frac{(2!)^2}{5^2} + \frac{(2!)^2}{7^2} + \dots + \frac{(2!)^2}{2015^2}$

So sánh D với 6. Biết $n! = 1.2.3 \dots n (n \in \mathbb{N})$

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Lời giải

Ta có:

$$D = \frac{(2!)^2}{1^2} + \frac{(2!)^2}{3^2} + \frac{(2!)^2}{5^2} + \frac{(2!)^2}{7^2} + \dots + \frac{(2!)^2}{2015^2}$$

$$D = \frac{2^2}{1^2} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^2}{5^2} + \frac{2^2}{7^2} + \dots + \frac{2^2}{2015^2}$$

$$D = 4 + 2 \cdot \left(\frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \dots + \frac{2}{2015^2} \right)$$

$$D < 4 + 2 \cdot \left(\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{2013.2015} \right)$$

$$= 4 + 2 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2015} \right)$$

$$= 4 + 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2015} \right) = 4 + 2 - \frac{2}{2015} < 6$$

$$\Rightarrow D < 6$$

Bài 13: Thực hiện phép tính (hợp lí nếu có thể) $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{399} + \frac{1}{483}$

Trích đề HSG trường THCS Quỳnh Thiện năm 2021 – 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{399} + \frac{1}{483} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{23} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{22}{23} = \frac{11}{23} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{19.21} + \frac{1}{21.23} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{19.21} + \frac{2}{21.23} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{1}{21} - \frac{1}{23} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{23} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{22}{23} = \frac{11}{23} \end{aligned}$$

Bài 14: Không quy đồng hãy tính tổng sau:

$$A = \frac{-1}{20} + \frac{-1}{30} + \frac{-1}{42} + \frac{-1}{56} + \frac{-1}{72} + \frac{-1}{90}$$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{-1}{20} + \frac{-1}{30} + \frac{-1}{42} + \frac{-1}{56} + \frac{-1}{72} + \frac{-1}{90} \\ &= - \left(\frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{9.10} \right) \\ &= - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \\ &= - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10} \right) = \frac{-3}{20} \end{aligned}$$

Bài 15: Thực hiện các phép tính sau một cách hợp lý:

$$\frac{2}{1.4} + \frac{2}{4.7} + \frac{2}{7.10} + \dots + \frac{2}{97.100}$$

Trích đề HSG đề xuất năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} &\frac{2}{1.4} + \frac{2}{4.7} + \frac{2}{7.10} + \dots + \frac{2}{97.100} \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{3}{1.4} + \frac{3}{4.7} + \frac{3}{7.10} + \dots + \frac{3}{97.100} \right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{100} \right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{100} \right) = \frac{33}{50} \end{aligned}$$

Bài 16: Thực hiện các phép tính sau một cách hợp lý: $B = \frac{5}{1.4} + \frac{5}{4.7} + \frac{5}{7.10} + \dots + \frac{5}{97.100}$.

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2021-2022

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{5}{1.4} + \frac{5}{4.7} + \frac{5}{7.10} + \dots + \frac{5}{97.100} \\ B &= \left(\frac{3}{1.4} + \frac{3}{4.7} + \frac{3}{7.10} + \dots + \frac{3}{97.100} \right) \cdot \frac{5}{3} \\ B &= \frac{5}{3} \left(\frac{3}{1.4} + \frac{3}{4.7} + \frac{3}{7.10} + \dots + \frac{3}{97.100} \right) \end{aligned}$$

$$B = \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{100} \right)$$

$$B = \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{100} \right) = \frac{5}{3} \cdot \frac{99}{100} = \frac{33}{20}.$$

Bài 17: Thực hiện phép tính bằng cách hợp lý:

$$C = -\frac{2}{20} - \frac{2}{30} - \frac{2}{42} - \frac{2}{56} - \frac{2}{72} - \frac{2}{90}.$$

Trích đề HSG huyện Nam Định năm 2021 – 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} C &= -\frac{2}{20} - \frac{2}{30} - \frac{2}{42} - \frac{2}{56} - \frac{2}{72} - \frac{2}{90} \\ &= -2 \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10} \right) \\ &= -2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) = -2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10} \right) \\ &= -2 \cdot \left(\frac{5}{20} - \frac{2}{20} \right) = -2 \cdot \frac{3}{20} = -\frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Bài 18: Tính $S = \frac{10}{2 \cdot 7} + \frac{10}{7 \cdot 12} + \frac{10}{12 \cdot 17} + \dots + \frac{10}{2017 \cdot 2022}$

Trích đề HSG huyện Nam Đà năm 2018 - 2019

Lời giải

$$\begin{aligned} S &= \frac{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2022} \right) \\ S &= 2 \cdot \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2022} \right) \\ S &= 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2022} \\ S &= 1 - \frac{1}{1011} \\ S &= \frac{1010}{1011}. \end{aligned}$$

Bài 19: Tính: $A = \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{97 \cdot 99}$

Trích đề HSG huyện Tiên Du năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{97 \cdot 99} \\ 2A &= \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{2}{97 \cdot 99} \\ 2A &= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{99} \\ 2A &= \frac{1}{3} - \frac{1}{99} = \frac{32}{99} \end{aligned}$$

$$A = \frac{32}{99} : 2 \Rightarrow A = \frac{16}{99}.$$

Bài 20: Tính tổng: $A = \frac{2}{1.4} + \frac{2}{4.7} + \frac{2}{7.10} + \dots + \frac{2}{97.100}.$

Trích đề HSG huyện Quỳnh Lưu năm 2018 -2019

Lời giải

$$A = \frac{2}{1.4} + \frac{2}{4.7} + \frac{2}{7.10} + \dots + \frac{2}{97.100}$$

$$A = \frac{2}{1.4} + \frac{2}{4.7} + \frac{2}{7.10} + \dots + \frac{2}{97.100}$$

$$A = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{100} \right)$$

$$A = \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{100} \right)$$

$$A = \frac{33}{50}.$$

Bài 21: Tính giá trị của biểu thức sau bằng cách hợp lý:

$$C = \frac{2}{4.9} + \frac{2}{9.14} + \frac{2}{14.19} + \dots + \frac{2}{64.69}$$

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Lời giải

$$C = \frac{2}{4.9} + \frac{2}{9.14} + \frac{2}{14.19} + \dots + \frac{2}{64.69}$$

$$= \frac{2}{5} \left(\frac{5}{4.9} + \frac{5}{9.14} + \frac{5}{14.19} + \dots + \frac{5}{64.69} \right)$$

$$= \frac{2}{5} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{64} - \frac{1}{69} \right)$$

$$= \frac{2}{5} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{69} \right)$$

$$= \frac{13}{138}.$$

Bài 22: Thực hiện phép tính $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{9.10} \\
&= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \\
&= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}
\end{aligned}$$

Bài 23: Chứng minh rằng $\frac{1}{28} + \frac{1}{30} + \frac{1}{32} + \frac{1}{34} + \dots + \frac{1}{52} = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{5.12} + \frac{1}{7.16} + \dots + \frac{1}{25.52}$.

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021 – 2022.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{5.12} + \dots + \frac{1}{25.52} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{25.26} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{25} - \frac{1}{26} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{25} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{26} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{25} + \frac{1}{26} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{26} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{25} + \frac{1}{26} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{13} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{26} \right) \\
&= \frac{1}{28} + \frac{1}{30} + \frac{1}{32} + \frac{1}{34} + \dots + \frac{1}{52}
\end{aligned}$$

Bài 24: Cho $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{48} + \frac{1}{49} + \frac{1}{50}$ và $P = \frac{1}{49} + \frac{2}{48} + \frac{3}{47} + \dots + \frac{48}{2} + \frac{49}{1}$.

Hãy tính $\frac{S}{P}$.

Trích đề HSG huyện Ngọc Lặc năm 2018 -2019

Lời giải

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{49} + \frac{2}{48} + \frac{3}{47} + \dots + \frac{48}{2} + \frac{49}{1} \\
&= \left(\frac{1}{49} + 1 \right) + \left(\frac{2}{48} + 1 \right) + \left(\frac{3}{47} + 1 \right) + \dots + \left(\frac{48}{2} + 1 \right) + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{50}{49} + \frac{50}{48} + \frac{50}{47} + \dots + \frac{50}{2} \right) + 1 \\
 &= \frac{50}{50} + \frac{50}{49} + \frac{50}{48} + \dots + \frac{50}{2} \\
 &= 50 \cdot \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{49} + \frac{1}{48} + \dots + \frac{1}{2} \right) \\
 \frac{S}{P} &= \frac{\frac{1}{50} + \frac{1}{49} + \frac{1}{48} + \dots + \frac{1}{2}}{50 \cdot \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{49} + \frac{1}{48} + \dots + \frac{1}{2} \right)} = \frac{1}{50}.
 \end{aligned}$$

Bài 25: Tính: $A = \frac{1}{4.9} + \frac{1}{9.14} + \frac{1}{14.19} + \dots + \frac{1}{64.69}$.

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2019 -2020

Lời giải

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{4.9} + \frac{1}{9.14} + \frac{1}{14.19} + \dots + \frac{1}{64.69} \\
 &= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{64} - \frac{1}{69} \right) \\
 &= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{69} \right) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{69}{4.69} - \frac{4}{4.69} \right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{65}{4.69} = \frac{13}{4.69}.
 \end{aligned}$$

Bài 26: Tính tổng $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$.

Trích đề HSG cấp Trường năm 2019-2020

Lời giải

$$\begin{aligned}
 S &= 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100 \\
 3S &= (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100).3 \\
 &= 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + \dots + 99.100.3 \\
 &= 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + 99.100.(101-98) \\
 &= 1.2.3 - 1.2.3 + 2.3.4 - 2.3.4 + 3.4.5 - \dots - 98.99.100 + 99.100.101 \\
 S &= 99.100.101 : 3 = 33.100.101 = 333300 \\
 \text{Vậy } S &= 33300.
 \end{aligned}$$

Bài 27: Thực hiện tính:

$$E = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{200}(1+2+\dots+200).$$

Trích đề HSG Huyện Hoài Nhơn năm 2015-2016

Lời giải

Từ $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ được:

$$E = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2.3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3.4}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4.5}{2} + \dots + \frac{1}{200} \cdot \frac{200.201}{2}$$

$$= 1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{201}{2}$$

$$E + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{201}{2} = \frac{1}{2}(1+2+3+\dots+201)$$

$$E = \frac{1}{2}(1+2+3+\dots+201) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{201.202}{2} - \frac{1}{2} = 10150$$

Bài 28: Cho $E = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{200}(1+2+\dots+200)$ và $F = \frac{20300}{3}$.

Tính $\frac{E}{F}$.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Lời giải

Ta có: $E = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{200}(1+2+\dots+200)$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+2).2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+3).3}{2} + \dots + \frac{1}{200} \cdot \frac{(1+200).200}{2}$$

$$= 1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{201}{2}$$

$$= \frac{2+3+4+\dots+201}{2}$$

$$= 10150.$$

$$\text{Do đó } \frac{E}{F} = 10150 \cdot \frac{3}{20300} = \frac{3}{2}$$

Bài 29: Cho $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{48} + \frac{1}{49} + \frac{1}{50}$ và $P = \frac{1}{49} + \frac{2}{48} + \frac{3}{47} + \dots + \frac{48}{2} + \frac{49}{1}$.

Hãy tính $\frac{S}{P}$.

Trích đề HSG Huyện Ngọc Lặc năm 2018-2019

Lời giải

$$P = \frac{1}{49} + \frac{2}{48} + \frac{3}{47} + \dots + \frac{48}{2} + \frac{49}{1}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{49} + 1\right) + \left(\frac{2}{48} + 1\right) + \left(\frac{3}{47} + 1\right) + \dots + \left(\frac{48}{2} + 1\right) + 1 \\
&= \left(\frac{50}{49} + \frac{50}{48} + \frac{50}{47} + \dots + \frac{50}{2}\right) + 1 = \frac{50}{50} + \frac{50}{49} + \frac{50}{48} + \dots + \frac{50}{2} \\
&= 50 \cdot \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{49} + \frac{1}{48} + \dots + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \frac{S}{P} = \frac{\frac{1}{50} + \frac{1}{49} + \frac{1}{48} + \dots + \frac{1}{2}}{50 \cdot \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{49} + \frac{1}{48} + \dots + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{50}$$

Bài 30: Cho $A = \frac{1}{3.8} + \frac{1}{8.13} + \frac{1}{13.18} + \dots + \frac{1}{33.38}$ và $B = \frac{1}{3.10} + \frac{1}{10.17} + \frac{1}{17.24} + \dots + \frac{1}{31.38}$.

Tính tỷ số $\frac{A}{B}$.

Trích đề HSG cấp Trường năm 2019-2020

Lời giải

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{13}\right) + \dots + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{33} - \frac{1}{38}\right) \\
&= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{33} - \frac{1}{38}\right) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{38}\right) \\
B &= \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{17}\right) + \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{24}\right) + \dots + \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{38}\right) \\
&= \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{31} - \frac{1}{38}\right) = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{38}\right) \\
\frac{A}{B} &= \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{7}} = \frac{7}{5}.
\end{aligned}$$

CHỦ ĐỀ: TÍNH TOÁN VỚI SỐ TỰ NHIÊN, SỐ NGUYÊN, PHÂN SỐ**A. PHẦN NỘI DUNG****II. Tìm số chưa biết.****Dạng 1: Tìm số chưa biết (không có lũy thừa).****Bài 1.** Tìm y , biết: $x - y = -2015$; $y - z = -2016$; $z + x = 2017$

- A. $y = -1007$ B. $y = 1007$ C. $y = -1008$ D. $y = 1008$

*Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019***Bài 2.** Cho $x, y \in \mathbb{Z}$. Tìm y , biết: $xy + 5x - 3y = 15$

- A. $y = -3$ B. $y = 3$ C. $y = -5$ D. $y = 5$

*Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019***Bài 3.** Tìm x , biết: $|x - 1| - 5 = -2$

- A. $x \in \{2\}$ B. $x \in \{4\}$ C. $x \in \{-2; 4\}$ D. $x \in \emptyset$

*Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019***Bài 4.** Cho x, y là hai số thỏa mãn: $(x + 2)^2 + |y - 3| = 0$. Tổng hai số $x + y$ bằng:

- A. -5 B. 5 C. 1 D. -1

*Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019***Bài 5.** Tìm x , biết: $\frac{-(x+1)}{4} = \frac{-9}{x+1}$

- A. $x \in \{5\}$ B. $x \in \{-7\}$ C. $x \in \{5; -7\}$ D. $x \in \emptyset$

*Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019***Bài 6.** Tìm x , biết: $\frac{5}{4.3} + \frac{3}{4.11} + \frac{3}{7.11} + \frac{9}{7.23} = \frac{2x}{69}$

- A. $x = 5$ B. $x = 10$ C. $x = 20$ D. $x = 40$

*Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019***Bài 7.** Số tự nhiên x thỏa mãn: $\left(\frac{1}{1 \cdot 51} + \frac{1}{2 \cdot 52} + \frac{1}{3 \cdot 53} + \dots + \frac{1}{10 \cdot 60}\right)x = \frac{1}{1 \cdot 11} + \frac{1}{2 \cdot 12} + \frac{1}{3 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{50 \cdot 60}$ là:

- A. $x = 5$ B. $x = 4$ C. $x = 7$ D. $x = 9$

*Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022***Bài 8:** Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $(2x - 1)(xy + 1) = 6$.*Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022***Lời giải**Ta có: $2x - 1; xy + 1 \in U(6)$; $U(6) = 1.6 = 2.3 = (-1).(-6) = (-2).(-3)$ Do $2x - 1$ là số lẻ nên ta có

$$\text{TH1: } \begin{cases} 2x - 1 = 1 \\ xy + 1 = 6 \end{cases}, \text{ suy ra: } x = 1; y = 5.$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 2x - 1 = -1 \\ xy + 1 = -6 \end{cases}, \text{ suy ra: } x = 0, \text{ với mọi giá trị của } y \text{ (không có giá trị } x, y \text{ thỏa mãn)}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} 2x - 1 = 3 \\ xy + 1 = 2 \end{cases}, \text{ suy ra: } x = 2; y = \frac{1}{2} \text{ (không thỏa mãn điều kiện } x, y \text{ là số nguyên)}$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} 2x-1=-3 \\ xy+1=-2 \end{cases}, \text{ suy ra: } x=-1; y=3$$

Vậy $(x; y) \in \{(1;5);(-1;3)\}$

Bài 9: Tìm số nguyên x biết: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right)x = \frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{8}{2} + \frac{9}{1}$

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right)x = \frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{8}{2} + \frac{9}{1}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right).x = \left(\frac{1}{9} + 1\right) + \left(\frac{2}{8} + 1\right) + \dots + \left(\frac{8}{2} + 1\right) + 1$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right).x = \frac{10}{9} + \frac{10}{8} + \dots + \frac{10}{2} + \frac{10}{10}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right).x = 10 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right)$$

$$x = 10$$

Vậy $x = 10$.

Bài 10: Tìm các cặp số nguyên x, y thỏa mãn: $3xy + 2x - 5y = 6$.

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Lời giải

$$3xy + 2x - 5y = 6$$

$$x(3y+2) - 5y = 6$$

$$3x(3y+2) - 15y = 18$$

$$3x(3y+2) - 15y - 10 = 18 - 10$$

$$3x(3y+2) - 5(3y+2) = 8$$

$$(3x-5).(3y+2) = 8$$

$$3y+2 \in U(8) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$$

Mà $3y+2$ là số chia 3 dư 2 nên $3y+2 \in \{-1; 2; -4; 8\}$

Ta có bảng sau:

$3y+2$	-4	-1	2	8
$3x-5$		-8	4	1
y	-2	-1	0	2
x	1	-1	3	2

Vậy $(x; y) \in \{(1; -2); (-1; -1); (3; 0); (2; 2)\}$.

Bài 11: Tìm x , biết: $\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{8.9}\right).x = \frac{23}{45}$.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{8.9}\right).x = \frac{23}{45}$$

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) \cdot x = \frac{23}{45} - 2$$

$$\frac{8}{9} \cdot x = \frac{23}{45}$$

$$x = \frac{23}{40}$$

Bài 12: Tìm x biết: $x - \frac{20}{11.13} - \frac{20}{13.15} - \dots - \frac{20}{53.55} = \frac{3}{11}$.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021 - 2022

Lời giải

$$x - \frac{20}{11.13} - \frac{20}{13.15} - \dots - \frac{20}{53.55} = \frac{3}{11}$$

$$x - 10 \cdot \left(\frac{2}{11.13} + \frac{2}{13.15} + \dots + \frac{2}{53.55}\right) = \frac{3}{11}$$

$$x - 10 \cdot \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{53} - \frac{1}{55}\right) = \frac{3}{11}$$

$$x - 10 \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{55}\right) = \frac{3}{11}$$

$$x - 10 \cdot \frac{4}{55} = \frac{3}{11}$$

$$x = \frac{3}{11} + \frac{8}{11}$$

$$x = 1$$

Vậy $x = 1$.

Bài 13: Tìm x , biết: $105 - [(2x + 7) - 13] = 25$.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Lời giải

$$105 - [(2x + 7) - 13] = 25$$

$$(2x + 7) - 13 = 105 - 25$$

$$(2x + 7) - 13 = 80$$

$$2x + 7 = 93$$

$$2x = 86$$

$$x = 43$$

Vậy $x = 43$.

Bài 14: Tìm x biết. $\frac{1}{4} : 2x = 1$

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022

Lời giải

$$\frac{1}{4} : 2x = 1$$

$$\frac{1}{8} x = 1$$

$$x = 1 : \frac{1}{8}$$

$$x = 1 \cdot 8 = 8$$

Bài 15: Tìm x biết:

a) $\left(\frac{3x}{7} + 1\right) : (-4) = \frac{-1}{28}$

b) $1+5+9+13+17+\dots+x=4950$

*Trích đề HSG Liên trường năm 2021 -2022***Lời giải**

a) $\left(\frac{3x}{7} + 1\right) : (-4) = \frac{-1}{28}$ suy ra $\frac{3x}{7} = \frac{1}{7} - 1$ suy ra $3x = -6$ suy ra $x = -2$

b) $1+5+9+13+17+\dots+x=4950$

Ta có: $5 = 2 + 3$; $9 = 4 + 5$; $13 = 6 + 7$; $17 = 8 + 9$...Do vậy $x = a + (a+1)$ ($a \in \mathbb{N}$)

Nên $1 + 5 + 9 + 13 + 17 + \dots + x = 1+2+3+4+5+6+7+\dots+a+(a+1) = 4950$

Hay $(a+1)(a+1+1) : 2 = 4950$

$(a+1)(a+2) = 9900 = 99.100$

Suy ra: $a = 98$. Do đó: $x = 98 + (98 + 1) = 197$

Bài 16: Tìm x , biết:

a) $6x(x-5) + 2x(5-3x) = -60$

b) $\frac{x-1}{2022} + \frac{x-2}{2021} = \frac{x-3}{2020} + \frac{x-4}{2019}$

*Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022***Lời giải**

a) $6x(x-5) + 2x(5-3x) = -60$

$6x^2 - 30x + 10x - 6x^2 = -60$

$-20x = -60$

$x = 3$

Vậy $x = 3$

b) $\frac{x-1}{2022} + \frac{x-2}{2021} = \frac{x-3}{2020} + \frac{x-4}{2019}$

$\left(\frac{x-1}{2022} - 1\right) + \left(\frac{x-2}{2021} - 1\right) - \left(\frac{x-3}{2020} - 1\right) - \left(\frac{x-4}{2019} - 1\right) = 0$

$\frac{x-2023}{2022} + \frac{x-2023}{2021} - \frac{x-2023}{2020} - \frac{x-2023}{2019} = 0$

$(x-2023)\left(\frac{1}{2022} + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2020} - \frac{1}{2019}\right) = 0$

Vì $\frac{1}{2022} + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2020} - \frac{1}{2019} \neq 0$

Nên $x-2023=0$ suy ra $x=2023$

Vậy $x=2023$ **Bài 17:** Tìm x , biết $105 - [(2x+7) - 13] = 25$ *Trích đề HSG huyện Chí Linh năm 2021-2022***Lời giải**

$105 - [(2x+7) - 13] = 25$

$105 - [(2x+7) - 13] = 25$

$105 - [(2x+7) - 13] = 5^2$

$(2x+7) - 13 = 105 - 25$

$(2x+7) - 13 = 80$

$2x+7 = 93$

$$2x = 86$$

$$x = 43$$

Bài 18: Tìm các số tự nhiên x, y biết: $2y + 6 = \frac{15-y}{x} \cdot 26$

Trích đề HSG huyện Kỳ Anh năm 2021-2022

Lời giải

Vì $2y + 6 = \frac{15-y}{x}$ nên x phải là số khác 0

$$2y + 6 = \frac{15-y}{x} \Rightarrow 2xy + 6x = 15 - y \Rightarrow 2xy + 6x + y = 15 \Rightarrow 2x(y+3) + (y+3) = 18$$

$$\Rightarrow (2x+1)(y+3) = 18$$

$$\Rightarrow 2x+1 \in U(18) \quad (1) \text{ và } \Rightarrow y+3 = \frac{18}{2x+1}$$

Vì x là số tự nhiên khác 0 thì $2x+1$ là số lẻ lớn hơn 1 (2)

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } \Rightarrow 2x+1 \in \{3; 9\}$$

$2x+1$	3	9
$y+3$	6	2
x	1	4
y	3	//

Vậy cặp số tự nhiên cần tìm là $x=1; y=3$

Bài 19: Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn điều kiện: $\frac{11}{17} < \frac{a}{b} < \frac{23}{29}$ và $8b - 9a = 31$

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Lời giải

$$8b - 9a = 31 \Rightarrow b = \frac{31+9a}{8} = \frac{32-1+8a+a}{8} \in \mathbb{N} \Rightarrow (a-1):8$$

$$\Rightarrow a = 8q + 1 (q \in \mathbb{N})$$

$$b = \frac{31+9(8q+1)}{8} = 9q + 5 \Rightarrow \frac{11}{17} < \frac{8q+1}{9q+5} < \frac{23}{29}$$

$$11(9q+5) < 17(8q+1) \Rightarrow 37q > 38 \Rightarrow q > 1$$

$$29(8q+1) < 23(9q+5) \Rightarrow 25q < 86 \Rightarrow q < 4 \Rightarrow q \in \{2; 3\}$$

$$q=2 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{17}{23}; q=3 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{25}{32}$$

Bài 20: Tìm x biết: $x + |-3| = 0$

Trích đề HSG Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020

Lời giải

Ta có: $|-3| = 3$ nên $x + |-3| = 0 \Rightarrow x = -3$

Bài 21: a) Tìm x , biết: $\frac{x-2}{10} + \frac{x-2}{15} + \frac{x-2}{21} + \frac{x-2}{28} + \frac{x-2}{36} = 20$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) sao cho : $xy + 7x - 3y - 27 = 0$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Lời giải

$$a) \frac{x-2}{10} + \frac{x-2}{15} + \frac{x-2}{21} + \frac{x-2}{28} + \frac{x-2}{36} = 20$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{20} + \frac{x-2}{30} + \frac{x-2}{42} + \frac{x-2}{56} + \frac{x-2}{72} = 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{4.5} + \frac{x-2}{5.6} + \frac{x-2}{6.7} + \frac{x-2}{7.8} + \frac{x-2}{8.9} = 10$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right) = 10$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) = 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{36} \cdot (x-2) = 10$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 72 \Rightarrow x = 74$$

$$b) xy + 7x - 3y - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y+7) - 3(y+7) = 6$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(y+7) = 6$$

$x-3$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
$y+7$	-1	-2	-3	-6	6	3	2	1
x	-3	0	1	2	4	5	6	9
y	-8	-9	-10	-13	-1	-4	-5	-6

Vậy các cặp số nguyên $(x, y) \in \{(-3, -8); (0, -9); (1, -10); (1, -13); (4, -1); (5, -4); (6, -5); (9, -6)\}$

Bài 22: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $2xy - x - y = 2$.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Lời giải

Ta có:

$$2xy - x - y = 2$$

$$4xy - 2x - 2y = 4$$

$$4xy - 2x - 2y + 1 = 5$$

$$2x(2y-1) - (2y-1) = 5$$

$$(2x-1)(2y-1) = 5$$

$2x-1$	1	5	-1	-5
$2y-1$	5	1	-5	-1
x	1	3	0	-2
y	3	1	-2	0

Vậy các cặp số nguyên x, y thỏa mãn là $(1;3), (3;1), (-2;0), (0;-2)$

Bài 23: Tìm số nguyên x , biết:

$$a) 2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7$$

$$b) \frac{x}{6} + \frac{x}{10} + \frac{x}{15} + \frac{x}{21} + \frac{x}{28} + \frac{x}{36} + \frac{x}{45} + \frac{x}{55} + \frac{x}{66} + \frac{x}{78} = \frac{220}{39}$$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Lời giải

$$a) 2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7 \Leftrightarrow 2016 : [25 - (3x + 2)] = 63$$

$$\Leftrightarrow 25 - (3x + 2) = 2016 : 63 \Rightarrow 25 - (3x + 2) = 32$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2 = -7 \Leftrightarrow 3x = -9 \Leftrightarrow x = -3$$

$$b) \frac{x}{6} + \frac{x}{10} + \frac{x}{15} + \frac{x}{21} + \frac{x}{28} + \frac{x}{36} + \frac{x}{45} + \frac{x}{55} + \frac{x}{66} + \frac{x}{78} = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{36} + \frac{1}{45} + \frac{1}{55} + \frac{1}{66} + \frac{1}{78} \right) = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110} + \frac{1}{132} + \frac{1}{156} \right) = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 13} \right) = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} \right) = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{13} \right) = \frac{220}{39} \Rightarrow x = 11$$

Bài 24: Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho $xy - 2x + y + 1 = 0$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Lời giải

$$xy - 2x + y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y - 2) + (y - 2) = -3$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(y - 2) = -3 = 1 \cdot (-3) = (-3) \cdot 1$$

Từ đó suy ra $(x; y) \in \{(0; -1); (-4; 3)\}$

Bài 25: 1) Tìm số tự nhiên x , biết: $(x - 5) \frac{30}{100} = \frac{20x}{100} + 5$.

2) Tìm số tự nhiên a, b, c, d nhỏ nhất sao cho: $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}; \frac{b}{c} = \frac{12}{21}; \frac{c}{d} = \frac{6}{11}$.

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

1) Tìm số tự nhiên x , biết: $(x - 5) \frac{30}{100} = \frac{20x}{100} + 5$.

$$(x - 5) \frac{30}{100} = \frac{20x}{100} + 5$$

$$\Leftrightarrow (x - 5) \cdot \frac{3}{10} = \frac{x}{5} + 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{10}x - \frac{3}{2} = \frac{x}{5} + 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{10}x - \frac{x}{5} = 5 + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{10} = \frac{13}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 65$$

Vậy $x = 65$

2) Tìm số tự nhiên a, b, c, d nhỏ nhất sao cho: $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}; \frac{b}{c} = \frac{12}{21}; \frac{c}{d} = \frac{6}{11}$.

Điều kiện: $a, b, c, d \neq 0$

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{a}{20} = \frac{b}{12}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{12}{21} \Rightarrow \frac{b}{12} = \frac{c}{21}$$

Suy ra $\frac{a}{20} = \frac{b}{12} = \frac{c}{21} \Rightarrow \frac{a}{40} = \frac{b}{24} = \frac{c}{42}$

$$\frac{c}{d} = \frac{6}{11} \Rightarrow \frac{c}{6} = \frac{d}{11} \Rightarrow \frac{c}{42} = \frac{d}{77}$$

Suy ra $\frac{a}{40} = \frac{b}{24} = \frac{c}{42} = \frac{d}{77}$

Vì $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ và là các số nhỏ nhất $\Rightarrow \frac{a}{40} = \frac{b}{24} = \frac{c}{42} = \frac{d}{77} = 1 \Rightarrow a = 40; b = 24; c = 42; d = 77$

Vậy $a = 40; b = 24; c = 42; d = 77$

Bài 26: Tổng của hai số tự nhiên là 102. Nếu thêm chữ số 0 vào bên phải số bé rồi cộng với số lớn ta được tổng mới là 417. Khi đó số lớn là:

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Lời giải

Gọi a là số bé, b là số lớn, ta có

$$a + b = 102; \overline{a0} + b = 10a + b = 417$$

$$\Rightarrow 10a + b - (a + b) = 417 - 102$$

$$\Rightarrow 9a = 315$$

$$\Rightarrow a = 315 : 9 = 35$$

$$\Rightarrow b = 102 - 35 = 67$$

Vậy số lớn là 67

Bài 27: Cho 7 ô liên tiếp sau

	-13		a			-27
--	-----	--	-----	--	--	-----

Biết rằng tổng của ba ô bất kỳ luôn bằng 0. Khi đó giá trị của a là bao nhiêu?

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Lời giải

Gọi các số cần tìm lần lượt là b, c, d, e

b	-13	c	a	d	e	-27
-----	-------	-----	-----	-----	-----	-------

Ta có $b + (-13) + c = 0$ và $-13 + c + a = 0$

Nên $b + (-13) + c = -13 + a + c$

$$\Rightarrow b = a$$

Có $-13 + c + a = c + a + d \Rightarrow d = -13$

Có $-13 + e + (-27) = 0 \Rightarrow e = 40$

Có $a + (-13) + 40 = 0 \Rightarrow a + 27 = 0 \Rightarrow a = -27$

$$\Rightarrow b = -27$$

Có $(-27) + (-13) + c = 0$

$$\Rightarrow -40 + c = 0$$

$$\Rightarrow c = 40$$

Ta có bảng:

-27	-13	40	-27	-13	40	-27
-------	-------	------	-------	-------	------	-------

Bài 28: Trung bình cộng của tử số và mẫu số của một phân số là 68. Cộng thêm vào tử số của phân số đó 4 đơn vị thì ta được phân số mới bằng phân số $\frac{3}{2}$. Phân số lúc đầu là phân số nào?

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Lời giải

Tổng tử số và mẫu số là: $68 \cdot 2 = 136$

Tổng lúc sau: $136 + 4 = 140$

Tử số: $140 : (3 + 2) \cdot 3 - 4 = 80$

Mẫu số: $136 - 80 = 56$

Phân số lúc đầu là $\frac{80}{56}$

Bài 29: Tìm $x; y$ biết:

a) $\frac{-4}{5} - \frac{3}{5} : x = 2$

b) $2xy - x = 14 - 4y$ ($x; y$ là số nguyên)

Trích đề HSG trường THCS Quỳnh Thiện năm 2021 – 2022

Lời giải

a) $\frac{-4}{5} - \frac{3}{5} : x = 2 \Rightarrow \frac{3}{5} : x = \frac{-4}{5} - 2 \Rightarrow \frac{3}{5} : x = \frac{-14}{5} \Rightarrow x = \frac{3}{5} : \frac{-14}{5} \Rightarrow x = \frac{-3}{14}$

b) $2xy - x = 14 - 4y$ (x, y là số nguyên).

$$2xy + 4y - x = 14$$

$$2y(x + 2) - (x + 2) = 14 - 2$$

$$(x + 2)(2y - 1) = 12 \quad (*)$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x + 2 \in \mathbb{Z}$ và $2y - 1 \in \mathbb{Z}$

Do đó từ (*) suy ra $2y - 1 \in U(12)$

Mặt khác $2y - 1$ lẻ nên $2y - 1 \in \{1; -1; 3; -3\} \Rightarrow y \in \{1; 0; 2; -1\}$.

Thay các giá trị của y vào (*) ta có 4 cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn bài toán là: $(1; 0)$; $(-14; 0)$; $(2; 2)$; $(-6; -1)$.

Bài 30: Tìm x , biết:

a) $(19x + 2.5^2) : 14 = (13 - 8)^2 - 4^2$

b) $x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 30) = 1240$

c) $11 - (-53 + x) = 97$

d) $-(x + 84) + 213 = -16$

Trích đề HSG huyện Nông Cống năm 2019-2020

Lời giải

a) $(19x + 2.5^2) : 14 = (13 - 8)^2 - 4^2$

$$\Rightarrow x = \left\{ 14 \cdot \left[(13 - 8)^2 - 4^2 \right] - 2.5^2 \right\} : 19 = 4$$

b) $x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 30) = 1240$

$$\Rightarrow \underbrace{(x + x + x + \dots + x)}_{31 \text{ số hạng } x} + (1 + 2 + \dots + 30) = 1240$$

$$\Rightarrow 31x = 1240 - 31 \cdot 15 \Rightarrow x = \frac{775}{31} = 25$$

c) $11 - (-53 + x) = 97$

$$\Rightarrow x = 11 - 97 - (-53) = -33$$

d) $-(x + 84) + 213 = -16$

$$\Rightarrow -(x + 84) = -16 - 213$$

$$\Rightarrow -(x + 84) = -229$$

$$\Rightarrow x + 84 = 229$$

$$\Rightarrow x = 229 - 84 = 145$$

Bài 31: Tìm số tự nhiên x biết: $2 \cdot \left(\frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{x(x+1)} \right) = \frac{1}{9}$

Trích đề HSG huyện Đoàn Hùng năm 2018-2019

Lời giải

$$2 \cdot \left(\frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{x(x+1)} \right) = \frac{1}{9}$$

$$2.\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{2}{9} - \frac{2}{x+1} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{2}{x+1} = \frac{1}{9} \Rightarrow x+1 = 18 \Rightarrow x = 17$$

Bài 32: Tìm x , biết $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}\right)x = \frac{2012}{1} + \frac{2011}{2} + \frac{2010}{3} + \dots + \frac{2}{2011} + \frac{1}{2012}$

Trích đề HSG huyện Quế Sơn năm 2018-2019

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Biến đổi: } & \frac{2012}{1} + \frac{2011}{2} + \frac{2010}{3} + \dots + \frac{1}{2012} \\ &= \frac{2012}{1} + 1 + \frac{2011}{2} + 1 + \frac{2010}{3} + 1 + \dots + \frac{1}{2012} + 1 + 1 \\ &= \frac{2013}{2} + \frac{2013}{3} + \dots + \frac{2013}{2012} + \frac{2013}{2013} \\ &= 2013.\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}\right) \end{aligned}$$

$$x = 2013.\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}\right) : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}\right) = 2013$$

Bài 33: Tìm x biết rằng $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(x-2)x} = \frac{1011}{2021}$.

Trích đề HSG huyện Trục Ninh năm 2021-2022

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(x-2)x} = \frac{1011}{2021}$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{1011}{2021} \cdot 2$$

$$\frac{x-1}{x} = \frac{2022}{2021} \text{ suy ra } x = -2021$$

Vậy $x = -2021$.

Bài 34: Tìm số nguyên x biết: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right)x = \frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{8}{2} + \frac{9}{1}$

Trích đề HSG huyện Ninh Bình năm 2021-2022

Lời giải

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right)x = \frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{8}{2} + \frac{9}{1}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right).x = \left(\frac{1}{9} + 1\right) + \left(\frac{2}{8} + 1\right) + \dots + \left(\frac{8}{2} + 1\right) + 1$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) \cdot x = \frac{10}{9} + \frac{10}{8} + \dots + \frac{10}{2} + \frac{10}{10}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) \cdot x = 10 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right)$$

$$x = 10$$

Vậy $x = 10$

Bài 35: Tìm x biết: $(2x+5)-17 = -238$.

Trích đề HSG huyện Sóc Sơn năm 2021 – 2022
Lời giải

$$(2x+5)-17 = -238$$

$$2x+5 = -238+17$$

$$2x+5 = -221$$

$$2x = -221-5$$

$$2x = -226$$

$$x = -226:2$$

$$x = -113$$

Vậy $x = -113$.

Bài 36: Tìm x biết:

a) $(2-4+6-8+10-12+\dots+98-100)+x = 1972$.

b) $\frac{2}{(x+1)(x+3)} + \frac{3}{(x+3)(x+6)} + \frac{4}{(x+6)(x+10)} = \frac{x}{(x+1)(x+10)}$.

Trích đề HSG huyện Hà Đông năm 2021 -2022

Lời giải

a) $(2-4+6-8+10-12+\dots+98-100)+x = 1972$

Từ 2 đến 100 có số số hạng là $(100-2):2+1 = 50$ (số hạng).

$$\text{Vậy } (2-4+6-8+10-12+\dots+98-100) = \frac{50 \cdot (-2)}{2} = -50.$$

Do đó: $-50+x = 1972$ suy ra $x = 2022$.

Vậy $x = 2022$.

b) $\frac{2}{(x+1)(x+3)} + \frac{3}{(x+3)(x+6)} + \frac{4}{(x+6)(x+10)} = \frac{x}{(x+1)(x+10)}$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+10} = \frac{x}{(x+1)(x+10)} \quad \text{ĐK: } x \neq \{-1; -3; -6; -10\}$$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+10} = \frac{x}{(x+1)(x+10)}$$

$$\frac{x+10}{(x+1)(x+10)} - \frac{x+1}{(x+1)(x+10)} = \frac{x}{(x+1)(x+10)}$$

$$x+10-x-1 = x$$

$$x = 9 \quad (\text{tm}).$$

Vậy $x = 9$.

Bài 37: Tìm số tự nhiên x biết: $(x+5)+(x+10)+(x+15)+\dots+(x+60) = 450$.

Trích đề HSG huyện Kim Sơn năm 2021 -2022

Lời giải

$$(x+5)+(x+10)+(x+15)+\dots+(x+60)=450 \quad (1)$$

Vế trái (1) có: $(60-5):5+1=12$ dấu ngoặc, nên ta có

$$(x+5)+(x+10)+(x+15)+\dots+(x+60)=450$$

$$\underbrace{(x+x+\dots+x)}_{12 \text{ số hạng } x} + (5+10+15+\dots+60) = 450$$

$$12 \cdot x + \frac{2}{2} = 450$$

$$12x + 390 = 450$$

$$12x = 450 - 390$$

$$12x = 60$$

$$x = 60 : 12$$

$$x = 5$$

Vậy $x = 5$.

Bài 38: Tìm số tự nhiên x thỏa mãn: $2+4+6+8+\dots+2x=110$.

Trích đề HSG huyện Sơn Tây năm 2021 – 2022

Lời giải

Ta có: $2+4+6+8+\dots+2x=110$

$$2 \cdot (1+2+3+\dots+x) = 110$$

$$(1+2+3+\dots+x) = 55$$

$$x(x+1) : 2 = 55$$

$$x(x+1) = 110 = 10 \cdot 11$$

Vì $x(x+1)$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp suy ra $x = 10$.

Vậy $x = 10$.

Bài 39: Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết: $x : \left(9\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = \frac{0,4 + \frac{2}{9} - \frac{2}{11}}{1,6 + \frac{8}{9} - \frac{8}{11}}$.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Lời giải

$$x : \left(9\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = \frac{0,4 + \frac{2}{9} - \frac{2}{11}}{1,6 + \frac{8}{9} - \frac{8}{11}}$$

$$\Rightarrow x : 8 = \frac{0,4 + \frac{2}{9} - \frac{2}{11}}{4 \left(0,4 + \frac{2}{9} - \frac{2}{11}\right)}$$

$$\Rightarrow x : 8 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 2.$$

Vậy $x = 2$

Bài 40: Tìm x , biết: $1 + \left(x - \frac{1}{4}\right) : \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - 3\frac{1}{4}$.

Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Lời giải

$$1 + \left(x - \frac{1}{4}\right) : \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - 3\frac{1}{4}$$

$$1 + \left(x - \frac{1}{4}\right) : \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - \frac{13}{4}$$

$$1 + \left(x - \frac{1}{4}\right) : \frac{3}{2} = -1$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right) : \frac{3}{2} = -1 - 1$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right) : \frac{3}{2} = -2$$

$$x - \frac{1}{4} = -3$$

$$x = \frac{-11}{4} = -2\frac{3}{4}$$

$$\text{Vậy } x = -2\frac{3}{4}$$

Bài 41: Tìm x , biết: $\frac{1}{2} + \frac{5}{6} : x = \frac{1}{3}$.

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Lời giải

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{6} : x = \frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{6} : x = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{6} : x = \frac{-1}{6}$$

$$x = \frac{5}{6} : \frac{-1}{6}$$

$$x = -5$$

$$\text{Vậy } x = -5.$$

Bài 42: Tìm x biết: $x: \frac{1}{3} + \frac{5}{7} = 9\frac{5}{7}$

$$x: \frac{1}{3} + \frac{5}{7} = 9\frac{5}{7}$$

$$x: \frac{1}{3} + \frac{5}{7} = \frac{68}{7}$$

$$x: \frac{1}{3} = \frac{68}{7} - \frac{5}{7}$$

$$x: \frac{1}{3} = 9$$

$$x = 9 \cdot \frac{1}{3}$$

$$x = 3$$

Bài 43: Tìm x biết:

$$1) \frac{2}{3} - 2: \left(x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{10}{3}$$

$$2) x + (x-1) + (x-5) + (x-9) + \dots + (x-101) = -516$$

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Lời giải

$$1) \frac{2}{3} - 2: \left(x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{10}{3}$$

$$2: \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} + \frac{10}{3}$$

$$2: \left(x - \frac{1}{2}\right) = 4$$

$$x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x = 1$$

$$2) x + (x-1) + (x-5) + (x-9) + \dots + (x-101) = -516$$

$$x + 26x - (1+5+9+\dots+101) = -516$$

$$27x - (1+101) \cdot 26 : 2 = -516$$

$$27x - 1326 = -516$$

$$27x = 810$$

$$x = 30$$

Bài 44: Tìm x biết: $x - 35\%x + \frac{8}{5} = -2\frac{19}{20}$

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021-2022

Lời giải

$$x - 35\%x + \frac{8}{5} = -2\frac{19}{20}$$

$$x - \frac{7}{20}x + \frac{8}{5} = \frac{-59}{20}$$

$$\frac{13}{20}x = \frac{-59}{20} - \frac{8}{5}$$

$$\frac{13}{20}x = \frac{-91}{20}$$

$$x = \frac{-91}{20} : \frac{13}{20} = -7$$

Bài 45: Tìm x biết $x : \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} \right) = 100$

Trích đề HSG huyện Tiền Hải năm 2021-2022

Lời giải

$$x : \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} \right) = 100$$

$$x : \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) = 100$$

$$x : \left(1 - \frac{1}{100} \right) = 100$$

$$x : \frac{99}{100} = 100$$

$$x = 99$$

Bài 46: Tìm các số tự nhiên x, y sao cho $(2x+1)(y-5) = 12$.

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015-2016

Lời giải

Ta có $(2x+1)(y-5) = 12$ nên $2x+1; y-5$ là ước của 12.

Mà $12 = 1.12 = 2.6 = 3.4$

Do $2x+1$ lẻ nên $2x+1 = 1$ hoặc $2x+1 = 3$

$2x+1$	1	3
	12	4
x	0	1
y	17	9

Vậy $(x, y) = \{(0; 17); (1; 9)\}$.

Bài 47: Tìm số tự nhiên x , biết: $\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{8.9.10}\right).x = \frac{23}{45}$.

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015-2016

Lời giải

Áp dụng công thức: $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} \right)$ $y-5$

Theo đề bài: $\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{8.9.10}\right).x = \frac{23}{45}$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \frac{2}{3.4.5} + \dots + \frac{2}{8.9.10} \right).x = \frac{23}{45}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{8.9} - \frac{1}{9.10} \right).x = \frac{23}{45}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{90} \right).x = \frac{23}{45}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{45}{90} - \frac{1}{90} \right).x = \frac{23}{45}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{44}{90}.x = \frac{23}{45}$$

$$\frac{11}{45}.x = \frac{23}{45}$$

$$x = \frac{23}{11}$$

Mà x là số tự nhiên.

Vậy không có giá trị của x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 48: Tìm x biết: $\frac{13}{28}x = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{555}{222} + \frac{4444}{12221} + \frac{33333}{244442} + \frac{11}{330} + \frac{13}{60} \right)$

Trích đề HSG huyện Vĩnh Phúc năm 2015-2016

Lời giải

$$\frac{13}{28} \cdot x = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{555}{222} + \frac{4444}{12221} + \frac{33333}{244442} + \frac{11}{330} + \frac{13}{60} \right)$$

$$\frac{13}{28} \cdot x = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{5.111}{2.111} + \frac{4.1111}{11.1111} + \frac{3.11111}{22.11111} + \frac{11}{30.11} + \frac{13}{60} \right)$$

$$\frac{13}{28} \cdot x = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{5}{2} + \frac{4}{11} + \frac{3}{22} + \frac{1}{30} + \frac{13}{60} \right)$$

$$\frac{13}{28} \cdot x = \frac{1}{7} \cdot \left[\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{30} + \frac{13}{60} \right) + \left(\frac{4}{11} + \frac{3}{22} \right) \right]$$

$$\frac{13}{28} \cdot x = \frac{1}{7} \cdot \left[\left(\frac{150}{60} + \frac{2}{60} + \frac{13}{60} \right) + \left(\frac{8}{22} + \frac{3}{22} \right) \right]$$

$$\frac{13}{28} \cdot x = \frac{1}{7} \cdot \left[\frac{165}{60} + \frac{11}{22} \right]$$

$$\frac{13}{28} \cdot x = \frac{1}{7} \cdot \left[\frac{15.11}{15.4} + \frac{11}{11.2} \right]$$

$$\frac{13}{28} \cdot x = \frac{1}{7} \cdot \left[\frac{11}{4} + \frac{1}{2} \right]$$

$$\frac{13}{28} \cdot x = \frac{1}{7} \cdot \left[\frac{11}{4} + \frac{2}{4} \right]$$

$$\frac{13}{28} \cdot x = \frac{1}{7} \cdot \frac{13}{4}$$

$$\frac{13}{28} \cdot x = \frac{13}{28}$$

$$x = \frac{13}{28} : \frac{13}{28}$$

$$x = 1.$$

Vậy $x = 1$.

Bài 49: Tìm x biết: $\frac{-2}{3} \left(x - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3} (2x - 1).$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014-2015

Lời giải

$$\frac{-2}{3} \cdot \left(x - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3} \cdot (2x - 1)$$

$$\frac{-2}{3} x - \left(\frac{-1}{6} \right) = \frac{2}{3} x - \frac{1}{3}$$

$$\frac{-2}{3} x + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} x - \frac{1}{3}$$

$$\frac{-2}{3}x - \frac{2}{3}x = \frac{-1}{3} - \frac{1}{6}$$

$$-x \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{-2}{6} - \frac{1}{6}$$

$$\frac{-4}{3}x = \frac{-1}{2}$$

$$x = \frac{-1}{2} : \frac{-4}{3}$$

$$x = \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{4}$$

$$x = \frac{3}{8}$$

Vậy $x = \frac{3}{8}$.

Bài 50:

Tìm x biết: a) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$;

b) $\frac{-x}{4} = \frac{-9}{x}$.

Trích đề HSG huyện Bạc Liêu năm 2018-2019

Lời giải

a) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$

$$x = -\frac{5}{6} : \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{-10}{9}$$

Vậy $x = \frac{-10}{9}$.

b) $\frac{-x}{4} = \frac{-9}{x}$

$$-x^2 = -36$$

$$x^2 = 36$$

$$x^2 = 6^2$$

$$x = \pm 6$$

Vậy $x = \pm 6$.

Bài 51: Tìm x biết:

$$a) \frac{x-2}{2} = \frac{8}{x-2} \quad (x \neq 2).$$

$$b) \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} + x = 1.$$

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Lời giải

a)

$$\frac{x-2}{2} = \frac{8}{x-2} \quad (x \neq 2)$$

$$(x-2) \cdot (x-2) = 8 \cdot 2$$

$$(x-2)^2 = 16$$

$$(x-2)^2 = 4^2$$

$$x-2 = 4 \text{ hoặc } x-2 = -4$$

$$\text{Với } x-2 = 4$$

$$x = 6$$

$$\text{Với } x-2 = -4$$

$$x = -2.$$

$$\text{Vậy } x \in \{6; -2\}.$$

$$b) \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} + x = 1.$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} + x = 1$$

$$1 - \frac{1}{100} + x = 1.$$

$$x = \frac{1}{100}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{100}.$$

Bài 52: Tìm x là số tự nhiên, biết:

$$a) x : \left(9\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) = \frac{0,4 + \frac{2}{9} - \frac{2}{11}}{1,6 + \frac{8}{9} - \frac{8}{11}};$$

$$b) \frac{x+1}{2} = \frac{8}{x+1}.$$

Trích đề HSG THCS Ái Thượng năm 2021-2022

Lời giải

$$a) x : \left(9\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) = \frac{0,4 + \frac{2}{9} - \frac{2}{11}}{1,6 + \frac{8}{9} - \frac{8}{11}}$$

$$x : 8 = \frac{0,4 + \frac{2}{9} - \frac{2}{11}}{4 \left(0,4 + \frac{2}{9} - \frac{2}{11} \right)}$$

$$x : 8 = \frac{1}{4}$$

$$x = 2$$

Vậy $x = 2$.

$$\text{b) } \frac{x+1}{2} = \frac{8}{x+1}$$

$$(x+1)^2 = 16 = (\pm 4)^2$$

Do đó $x+1=4$ hoặc $x+1=-4$

Với $x+1=4$

$$x = 3$$

Với $x+1=-4$

$$x = -5$$

Do $x \in \mathbb{N}$ nên $x = 3$.

Bài 53: Tìm x biết $\left(\frac{1}{8} + 2\frac{5}{4} - 2,75\right)x - 7 = \left(\frac{3}{2} + 0,65 + \frac{7}{200}\right) : 0,07$.

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2018-2019

Lời giải

$$\left(\frac{1}{8} + 2\frac{5}{4} - 2,75\right)x - 7 = \left(\frac{3}{2} + 0,65 + \frac{7}{200}\right) : 0,07$$

$$\frac{5}{8}x - 7 = \frac{437}{200} : \frac{7}{100}$$

$$\frac{5}{8}x - 7 = \frac{437}{200} \cdot \frac{100}{7}$$

$$\frac{5}{8}x = \frac{437}{14} + 7$$

$$\frac{5}{8}x = \frac{535}{14}$$

$$x = \frac{535}{14} : \frac{5}{8}$$

$$x = 61\frac{1}{7}$$

Vậy $x = 61\frac{1}{7}$.

Bài 54: Tìm x , biết : $\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{8.9.10}\right) \cdot x = \frac{22}{45}$

Trích đề HSG huyện Hoài Nhơn năm 2015-2016

Lời giải

$$\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{8.9.10}\right).x = \frac{22}{45}.$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{8.9} - \frac{1}{9.10}\right).x = \frac{22}{45}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{90}\right).x = \frac{22}{45}$$

$$x = 2$$

Vậy $x = 2$.

Dạng 2: Tìm số chưa biết có chứa lũy thừa.

Trắc nghiệm

Bài 1: Tìm x , biết: $2^x - 15 = 17$.

A. $x = 1$.

B. $x = 5$.

C. $x = 16$.

D. $x = 30$.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: B. $x = 5$.

Bài 2: Tìm x , biết: $2^x - 15 = 17$

A. $x = 1$

B. $x = 5$

C. $x = 16$

D. $x = 30$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 3: Cho $T = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2022}$. Tìm số tự nhiên n , biết $2 \cdot T + 3 = 3^n$. Khi đó n bằng:

A. 2020

B. 2023

C. 2021

D. 2022

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021-2022

Bài 4: Tìm số tự nhiên x , biết a là số nguyên tố chẵn thỏa mãn $a^x = 1024$.

A. $x = 8$

B. $x = 9$

C. $x = 10$

D. $x = 16$

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021 - 2022

Bài 5: Biết x là số tự nhiên thỏa mãn $5 \cdot 3^x - 135 = 0$. Giá trị của $P = 674x - 2021$ bằng

A. -1

B. 2

C. 0

D. 1

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021 - 2022

Bài 6: Biết $(x; y)$ là cặp số thỏa mãn $(x - y - 1)^{2020} + y^{2022} = 0$. Khi đó giá trị của $2022x - y$ bằng:

A. 2019

B. 2020

C. 2021

D. 2022

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021 - 2022

Tự luận

Bài 1: Cho x, y là các số tự nhiên thỏa mãn: $2^x + 5999 = 4y$.

Tính giá trị của biểu thức $D = (x-1)^{2021} + (y-1501)^{2022}$.

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

Lời giải

Ta có $4y$ là số chẵn với y là số tự nhiên mà $2^x + 5999 = 4y$.

Suy ra $2^x + 5999$ là số chẵn mà 5999 là số lẻ nên 2^x là số lẻ nên $x = 0$.

Ta có $4y = 1 + 5999$ suy ra $4y = 6000$ nên $y = 1500$.

$$\text{Vậy } D = (0-1)^{2021} + (1500-1501)^{2022} = -1+1=0.$$

Bài 2: Gọi x là tổng các chữ số của số $a = 3^{2022} + 2021$, gọi y là tổng các chữ số của x và gọi z là tổng các chữ số của y . Tìm z .

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

Lời giải

$$\text{Ta có } a = 3^{2022} + 2021$$

$$a = (3^2)^{1011} + 2021$$

$$a = 9^{1011} + 2021$$

$$a < 10^{1011} + 2021$$

$$a < 10\dots02021.$$

Suy ra a có không quá 1012 chữ số.

Vì x là tổng các chữ số của a nên $x \leq 1012.9$ hay $x \leq 9108$

Suy ra x có không quá 4 chữ số.

Vì y là tổng các chữ số của x nên $y \leq 4.9$ hay $y \leq 36$

Suy ra y có không quá 2 chữ số.

Vì z là tổng các chữ số của y mà $y \leq 36$ nên $z \leq 3+9$ hay $z \leq 12$

Ta có a và x có cùng số dư khi chia cho 9 mà a chia cho 9 dư 5 nên x chia cho 9 dư 5

Lại có y và x có cùng số dư khi chia cho 9 mà x chia cho 9 dư 5 nên y chia cho 9 dư 5

y và z có cùng số dư khi chia cho 9 mà y chia cho 9 dư 5 nên z chia cho 9 dư 5

mà $z \leq 12$ nên $z = 5$.

Vậy $z = 5$.

Bài 3: Tìm x , biết: $(x+1)^2 + (-2)^3 = 28^0$

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Lời giải

$$(x+1)^2 + (-2)^3 = 28^0$$

$$(x+1)^2 - 8 = 1$$

$$(x+1)^2 = 1+8$$

$$(x+1)^2 = 9$$

$$\Rightarrow x+1 = 3 \text{ hoặc } x+1 = -3$$

$$x = 2 \text{ hoặc } x = -4$$

$$\text{Vậy } x \in \{-4; 2\}.$$

Bài 4: Tìm số nguyên x biết: $14.7^{2021} = 35.7^{2021} - 3.49^x$

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Lời giải

$$14.7^{2021} = 35.7^{2021} - 3.49^x$$

$$3.49^x = 35.7^{2021} - 14.7^{2021}$$

$$3.7^{2x} = 7^{2022} \cdot (5-2) = 3.7^{2022}$$

$$7^{2x} = 7^{2022}$$

$$2.x = 2022$$

$$x = 1011$$

Vậy $x = 1011$.

Bài 5: Tìm x biết: $(x-5)^5 = (x-5)^3$.

$$(x-5)^5 = (x-5)^3$$

$$(x-5)^5 - (x-5)^3 = 0$$

$$(x-5)^3 \cdot [(x-5) - 1] = 0$$

$$(x-5)^3 \cdot (x-6) = 0$$

$$\text{TH1: } (x-5)^3 = 0 \Rightarrow x-5=0 \Rightarrow x=5.$$

$$\text{TH2: } x-6=0 \Rightarrow x=6.$$

Vậy $x \in \{5; 6\}$.

Bài 6: Tìm x , biết: $7^x + 7^{x+2} + 7^{x+3} = 2751$

$$7^x + 7^{x+2} + 7^{x+3} = 2751$$

$$7^x + 7^x \cdot 49 + 7^x \cdot 253 = 2751$$

$$7^x (1 + 49 + 253) = 2751$$

$$7^x \cdot 393 = 2751$$

$$7^x = 7$$

$$x = 1$$

Vậy $x = 1$.

Bài 7: Tìm x biết: $\frac{x-1}{2} - \frac{32}{x-1} = 0$

$$\frac{x-1}{2} - \frac{32}{x-1} = 0$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{32}{x-1}$$

$$(x-1)(x-1) = 2 \cdot 32$$

$$(x-1)^2 = 64 = 8^2 = (-8)^2$$

$$\text{Nếu } (x-1)^2 = 8^2$$

$$x-1=8$$

$$x=9$$

$$\text{Nếu } (x-1)^2 = (-8)^2$$

$$x-1=-8$$

$$x=-7$$

Vậy $x \in \{9; -7\}$

Bài 8: Đặt $m = 3^9$. Gọi x là số tự nhiên thỏa mãn $m^m = 3^x$. Tìm số tự nhiên n sao cho $3^n = x$.

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022

Lời giải

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021 - 2022

Lời giải

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Lời giải

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022

Lời giải

Ta có $m^m = 3^x$ suy ra $(3^9)^m = 3^x$ suy ra $3^{9m} = 3^x$

$9m = x$ suy ra $9 \cdot 3^9 = x$ suy ra $3^{11} = x$

Để $3^n = x$ mà $3^{11} = x$ nên $n = 11$

Bài 9: Tìm x biết $(2x+1)^2 - 9 = 0$

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022

Lời giải

$$(2x+1)^2 = 9 = 3^2 = (-3)^2$$

Với $2x+1=3$

Thì $x=1$

Với $2x+1=-3$

Thì $x=-2$

Vậy $x \in \{1; -2\}$

Bài 10: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện $2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Lời giải

$$\text{Đặt } S = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^n \Rightarrow S = 2^{n+1}$$

Ta có: $2 \cdot S = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^5 + \dots + n \cdot 2^{n+1}$.

$$\text{Suy ra: } S = 2S - S = (2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^5 + \dots + n \cdot 2^{n+1}) - (2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^n)$$

$$S = n \cdot 2^{n+1} - 2^3 - (2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n)$$

Đặt $P = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n$, ta tính được $P = 2P - P = 2^{n+1} - 2^3$

$$\Rightarrow S = n \cdot 2^{n+1} - 2^3 - 2^{n+1} + 2^3 = (n-1) \cdot 2^{n+1}$$

Do đó $(n-1) \cdot 2^{n+1} = 2^{n+1} \Rightarrow n-1 = 2^{10} \Rightarrow n = 2^{10} + 1 = 1025$. Vậy $n = 1025$

Bài 11: Tìm các số tự nhiên x, y sao cho: $7^x + 12^y = 50$

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Lời giải

Ta có: $12^2 = 144 > 50$ và $y \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq y \leq 1 \Rightarrow y \in \{0; 1\}$

$7^3 > 50$ và $x \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$

Với $y=1 \Rightarrow 7^x + 12^1 = 50 \Rightarrow 7^x = 38$ (ktm)

Với $y=0 \Rightarrow 7^x + 12^0 = 50 \Rightarrow 7^x = 49 \Rightarrow x=2$

Vậy $x=2, y=0$

Bài 12: Tìm x biết: $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Lời giải

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$$

$$\Leftrightarrow 2^x \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3) = 480$$

$$\Leftrightarrow 2^x \cdot 15 = 480 \Rightarrow 2^x = 32 = 2^5$$

$$\Rightarrow x = 5$$

Bài 13: Tìm số nguyên x biết: $(2x-15)^5 = (2x-15)^3$.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Lời giải

$$\text{TH1: } 2x - 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{15}{2}$$

$$\text{TH2: } 2x - 15 = 1 \Rightarrow x = 8$$

Bài 14: a) Tìm x biết: $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$

b) Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ biết: $2^x + 624 = 5^y$

Trích đề HSG trường Nguyễn Khuyến năm 2020 - 2021

Lời giải

a) Từ giả thiết ta có: $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} = \left(\pm \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{6} \\ x = -\frac{1}{6} \end{cases}$

b) Nếu $x = 0$ thì $5^y = 2^0 + 624 = 625 = 5^4 \Rightarrow y = 4 (y \in \mathbb{N})$

Nếu $x \neq 0$ thì vế trái là số chẵn, vế phải là số lẻ nên vô lý

Vậy $x = 0, y = 4$

Bài 15: Cho số nguyên a lớn hơn 32. Hỏi tồn tại hay không số tự nhiên k thỏa mãn $k < a^{41}$ mà có ít nhất 61 chữ số 0 ở tận cùng?

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

Có $a > 32, (a \in \mathbb{Z})$

$$\Rightarrow a^{41} > 32^{41}$$

Lại có: $32^{41} = 32 \cdot 32^{40} = 32 \cdot (32^2)^{20} = 32 \cdot 1024^{20} > 32 \cdot 1000^{20} = 32 \cdot 10^{60} > 10^{61}$ (có 61 chữ số 0 tận cùng).

Suy ra $a^{41} > 10^{61}$

Với $k < a^{41}$ thì có tồn tại số k thỏa mãn đề bài.

Bài 16: Tìm x biết: $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$

Trích đề HSG huyện Quế Sơn năm 2018-2019

Lời giải

$$2^x + 2 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x + 8 \cdot 2^x = 480$$

$$15 \cdot 2^x = 480 \Rightarrow 2^x = 480 : 15 = 32 = 2^5$$

$$\Rightarrow x = 5$$

Bài 17: Tìm $x; y$ biết:

a) $2^3 \cdot 3^2 - (x - 13) = -15 + 2022^0$;

b) $x^2 + 357 = y^2$ ($x; y$ là số nguyên tố)

Trích đề HSG trường THCS Quỳnh Thiện năm 2021 - 2022

a) $2^3 \cdot 3^2 - (x - 13) = -15 + 2022^0 \Rightarrow 8 \cdot 9 - (x - 13) = -15 + 1$

$$\Rightarrow x - 13 = 72 - (-14) \Rightarrow x = 86 + 13 \Rightarrow x = 99$$

b) $x^2 + 357 = y^2$ (1) ($x; y$ là số nguyên tố)

Từ (1) suy ra $y^2 > 375 \Rightarrow y$ là số nguyên tố lớn hơn 2 $\Rightarrow y$ là số lẻ

$\Rightarrow x^2$ chẵn, mà x là số nguyên tố suy ra $x = 2$.

Thay $x = 2$ vào (1) ta có: $4 + 357 = y^2 \Rightarrow y^2 = 361$

$\Rightarrow y^2 = 19^2 = (-19)^2$ mà y là số nguyên tố $\Rightarrow y = 19$

Vậy 2 số nguyên tố cần tìm là: $x = 2; y = 19$

Bài 18: Cho $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2022} + 5^{2023}$. Tìm số tự nhiên n , biết rằng: $4M + 5 = 25.5^n$

Trích đề HSG trường THCS Quỳnh Thiện năm 2021 – 2022

Lời giải

$$M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2023}$$

$$5M = 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2024}$$

$$5M - M = \dots = 5^{2024} - 5$$

$$4M + 5 = 5^{2024}$$

Mà theo bài ra ta có: $4M + 5 = 25.5^n$

$$25.5^n = 5^{2024}$$

$$5^2.5^n = 5^{2024}$$

$$5^{n+2} = 5^{2024}$$

$$n + 2 = 2024 \Rightarrow n = 2022.$$

Bài 19: Tìm số tự nhiên x biết: $7.2 + 288 : (x - 5)^2 = 2^4$.

Lời giải

$$7.2 + 288 : (x - 5)^2 = 2^4 \Rightarrow (x - 5)^2 = 144 = 12^2 = (-12)^2$$

$$\text{TH1: } x - 5 = 12 \text{ suy ra } x = 17 \text{ (tm)}$$

$$\text{TH2: } x - 5 = -12 \text{ suy ra } x = -7 \text{ (ktm)}$$

Vậy $x = 17$.

Bài 20: $x = 3$.

a) Tìm x biết $(3x + 1)^2 = 100$.

b) Tìm x là số tự nhiên, biết $5^{2x+3} - 2.5^2 = 5^2.3$.

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2021 -2022

Lời giải

a) Ta có: $(3x + 1)^2 = 100$ suy ra $(3x + 1)^2 = 10^2$ (Do $3x + 1 > 0$) suy ra $3x + 1 = 10$ suy ra

Vậy $x = 3$.

b) Ta có: $5^{2x+3} - 2.5^2 = 5^2.3$ suy ra $5^{2x+3} = 5^2.3 + 2.5^2$ suy ra $5^{2x+3} = 5^2.5$ suy ra $5^{2x+3} = 5^3$ suy ra

$$2x + 3 = 3 \text{ suy ra } x = 0.$$

Vậy $x = 0$.

Bài 21: Tìm số nguyên x biết: $14.7^{2021} = 35.7^{2021} - 3.49^x$

Trích đề HSG huyện Tân Kỳ năm 2021 – 2022**Lời giải**

$$14.7^{2021} = 35.7^{2021} - 3.49^x$$

$$3.49^x = 35.7^{2021} - 14.7^{2021}$$

$$3.7^{2x} = 7^{2022} \cdot (5 - 2) = 3.7^{2022}$$

$$7^{2x} = 7^{2022}$$

$$2.x = 2022$$

$$x = 1011.$$

Vậy $x = 1011$.

Bài 22: Tìm x biết: $(6 - 2x)^3 = 3^3 \cdot 5^2 + 325$.

Trích đề HSG huyện Hà Đông năm 2021 -2022**Lời giải**

$$(6 - 2x)^3 = 3^3 \cdot 5^2 + 325$$

$$(6 - 2x)^3 = 27 \cdot 25 + 325$$

$$(6 - 2x)^3 = 675 + 325$$

$$(6 - 2x)^3 = 1000$$

$$(6 - 2x)^3 = 10^3$$

$$6 - 2x = 10$$

$$x = -2.$$

Vậy $x = -2$.

Bài 23: Tìm số tự nhiên x biết: $8.6 + 288 : (x - 3)^2 = 50$.

Trích đề HSG huyện Hoàng Hoá năm 2018-2019**Lời giải**

$$8.6 + 288 : (x - 3)^2 = 50$$

$$(x - 3)^2 = 144 = 12^2 = (-12)^2$$

$$\text{TH1: } x - 3 = 12 \text{ suy ra } x = 15 \text{ (tm).}$$

$$\text{TH2: } x - 3 = -12 \text{ suy ra } x = -9 \text{ (ktm).}$$

Vậy $x = 15$.

Bài 24: Tìm x biết:

$$\text{a) } [(3x - 54) \cdot 8] : 4 = 18$$

$$\text{b) } (2x - 15)^5 = (2x - 15)^3$$

$$\text{c) } x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 2013) = 2035147$$

Trích đề HSG huyện Vĩnh lộc năm 2017 - 2018**Lời giải**

$$\text{a) } [(3x - 54) \cdot 8] : 4 = 18$$

$$(3x - 54) \cdot 8 = 72$$

$$3x - 54 = 9$$

$$3x = 63$$

$$x = 63 : 3$$

$$x = 21.$$

Vậy $x = 21$.

$$b) (2x-15)^5 = (2x-15)^3$$

$$(2x-15)^5 - (2x-15)^3 = 0$$

$$(2x-15)^3 \cdot [(2x-15)^2 - 1] = 0$$

$$\text{TH1: } (2x-15)^3 = 0$$

$$2x-15=0$$

$$x = 7,5$$

$$\text{TH2: } (2x-15)^2 - 1 = 0$$

$$(2x-15)^2 = 1^2 = (-1)^2$$

Suy ra $2x-15=1$ hoặc $2x-15=-1$

Suy ra $x=8$ hoặc $x=7$.

Vậy $x \in \{7; 7,5; 8\}$.

$$c) x + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+2013) = 2035147$$

$$2014x + (1+2+3+\dots+2013) = 2035147$$

$$2014x + 2027091 = 2035147$$

$$2014x = 8056$$

$$x = 8056 : 2014$$

$$x = 4$$

Vậy $x = 4$.

Bài 25: Tìm số tự nhiên x , biết: $5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} = \underbrace{1000\dots0}_{18 \text{ chữ số } 0} : 2^{18}$

18 chữ số 0

Trích đề HSG huyện Tam Dương năm 2017-2018

Lời giải

Ta có: $5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} = \underbrace{1000\dots0}_{18 \text{ chữ số } 0} : 2^{18}$ suy ra $5^{x+x+1+x+2} = 10^{18} : 2^{18}$ suy ra $5^{3x+3} = \frac{10^{18}}{2^{18}} = \left(\frac{10}{2}\right)^{18} = 5^{18}$

Suy ra $3x+3 = 18$ suy ra $x=5$.

Vậy $x = 5$.

Bài 26: Tìm số tự nhiên x , biết:

$$a) 5^x = 125$$

$$b) 3^{2x} = 81$$

$$c) 5^{2x-3} - 2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 3 \quad x = 2.$$

Trích đề HSG huyện Duy Xuyên năm 2019 - 2020

Lời giải

$$a) 5^x = 125 = 5^3 \text{ suy ra } x = 3.$$

Vậy $x = 3$.

$$b) 3^{2x} = 81 = 3^4 \text{ suy ra } 2x = 4 \text{ suy ra}$$

Vậy $x = 2$.

$$c) 5^{2x-3} - 2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 3$$

$$5^{2x-3} = 5^2 \cdot 3 + 5^2 \cdot 2$$

$$5^{2x-3} = 5^2(3+2) = 5^3$$

$$2x - 3 = 3$$

$$2x = 6$$

$$x = 6 : 2 = 3.$$

Vậy $x = 3$.

Bài 27: Tìm số nguyên x biết: $2^x \cdot 2^{x+1} \cdot 2^{x+2} = \underbrace{1000\dots0}_{18 \text{ chữ số } 0} : 5^{18}$

18 chữ số 0

huyện Giao Thủy năm 2018 - 2019

Lời giải

$$2^x \cdot 2^{x+1} \cdot 2^{x+2} = \underbrace{1000\dots0}_{18 \text{ chữ số } 0} : 5^{18} \text{ suy ra } 2^{3x+3} = 10^{18} : 5^{18} = 2^{18} \text{ suy ra } 3x+3=18 \text{ suy ra } x=5.$$

Vậy $x = 5$.

Bài 28: Tìm số nguyên x biết:

$$1) 2024 : [25 - (3x + 2)] = 2^3 \cdot 11$$

$$2) \frac{1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100}{x^2 + (x^2 + 1) + (x^2 + 2) + \dots + (x^2 + 99)} = 50 \frac{116}{131}$$

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Lời giải

$$1) 2024 : [25 - (3x + 2)] = 2^3 \cdot 11$$

$$2024 : [25 - (3x + 2)] = 88$$

$$25 - (3x + 2) = 2024 : 88 = 23$$

$$3x + 2 = 25 - 23 = 2$$

$$3x = 2 - 2 = 0$$

$$x = 0.$$

Vậy $x = 0$.

$$2) \text{Đặt } A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$$

$$3A = 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + 99.100.(101-98)$$

$$3A = 1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + \dots + 99.100.101 - 98.99.100$$

$$3A = 99.100.101$$

$$A = 333300.$$

$$\text{Đặt } B = x^2 + (x^2 + 1) + (x^2 + 2) + \dots + (x^2 + 99) = 100x^2 + (1 + 2 + 3 + \dots + 99)$$

$$B = 100x^2 + 4950$$

$$\frac{1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100}{x^2 + (x^2 + 1) + (x^2 + 2) + \dots + (x^2 + 99)} = \frac{333300}{100x^2 + 4950}$$

$$\frac{333300}{100x^2 + 4950} = 50 \frac{116}{131} = \frac{6666}{131} \Rightarrow \frac{50}{100x^2 + 4950} = \frac{1}{131}$$

$$100x^2 + 4950 = 50.131.$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4 \text{ hoặc } x = -4.$$

Vậy $x \in \{-4; 4\}$.

Bài 29: Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết: $(2x-15)^5 = (2x-15)^3$.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} (2x-15)^5 &= (2x-15)^3 \\ \Rightarrow (2x-15)^5 - (2x-15)^3 &= 0 \\ \Rightarrow (2x-15)^3 \cdot (2x-15)^2 - (2x-15)^3 \cdot 1 &= 0 \\ \Rightarrow (2x-15)^3 \cdot [(2x-15)^2 - 1] &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} (2x-15)^3 = 0 \\ (2x-15)^2 - 1 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2x-15 = 0 \\ (2x-15)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-15 = 0 \\ 2x-15 = 1 \\ 2x-15 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7,5 \\ x = 8 \\ x = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x = 7$ hoặc $x = 8$

Vậy $x \in \{7; 8\}$.

Bài 30: Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết: $3 \cdot 2^{x+2} - 2^{x-1} = 7 \cdot 4^{1011} + 9 \cdot 2^{2021}$.

Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^{x+2} - 2^{x-1} &= 7 \cdot 4^{1011} + 9 \cdot 2^{2021} \\ \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{x-1} \cdot 2^3 - 2^{x-1} &= 2^{2021} \cdot (7 \cdot 2 + 3^2) \\ \Leftrightarrow 2^{x-1} \cdot (3 \cdot 2^3 - 1) &= 2^{2021} \cdot 23 \\ \Leftrightarrow 2^{x-1} \cdot 23 &= 2^{2021} \cdot 23 \\ \Leftrightarrow 2^{x-1} &= 2^{2021} \end{aligned}$$

Do cơ số $2 > 1$ nên $x-1 = 2021 \Leftrightarrow x = 2022$ (thỏa mãn).

Vậy $x = 2022$.

Bài 31: Tìm x , biết: $35 \cdot 7^{2021} - 3 \cdot 49^x = 14 \cdot 7^{2021}$.

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Lời giải

$$\begin{aligned} 14 \cdot 7^{2021} &= 35 \cdot 7^{2021} - 3 \cdot 49^x \\ 3 \cdot 49^x &= 35 \cdot 7^{2021} - 14 \cdot 7^{2021} \\ 3 \cdot 7^{2x} &= 7^{2021} \cdot (35 - 14) \\ 3 \cdot 7^{2x} &= 3 \cdot 7^{2021} \\ 7^{2x} &= 7^{2021} \end{aligned}$$

$$2x = 2022$$

$$x = 2022 : 2$$

$$x = 1011$$

Vậy $x = 1011$.

Bài 32: Tìm x biết: $(-4) + (x+7)^2 = 12$

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Lời giải

$$(-4) + (x+7)^2 = 12$$

$$(x+7)^2 = 12 + 4$$

$$(x+7)^2 = 16$$

$$x+7 = \pm 4$$

$$\begin{cases} x+7 = 4 \\ x+7 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -11 \end{cases}$$

Bài 33: Tìm x biết:

$$1) 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480 \text{ (với } x \in \mathbb{N})$$

$$2) \left(2x - \frac{1}{2}\right)^{2022} = \left(2x - \frac{1}{2}\right)^{2021}$$

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Lời giải

$$1) 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$$

$$2^x + 2 \cdot 2^x + 2^2 \cdot 2^x + 2^3 \cdot 2^x = 480$$

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3) \cdot 2^x = 480$$

$$15 \cdot 2^x = 480$$

$$2^x = 32$$

$$2^x = 2^5$$

$$x = 5$$

$$2) \left(2x - \frac{1}{2}\right)^{2022} = \left(2x - \frac{1}{2}\right)^{2021}$$

$$\text{TH1: } 2x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\text{TH2: } 2x - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

Bài 34: Tìm các cặp số tự nhiên x, y thỏa mãn $5^x + 11^y = 26$

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Lời giải

Vì x, y là các số tự nhiên: $5^x + 11^y = 26 \Rightarrow x, y \geq 0$

+ Với $y \geq 2$ thì $5^x + 11^y \geq 11^2 > 26 \Rightarrow y \geq 2$ không thỏa mãn đề bài.

+ Với $y = 0$, ta có $5^x + 11^0 = 26$

$$\Rightarrow 5^x = 26 - 1$$

$$\Rightarrow 5^x = 5^2$$

$$\Rightarrow x = 2$$

+ Với $y = 1$, ta có $5^x + 11^1 = 26$

$$\Rightarrow 5^x + 11 = 26$$

$$\Rightarrow 5^x = 26 - 11$$

$$\Rightarrow 5^x = 15 \text{ (loại vì } x \text{ là số tự nhiên)}$$

Vậy $x = 2; y = 0$ thỏa mãn.

Bài 35: Tìm x biết:

a) $4.3^x - 34 = 2022^0 + 1^{2022}$;

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021-2022

Lời giải

$$4.3^x - 34 = 2022^0 + 1^{2022}$$

$$4.3^x - 34 = 2$$

$$4.3^x = 36$$

$$3^x = 9$$

$$3^x = 3^2$$

Vậy $x = 2$

Bài 36: Tìm x biết: $(x-1)^3 = -64$

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Lời giải

$$(x-1)^3 = -64$$

$$(x-1)^3 = (-4)^3$$

$$x-1 = -4$$

$$x = -4 + 1$$

$$x = -3$$

Bài 37: Cho các số $(x; y)$ thỏa mãn: $(x-2)^4 + (y-x+1)^6 = 0$

Tính giá trị của biểu thức: $C = 2x^3 + 15y^3 - 11$

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Lời giải

$$(x-2)^4 \geq 0; (y-x+1)^6 \geq 0 \quad \forall x, y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-2)^4 = 0 \\ (y-x+1)^6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Thay $x = 2; y = 1$ vào biểu thức C ta có $C = 2.2^3 + 15.1^3 - 11 = 20$

Bài 38: Tìm $x; y \in N$ biết: $73 - x^2 = 4(y-5)^2$

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Lời giải

$$73 - x^2 = 4(y-5)^2$$

$$\text{Vì } x^2 \geq 0 \text{ và } 4(y-5)^2 \geq 0. \quad \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 73 \quad (1)$$

$$\text{Mà } 73 - x^2 = 4(y-5)^2 \text{ suy ra } 73 - x^2 \text{ chẵn suy ra } x^2 \text{ lẻ} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } x^2 \in \{1; 9; 25; 49\} \quad (3)$$

$$\text{Lại có } 73 - x^2 = 4(y-5)^2 \text{ suy ra } \frac{73-x^2}{4} = (y-5)^2$$

$$\text{Hay } \frac{73-x^2}{4} \text{ là số chính phương} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) } x^2 = 9 \Rightarrow (y-5)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} y-5 = 4 \\ y-5 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 9 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vì } x; y \in N \text{ nên các cặp } (x; y) \text{ cần tìm là } (3; 9); (3; 1)$$

Bài 39: Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $(x-1)^2 + 5y^2 = 6$.

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2021-2022

Lời giải

$$(x-1)^2 + 5y^2 = 6 \quad (1)$$

$$\text{Từ (1) suy ra } 5y^2 \leq 6 \Rightarrow y^2 \leq \frac{6}{5}$$

$$\text{Mà } y^2 \text{ là số chính phương nên } y^2 \in \{0; 1\}$$

+ Với $y^2 = 0$ ta có $(x-1)^2 = 6$ (vô lí vì 6 không là số chính phương)

+ Với $y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=-1 \end{cases}$ ta có $(x-1)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ x-1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=0 \end{cases}$

Vậy $(x, y) \in \{(2;1), (2;-1); (0;1); (0;-1)\}$

Bài 40: Tìm $x, y \in \mathbb{N}$, biết $2^x + 624 = 5^y$.

Trích đề HSG huyện Diêm Châu năm 2015-2016

Lời giải

Nếu $x=0$ thì $2^0 + 624 = 5^y$

$$625 = 5^y$$

$$5^y = 5^4$$

$$y = 4$$

Nếu $x \neq 0$ thì 2^x là số chẵn $\Rightarrow 2^x + 624$ là số chẵn

Mà 5 là số lẻ nên 5^y là số lẻ

Với $x, y \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$ thì $2^x + 624 \neq 5^y$

Vậy $x=0; y=4$.

Bài 41: Tìm 2 số tự nhiên A và B biết rằng A có n ước số tự nhiên là a_1, a_2, \dots, a_n và B có m ước số tự nhiên là b_1, b_2, \dots, b_m thỏa mãn $a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot \dots \cdot a_n^2 = 729$ và $b_1^2 \cdot b_2^2 \cdot \dots \cdot b_m^2 = 1296$.

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015-2016

Lời giải

Từ $a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot \dots \cdot a_n^2 = 729$ suy ra $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 27$.

Giả sử $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Khi đó $a_n = A$ và $a_n : a_1, a_n : a_2, \dots, a_n : a_{n-1}$

Mặt khác $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 27 = 1 \cdot 3 \cdot 9$ nên $a_n = 9$. Từ đó $A = 9$

Lại có $b_1^2 \cdot b_2^2 \cdot \dots \cdot b_m^2 = 1296 = 36^2$, suy ra $b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_m = 36$.

Giả sử $b_1 < b_2 < \dots < b_m$. Khi đó $b_m = B$ và $b_m : b_1, b_m : b_2, \dots, b_m : b_{m-1}$.

Vì $b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_m = 36 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6$ nên $b_m = 6$ hay $B = 6$.

Vậy $A = 9; B = 6$.

Bài 42: Tìm x biết:

a) $(4x-15)^{2016} = (4x-15)^{2015}$

b) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} - 480 = 0$.

c) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn : $x^4 - 7^y = 2014$

Trích đề HSG huyện Vĩnh Tường năm 2015-2016

Lời giải

$$a) (4x-15)^{2016} = (4x-15)^{2015}$$

$$(4x-15)^{2016} - (4x-15)^{2015} = 0$$

$$(4x-15)^{2015} \cdot [(4x-15) - 1] = 0$$

$$\text{Nên } (4x-15)^{2015} = 0 \text{ hoặc } (4x-15) - 1 = 0$$

$$\text{Với } (4x-15)^{2015} = 0$$

$$4x - 15 = 0$$

$$x = \frac{15}{4}$$

$$\text{Với } (4x-15) - 1 = 0$$

$$4x - 15 - 1 = 0$$

$$x = 4$$

$$\text{Vậy } x = \frac{15}{4}; x = 4$$

$$b) 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} - 480 = 0$$

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$$

$$2^x + 2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^3 = 480$$

$$2^x (1 + 2 + 2^2 + 2^3) = 480$$

$$2^x (1 + 2 + 4 + 8) = 480$$

$$2^x \cdot 15 = 480$$

$$2^x = 480 : 15$$

$$2^x = 32$$

$$2^x = 2^5$$

$$x = 5$$

$$\text{Vậy } x = 5.$$

c) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn : $x^4 - 7^y = 2014$

Ta có 2014 chia 7 dư 5

$7y$ chia hết cho 7

$x^4 : 7$ dư 5

Lại có : x chia 7 có thể dư $0; \pm 1; \pm 2; \pm 3$.

x^4 chia 7 có thể dư $0, 1, 16, 81$ tức $0; 1; 2; 4$. Vậy không tồn tại x^4 chia 7 dư 5.

Bài 43: Tìm x biết: $\frac{1}{5}.2^x + \frac{1}{3}.2^{x+1} = \frac{1}{5}.2^7 + \frac{1}{3}.2^8$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014-2015

Lời giải

$$\frac{1}{5}.2^x + \frac{1}{3}.2^{x+1} = \frac{1}{5}.2^7 + \frac{1}{3}.2^8$$

$$\frac{1}{5}.2^x + \frac{2}{3}.2^x = \frac{1}{5}.2^7 + \frac{2}{3}.2^7$$

$$\frac{13}{5}.2^x = \frac{13}{5}.2^7$$

$$2^x = 2^7$$

$$x = 7$$

Vậy $x = 7$.

Bài 44: Tìm x, y, z biết: $(x - y^2 + z)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 0$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014-2015

Lời giải

Ta có :

$$\forall (x - y^2 + z)^2 \geq 0 \quad \forall x, y, z; \quad (y - 2)^2 \geq 0 \quad \forall y; \quad (z + 3)^2 \geq 0 \quad \forall z$$

$$\text{Nên } (x - y^2 + z)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 0 \text{ thì } (x - y^2 + z)^2 = 0; (y - 2)^2 = 0; (z + 3)^2 = 0$$

$$\begin{cases} x - y^2 + z = 0 \\ y - 2 = 0 \\ z + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 4 - 3 = 0 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

Vậy $x = 7; y = 2; z = -3$.

Bài 45: Tìm x biết:

$$5^{2x-3} - 3.5^2 = 5^2.2$$

Trích đề HSG huyện Anh Sơn năm 2018-2019

Lời giải

$$5^{2x-3} - 3.5^2 = 5^2.2$$

$$5^{2x-3} = 5^2.2 + 3.5^2$$

$$5^{2x-3} = 5^3$$

$$2x - 3 = 3$$

$$x = 3$$

Vậy $x = 3$.

Bài 46: Tìm số tự nhiên x , biết: $5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} = \underbrace{1\,000\dots0}_{18\text{..chu..so..0}} : 2^{18}$.

Trích đề HSG huyện Anh Sơn năm 2018-2019

Lời giải

Ta có:

$$5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} = \underbrace{1\,000\dots0}_{18\text{..chu..so..0}} : 2^{18}$$

$$5^{x+x+1+x+2} = 10^{18} : 2^{18}$$

$$5^{3x+3} = 5^{18} \cdot 2^{18} : 2^{18}$$

$$5^{3x+3} = 5^{18}$$

$$3x + 3 = 18$$

$$x = 5$$

Vậy $x = 5$

Bài 47: Tìm số nguyên x biết: $(2x-15)^5 = (2x-15)^3$.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Lời giải

$$\text{Ta có } (2x-15)^5 = (2x-15)^3$$

$$(2x-15)^5 - (2x-15)^3 = 0$$

$$(2x-15)^3 \cdot (2x-15)^2 - (2x-15)^3 = 0$$

$$(2x-15)^3 \cdot [(2x-15)^2 - 1] = 0$$

$$\text{TH1: } (2x-15)^3 = 0$$

$$2x - 15 = 0$$

$$2x = 15$$

$$x = \frac{15}{2} \text{ (loại)}$$

$$\text{TH2: } (2x-15)^2 - 1 = 0$$

$$(2x-15)^2 = 1$$

Suy ra $2x - 15 = 1$ hoặc $2x - 15 = -1$

Với $2x - 15 = 1$

$$2x = 16$$

$$x = 8$$

Với $2x - 15 = -1$

$$2x = 14$$

$$x = 7$$

Vậy $x \in \{7; 8\}$.

Bài 48: Tìm x biết: $1 - \left(x - 4\frac{1}{2}\right) : \frac{25}{22} = (-2022)^0 - \frac{11}{5}$.

Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Lời giải

$$1 - \left(x - 4\frac{1}{2}\right) : \frac{25}{22} = (-2022)^0 - \frac{11}{5}$$

$$1 - \left(x - \frac{9}{2}\right) \cdot \frac{22}{25} = 1 - \frac{11}{5}$$

$$\left(x - \frac{9}{2}\right) \cdot \frac{22}{25} = \frac{11}{5}$$

$$x - \frac{9}{2} = \frac{11}{5} \cdot \frac{25}{22}$$

$$x - \frac{9}{2} = \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{5}{2} + \frac{9}{2}$$

$$x = 7$$

Vậy $x = 7$.

Bài 49: Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2010}$. Tìm x để $2A + 3 = 3^x$.

Trích đề HSG cấp Trường năm 2019-2020

Lời giải

$$A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2010}$$

$$3A = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2011}$$

$$2A = 3^{2011} - 3$$

$$A = \frac{3^{2011} - 3}{2}$$

Mà $2A + 3 = 3^x$

$$3^{2011} - 3 + 3 = 3^x$$

$$x = 2011$$

Vậy $x = 2011$

Bài 50: Tìm các số tự nhiên x, y biết: $2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x$

Trích đề HSG Trường THCS Ái Thượng năm 2021-2022

Lời giải

$$2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x$$

$$2^{x+1} \cdot 3^y = (4 \cdot 3)^x = 2^{2x} \cdot 3^x$$

$$\frac{2^{2x}}{2^{x+1}} = \frac{3^y}{3^x}$$

$$2^{x-1} = 3^{y-x}$$

Nhận thấy : $(2; 3) = 1$

$$x - 1 = y - x = 0$$

$$x = y = 1$$

Bài 51: Tìm các số tự nhiên x, y sao cho: $5^x + 12^y = 26$.

Trích đề HSG Huyện Hoài Nhơn năm 2015-2016

Lời giải

Ta có $12^2 = 144 > 26$ và $y \in \mathbb{N}$ nên $0 \leq y \leq 1$ suy ra $y \in \{0; 1\}$

+) Với $y = 1$ thì $5^x + 12^1 = 26$

$$5^x = 14 \text{ không tìm được } x \in \mathbb{N}.$$

+) Với $y = 0$ thì $5^x + 12^0 = 26$

$$5^x = 25$$

$$5^x = 5^2$$

$$x = 2$$

Vậy $x = 2; y = 0$.

B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP*(copy đề bài ở các dạng trên để làm phiếu phô tô cho HS)***I. Thực hiện các phép tính.****Dạng 1: Thực hiện phép tính.****Trắc nghiệm****Bài 1:** Giá trị của biểu thức $A = \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+59}$ là:

- A. $A = \frac{19}{60}$. B. $A = \frac{19}{50}$. C. $A = \frac{19}{40}$. D. $A = \frac{19}{30}$.

*Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022***Bài 2:** Tính giá trị của biểu thức $2x^2y - 1$ với $x = -2$, $y = -3$.

- A. 25. B. 123. C. -23. D. -25.

*Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022***Bài 3:** Kết quả của phép tính $5 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-7) - (-16)$ là:

- A. 33. B. -17. C. 17. D. -33.

*Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022***Bài 4:** Kết quả của phép tính $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 99 - 100$ bằng:

- A. 50. B. -50. C. -100. D. 0.

*Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022***Bài 5:** Một người leo núi với vận tốc 2km/h, lúc xuống núi với vận tốc 6km/h. Vận tốc trung bình của người đó trong toàn hành trình lên và xuống là:

- A. 3,5 km/h B. 4,5 km/h C. 4 km/h D. 3 km/h

*Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021 - 2022***Bài 6:** Giá trị của $T = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{12} \cdot \dots \cdot \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64}$ bằng

- A. $\frac{1}{36^2}$ B. $\frac{1}{2^{30}}$ C. $\frac{1}{2^{36}}$ D. $\frac{1}{2^{32}}$

*Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021 - 2022***Bài 7:** Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{2 \cdot 8^4 \cdot 27^2 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4}$ ta được kết quả là:

- A. $\frac{2}{9}$ B. $\frac{8}{9}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{2}{3}$

*Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021 - 2022***Tự luận****Bài 1:** Thực hiện phép tính $P = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \cdot \left\{ 400 - \left[673 - 2^3 \cdot (7^3 : 7 + 1) \right] \right\}$.*Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022***Bài 2:** Tính giá trị các biểu thức sau: $A = -5^{22} - \left\{ -222 - \left[-122 - (100 - 5^{22}) + 2022 \right] \right\}$ *Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022***Bài 3:** Tính $B = \frac{7 \cdot 9 + 14 \cdot 27 + 21 \cdot 36}{21 \cdot 27 + 42 \cdot 81 + 63 \cdot 108}$ *Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022***Bài 4:** Thực hiện phép tính: $B = 2 + 5 + 9 + 14 + \dots + 4949 + 5049$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Bài 5: Tính giá trị của các biểu thức sau: $41,54 - 3,18 + 23,17 + 8,46 - 5,82 - 3,17$.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Bài 6: Kết quả của phép tính $-2022.74 - 2022.27 + 2022$

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021 - 2022

Bài 7: Thực hiện phép tính.

a) $A = (-10)^2 - [(-2)^3 \cdot (7^{11} : 7^9 + 2022^0)]$

b) $B = \left(\frac{2121}{2323} + \frac{212121}{232323} + \frac{21212121}{23232323} \right) : \frac{21}{23}$

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021 - 2022

Bài 8: Tính giá trị biểu thức:

a) $A = \left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10} \right) \cdot \frac{21}{24}$.

b) $B = \frac{5}{6} + 6 \frac{5}{6} \left(11 \frac{5}{20} - 9 \frac{1}{4} \right) : 8 \frac{1}{3}$.

Trích đề HSG Liên trường năm 2021 - 2022

Bài 9: Thực hiện phép tính:

a) $A = (7-4)^2 \cdot 2 + [(-5) + (-7)] : (-3+5)^2$

b) $B = \frac{2^{15} \cdot 13 + 2^{15} \cdot 65}{2^{13} \cdot 104}$

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Bài 10: Tính giá trị các biểu thức sau: $C = \frac{5 \cdot 4^6 \cdot 9^4 - 3^9 \cdot (-8)^4}{4 \cdot 2^{13} \cdot 3^8 + 2 \cdot 8^4 \cdot (-27)^3}$.

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Bài 11: Thực hiện phép tính:

$$C = \frac{20 - \frac{20}{7} - \frac{20}{289} - \frac{20}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} : \frac{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{169} + \frac{5}{91}}{7 + \frac{7}{13} + \frac{7}{169} + \frac{7}{91}}$$

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Bài 12: Thực hiện phép tính:

a) $P = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 400 - \left[673 - 2^3 \cdot (7^3 : 7 + 1) \right] \right\}$.

b) $Q = \frac{4^3 \cdot 9^2 + 6^3 \cdot 120}{-8^2 \cdot 3^6 + 6^5}$

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021 - 2022

Bài 13: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = 68.74 + 27.68 - 68$

b) $B = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 539 - \left[639 - 8 \cdot (7^8 : 7^6 + 2017^0) \right] \right\}$

c) $C = \left(\frac{151515}{161616} + \frac{17^9}{17^{10}} \right) - \left(\frac{1500}{1600} - \frac{1616}{1717} \right)$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Bài 14: Thực hiện phép tính

a) $A = \frac{5 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^9 \cdot (2^2)^6 - 2 \cdot (2^2 \cdot 3)^{14} \cdot 3^4}{5 \cdot 2^{28} \cdot 3^{18} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}}$

$B = 81 \cdot \left[\frac{12 - \frac{12}{7} - \frac{12}{289} - \frac{12}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} : \frac{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{169} + \frac{5}{91}}{6 + \frac{6}{13} + \frac{6}{169} + \frac{6}{91}} \right] \cdot \frac{158158158}{711711711}$

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Bài 15: Tính: 1) $A = \frac{5}{6} + 6 \frac{5}{6} \left(11 \frac{5}{20} - 9 \frac{1}{4} \right) : 8 \frac{1}{3}$
 2) $B = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 400 - \left[673 - 2^9 \cdot (7^8 : 7^6 + 7^0) \right] \right\}$
 3) $C = \frac{5}{2.1} + \frac{4}{1.11} + \frac{3}{11.2} + \frac{1}{2.15} + \frac{13}{15.4}$

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Bài 16: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = 68.74 + 27.68 - 68$
 b) $B = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 539 - \left[639 - 8 \cdot (7^8 : 7^6 + 2017^0) \right] \right\}$
 c) $C = \left(\frac{151515}{161616} + \frac{17^9}{17^{10}} \right) - \left(\frac{1500}{1600} - \frac{1616}{1717} \right)$
 d) $D = \left(\frac{1}{2^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{3^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{4^2} - 1 \right) \dots \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1 \right)$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018- 2019

Bài 17: Tính

$$B = (-528) + (-12) + (-211) + 540 + 2225$$

Trích đề 59 năm 2018- 2019

Bài 18: Thực hiện phép tính (hợp lí nếu có thể)

a) $1941 + [15 + (-1941) + (-5)]$
 b) $(3,7 - 59,4) - (40,6 - 6,3)$
 c) $\frac{2}{9} \cdot \frac{-3}{37} + \frac{-2}{9} \cdot \frac{34}{37} + 1 \frac{2}{9}$

Trích đề HSG trường THCS Quỳnh Thiện năm 2021 – 2022

Bài 19: Tính $N = \frac{5 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^9 \cdot (2^2)^6 - 2 \cdot (2^2 \cdot 3)^{14} \cdot 3^{16}}{5 \cdot 2^{28} \cdot 3^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}}$

Trích đề HSG huyện Đoan Hùng năm 2018-2019

Bài 20: Thực hiện các phép tính sau một cách hợp lý:

a) $(10^2 + 11^2 + 12^2) : (13^2 + 14^2)$
 b) $1.2.3 \dots 9 - 1.2.3 \dots 8 - 1.2.3 \dots 7 \cdot 8^2$
 c) $\frac{(3.4.2^{16})^2}{11.2^{13}.4^{11} - 16^9}$
 d) $1152 - (374 + 1152) + (-65 + 374)$
 e) $13 - 12 + 11 + 10 - 9 + 8 - 7 - 6 + 5 - 4 + 3 + 2 - 1$

Trích đề HSG huyện Nông Cống năm 2019-2020

Bài 21:

Tính giá trị của biểu thức $M = \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{1 \frac{1}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}} \right) : \frac{2021}{2022}$.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 22: Tính tổng: $S = \frac{27 \cdot 4500 + 135 \cdot 550 \cdot 2}{2 + 4 + 6 + \dots + 18}$

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Bài 23: Tính:

a) $A = \frac{101 + 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1}{101 - 100 + 99 - 98 + \dots + 3 - 2 + 1}$

b) $B = \frac{423134 \cdot 846267 - 423133}{423133 \cdot 846267 + 423134}$

Trích đề HSG huyện năm 2019-2020

Bài 24: Tính hợp lý

a) $53 \cdot 81 - 47 \cdot 14 + 81 \cdot 47 - 14 \cdot 53$

b) $|1 - 2^{100}| + |5^{50} - 2^{100}| - |11 - 5^{50}|$

c) $\left(\frac{20162016}{20172017} + \frac{2017^{2016}}{2017^{2017}} \right) - \left(\frac{2016}{2017} - \frac{2016^{2017} \cdot 2017^{2016}}{2017^{2017} \cdot 2016^{2016}} \right)$

d) $\frac{6^{36} \cdot (50 \cdot 5^{40} - 10 \cdot 5^{34})}{30^{30} \cdot 10^4 \cdot (100 \cdot 15^5 - 4 \cdot 3^5)}$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 25: Cho biểu thức $A = \frac{5 \cdot 4^{2017} - 4^{2018} - 1}{1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{2016}}$. Chứng tỏ rằng biểu thức A có giá trị là một số nguyên.

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

= 3

Bài 26: Tính hợp lý:

a) $A = 2018^2 - 2017 \cdot 2018$

b) $B = (-1) \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^4 \dots (-1)^{99} \cdot (-1)^{100}$

c) $C = \frac{88 - \frac{1}{6} - \frac{2}{7} - \frac{3}{8} - \dots - \frac{88}{93}}{-1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} - \dots - \frac{1}{186}}$

Trích đề HSG huyện Ứng Hòa năm 2022 - 2023

Bài 27: Thực hiện các phép tính sau một cách hợp lý:

a) $A = 1152 - (374 + 1152) + (-65 + 374)$

b) $\frac{101 + 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1}{101 - 100 + 99 - 98 + \dots + 3 - 2 + 1}$

*Trích đề HSG đề xuất năm 2021 - 2022***Bài 28:** Tính $2022.121 - 2022.11.11 + 2023$.*Trích đề HSG đề xuất năm 2021 - 2022***Bài 29:** Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = -5^{22} - \left\{ -222 - \left[-122 - (100 - 5^{22}) + 2022 \right] \right\}$

b) $B = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{20}(1+2+3+\dots+20)$

*Trích đề HSG đề xuất năm 2021 - 2022***Bài 30:** Tính:

a) $A = -21.7^2 + 17.7^2 - 90.7^2 + 94.(-51)$

b) $C = \frac{5.6 + 2.10.12 - 3.15.18 - 7.35.42}{3.5 + 2.6.10 - 3.9.15 - 7.21.35} + \frac{20222022.2021 - 20212021.2022}{2^2 + 3^3 + 4^4 + \dots + 2022^{2022}}$

*Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2021 - 2022***Bài 31:** Tính giá trị các biểu thức sau (*Tính hợp lí nếu có thể*):

a) $A = -674.168 + 2022.(-44)$

b) $B = -\frac{10}{13} + \frac{5}{17} - \frac{3}{13} + \frac{12}{17} + \frac{195}{1890}$

*Trích đề HSG huyện Nam Định năm 2021 - 2022***Bài 32:** Thực hiện phép tính bằng cách hợp lý:

a) $A = -2013.2014 + 1007.26$

b) $B = \left(\frac{1313}{1414} + \frac{10}{160} \right) - \left(\frac{130}{140} - \frac{1515}{1616} \right)$

*Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2017 - 2018***Bài 33:**

1) Tính $A = \frac{3}{4} + \frac{7}{8} : 7 - \frac{1}{32} \cdot (-4)^2$.

2) Tính nhanh hợp lý: $B = 2022.2022 - 2025.2019$.

*Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2017 - 2018***Bài 34:** Rút gọn $\frac{10.11 + 50.55 + 70.77}{11.12 + 55.60 + 77.84}$ *Trích đề HSG huyện Tam Dương năm 2021 - 2022***Bài 35:** Thực hiện phép tính:

a) $A = \frac{24.47 - 23}{24 + 47 - 23} \cdot \frac{3 + \frac{3}{7} - \frac{3}{11} + \frac{3}{1001} - \frac{3}{13}}{\frac{9}{1001} - \frac{9}{13} + \frac{9}{7} - \frac{9}{11} + 9}$

b) $M = \frac{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2012}}{2^{2014} - 2}$

*Trích đề HSG huyện Kim Sơn năm 2021 - 2022***Bài 36:** Thực hiện phép tính:

a) $A = 4,5 \cdot \frac{1}{9} + \left(2\frac{2}{3} - \frac{4}{9} \right) : 25\%$

b) $B = 2011 - \left[39 - (2^3 \cdot 3 - 21)^2 \right] : (-3) + 2021^0$

$$c) C = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2018.2020}\right)$$

Trích đề HSG huyện Kinh Môn năm 2019 -2020

Bài 37:

a) Rút gọn biểu thức: $A = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2499}\right)$

b) Tính nhanh: $B = \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}}{2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27}} : \frac{4 + \frac{4}{7} + \frac{4}{49} - \frac{4}{343}}{1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343}}$

Trích đề HSG huyện Kinh Môn năm 2018 -201

Bài 38: Tính:

a) $1152 - (374 + 1152) + (374 - 65)$

b) $\frac{7}{12} + \frac{5}{6} + \frac{1}{4} - \frac{3}{7} - \frac{5}{12}$

Trích đề HSG huyện Ba Vì năm 2018 -2019

Bài 39: Tính: $M = \frac{\frac{7}{2012} + \frac{7}{9} - \frac{1}{4}}{\frac{5}{9} - \frac{3}{2012} - \frac{1}{2}}$

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2018 -2019

Bài 40: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $2 \cdot \left[(6^2 - 24) : 4 \right] + 2014$

b) $\left(1 + 2\frac{1}{3} - 3\frac{1}{4}\right) : \left(1 + 3\frac{7}{12} - 4\frac{1}{2}\right)$

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018 -2019

Bài 41: Thực hiện phép tính:

a) $A = [540 : (23,7 - 19,7)] + 42(132 + 75 - 36) - 7317$

b) Tìm tích: $\left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{4} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{100} - 1\right)$

Trích đề HSG huyện Bạch Thông năm 2018 -2019

Bài 42: Thực hiện phép tính (tính nhanh nếu có thể)

a) $M = \left(\frac{-5}{7} + \frac{5}{11}\right) : \left(\frac{-10}{3}\right) + \left(\frac{-2}{7} + \frac{6}{11}\right) : \left(\frac{-10}{3}\right)$

b) $P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{100}}$

Trích đề HSG huyện Phúc Thọ năm 2018 -2019

Bài 43: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} : 5 - \frac{1}{18} \cdot (-3)^2$

b) $B = 3 \cdot \left\{ 5 \cdot \left[(5^2 + 2^3) : 11 \right] - 16 \right\} + 2015$

$$c) C = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2014.2016}\right)$$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hoá năm 2018 -2019

Bài 44: Tính nhanh: $16 + (27 - 7.6) - (94.7 - 27.99)$.

Trích đề HSG huyện Quỳnh Lưu năm 2018 -2019

Lời giải

$$16 + (27 - 7.6) - (94.7 - 27.99) = 16 + 27 - 7.6 - 94.7 + 27.99 = 16 + 27 + 27.99 - 7.6 - 94.7 \\ = 16 + 27.100 - 7.100 = 16 + 100.(27 - 7) = 16 + 100.20 = 16 + 2000 = 2016.$$

Bài 45: Tính hợp lý

a) $21.7^2 - 11.7^2 + 90.7^2 + 49.125.16$

b)
$$B = \frac{2.2014}{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2014}}$$

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021 -2022

Bài 46: Thực hiện phép tính:

$$A = 1800 : \left\{ 450 : \left[450 - (4.5^3 - 2^3.5^2) \right] \right\}$$

$$B = \frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^{10}.6^{19} - 7.2^{29}.27^6}$$

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Bài 47: Thực hiện phép tính:

$$A = 12 - 3 - [(2021 - 2022)^{100} - 10^2 + 3^2] + (-2022)^0$$

$$B = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right)$$

Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Bài 48: Tính giá trị của các biểu thức sau bằng cách hợp lý:

$$A = 35.34 + 35.86 + 65.75 + 65.45$$

$$B = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2022}\right)$$

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Bài 49: Tính giá trị của biểu thức

1) $A = 22 + (27 - 7.6) - (94.7 - 27.99)$

2) $B = 3 \cdot \left\{ 5 \cdot \left[(5^2 + 2^3) : 11 \right] - 16 \right\} + 2025$

3) $C = 1 + \frac{1}{2} \cdot (1+2) + \frac{1}{3} \cdot (1+2+3) + \frac{1}{4} \cdot (1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{200} \cdot (1+2+\dots+200)$

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Bài 50: Thực hiện phép tính

1) $936 - \left[508 - 5(5^{10} : 5^8 + 2022^0) \right]$

$$2) \frac{2^6 \cdot 18 + 2^7}{2^6 \cdot 5^2 - 2^6 \cdot 3}$$

3) $A = x - y$ với x là số nguyên dương nhỏ nhất và y là số nguyên âm lớn nhất.

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Bài 51: Thực hiện phép tính.

$$a) \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{22}{19} - \frac{15}{21} \right) + \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{-3}{19} + \frac{-2}{7} \right)$$

$$b) \frac{-3}{4} \cdot 4 \frac{8}{13} - 0,75 \cdot 3 \frac{5}{13};$$

$$c) 96.7^2 - 37.7^2 + 15.7^2 - 49.174$$

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021-2022

Bài 52: Tính: $3\frac{1}{4} : \left[4 \cdot (-3) - 2^3 : \frac{16}{15} \right]$

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2021 - 2022

Lời giải

$$3\frac{1}{4} : \left[4 \cdot (-3) - 2^3 : \frac{16}{15} \right] = \frac{13}{4} : \left(-12 - 8 \cdot \frac{15}{16} \right)$$

$$= \frac{13}{4} : \left(-12 - \frac{15}{2} \right) = \frac{13}{4} : \left(\frac{-39}{2} \right)$$

$$= \frac{-1}{6}$$

Bài 53: Tính $\left\{ 20 - \left[(700 + 2 \cdot 10^2) : 30 \right] \right\} : 5$

Trích đề HSG huyện Tiền Hải năm 2021 – 2022

Bài 54:

1. Tính giá trị các biểu thức:

$$A = 1,4 \cdot \frac{15}{49} - \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} \right) : 2\frac{1}{5};$$

$$B = \frac{25^{13} \cdot 9^6 \cdot 24^7}{50^{12} \cdot 81^5 \cdot 40^3}.$$

2. Tính nhanh:

$$C = \frac{5}{12 \cdot 17} + \frac{3}{34 \cdot 10} + \frac{7}{60 \cdot 9} + \frac{8}{27 \cdot 35};$$

$$D = \left(\frac{7}{20} + 1 \right) \left(\frac{7}{33} + 1 \right) \left(\frac{7}{48} + 1 \right) \left(\frac{7}{65} + 1 \right) \left(\frac{7}{84} + 1 \right) \left(\frac{7}{105} + 1 \right).$$

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021 – 2022.

Bài 55: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$1) A = -5^{22} - \left\{ -222 - \left[-122 - (100 - 5^{22}) + 2022 \right] \right\}$$

$$2) B = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{20}(1+2+3+\dots+20)$$

$$3) C = \frac{5 \cdot 4^6 \cdot 9^4 - 3^9 \cdot (-8)^4}{4 \cdot 2^{13} \cdot 3^8 + 2 \cdot 8^4 \cdot (-27)^3}$$

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2021-2022

Bài 56: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$1) A = 2021 - (374 + 2021) + (-2022 + 374)$$

$$2) B = \left(\frac{-2}{5} \cdot \frac{13}{131} + \frac{2}{131} \cdot \frac{-118}{5} \right) : \frac{4}{5}$$

$$3) C = \frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{11}{12} + \frac{19}{20} + \frac{29}{30} + \frac{41}{42} + \frac{55}{56} + \frac{71}{72} + \frac{89}{90}$$

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021-2022

Bài 57: Thực hiện phép tính: $A = 2016 \cdot \left[\frac{6 - \frac{6}{7} - \frac{6}{289} - \frac{6}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} ; \frac{3 + \frac{3}{13} + \frac{3}{169} + \frac{3}{91}}{6 + \frac{6}{13} + \frac{6}{169} + \frac{6}{91}} \right] \cdot \frac{304304304}{945945945}$

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015-2016

Bài 58: Thực hiện phép tính:

$$a) A = 81 \cdot \left[\frac{12 - \frac{12}{7} - \frac{12}{289} - \frac{12}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} ; \frac{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{169} + \frac{5}{91}}{6 + \frac{6}{13} + \frac{6}{169} + \frac{6}{91}} \right] \cdot \frac{158158158}{711711711}$$

$$b) B = \frac{5 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^9 \cdot (2^2)^6 - 2 \cdot (2^2 \cdot 3)^{14} \cdot 3^4}{5 \cdot 2^{28} \cdot 3^{18} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}}$$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014-2015

Bài 59: 1. Thực hiện phép tính:

$$a) P = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 400 - \left[673 - 2^3 \cdot (7^3 : 7 + 1) \right] \right\}; \quad b) Q = \frac{4^3 \cdot 9^2 + 6^3 \cdot 120}{-8^2 \cdot 3^6 + 6^5}$$

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Bài 60: Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{8^{10} \cdot 3^{15} - 2^{30} \cdot 9^7}{2^{30} \cdot 27^5 - 4^{15} \cdot 3^{14}}$

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Bài 61: Tính giá trị của các biểu thức sau bằng cách hợp lý (nếu có thể):

$$A = (-2013) \cdot 2014 + 1007 \cdot 26$$

$$B = \left(\frac{1313}{1414} + \frac{10}{160} \right) - \left(\frac{130}{140} - \frac{1515}{1616} \right)$$

$$C = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2021}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2022}\right).$$

$$D = x \cdot \frac{1}{3} + 2x \cdot \frac{3}{6} - 3x \cdot \frac{4}{9} \text{ với } x = 2022^{2021}.$$

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Bài 62: Tính hợp lí

$$a) A = \frac{5}{6} - \frac{-1}{12} + \frac{2}{3} - \frac{-2}{7} + \frac{1}{25} - \frac{-1}{4} - \frac{5}{42}$$

$$b) \frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}$$

Trích đề HSG THCS Ái Thượng năm 2021-2022

Bài 63: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$1) A = (-16) : (-8) + 6(2021 - 2022)^{2019} + 2026.$$

$$2) B = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{8}\right) \left(1 + \frac{1}{15}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{624}\right).$$

Trích đề HSG Huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Bài 64: Thực hiện phép tính (tính hợp lý nếu có thể)

$$a) 1968 : 16 + 5136 : 16 - 704 : 16.$$

$$b) 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 400 - \left[673 - 2^3 \cdot (7^8 : 7^6 + 7^0) \right] \right\}.$$

Trích đề HSG Huyện Lương Tài năm 2015-2016

$$\text{Bài 65: Tính: } M = \frac{\frac{7}{2012} + \frac{7}{9} - \frac{1}{4}}{\frac{5}{9} - \frac{3}{2012} - \frac{1}{2}}.$$

Trích đề HSG Huyện Lý Nhân năm 2018-20219

Bài 66: Tính nhanh:

$$a) \frac{7}{13} \cdot \frac{7}{15} - \frac{5}{12} \cdot \frac{21}{39} + \frac{49}{91} \cdot \frac{8}{15}.$$

$$b) \left(\frac{12}{199} + \frac{23}{200} - \frac{34}{201} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right).$$

Trích đề HSG THCS Lý Tự Trọng năm 2015-2016

Dạng 2: Tính tổng dãy số tự nhiên theo quy luật.

Trắc nghiệm

Bài 1: Kết quả của phép tính $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 99 - 100$ là:

A. 50.

B. -50.

C. -100.

D. 0.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Bài 2: Cho 7 ô liên tiếp sau:

	-13		a			-27
--	-----	--	-----	--	--	-----

Biết rằng tổng ba ô liên tiếp bất kỳ luôn bằng 0. Khi đó giá trị của a là:

A. -13.

B. -27.

C. 13.

D. 27.

Bài 31: Kết quả của phép tính $1-2+3-4+5-6+\dots+99-100$ bằng:

- A. 50 B. -50 C. -100 D. 0

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Tự luận

Bài 1: Tính tổng $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$

Trích đề HSG cấp trường năm 2019-2020

Bài 2: Cho $E = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{200}(1+2+\dots+200)$ và $F = \frac{20300}{3}$.

Tính $\frac{E}{F}$.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Bài 3: Kết quả của phép tính $1-2+3-4+\dots+99-100$ là:

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 4: Tính giá trị của các biểu thức sau:

1) $-1-2+3+4-5-6+7+8-\dots-2013-2014+2015+2016$

2) $B = \left(\frac{1}{2}-1\right) : \left(\frac{1}{3}-1\right) : \left(\frac{1}{4}-1\right) : \left(\frac{1}{5}-1\right) : \dots : \left(\frac{1}{98}-1\right) : \left(\frac{1}{99}-1\right) : \left(\frac{1}{100}-1\right)$

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Bài 5: Tính giá trị của biểu thức:

$A = \left(\frac{1}{2}-1\right) : \left(\frac{1}{3}-1\right) : \left(\frac{1}{4}-1\right) : \left(\frac{1}{5}-1\right) : \dots : \left(\frac{1}{98}-1\right) : \left(\frac{1}{99}-1\right) : \left(\frac{1}{100}-1\right)$

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Bài 6: Tính $B = \frac{1.2021 + 2.2020 + 3.2019 + \dots + 2021.1}{1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 2021.2022}$.

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2021 - 2022

Bài 7: Tính tổng $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2019 - 2020.

Bài 8: Cho $A = 4 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$. Hỏi A có chia hết cho 128 không ?

Trích đề HSG trường Tân Lập năm 2018-2019

Bài 9: Cho $A = 1-2+3-4+\dots+99-100$.

- Tính A
- A có chia hết cho 2, cho 3, cho 5 không ?
- A có bao nhiêu ước tự nhiên ? Bao nhiêu ước nguyên ?

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2018 -2019

Dạng 3: Tính toán với tổng của dãy lũy thừa.

Bài 1: Cho tổng $A = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2008}$. Tính giá trị biểu thức: $B = 8A - 3^{2010}$

Trích đề HSG Liên trường năm 2021 -2022

Bài 2: Cho x là tổng của tất cả các số nguyên có 2 chữ số, y là số nguyên âm lớn nhất. Hãy tính giá trị của biểu thức $A = 2009.x^{2006} - 2008y^{2007}$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 3: Cho $A = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{2012}$ và $B = \left(\frac{3}{2}\right)^{2013} : 2$. Tính $B - A$

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Bài 4: Cho $S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$

- a) Chứng minh rằng S là bội của -20
b) Tính S , từ đó suy ra 3^{100} chia cho 4 dư 1

Trích đề HSG 059 năm 2018- 2019

Bài 5: Tính hợp lý: $B = \frac{35.6^{10}.2^{23}.3^6 - 2^{22}.5.6^{15}}{9.6^{19}.2^9 - 4.3^{17}.2^{26}}$.

Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021-2022

Bài 6: Tính hợp lý: $\frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^9.6^{19} - 7.2^{29}.27^6}$.

Trích đề HSG huyện Nam Đàn năm 2021-2022

Lời giải

$$\frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^9.6^{19} - 7.2^{29}.27^6} = \frac{5.2^{30}.3^{18} - 2^2.3^{20}.2^{27}}{5.2^9.2^{19}.3^{19} - 7.2^{29}.3^{18}} = \frac{2^{29}.3^{18}.(5.2 - 3^2)}{2^{28}.3^{18}.(5.3 - 7.2)} = 2.$$

Bài 7: Thực hiện phép tính: $B = \frac{2^{10}.13 + 2^{10}.65}{2^8.104}$.

Trích đề HSG huyện Bạch Thông năm 2018 -2019

Bài 8: Tính:

- a) $\frac{11.3^{22}.3^7 - 9^{15}}{(2.3^{14})^2}$.
b) $\frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{3^2} \cdot \frac{15}{4^2} \dots \frac{899}{30^2}$.

Trích đề HSG huyện Ba Vì năm 2018 -2019

Bài 9: Rút gọn $C = \frac{5.4^6.9^4 - 3^9.(-8)^4}{4.2^{13}.3^8 + 2.8^4.(-27)^3}$.

Trích đề HSG đề xuất năm 2021 -2022

Bài 10: Rút gọn

- a) $B = \left(\frac{20162016}{20172017} + \frac{2017^{2016}}{2017^{2017}} \right) - \left(\frac{2016}{2017} - \frac{2016^{2017}.2017^{2016}}{2017^{2017}.2016^{2016}} \right)$
b) $C = \frac{6^{36}.(50.5^{40} - 10.5^{34})}{30^{30}.10^4.(100.15^5 - 4.3^5)}$

Trích đề HSG đề Khoái Châu năm 2021 -2022

Bài 11: Thực hiện phép tính: $C = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2022}$

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Bài 12: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$D = 15 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + \dots + 2^{2020}.$$

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021-2022

Bài 13: Cho $A = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{2012}$ và $B = \left(\frac{3}{2}\right)^{2013} : 2$

Tính $B - A$.

Trích đề HSG huyện Đông Tháp năm 2018-2019

Bài 14: Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2010}$

a) Rút gọn A .

b) Tìm x để $2A + 3 = 3^x$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2019 - 2020

Dạng 4: Tổng dãy phân số theo quy luật.

Bài 1: Cho $A = \frac{4}{7.31} + \frac{6}{7.41} + \frac{9}{10.41} + \frac{7}{10.57}$; $B = \frac{7}{19.31} + \frac{5}{19.43} + \frac{3}{23.43} + \frac{11}{23.57}$

Tỷ số $\frac{A}{B}$ là:

A. $\frac{7}{4}$.

B. $\frac{7}{2}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{11}{4}$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Tự luận

Bài 1: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100}$.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021 - 2022

Bài 2: Tính giá trị của các biểu thức sau: $K = \frac{4}{11.16} + \frac{4}{16.21} + \frac{4}{21.26} + \dots + \frac{4}{61.66}$.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Bài 3: Cho $E = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{200}(1+2+3+\dots+200)$ và

$F = \frac{20300}{3}$. Tính $\frac{E}{F}$.

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Bài 4: Tính giá trị các biểu thức sau: $B = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{20}(1+2+3+\dots+20)$

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Bài 5: Tính $B = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2499}\right)$.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 6: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$, biết: $A = \frac{1}{3.8} + \frac{1}{8.13} + \frac{1}{13.18} + \frac{1}{18.21}$; $B = \frac{1}{3.7} + \frac{1}{7.11} + \frac{1}{11.15} + \frac{1}{15.19} + \frac{1}{19.23}$

A. $\frac{A}{B} = \frac{5}{4}$

B. $\frac{A}{B} = 1$

C. $\frac{A}{B} = \frac{4}{5}$

D. $\frac{A}{B} = 20$.

Bài 7: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$D = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Bài 8: Tính: $\left[92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100}\right] : \left[\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}\right]$

Trích đề HSG trường Nguyễn Khuyến năm 20...-20...

Bài 9: Cho $A = \frac{4}{7.31} + \frac{6}{7.41} + \frac{9}{10.41} + \frac{7}{10.57}$ và $B = \frac{7}{19.31} + \frac{5}{19.43} + \frac{3}{23.43} + \frac{11}{23.57}$

Tỷ số $\frac{A}{B}$ là bao nhiêu

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 10: Tính giá trị biểu thức sau:

$$B = \left(2017 - \frac{1}{4} - \frac{2}{5} - \frac{3}{6} - \frac{4}{7} - \dots - \frac{2017}{2020}\right) : \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \frac{1}{30} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{10100}\right)$$

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 11: Tính nhanh:

a) $\frac{3^2}{1.4} + \frac{3^2}{4.7} + \frac{3^2}{7.10} + \dots + \frac{3^2}{97.100}$

b) $M = \frac{1+3+3^2+3^3+\dots+3^{2012}}{3^{2004}-3}$

c) $D = \frac{2}{20} + \frac{2}{30} + \frac{2}{42} + \frac{2}{56} + \frac{2}{72} + \frac{2}{90}$

Trích đề 59 HSG huyện năm 2018- 2019

Bài 12: Cho biểu thức $D = \frac{(2!)^2}{1^2} + \frac{(2!)^2}{3^2} + \frac{(2!)^2}{5^2} + \frac{(2!)^2}{7^2} + \dots + \frac{(2!)^2}{2015^2}$

So sánh D với 6. Biết $n! = 1.2.3 \dots n$ ($n \in \mathbb{N}$)

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Bài 13: Thực hiện phép tính (hợp lí nếu có thể) $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{399} + \frac{1}{483}$

Trích đề HSG trường THCS Quỳnh Thiện năm 2021 – 2022

Bài 14: Không quy đồng hãy tính tổng sau:

$$A = \frac{-1}{20} + \frac{-1}{30} + \frac{-1}{42} + \frac{-1}{56} + \frac{-1}{72} + \frac{-1}{90}$$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Bài 15: Thực hiện các phép tính sau một cách hợp lý:

$$\frac{2}{1.4} + \frac{2}{4.7} + \frac{2}{7.10} + \dots + \frac{2}{97.100}$$

Trích đề HSG đề xuất năm 2021 - 2022

Bài 16: Thực hiện các phép tính sau một cách hợp lý: $B = \frac{5}{1.4} + \frac{5}{4.7} + \frac{5}{7.10} + \dots + \frac{5}{97.100}$.

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2021-2022

Bài 17: Thực hiện phép tính bằng cách hợp lý:

$$C = -\frac{2}{20} - \frac{2}{30} - \frac{2}{42} - \frac{2}{56} - \frac{2}{72} - \frac{2}{90}$$

Trích đề HSG huyện Nam Định năm 2021 – 2022

Bài 18: Tính $S = \frac{10}{2.7} + \frac{10}{7.12} + \frac{10}{12.17} + \dots + \frac{10}{2017.2022}$

Trích đề HSG huyện Nam Đàn năm 2018 - 2019

Bài 19: Tính: $A = \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \dots + \frac{1}{97.99}$

Trích đề HSG huyện Tiên Du năm 2021 -2022

Bài 20: Tính tổng: $A = \frac{2}{1.4} + \frac{2}{4.7} + \frac{2}{7.10} + \dots + \frac{2}{97.100}$.

Trích đề HSG huyện Quỳnh Lưu năm 2018 -2019

Bài 21: Tính giá trị của biểu thức sau bằng cách hợp lý:

$$C = \frac{2}{4.9} + \frac{2}{9.14} + \frac{2}{14.19} + \dots + \frac{2}{64.69}$$

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Bài 22: Thực hiện phép tính $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Bài 23: Chứng minh rằng $\frac{1}{28} + \frac{1}{30} + \frac{1}{32} + \frac{1}{34} + \dots + \frac{1}{52} = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{5.12} + \frac{1}{7.16} + \dots + \frac{1}{25.52}$.

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021 – 2022.

Bài 24: Cho $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{48} + \frac{1}{49} + \frac{1}{50}$ và $P = \frac{1}{49} + \frac{2}{48} + \frac{3}{47} + \dots + \frac{48}{2} + \frac{49}{1}$.

Hãy tính $\frac{S}{P}$.

Trích đề HSG huyện Ngọc Lặc năm 2018 -2019

Bài 25: Tính: $A = \frac{1}{4.9} + \frac{1}{9.14} + \frac{1}{14.19} + \dots + \frac{1}{64.69}$.

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2019 -2020

Bài 26: Tính tổng $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$.

Trích đề HSG cấp Trường năm 2019-2020

Bài 27: Thực hiện tính:

$$E = 1 + \frac{1}{2}(1 + 2) + \frac{1}{3}(1 + 2 + 3) + \frac{1}{4}(1 + 2 + 3 + 4) + \dots + \frac{1}{200}(1 + 2 + \dots + 200).$$

Trích đề HSG Huyện Hoài Nhơn năm 2015-2016

Bài 28: Cho $E=1+\frac{1}{2}(1+2)+\frac{1}{3}(1+2+3)+\frac{1}{4}(1+2+3+4)+\dots+\frac{1}{200}(1+2+\dots+200)$ và $F=\frac{20300}{3}$.

Tính $\frac{E}{F}$.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Bài 29: Cho $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{48}+\frac{1}{49}+\frac{1}{50}$ và $P=\frac{1}{49}+\frac{2}{48}+\frac{3}{47}+\dots+\frac{48}{2}+\frac{49}{1}$.

Hãy tính $\frac{S}{P}$.

Trích đề HSG Huyện Ngọc Lặc năm 2018-2019

Bài 30: Cho $A=\frac{1}{3.8}+\frac{1}{8.13}+\frac{1}{13.18}+\dots+\frac{1}{33.38}$ và $B=\frac{1}{3.10}+\frac{1}{10.17}+\frac{1}{17.24}+\dots+\frac{1}{31.38}$.

Tính tỷ số $\frac{A}{B}$.

Trích đề HSG cấp Trường năm 2019-2020**II. Tìm số chưa biết.****Dạng 1: Tìm số chưa biết (không có lũy thừa).**

Bài 1. Tìm y , biết: $x-y=-2015$; $y-z=-2016$; $z+x=2017$

- A. $y=-1007$ B. $y=1007$ C. $y=-1008$ D. $y=1008$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019

Bài 2. Cho $x, y \in \mathbb{Z}$. Tìm y , biết: $xy+5x-3y=15$

- A. $y=-3$ B. $y=3$ C. $y=-5$ D. $y=5$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019

Bài 3. Tìm x , biết: $|x-1|-5=-2$

- A. $x \in \{2\}$ B. $x \in \{4\}$ C. $x \in \{-2; 4\}$ D. $x \in \emptyset$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019

Bài 4. Cho x, y là hai số thỏa mãn: $(x+2)^2+|y-3|=0$. Tổng hai số $x+y$ bằng:

- A. -5 B. 5 C. 1 D. -1

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019

Bài 5. Tìm x , biết: $\frac{-(x+1)}{4}=\frac{-9}{x+1}$

- A. $x \in \{5\}$ B. $x \in \{-7\}$ C. $x \in \{5; -7\}$ D. $x \in \emptyset$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019

Bài 6. Tìm x , biết: $\frac{5}{4.3}+\frac{3}{4.11}+\frac{3}{7.11}+\frac{9}{7.23}=\frac{2x}{69}$

- A. $x=5$ B. $x=10$ C. $x=20$ D. $x=40$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019

Bài 7. Số tự nhiên x thỏa mãn: $\left(\frac{1}{1 \cdot 51} + \frac{1}{2 \cdot 52} + \frac{1}{3 \cdot 53} + \dots + \frac{1}{10 \cdot 60}\right)x = \frac{1}{1 \cdot 11} + \frac{1}{2 \cdot 12} + \frac{1}{3 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{50 \cdot 60}$
là:

A. $x = 5$

B. $x = 4$

C. $x = 7$

D. $x = 9$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 – 2022

Bài 8: Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $(2x-1)(xy+1) = 6$.

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Bài 9: Tìm số nguyên x biết: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right)x = \frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{8}{2} + \frac{9}{1}$

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Bài 10: Tìm các cặp số nguyên x, y thỏa mãn: $3xy + 2x - 5y = 6$.

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Bài 11: Tìm x , biết: $\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{8.9}\right).x = \frac{23}{45}$.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 12: Tìm x biết: $x - \frac{20}{11.13} - \frac{20}{13.15} - \dots - \frac{20}{53.55} = \frac{3}{11}$.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021 - 2022

Bài 13: Tìm x , biết: $105 - [(2x+7) - 13] = 25$.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Bài 14: Tìm x biết: $\frac{1}{4} : 2x = 1$

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022

Bài 15: Tìm x biết:

a) $\left(\frac{3x}{7} + 1\right) : (-4) = \frac{-1}{28}$

b) $1 + 5 + 9 + 13 + 17 + \dots + x = 4950$

Trích đề HSG Liên trường năm 2021 -2022

Bài 16: Tìm x , biết:

a) $6x(x-5) + 2x(5-3x) = -60$

b) $\frac{x-1}{2022} + \frac{x-2}{2021} = \frac{x-3}{2020} + \frac{x-4}{2019}$

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Bài 17: Tìm x , biết $105 - [(2x+7) - 13] = 25$

Trích đề HSG huyện Chí Linh năm 2021-2022

Bài 18: Tìm các số tự nhiên x, y biết: $2y + 6 = \frac{15-y}{x} \cdot 26$

Trích đề HSG huyện Kỳ Anh năm 2021-2022

Bài 19: Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn điều kiện: $\frac{11}{17} < \frac{a}{b} < \frac{23}{29}$ và $8b - 9a = 31$

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Bài 20: Tìm x biết: $x + |-3| = 0$

Trích đề HSG Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020

Bài 21: a) Tìm x , biết: $\frac{x-2}{10} + \frac{x-2}{15} + \frac{x-2}{21} + \frac{x-2}{28} + \frac{x-2}{36} = 20$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) sao cho : $xy + 7x - 3y - 27 = 0$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 22: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $2xy - x - y = 2$.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Bài 23: Tìm số nguyên x , biết:

a) $2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7$

b) $\frac{x}{6} + \frac{x}{10} + \frac{x}{15} + \frac{x}{21} + \frac{x}{28} + \frac{x}{36} + \frac{x}{45} + \frac{x}{55} + \frac{x}{66} + \frac{x}{78} = \frac{220}{39}$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Bài 24: Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho $xy - 2x + y + 1 = 0$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Lời giải

$$xy - 2x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow x(y - 2) + (y - 2) = -3$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(y - 2) = -3 = 1 \cdot (-3) = (-3) \cdot 1$$

Từ đó suy ra $(x; y) \in \{(0; -1); (-4; 3)\}$

Bài 25: 1) Tìm số tự nhiên x , biết: $(x - 5) \frac{30}{100} = \frac{20x}{100} + 5$.

2) Tìm số tự nhiên a, b, c, d nhỏ nhất sao cho: $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}; \frac{b}{c} = \frac{12}{21}; \frac{c}{d} = \frac{6}{11}$.

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Bài 26: Tổng của hai số tự nhiên là 102. Nếu thêm chữ số 0 vào bên phải số bé rồi cộng với số lớn ta được tổng mới là 417. Khi đó số lớn là:

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 27: Cho 7 ô liên tiếp sau

	-13		a			-27
--	-----	--	-----	--	--	-----

Biết rằng tổng của ba ô bất kỳ luôn bằng 0. Khi đó giá trị của a là bao nhiêu?

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 28: Trung bình cộng của tử số và mẫu số của một phân số là 68. Cộng thêm vào tử số của phân số đó 4 đơn vị thì ta được phân số mới bằng phân số $\frac{3}{2}$. Phân số lúc đầu là phân số nào?

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 29: Tìm $x; y$ biết:

a) $\frac{-4}{5} - \frac{3}{5} : x = 2$

b) $2xy - x = 14 - 4y$ ($x; y$ là số nguyên)

Trích đề HSG trường THCS Quỳnh Thiện năm 2021 - 2022

Bài 30: Tìm x , biết:

a) $(19x + 2.5^2) : 14 = (13 - 8)^2 - 4^2$

b) $x + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+30) = 1240$

c) $11 - (-53 + x) = 97$

d) $-(x+84) + 213 = -16$

Trích đề HSG huyện Nông Công năm 2019-2020

Bài 31: Tìm số tự nhiên x biết: $2 \cdot \left(\frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{x(x+1)} \right) = \frac{1}{9}$

Trích đề HSG huyện Đoàn Hùng năm 2018-2019

Bài 32: Tìm x , biết $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} \right) x = \frac{2012}{1} + \frac{2011}{2} + \frac{2010}{3} + \dots + \frac{2}{2011} + \frac{1}{2012}$

Trích đề HSG huyện Quế Sơn năm 2018-2019

Bài 33: Tìm x biết rằng $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(x-2)x} = \frac{1011}{2021}$.

Trích đề HSG huyện Trực Ninh năm 2021 -2022

Bài 34: Tìm số nguyên x biết: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \right) x = \frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{8}{2} + \frac{9}{1}$

Trích đề HSG huyện Ninh Bình năm 2021-2022

Bài 35: Tìm x biết: $(2x+5) - 17 = -238$.

Trích đề HSG huyện Sóc Sơn năm 2021 – 2022

Bài 36: Tìm x biết:

a) $(2 - 4 + 6 - 8 + 10 - 12 + \dots + 98 - 100) + x = 1972$.

b) $\frac{2}{(x+1)(x+3)} + \frac{3}{(x+3)(x+6)} + \frac{4}{(x+6)(x+10)} = \frac{x}{(x+1)(x+10)}$.

Trích đề HSG huyện Hà Đông năm 2021 -2022

Bài 37: Tìm số tự nhiên x biết: $(x+5) + (x+10) + (x+15) + \dots + (x+60) = 450$.

Trích đề HSG huyện Kim Sơn năm 2021 -2022

Bài 38: Tìm số tự nhiên x thỏa mãn: $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2x = 110$.

Trích đề HSG huyện Sơn Tây năm 2021 – 2022

Bài 39: Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết: $x : \left(9\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) = \frac{0,4 + \frac{2}{9} - \frac{2}{11}}{1,6 + \frac{8}{9} - \frac{8}{11}}$.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Bài 40: Tìm x , biết: $1 + \left(x - \frac{1}{4} \right) : \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - 3\frac{1}{4}$.

Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Bài 41: Tìm x , biết: $\frac{1}{2} + \frac{5}{6} : x = \frac{1}{3}$.

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Bài 42: Tìm x biết: $x: \frac{1}{3} + \frac{5}{7} = 9\frac{5}{7}$

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 – 2022

Bài 43: Tìm x biết:

1) $\frac{2}{3} - 2: \left(x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{10}{3}$

2) $x + (x-1) + (x-5) + (x-9) + \dots + (x-101) = -516$

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021-2022

Bài 45: Tìm x biết $x: \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100}\right) = 100$

Bài 46: Tìm các số tự nhiên x, y sao cho $(2x+1)(y-5) = 12$.

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015-2016

Bài 47: Tìm số tự nhiên x , biết: $\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{8.9.10}\right).x = \frac{23}{45}$.

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015-2016

Bài 48: Tìm x biết: $\frac{13}{28}x = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{555}{222} + \frac{4444}{12221} + \frac{33333}{244442} + \frac{11}{330} + \frac{13}{60}\right)$

Trích đề HSG huyện Vĩnh Phúc năm 2015-2016

Bài 49: Tìm x biết: $\frac{-2}{3} \left(x - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}(2x-1)$.

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014-2015

Bài 50:

Tìm x biết: a) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$;

b) $\frac{-x}{4} = \frac{-9}{x}$.

Trích đề HSG huyện Bạc Liêu năm 2018-2019

Bài 51: Tìm x biết:

a) $\frac{x-2}{2} = \frac{8}{x-2}$ ($x \neq 2$).

b) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} + x = 1$.

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Bài 52: Tìm x là số tự nhiên, biết:

a) $x: \left(9\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = \frac{0,4 + \frac{2}{9} - \frac{2}{11}}{1,6 + \frac{8}{9} - \frac{8}{11}}$;

b) $\frac{x+1}{2} = \frac{8}{x+1}$.

Trích đề HSG THCS Ái Thượng năm 2021-2022

Bài 53: Tìm x biết $\left(\frac{1}{8} + 2\frac{5}{4} - 2,75\right)x - 7 = \left(\frac{3}{2} + 0,65 + \frac{7}{200}\right):0,07$.

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2018-2019

Bài 54: Tìm x , biết: $\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{8.9.10}\right).x = \frac{22}{45}$

Trích đề HSG huyện Hoài Nhơn năm 2015-2016

Dạng 2: Tìm số chưa biết có chứa lũy thừa.

Trắc nghiệm

Bài 1: Tìm x , biết: $2^x - 15 = 17$.

- A. $x=1$. B. $x=5$. C. $x=16$. D. $x=30$.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 2: Tìm x , biết: $2^x - 15 = 17$

- A. $x=1$ B. $x=5$ C. $x=16$ D. $x=30$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 3: Cho $T = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2022}$. Tìm số tự nhiên n , biết $2 \cdot T + 3 = 3^n$. Khi đó n bằng:

- A. 2020 B. 2023 C. 2021 D. 2022

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 4: Tìm số tự nhiên x , biết a là số nguyên tố chẵn thỏa mãn $a^x = 1024$.

- A. $x=8$ B. $x=9$ C. $x=10$ D. $x=16$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 5: Biết x là số tự nhiên thỏa mãn $5 \cdot 3^x - 135 = 0$. Giá trị của $P = 674x - 2021$ bằng

- A. -1 B. 2 C. 0 D. 1

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 6: Biết $(x; y)$ là cặp số thỏa mãn $(x - y - 1)^{2020} + y^{2022} = 0$. Khi đó giá trị của $2022x - y$ bằng:

- A. 2019 B. 2020 C. 2021 D. 2022

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Tự luận

Bài 1: Cho x, y là các số tự nhiên thỏa mãn: $2^x + 5999 = 4y$.

Tính giá trị của biểu thức $D = (x-1)^{2021} + (y-1501)^{2022}$.

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

Bài 2: Gọi x là tổng các chữ số của số $a = 3^{2022} + 2021$, gọi y là tổng các chữ số của x và gọi z là tổng các chữ số của y . Tìm z .

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

Bài 3: Tìm x , biết: $(x+1)^2 + (-2)^3 = 28^0$

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Bài 4: Tìm số nguyên x biết: $14.7^{2021} = 35.7^{2021} - 3.49^x$

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Bài 5: Tìm x biết: $(x-5)^5 = (x-5)^3$.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021 - 2022

Bài 6: Tìm x , biết: $7^x + 7^{x+2} + 7^{x+3} = 2751$

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Bài 7: Tìm x biết: $\frac{x-1}{2} - \frac{32}{x-1} = 0$

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022

Bài 8: Đặt $m = 3^9$. Gọi x là số tự nhiên thỏa mãn $m^m = 3^x$. Tìm số tự nhiên n sao cho $3^n = x$.

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022

Bài 9: Tìm x biết $(2x+1)^2 - 9 = 0$

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022

Bài 10: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện $2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 11: Tìm các số tự nhiên x, y sao cho : $7^x + 12^y = 50$

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Bài 12: Tìm x biết: $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 13: Tìm số nguyên x biết : $(2x-15)^5 = (2x-15)^3$.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Bài 14: a) Tìm x biết: $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$

b) Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ biết: $2^x + 624 = 5^y$

Trích đề HSG trường Nguyễn Khuyến năm 2020 -2021

Bài 15: Cho số nguyên a lớn hơn 32 . Hỏi tồn tại hay không số tự nhiên k thỏa mãn $k < a^{41}$ mà có ít nhất 61 chữ số 0 ở tận cùng?

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Bài 16: Tìm x biết: $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$

Trích đề HSG huyện Quế Sơn năm 2018-2019

Bài 17: Tìm $x; y$ biết:

a) $2^3 \cdot 3^2 - (x - 13) = -15 + 2022^0$;

b) $x^2 + 357 = y^2$ ($x; y$ là số nguyên tố)

Trích đề HSG trường THCS Quỳnh Thiện năm 2021 – 2022

Bài 18: Cho $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2022} + 5^{2023}$. Tìm số tự nhiên n , biết rằng: $4M + 5 = 25 \cdot 5^n$

Trích đề HSG trường THCS Quỳnh Thiện năm 2021 – 2022

Bài 19: Tìm số tự nhiên x biết: $7 \cdot 2 + 288 : (x-5)^2 = 2^4$.

Bài 20: $x = 3$.

a) Tìm x biết $(3x+1)^2 = 100$.

b) Tìm x là số tự nhiên, biết $5^{2x+3} - 2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 3$.

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2021 -2022

Bài 21: Tìm số nguyên x biết: $14 \cdot 7^{2021} = 35 \cdot 7^{2021} - 3 \cdot 49^x$

Trích đề HSG huyện Tân Kỳ năm 2021 – 2022

Bài 22: Tìm x biết: $(6-2x)^3 = 3^3 \cdot 5^2 + 325$.

Trích đề HSG huyện Hà Đông năm 2021 - 2022

Bài 23: Tìm số tự nhiên x biết: $8.6 + 288 : (x-3)^2 = 50$.

Trích đề HSG huyện Hoàng Hoá năm 2018-2019

Bài 24: Tìm x biết:

a) $[(3x-54).8] : 4 = 18$

b) $(2x-15)^5 = (2x-15)^3$

c) $x + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+2013) = 2035147$

Trích đề HSG huyện Vĩnh lộc năm 2017 - 2018

Bài 25: Tìm số tự nhiên x , biết: $5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} = \underbrace{1000\dots0}_{18 \text{ chữ số } 0} : 2^{18}$

18 chữ số 0

Trích đề HSG huyện Tam Dương năm 2017- 2018

Bài 26: Tìm số tự nhiên x , biết:

a) $5^x = 125$

b) $3^{2x} = 81$

c) $5^{2x-3} - 2.5^2 = 5^2 \cdot 3 \quad x = 2$.

Trích đề HSG huyện Duy Xuyên năm 2019 - 2020

Bài 27: Tìm số nguyên x biết: $2^x \cdot 2^{x+1} \cdot 2^{x+2} = \underbrace{1000\dots0}_{18 \text{ chữ số } 0} : 5^{18}$

18 chữ số 0

Trích đề HSG huyện Giao Thủy năm 2018 -2019

Bài 28: Tìm số nguyên x biết:

1) $2024 : [25 - (3x + 2)] = 2^3 \cdot 11$

2) $\frac{1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100}{x^2 + (x^2 + 1) + (x^2 + 2) + \dots + (x^2 + 99)} = 50 \frac{116}{131}$

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Bài 29: Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết: $(2x-15)^5 = (2x-15)^3$.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Bài 30: Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết: $3 \cdot 2^{x+2} - 2^{x-1} = 7 \cdot 4^{1011} + 9 \cdot 2^{2021}$.

Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Bài 31: Tìm x , biết: $35 \cdot 7^{2021} - 3 \cdot 49^x = 14 \cdot 7^{2021}$.

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Bài 32: Tìm x biết: $(-4) + (x+7)^2 = 12$

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Bài 33: Tìm x biết:

1) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$ (với $x \in \mathbb{N}$)

2) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^{2022} = \left(2x - \frac{1}{2}\right)^{2021}$

*Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022***Bài 34:** Tìm các cặp số tự nhiên x, y thỏa mãn $5^x + 11^y = 26$ *Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022***Bài 35:** Tìm x biết:

a) $4.3^x - 34 = 2022^0 + 1^{2022}$;

*Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021-2022***Bài 36:** Tìm x biết: $(x-1)^3 = -64$ *Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022***Bài 37:** Cho các số $(x; y)$ thỏa mãn: $(x-2)^4 + (y-x+1)^6 = 0$

Tính giá trị của biểu thức: $C = 2x^3 + 15y^3 - 11$

*Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022***Bài 38:** Tìm $x; y \in \mathbb{N}$ biết: $73 - x^2 = 4(y-5)^2$ *Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022***Bài 39:** Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $(x-1)^2 + 5y^2 = 6$.*Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2021-2022***Bài 40:** Tìm $x, y \in \mathbb{N}$, biết $2^x + 624 = 5^y$.*Trích đề HSG huyện Diêm Châu năm 2015-2016***Bài 41:** Tìm 2 số tự nhiên A và B biết rằng A có n ước số tự nhiên là a_1, a_2, \dots, a_n và B có m ước số tự nhiên là b_1, b_2, \dots, b_m thỏa mãn $a_1^2 \cdot a_2^2 \dots a_n^2 = 729$ và $b_1^2 \cdot b_2^2 \dots b_m^2 = 1296$.*Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015-2016***Bài 42:** Tìm x biết:

a) $(4x-15)^{2016} = (4x-15)^{2015}$

b) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} - 480 = 0$.

c) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^4 - 7^y = 2014$

Trích đề HSG huyện Vĩnh Tường năm 2015-2016

Bài 43: Tìm x biết: $\frac{1}{5} \cdot 2^x + \frac{1}{3} \cdot 2^{x+1} = \frac{1}{5} \cdot 2^7 + \frac{1}{3} \cdot 2^8$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014-2015

Bài 44: Tìm x, y, z biết: $(x-y^2+z)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 0$

*Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014-2015***Bài 45:** Tìm x biết:

$$5^{2x-3} - 3.5^2 = 5^2.2$$

Trích đề HSG huyện Anh Sơn năm 2018-2019

Bài 46: Tìm số tự nhiên x , biết: $5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} = \underbrace{1\ 000\ \dots\ 0}_{18.\text{chữ}.\text{so}.\text{0}} : 2^{18}$.

Trích đề HSG huyện Anh Sơn năm 2018-2019

Bài 47: Tìm số nguyên x biết: $(2x-15)^5 = (2x-15)^3$.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Bài 48: Tìm x biết: $1 - \left(x - 4\frac{1}{2}\right) : \frac{25}{22} = (-2022)^0 - \frac{11}{5}$.

Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Bài 49: Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2010}$. Tìm x để $2A + 3 = 3^x$.

Trích đề HSG cấp Trường năm 2019-2020

Bài 50: Tìm các số tự nhiên x, y biết: $2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x$

Trích đề HSG Trường THCS Ái Thượng năm 2021-2022

Bài 51: Tìm các số tự nhiên x, y sao cho: $5^x + 12^y = 26$.

Trích đề HSG Huyện Hoài Nhơn năm 2015-2016

C. SỬU TÀM CÁC BÀI TRONG CÁC ĐỀ CỦA NHỮNG NĂM TRƯỚC ĐÓ

(Phần này lấy các câu từ những năm trước, trước năm 2020-2021, tối thiểu 10 bài)

Bài 1: Tính nhanh: $A = \frac{-5}{9} + \frac{8}{15} + \frac{-2}{11} + \frac{4}{-9} + \frac{7}{15}$.

Trích đề HSG huyện Tĩnh Gia năm 2018-2019

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{-5}{9} + \frac{8}{15} + \frac{-2}{11} + \frac{4}{-9} + \frac{7}{15} \\ &= \left(\frac{-5}{9} + \frac{-4}{9}\right) + \left(\frac{8}{15} + \frac{7}{15}\right) + \frac{-2}{11} \\ &= -1 + 1 + \frac{-2}{11} = \frac{-2}{11} \end{aligned}$$

Bài 2: Thực hiện tính A bằng cách hợp lý nhất: $A = \frac{2000.2001 - 1000}{2000.2000 + 1000}$.

Trích đề HSG trường THCS Quế Phú (Quế Sơn) năm 2018 - 2019

Lời giải

$$A = \frac{2000.2001 - 1000}{2000.2000 + 1000} = \frac{2000.2000 + 2000 - 1000}{2000.2000 + 1000} = \frac{2000.2000 + 1000}{2000.2000 + 1000} = 1$$

Bài 3: Tính tổng sau $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 97.98 + 98.99$.

Lời giải

Nhân hai vế của tổng trên với 3 (hiệu giữa số đứng sau với số đứng trước) ta được:

$$3A = 1.2(3-0) + 2.3(4-1) + \dots + 97.98(99-96) + 98.99(100-97)$$

$$3A = (1.2.3 - 0.1.2) + (2.3.4 - 1.2.3) + \dots + (97.98.99 - 96.97.98) + (98.99.100 - 97.98.99)$$

$$3A = 98.99.100.$$

$$\text{Suy ra } A = \frac{98.99.100}{3}.$$

Bài 4: Tính tổng sau $A = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + 97.98.99 + 98.99.100$.

Lời giải

$$4A = 1.2.3(4-0) + 2.3.4(5-1) + 3.4.5(6-2) + \dots + 97.98.99(100-96) + 98.99.100(101-97)$$

$$4A = (1.2.3.4 - 0.1.2.3) + (2.3.4.5 - 1.2.3.4) + \dots$$

$$+ (97.98.99.100 - 96.97.98.99) + (98.99.100.101 - 97.98.99.100)$$

$$4A = 98.99.100.101$$

$$\text{Suy ra } A = \frac{98.99.100.101}{4}.$$

Bài 5: Tính tổng $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2019-2020

Lời giải

$$S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$$

$$3S = (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100).3$$

$$= 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + \dots + 99.100.3$$

$$= 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + 99.100.(101-98)$$

$$= 1.2.3 - 1.2.3 + 2.3.4 - 2.3.4 + 3.4.5 - \dots - 98.99.100 + 99.100.101$$

$$S = 99.100.101 : 3 = 33.100.101$$

Vậy $S = 333300$.

Bài 6: Tính tổng sau $B = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{98} + 3^{100}$.

Lời giải

Nhân tổng B với 3^2 ta được:

$$3^2.B = 3^2 + 3^4 + 3^6 + 3^8 + \dots + 3^{100} + 3^{102}.$$

$$\Rightarrow 9B - B = (3^2 - 3^2) + (3^4 - 3^4) + \dots + (3^{100} - 3^{100}) + 3^{102} - 1$$

$$\Rightarrow 8B = 3^{102} - 1.$$

$$\Rightarrow B = (3^{102} - 1) : 8.$$

Bài 7: Tính tổng sau $C = 5 + 5^3 + 5^5 + 5^7 + \dots + 5^{99} + 5^{101}$

Lời giải

Nhân tổng C với 5^2 ta được:

$$5^2.C = 5^3 + 5^5 + 5^7 + 5^9 + \dots + 5^{101} + 5^{103}$$

$$\Rightarrow 25C - C = (5^3 - 5^3) + (5^5 - 5^5) + \dots + (5^{101} - 5^{101}) + 5^{103} - 5$$

$$\Rightarrow 24C = 5^{103} - 5$$

$$\Rightarrow C = (5^{103} - 5) : 24.$$

Bài 8: Tính tổng $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \dots + 9 + \frac{19}{2}$.

*) *Phân tích:*

Đây là ví dụ mà các số hạng trong tổng vừa là số nguyên, vừa là phân số. Để tìm ra quy luật của các số hạng trong tổng ta cần viết các số nguyên trong tổng dưới dạng phân số có mẫu số là 2. Khi đó ta có tổng các phân số có cùng mẫu số, và tổng các tử số chính là tổng các số tự nhiên liên tiếp

Lời giải:

$$\text{Ta có: } S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \dots + 9 + \frac{19}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \dots + \frac{19}{2} = \frac{1+2+\dots+19}{2}$$

Xét tổng $1+2+\dots+18+19$ là tổng của 19 số tự nhiên liên tiếp

$$1+2+\dots+18+19 = \frac{(19+1) \cdot 19}{2} = 190$$

$$\text{Ta có tổng } S = \frac{190}{2} = 95.$$

Bài 9: Tính tổng $S = 2+5+8+11+\dots+47+50$.

Lời giải:

Các số hạng cách đều nhau một giá trị $d = 3$

$$\text{Tổng này có } (50-2):3+1=17 \text{ số hạng} \Rightarrow S = 17 \cdot (50+2):2 = 442$$

Bài 10: Tính tổng $S = 5+10+15+\dots+100$.

Lời giải:

Các số hạng cách đều nhau một giá trị $d = 5$

Tổng này có $(100-5):5+1=20$ số hạng

$$\Rightarrow S = 20 \cdot (100+5):2 = 1050$$

Bài 11: Tính tổng $A = 98+93+88+\dots+13+8+3$.

Lời giải:

$$\text{Tổng } A \text{ có } (98-3):5+1=20 \text{ (số hạng)} \Rightarrow A = \frac{(98+3) \cdot 20}{2} = 1010$$

Bài 12: Cho $S = 7+9+11+\dots+97+99$.

a) Tính tổng S trên.

b) Tìm số hạng thứ 33 của tổng trên.

Lời giải:

+ Số hạng đầu là: 7 và số hạng cuối là: 99.

+ Khoảng cách giữa hai số hạng là: 2

+ S có số số hạng được tính bằng cách $(99-7):2+1=47$

$$\text{Tổng của dãy: } S = (99+7) \cdot 47 : 2 = 2491$$

b) Số hạng thứ 33 của tổng trên là: $(33-1) \cdot 2 + 7 = 71$

Bài 13: Cho dãy số 2; 7; 12;; 22;

a) Nêu quy luật của dãy số trên.

- b) Viết tập hợp B gồm 5 số hạng liên tiếp của dãy số đó, bắt đầu từ số hạng thứ năm.
c) Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của dãy số.

Lời giải:

Xét dãy số $2; 7; 12; \dots 22 \dots$

- a) Quy luật: Dãy số cách đều với khoảng cách 5.
b) $B = \{22; 27; 32; 37; 42\}$
c) Gọi số hạng thứ 100 của dãy là x , ta có: $(x-2):5+1=100$
 $\Rightarrow x = 497$. Do vậy tổng 100 số hạng đầu của dãy là:
 $(2+497) \cdot 100 : 2 = 24950$

Bài 14: Người ta viết liền nhau các số tự nhiên 123456....

- a) Hỏi các chữ số đơn vị của các số 53; 328; 1587 đứng ở hàng thứ bao nhiêu?
b) Chữ số viết ở hàng thứ 427 là chữ số nào?

Lời giải:

Viết liền nhau các số tự nhiên 123456...

- a) 9 chữ số đầu tiên: 1, 2, ..., 9.
44 số có hai chữ số tiếp theo: 10, 11, ..., 53.
 \Rightarrow Chữ số hàng đơn vị của số 53 ở hàng số: $9 + 44 \cdot 2 = 97$
Tương tự, chữ số hàng đơn vị của số 328 ở hàng số $9 + 90 \cdot 2 + 229 \cdot 3 = 876$;
chữ số hàng đơn vị của số 1587 ở hàng số $9 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 588 \cdot 4 = 5241$.
b) Ta có: $427 = 9 + 90 \cdot 2 + 79 \cdot 3$
Khi đó số thứ 81 có 3 chữ số là: 179.
Chữ số viết ở hàng thứ 427 là chữ số 1.

Bài 15: Tính tổng $S = \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} + 3 + \dots + \frac{101}{3} + \frac{103}{3} + 35$.

Lời giải:

Ta có $S = \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} + 3 + \dots + \frac{101}{3} + \frac{103}{3} + 35 = \frac{1+3+5+7+\dots+101+103+105}{3}$

Xét tổng $1+3+5+\dots+101+103+105$ là tổng các số tự nhiên lẻ liên tiếp từ 1 đến 105, các số tự nhiên lẻ liên tiếp cách đều nhau 2 đơn vị

Tổng này có: $n = (105-1):2+1 = 53$ số hạng

$$1+3+5+\dots+101+103+105 = \frac{(105+1) \cdot 53}{2} = 2809$$

$$\text{Ta có tổng } S = \frac{2809}{3}$$

Bài 16: Tính tổng $B = 1+4+7+10+\dots+70+73$.

Lời giải:

$$\begin{aligned}
B &= 1+4+7+10+\dots+70+73 \\
\Rightarrow 6B &= 1.6+4.6+7.6+10.6+\dots+70.6+73.6 \\
\Rightarrow 6B &= 1.(4+2)+4.(7-1)+7.(10-4)+\dots+73.(76-70) \\
\Rightarrow 6B &= 1.4+1.2+4.7-1.4+7.10-7.4+\dots+73.76-73.70 \\
\Rightarrow 6B &= 2+73.76 \\
\Rightarrow 6B &= 5550 \\
\Rightarrow B &= 925
\end{aligned}$$

*) *Nhận xét:* Như vậy tùy từng dạng bài và mức độ tiếp thu kiến thức của mỗi học sinh, thầy cô có thể vận dụng linh hoạt các phương pháp giải sao cho học trò dễ nhớ, phù hợp.

*) *Mở rộng:* Viết công thức tổng quát tính tổng dãy số tự nhiên liên tiếp cách đều sau:
 $A_n = 1+2+3+\dots+(n-1)+n$

Lời giải:

Bằng các cách tính tổng tương tự như bài toán 1 ta có:

$$A_n = n(n+1):2 \quad (n \in N^*) \quad (1)$$

Tuy nhiên có thể hướng dẫn học sinh chứng minh bằng phương pháp qui nạp:

- Khi $n=1$ ta có: $A_1 = 1(1+1):2 = 1$ đúng.

- Giả sử bài toán đúng với $n=k > 1 (k \in N)$, nghĩa là: $A_k = 1+2+3+\dots+(k-1)+k = k(k+1):2$

- Ta xét:

$$\begin{aligned}
A_{k+1} &= 1+2+3+\dots+(k-1)+k+(k+1) \\
&= A_k + (k+1) \\
&= k(k+1):2 + (k+1) \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}$$

Tức là bài toán đúng với $n=k+1$.

Vậy với mọi số tự nhiên n khác 0, ta có: $A_n = 1+2+3+\dots+(n-1)+n = n(n+1):2$

Nhận xét: Ta có thể chứng minh (1) bằng phương pháp qui nạp sau đó áp dụng để tính các tổng có dạng đó.

Bài 17: Tính tổng $S = 1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{100}$.

*) *Phân tích:* Kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với 2. Do đó nếu ta nhân 2 vào tổng S thì ta có tổng $2S$ với các số hạng từ 2 đến 2^{100} giống như trong tổng S , khi đó nếu lấy số tổng $2S$ trừ đi tổng S thì các số hạng từ 2 đến 2^{100} bị triệt tiêu và tính được tổng S .

Lời giải:

Ta có: $S = 1+2+2^2+2^3+\dots+2^{100}$

Nhân 2 vào tổng S ta được $2S = 2+2^2+2^3+\dots+2^{101}$

$$\Rightarrow 2S - S = S = 2^{101} - 1$$

Bài 18: Tính tổng $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}$.

*) *Phân tích:* Kể từ số hạng thứ nhất, mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với $\frac{1}{2}$. Do đó nếu ta nhân 2 vào tổng S thì ta có tổng $2S$ với các số hạng từ $\frac{1}{2}$ đến $\frac{1}{2^{99}}$, giống như trong tổng S , khi đó nếu lấy tổng $2S$ trừ đi tổng S thì các số hạng từ $\frac{1}{2}$ đến $\frac{1}{2^{99}}$ bị triệt tiêu và tính được tổng S .

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \Rightarrow 2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{99}} \\ \Rightarrow 2S - S &= S = 2 - \frac{1}{2^{100}} \end{aligned}$$

Bài 19: Tính tổng $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2019 + 2020$.

Lời giải

Số số hạng của dãy là $(2020 - 1) : 1 + 1 = 2020$.

Tổng $S = (1 + 2020) \cdot 2020 : 2 = 2041210$.

Bài toán tổng quát: Tính tổng $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$.

Số số hạng của dãy là $(n - 1) : 1 + 1 = n$.

Tổng $S = (n + 1)n : 2$.

Bài 20: Tính tổng $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 2019 + 2021$.

Lời giải

Số số hạng của dãy là $(2021 - 1) : 2 + 1 = 1011$.

Tổng $S = (1 + 2021) \cdot 1011 : 2 = 1022121$.

Bài 21: Tính tổng $S = 5 + 10 + 15 + \dots + 2015 + 2020$.

Lời giải

Số số hạng của dãy là $(2020 - 5) : 5 + 1 = 404$.

Tổng $S = (5 + 2020) \cdot 404 : 2 = 409050$.

Bài 22: Tính tổng $S = 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \dots + \frac{4039}{2} + 2020$.

Lời giải

Số số hạng của dãy là $(2020 - 1) : \frac{1}{2} + 1 = 4039$.

Tổng $S = (1 + 2020) \cdot 4039 : 2 = 4081409,5$.

Bài 23: Tính tổng các số tự nhiên có hai chữ số? .

Lời giải

Số số hạng của dãy: $\frac{(99 - 10)}{1} + 1 = 90$

Tổng của dãy: $A = \frac{99 + 10}{2} \cdot 90 = 4905$

Bài 24: Tính tổng của 21 số lẻ liên tiếp đầu tiên? .

Lời giải

Tổng 21 số lẻ liên tiếp đầu tiên là: $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 33 + 35 + 37 + 39 + 41$

Tính tổng theo công thức trong phương pháp

Các số hạng liên tiếp trong tổng cách đều nhau một giá trị và trong tổng có 21 số hạng nên:

$$S = 1 + 3 + 5 + \dots + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 = \frac{(41+1) \cdot 21}{2} = 441$$

Vậy tổng của 19 số lẻ liên tiếp đầu tiên là: $42 \cdot 10 + 21 = 441$

Bài 25: Tính tổng $S = \frac{1}{18} + \frac{1}{18 \cdot 9} + \frac{1}{162 \cdot 9} + \frac{1}{1458 \cdot 9}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } S = \frac{1}{18} + \frac{1}{18 \cdot 9} + \frac{1}{162 \cdot 9} + \frac{1}{1458 \cdot 9} = \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{2 \cdot 9^2} + \frac{1}{2 \cdot 9^3} + \frac{1}{2 \cdot 9^4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9^4} \right)$$

$$\text{Nhân 2 vào tổng } S \text{ ta được: } 2S = \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9^4} \quad d = 2$$

$$\text{Nhân 9 vào tổng } 2S \text{ ta được: } 18S = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3}$$

$$\text{Trừ tổng } 18S \text{ cho tổng } 2S \text{ ta được: } 18S - 2S = 16S = 1 - \frac{1}{9^4}$$

$$\text{Suy ra } 16S = \frac{9^4 - 1}{9^4} \text{ suy ra } S = \frac{9^4 - 1}{16 \cdot 9^4} = \frac{410}{6561}$$

Bài 26. Thực hiện tính A bằng cách hợp lý nhất: $A = \frac{2000 \cdot 2001 - 1000}{2000 \cdot 2000 + 1000}$

Trích đề HSG THCS Quế Phú năm 2018-2019

Lời giải

$$A = \frac{2000 \cdot 2000 + 2000 - 1000}{2000 \cdot 2000 + 1000} = \frac{2000 \cdot 2000 + 1000}{2000 \cdot 2000 + 1000} = 1$$

Bài 27: Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$, biết:

a) $\frac{x-4}{y-3} = \frac{4}{3}$ và $x-y=5$.

b) $(x+1)(3y-2) = -55$.

Trích đề HSG huyện Tỉnh Gia năm 2018 - 2019

Lời giải

a) Điều kiện $y \neq 3$ ta có: $3x - 12 = 4y - 12$, suy ra $3x = 4y$

Từ $x - y = 5$, suy ra $x = 5 + y$

Ta có: $3y + 15 = 4y$, suy ra $y = 15$ nên $x = 5 + 15 = 20$

Vậy $x = 20; y = 15$.

b) $(x+1) \cdot (3y-2) = -55 = (-11) \cdot 5 = (-5) \cdot 11$

Sau khi thử các trường hợp ta thu được $(x; y) \in \{(4; -3); (-6; -1)\}$.

Bài 28: Tìm x biết: $-\frac{7}{4}x \left(\frac{33}{12} + \frac{3333}{2020} + \frac{333333}{303030} + \frac{33333333}{42424242} \right) = 22$

Trích đề HSG trường THCS Phan Đình Phùng năm 2018-2019**Lời giải**

$$-\frac{7}{4} \cdot x \cdot \left(\frac{33}{12} + \frac{3333}{2020} + \frac{333333}{303030} + \frac{33333333}{42424242} \right) = 22$$

$$-\frac{7}{4} \cdot x \cdot 33 \cdot \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} \right) = 22$$

$$-\frac{7}{4} \cdot x \cdot 33 \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} \right) = 22$$

$$-\frac{7}{4} \cdot x \cdot 33 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) = 22$$

$$-\frac{7}{4} \cdot x \cdot 33 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) = 22$$

$$x = -2$$

Vậy $x = -2$.

Bài 29: Tìm một phân số tối giản, biết rằng khi cộng mẫu số vào tử số và cộng mẫu số vào mẫu số của phân số ấy thì ta được phân số mới, lớn gấp 2 lần phân số ban đầu.

Trích đề HSG trường THCS Phan Đình Phùng năm 2018-2019**Lời giải**

Gọi phân số tối giản lúc đầu là $\frac{a}{b}$.

Nếu chỉ cộng mẫu số vào mẫu số thì ta được phân số $\frac{a}{b+b} = \frac{a}{2b}$, phân số này nhỏ hơn phân số $\frac{a}{b}$ hai lần.

Để $\frac{a+b}{2b}$ gấp hai lần phân số lúc đầu thì $a+b$ phải bằng 4 lần a .

Nên mẫu số b phải gấp 3 lần tử số a .

Nên phân số tối giản cần tìm là $\frac{1}{3}$.

Bài 30: Tìm y biết: $(y+1) + (y+2) + (y+3) + \dots + (y+50) = 1425$

Trích đề HSG trường THCS Quế Phú (Quế Sơn) năm 2018 - 2019**Lời giải**

$$(y+1) + (y+2) + (y+3) + \dots + (y+50) = 1425$$

$$50y + 1 + 2 + 3 + \dots + 50 = 1425$$

$$50y + 1275 = 1425$$

$$50y = 150$$

$$y = 3$$

Vậy $y = 3$.

Bài 31: Tìm x , biết $x + 2x + 3x + \dots + 2010x + 2011x = 2012 \cdot 2013$.

Lời giải

$$x + 2x + 3x + \dots + 2010x + 2011x = 2012 \cdot 2013$$

$$x(1 + 2 + 3 + \dots + 2010 + 2011) = 2012 \cdot 2013 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } A = 1 + 2 + 3 + \dots + 2010 + 2011$$

$$A = \frac{(1+2011) \cdot 2011}{2} = 1006 \cdot 2011. \text{ Thay vào (1) ta được:}$$

$$x \cdot 1006 \cdot 2011 = 2012 \cdot 2013$$

$$\text{Suy ra } x = \frac{2012 \cdot 2013}{1006 \cdot 2011} = \frac{2 \cdot 2013}{2011}. \text{ Vậy } x = \frac{4026}{2011}.$$

Bài 32: Tìm x , biết $(x+1) + (2x+3) + (3x+5) + \dots + (99x+197) + (100x+199) = 30200$.

Lời giải

$$(x+1) + (2x+3) + (3x+5) + \dots + (99x+197) + (100x+199) = 30200$$

$$(x+2x+3x+\dots+99x+100x) + (1+3+5+\dots+197+199) = 30200$$

$$x(1+2+3+\dots+99+100) + (1+3+5+\dots+197+199) = 30200 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } A = 1+2+3+\dots+99+100$$

$$\text{Ta có } A = \frac{(1+100) \cdot 100}{2} = 101 \cdot 50 = 5050.$$

$$\text{Đặt } B = 1+3+5+\dots+197+199$$

$$\text{Ta có } B = \frac{(1+199) \cdot 100}{2} = 10000.$$

Thay A và B vào (1) ta được:

$$x \cdot 5050 + 10000 = 30200$$

$$5050x = 30200 - 10000$$

$$5050x = 20200$$

$$x = 4.$$

Vậy $x = 4$.

Bài 33: Cho $B = 6 + 6^2 + 6^3 + \dots + 6^{2018} + 6^{2019}$. Tìm x để $5 \cdot B + 6 = 6^x$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 6 \cdot B = 6^2 + 6^3 + 6^4 + \dots + 6^{2019} + 6^{2020}.$$

$$\text{Suy ra } 6 \cdot B - B = (6^2 - 6^2) + (6^3 - 6^3) + \dots + (6^{2019} - 6^{2019}) + 6^{2020} - 6$$

$$\text{hay } 5 \cdot B = 6^{2020} - 6.$$

$$\text{Do } 5 \cdot B + 6 = 6^x$$

$$\text{nên } 6^{2020} - 6 + 6 = 6^x$$

$$6^{2020} = 6^x$$

$$x = 2020.$$

Vậy $x = 2020$

Bài 34: Cho $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$. Tìm x biết $2(A+2) = 2^{2x}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 2 \cdot A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{100} + 2^{101}.$$

$$\text{Suy ra } 2 \cdot A - A = (2^2 - 2^2) + (2^3 - 2^3) + (2^{100} - 2^{100}) + 2^{101} - 2$$

$$\text{Suy ra } A = 2^{101} - 2.$$

$$\text{Do } 2 \cdot (A+2) = 2^{2x}$$

$$\text{nên } 2 \cdot (2^{101} - 2 + 2) = 2^{2x}$$

$$2 \cdot 2^{101} = 2^{2x}$$

$$2^{202} = 2^{2x}$$

$$2x = 202$$

$$x = 101.$$

Vậy $x = 101$.

Bài 35:

a) Cho $M = (-a+b) - (b+c-a) + (c-a)$. Trong đó $b, c \in \mathbb{Z}$ còn a là một số nguyên âm. Chứng minh rằng biểu thức M luôn dương

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

Trích đề HSG huyện Tam Nông năm 2018-2019

Lời giải

a) Ta có: $M = (-a+b) - (b+c-a) + (c-a)$

$$M = -a+b-b-c+a+c-a$$

$M = -a$ mà a là số nguyên âm nên M luôn dương.

b) $x=0, y=0$ hoặc $x=2, y=2$.

Bài 36: Cho biểu thức $A = \frac{a^3 + 2a^2 - 1}{a^3 + 2a^2 + 2a + 1}$

a) Rút gọn biểu thức.

b) Chứng minh rằng nếu a là số nguyên thì giá trị của biểu thức tìm được ở câu a là một phân số tối giản.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

a) Ta có: $A = \frac{a^3 + 2a^2 - 1}{a^3 + 2a^2 + 2a + 1} = \frac{(a+1)(a^2 + a - 1)}{(a+1)(a^2 + a + 1)} = \frac{a^2 + a - 1}{a^2 + a + 1} (a \neq -1)$

b) Gọi d là ƯCLN của $a^2 + a - 1; a^2 + a + 1$

Vì $a^2 + a - 1 = a(a+1) - 1$ là số lẻ nên d là số lẻ.

$$\text{Mặt khác, } 2 = [a^2 + a + 1 - (a^2 + a - 1)] : d$$

Nên $d=1$ tức là $a^2 + a + 1$ và $a^2 + a - 1$ là nguyên tố cùng nhau.

Vậy biểu thức A là phân số tối giản.

Bài 37: Tìm số tự nhiên n và chữ số a biết rằng: $1+2+3+\dots+n = \overline{aaa}$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Từ $1; 2; \dots; n$ có n số hạng.

$$\text{Suy ra } 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Mà theo bài ta có: $1+2+3+\dots+n = \overline{aaa}$.

$$\text{Suy ra } \frac{(n+1)n}{2} = \overline{aaa} = a.111 = a.3.37$$

$$\text{hay } n(n+1) = 2.3.37.a$$

Vì tích $n(n+1)$ chia hết cho số nguyên tố 37 nên n hoặc $n+1$ chia hết cho 37 .

Vì số $\frac{(n+1)n}{2}$ có 3 chữ số nên $n+1 < 74$ nên $n=37$ hoặc $n+1=37$

Với $n = 37$ thì $\frac{37.38}{2} = 703$ (không thỏa mãn điều kiện)

Với $n+1 = 37 \Rightarrow \frac{36.37}{2} = 666$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $n = 36, a = 6 \Rightarrow 1+2+3+\dots+36 = 666$.

Bài 38: Tìm hai số x, y biết $(x+5)^{2020} + (4y-4)^{2020} = 0$.

Lời giải

Vì $(x+5)^{2020} \geq 0, (4y-4)^{2020} \geq 0$.

Nên để $(x+5)^{2020} + (4y-4)^{2020} = 0$ thì $\begin{cases} x+5=0 \\ 4y-4=0 \end{cases}$.

Bài 39: Tìm hai số x, y biết $(2x-1)^2 + (2y-x)^{2020} - 8 = 12 - 5.2^2$

Lời giải

$(2x-1)^2 + (2y-x)^{2020} - 8 = 12 - 5.2^2$

$\Rightarrow (2x-1)^2 + (2y-x)^{2020} = 0$.

Vì $(2x-1)^2 \geq 0, (2y-x)^{2020} \geq 0$

Nên để $\Rightarrow (2x-1)^2 + (2y-x)^{2020} = 0$ thì $\begin{cases} 2x-1=0 \\ 2y-x=0 \end{cases}$.

Bài 40: Tìm ba số x, y, z biết $(3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2010} = 0$

Lời giải

Vì $(3x-5)^{2006} \geq 0, (y^2-1)^{2008} \geq 0, (x-z)^{2010} \geq 0$.

Nên để $(3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2010} = 0$ thì $\begin{cases} 3x-5=0 \\ y^2-1=0 \\ x-z=0 \end{cases}$.

Bài 41: Tìm số tự nhiên n, m biết $2^m - 2^n = 1024$.

Lời giải

Ta thấy $m > n$.

$\Rightarrow 2^{m-n+n} - 2^n = 1024$

$\Rightarrow 2^{m-n} \cdot 2^n - 2^n = 1024$

$\Rightarrow 2^n \cdot (2^{m-n} - 1) = 2^{10}$

Nhận thấy $2^{m-n} - 1$ là số lẻ

Nên $\begin{cases} 2^n = 2^{10} \\ 2^{m-n} - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 10 \\ m = 11 \end{cases}$.

Bài 42: Tìm x biết $(x+1) + (x+2) + (x+3) + \dots + (x+99) + (x+100) = 5070$.

Lời giải

$(x+1) + (x+2) + (x+3) + \dots + (x+99) + (x+100) = 5070$

$\Rightarrow (x+x+x+\dots+x+x) + (1+2+3+\dots+99+100) = 5070$

$\Rightarrow 100x + (1+2+3+\dots+99+100) = 5070 \quad (1)$

Đặt $A = 1+2+3+\dots+99+100$

$\Rightarrow A = \frac{(1+100) \cdot 100}{2} = 101.50 = 5050$. Thay vào (1) ta được

$100x + 5050 = 5070$

$$\Rightarrow 100x = 5070 - 5050$$

$$\Rightarrow 100x = 20$$

$$\Rightarrow x = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}. \text{ Vậy } x = \frac{1}{5}.$$

Bài 43: Tìm x biết $(x+1)+(x+2)+(x+3)+\dots+(x+49)+(x+50) = 7450$

Lời giải

$$(x+1)+(x+2)+(x+3)+\dots+(x+49)+(x+50) = 7475$$

$$\Rightarrow (x+x+x+\dots+x+x)+(1+2+3+\dots+49+50) = 7475$$

$$\Rightarrow 50x+(1+2+3+\dots+49+50) = 7475. \quad (1)$$

Đặt $A = 1+2+3+\dots+49+50$

$$\Rightarrow A = \frac{(1+50) \cdot 50}{2} = 51 \cdot 25 = 1275. \text{ Thay vào (1) ta được}$$

$$50x + 1275 = 7475$$

$$\Rightarrow 50x = 7475 - 1275$$

$$\Rightarrow 50x = 6200$$

$$\Rightarrow x = \frac{6200}{50} = 124. \text{ Vậy } x = 124.$$

Bài 44. Tìm y biết: $(y+1)+(y+2)+(y+3)+\dots+(y+50) = 1425$

Trích đề HSG THCS Quế Phú năm 2018-2019

Lời giải

$$50y + 1 + 2 + 3 + \dots + 50 = 1425$$

$$50y + 1275 = 1425$$

$$50y = 150$$

$$y = 3$$

Bài 45: Rút gọn biểu thức:

$$a) A = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2499}\right)$$

$$b) B = \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}}{2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27}} \cdot \frac{4 + \frac{4}{7} + \frac{4}{49} - \frac{4}{343}}{1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343}}$$

Trích đề HSG huyện Kinh Môn năm 2018 -2019

Lời giải

$$A = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2499}\right)$$

$$A = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15} \cdot \dots \cdot \frac{2500}{2499}$$

$$A = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \dots \cdot \frac{50 \cdot 50}{49 \cdot 51}$$

$$A = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 50}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 49} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 50}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 51}$$

$$A = \frac{50}{1} \cdot \frac{2}{51} = \frac{100}{51}.$$

$$\text{Vậy } A = \frac{100}{51}.$$

$$b) B = \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}}{2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27}} : \frac{4 + \frac{4}{7} + \frac{4}{49} - \frac{4}{343}}{1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343}}$$

$$B = \frac{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}\right)}{2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}\right)} : \frac{4 \cdot \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343}\right)}{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343}\right)}$$

$$B = \frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8}.$$

Vậy $B = \frac{1}{8}$.

Bài 46: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = 68.74 + 27.68 - 68$

b) $B = 2^3.5^3 - 3\{539 - [639 - 8.(7^8 : 7^6 + 2017^0)]\}$

c) $C = \left(\frac{151515}{161616} + \frac{17^9}{17^{10}}\right) - \left(\frac{1500}{1600} - \frac{1616}{1717}\right)$

d) $D = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right)\left(\frac{1}{3^2} - 1\right)\left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018 -2019
Lời giải

a) $A = 68.74 + 27.68 - 68$
 $A = 68.(74 + 27 - 1)$
 $A = 68.100$
 $A = 6800.$

b) $B = 2^3.5^3 - 3\{539 - [639 - 8.(7^8 : 7^6 + 2017^0)]\}$
 $= 8.125 - 3.\{539 - [639 - 8.(7^2 + 1)]\}$
 $= 1000 - 3.\{539 - [639 + 8.50]\}$
 $= 1000 - 3.300$
 $= 1000 - 900 = 100.$

c) $C = \left(\frac{151515}{161616} + \frac{17^9}{17^{10}}\right) - \left(\frac{1500}{1600} - \frac{1616}{1717}\right) = \left(\frac{15}{16} + \frac{1}{17}\right) - \left(\frac{15}{16} - \frac{16}{17}\right) = 0 + 1 = 1.$

d) $D = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right)\left(\frac{1}{3^2} - 1\right)\left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$
 $= \left(\frac{1-4}{2^2}\right)\left(\frac{1-9}{3^2}\right) \dots \left(\frac{1-10000}{100^2}\right) = \frac{-3}{2^2} \cdot \frac{-8}{3^2} \cdot \frac{-15}{4^2} \dots \frac{-9999}{100^2} = -\frac{1.3}{2.3} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \dots \frac{99.1010}{100.100}$
 $= -\frac{(1.2.3 \dots 99).(3.4.5 \dots 101)}{(2.3.4 \dots 100).(2.3.4 \dots 100)} = -\frac{101}{200}.$

Bài 47: Tính:

a) $A = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots + 2013 + 2014 - 2015 - 2016$

$$b) B = \frac{2.4.10 + 4.6.8 + 14.16.20}{3.6.15 + 6.9.12 + 21.24.30}$$

Trích đề HSG huyện Yên Việt năm 2018-2019

Lời giải

$$a) A = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots + 2013 + 2014 - 2015 - 2016$$

Tính được số số hạng của A là: $(2016 - 1) : 1 + 1 = 2016$ (số hạng)

Nhóm 4 số hạng liên tiếp vào 1 nhóm:

$$A = (1 + 2 - 3 - 4) + (5 + 6 - 7 - 8) + \dots + (2013 + 2014 - 2015 - 2016)$$

$$A = \underbrace{-4 + (-4) + \dots + (-4)}_{504 \text{ số } (-4)}$$

$$A = -4.504$$

$$A = -2016.$$

Vậy $A = -2016$.

$$b) B = \frac{2.4.10 + 4.6.8 + 14.16.20}{3.6.5 + 6.9.12 + 21.24.30}$$

$$B = \frac{8.(1.2.5 + 2.3.4 + 7.8.10)}{27.(1.2.5 + 2.3.4 + 7.8.10)}$$

$$B = \frac{8}{27}.$$

$$\text{Vậy } B = \frac{8}{27}.$$

Bài 48: Thực hiện các phép tính sau một cách hợp lý:

$$a) (10^2 + 11^2 + 12^2) : (13^2 + 14^2)$$

$$b) 1.2.3 \dots 9 - 1.2.3 \dots 8 - 1.2.3 \dots 7.8^2$$

$$c) \frac{(3.4.2^{16})^2}{11.2^{13}.4^{11} - 16^9}$$

$$d) 1152 - (374 + 1152) + (-65 + 374)$$

Trích đề HSG huyện Nghi Lộc năm 2018-2019

Lời giải

$$a) (10^2 + 11^2 + 12^2) : (13^2 + 14^2)$$

$$= (100 + 121 + 144) : (169 + 196)$$

$$= 365 : 365$$

$$= 1.$$

$$b) 1.2.3 \dots 9 - 1.2.3 \dots 8 - 1.2.3 \dots 7.8^2 = 1.2.3 \dots 7.8.(9 - 1 - 8) = 1.2.3 \dots 7.8 \dots \times 0 = 0.$$

$$c) \frac{(3.4.2^{16})^2}{11.2^{13}.4^{11} - 16^9} = \frac{(3.2^2.2^{16})^2}{11.2^{13} \cdot (2^2)^{11} - (2^4)^9} = \frac{3^2 \cdot (2^{18})^2}{11.2^{13} \cdot 2^{22} - 2^{36}} = \frac{3^2 \cdot 2^{36}}{11.2^{35} - 2^{36}} = \frac{3^2 \cdot 2^{36}}{2^{35} \cdot (11 - 2)} = \frac{3^2 \cdot 2}{9} = 2.$$

$$d) 1152 - (374 + 1152) + (-65 + 374) = 1152 - 374 - 1152 - 65 + 374$$

$$= (1152 - 1152) + (374 - 374) - 65$$

$$= -65.$$

Bài 49: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) A = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} : 5 - \frac{1}{18} \cdot (-3)^2$$

$$b) B = 3 \cdot \{5 \cdot [(5^2 + 2^3) : 11] - 16\} + 2015$$

$$c) C = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2014.2016}\right)$$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hoá năm 2018 -2019

Lời giải

$$a) A = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} : 5 - \frac{1}{18} \cdot (-3)^2$$

$$A = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} - \frac{3}{6}$$

$$A = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$b) B = 3 \cdot \{5 \cdot [(5^2 + 2^3) : 11] - 16\} + 2015$$

$$B = 3 \cdot \{5 \cdot [33 : 11] - 16\} + 2015$$

$$B = 3 \cdot \{15 - 16\} + 2015$$

$$B = -3 + 2015$$

$$B = 2012.$$

$$c) C = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2014.2016}\right)$$

$$C = \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \dots \frac{2015^2}{2014.2016}$$

$$C = \frac{(2.3.4 \dots 2015) \cdot (2.3.4 \dots 2015)}{(1.2.3 \dots 2014) \cdot (3.4.5 \dots 2016)}$$

$$C = \frac{2015.2}{2016} = \frac{2015}{1008}$$

$$C = \frac{2015}{1008}.$$

Bài 50: Thực hiện các phép tính:

$$a) S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$$

$$b) [528 : (19,3 - 15,3)] + 42 \cdot (128 + 75 - 32) - 7314$$

Trích đề HSG Chu Văn An năm 2018-2019

Lời giải

$$a) S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$$

$$3S = 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + 99.100.(101-98)$$

$$S = 1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + \dots + 99.100.101 - 98.99.100$$

$$S = 99.100.101 : 3 = 333300$$

$$b) [528 : (19,3 - 15,3)] + 42 \cdot (128 + 75 - 32) - 7314$$

$$\begin{aligned} &= (528:4) + 42.171 - 7314 \\ &= 121 + 7182 - 7314 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Bài 51: Thực hiện phép tính:

$$a) S = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \dots + \frac{61}{(30.31)^2}$$

$$b) B = 1 \frac{6}{41} \cdot \left(\frac{12 + \frac{12}{19} - \frac{12}{37} - \frac{12}{53}}{3 + \frac{3}{19} - \frac{3}{37} - \frac{3}{53}} \cdot \frac{4 + \frac{4}{15} + \frac{4}{4} + \frac{4}{2013}}{5 + \frac{5}{15} + \frac{5}{4} + \frac{5}{2013}} \right) \cdot \frac{12424243}{237373735}$$

Trích đề HSG Tam Dương năm 2018-2019

Lời giải

$$a) \text{Ta có: } \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \text{ với } n \in \mathbb{N}^*$$

$$S = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \dots + \frac{61}{(30.31)^2}$$

$$S = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{30^2} - \frac{1}{31^2}\right) = 1 - \frac{1}{31^2} = \frac{31^2 - 1}{31^2} = \frac{960}{961}$$

$$b) B = 1 \frac{6}{41} \cdot \left(\frac{12 + \frac{12}{19} - \frac{12}{37} - \frac{12}{53}}{3 + \frac{3}{19} - \frac{3}{37} - \frac{3}{53}} \cdot \frac{4 + \frac{4}{15} + \frac{4}{4} + \frac{4}{2013}}{5 + \frac{5}{15} + \frac{5}{4} + \frac{5}{2013}} \right) \cdot \frac{12424243}{237373735}$$

$$B = \frac{47}{41} \cdot \left[\frac{12 \cdot \left(1 + \frac{1}{19} - \frac{1}{37} - \frac{1}{53}\right)}{3 \cdot \left(1 + \frac{1}{19} - \frac{1}{37} - \frac{1}{53}\right)} \cdot \frac{4 \cdot \left(1 + \frac{1}{15} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2013}\right)}{5 \cdot \left(1 + \frac{1}{15} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2013}\right)} \right] \cdot \frac{41.3.1010101}{47.5.1010101}$$

$$B = \frac{47}{41} \cdot \left(4 \cdot \frac{5}{4}\right) \cdot \frac{41.3}{47.5}$$

$$B = 3.$$

Bài 52: Cho $A = \left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{4} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2019} - 1\right)\left(\frac{1}{2020} - 1\right)\left(\frac{1}{2021} - 1\right)$

$$B = \left(-1\frac{1}{2}\right)\left(-1\frac{1}{3}\right)\left(-1\frac{1}{4}\right) \dots \left(-1\frac{1}{2019}\right)\left(-1\frac{1}{2020}\right)$$

Tính giá trị biểu thức $M = A \cdot B$.

Trích đề HSG Nguyễn Chích năm 2020-2021

Lời giải

$$A = \left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{4} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2019} - 1\right)\left(\frac{1}{2020} - 1\right)\left(\frac{1}{2021} - 1\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) \dots \left(-\frac{2018}{2019}\right)\left(-\frac{2019}{2020}\right)\left(-\frac{2020}{2021}\right) \text{ (2020 thừa số)}$$

$$= \frac{1}{2021}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \left(-1\frac{1}{2}\right)\left(-1\frac{1}{3}\right)\left(-1\frac{1}{4}\right)\dots\left(-1\frac{1}{2019}\right)\left(-1\frac{1}{2020}\right) \\
 &= \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{5}{4}\right)\dots\left(-\frac{2020}{2019}\right)\left(-\frac{2021}{2020}\right) \quad (2019 \text{ thừa số}) \\
 &= \frac{-2021}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } M = A \cdot B = \frac{1}{2021} \cdot \frac{-2021}{2} = \frac{-1}{2}.$$

Bài 53: Thực hiện phép tính

$$\text{a) } M = \frac{3}{5.7} + \frac{3}{7.9} + \frac{3}{9.11} + \dots + \frac{3}{59.61}$$

$$\text{b) Cho } A = \frac{\frac{1}{99} + \frac{2}{98} + \frac{3}{97} + \dots + \frac{99}{1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}}; B = \frac{92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100}}{\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}}$$

Tính $\frac{A}{B}$.

Trích đề HSG huyện Bắc Nghĩa năm 2018 -2019

Lời giải

$$\text{a) } M = \frac{3}{5.7} + \frac{3}{7.9} + \frac{3}{9.11} + \dots + \frac{3}{59.61}$$

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{5.7} + \frac{2}{7.9} + \dots + \frac{2}{59.61} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{59} - \frac{1}{61} \right)
 \end{aligned}$$

$$M = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{61} \right)$$

$$M = \frac{3}{2} \cdot \frac{56}{305} = \frac{84}{305}$$

$$\text{b) } A = \frac{\frac{1}{99} + \frac{2}{98} + \frac{3}{97} + \dots + \frac{99}{1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}}; B = \frac{92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100}}{\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}}$$

$$\text{Tính } A = \frac{\frac{1}{99} + \frac{2}{98} + \frac{3}{97} + \dots + \frac{99}{1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}}$$

$$\frac{1}{99} + \frac{2}{98} + \frac{3}{97} + \dots + \frac{99}{1} = \left(\frac{100}{99} - 1 \right) + \left(\frac{100}{98} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{100}{2} - 1 \right) + \frac{99}{1}$$

$$= \left(\frac{100}{99} + \frac{100}{98} + \frac{100}{97} + \dots + \frac{100}{2} \right) - (1+1+1+\dots+1) + \frac{99}{1}$$

$$= \frac{100}{99} + \frac{100}{98} + \frac{100}{97} + \dots + \frac{100}{2} + \frac{100}{100} = 100 \cdot \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{99} + \frac{1}{98} + \dots + \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Vậy } A = \frac{100 \cdot \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{99} + \dots + \frac{1}{2} \right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}} = 100 \quad (1)$$

$$\text{Tính: } B = \frac{92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100}}{\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}}$$

$$92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100} = 92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100}$$

$$= 92 - \left(1 - \frac{8}{9}\right) - \left(1 - \frac{8}{10}\right) - \left(1 - \frac{8}{11}\right) - \dots - \left(1 - \frac{8}{100}\right)$$

$$= 92 - (1+1+1+1+\dots+1) + \left(\frac{8}{9} + \frac{8}{10} + \frac{8}{11} + \dots + \frac{8}{100}\right)$$

$$= 0 + 40 \cdot \left(\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}\right)$$

$$\text{Vậy } B = \frac{40 \left(\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}\right)}{\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}} = 40 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{A}{B} = \frac{100}{40} = \frac{5}{2}$.

Bài 54. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $13.4.47 + 53.166 - 53.114$.

b) $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots + 994 - 995 - 996 + 997 + 998$.

c) $\left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$.

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Lời giải

a) $13.4.47 + 53.166 - 53.114$

$$= 52.47 + 53.(166 - 114)$$

$$= 52.47 + 53.52$$

$$= 52.(47 + 53)$$

$$= 52.100 = 5200$$

b) $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots + 994 - 995 - 996 + 997 + 998$

$$= 1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + \dots + (994 - 995 - 996 + 997) + 998$$

$$= 1 + 0 + \dots + 0 + 998$$

$$= 999$$

c) $\left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$

$$= \left(\frac{1-4}{2^2}\right) \left(\frac{1-9}{3^2}\right) \left(\frac{1-16}{4^2}\right) \dots \left(\frac{1-1000}{100^2}\right)$$

$$= \frac{-3}{2^2} \cdot \frac{-8}{3^2} \cdot \frac{-15}{4^2} \dots \frac{-999}{100^2}$$

$$= -\frac{1.3 \cdot 2.4 \cdot 3.5 \cdot \dots \cdot 99.101}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot 100^2} \text{ (Có 99 số âm nên tích là số âm)}$$

$$= -\frac{(1.2.3 \dots 99)(3.4.5 \dots 101)}{(2.3.4 \dots 100)(2.3.4 \dots 100)} = -\frac{1.101}{100.2} = -\frac{101}{200}.$$

Bài 55:

1) Tính giá trị biểu thức $A = 99^{99} - \left\{ 1, (3) - \left[5.2^3 - (-7)^2 + \frac{1}{3} + 99^9 \cdot (27^4 - 81^3 - 99^{90}) \right] \right\}$.

2) Tính tích $P = \left(1 + \frac{7}{9}\right) \left(1 + \frac{7}{20}\right) \left(1 + \frac{7}{33}\right) \dots \left(1 + \frac{7}{2900}\right)$.

*Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2020 -2021***Lời giải**

1) $A = 99^{99} - \left\{ 1, (3) - \left[5.2^3 - (-7)^2 + \frac{1}{3} + 99^9 \cdot (27^4 - 81^3 - 99^{90}) \right] \right\}$

$$A = 99^{99} - \left\{ 1, (3) - \left[5.2^3 - (-7)^2 + \frac{1}{3} + 99^9 \cdot (3^{12} - 3^{12} - 99^{90}) \right] \right\}$$

$$= 99^{99} - \left\{ 1, (3) - \left[5.2^3 - (-7)^2 + \frac{1}{3} - 99^{99} \right] \right\}$$

$$= 99^{99} - \left\{ 1, (3) - 5.2^3 + (-7)^2 - \frac{1}{3} + 99^{99} \right\}$$

$$= 99^{99} - \frac{4}{3} + 40 - 49 + \frac{1}{3} - 99^{99} = -10.$$

Vậy $A = -10$.

2) $P = \left(1 + \frac{7}{9}\right) \left(1 + \frac{7}{20}\right) \left(1 + \frac{7}{33}\right) \dots \left(1 + \frac{7}{2900}\right)$

$$= \frac{2.8.3.9.4.10 \dots 51.57}{1.9.2.10.3.11 \dots 50.58} = \frac{2.3.4 \dots 51}{1.2.3 \dots 50} \cdot \frac{8.9.10 \dots 57}{9.10.11 \dots 58} = \frac{51.8}{58} = \frac{204}{29}.$$

Vậy $P = \frac{204}{29}$.

Bài 56: Tìm số nguyên x , biết:

a) $2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7$

b) $\frac{x}{6} + \frac{x}{10} + \frac{x}{15} + \frac{x}{21} + \frac{x}{28} + \frac{x}{36} + \frac{x}{45} + \frac{x}{55} + \frac{x}{66} + \frac{x}{78} = \frac{220}{39}$

*Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018 -2019***Lời giải**

a) $2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7$

$$25 - (3x + 2) = 2016 : 63$$

$$25 - (3x + 2) = 32$$

$$3x + 2 = -7$$

$$3x = -9$$

$$x = -3.$$

Vậy $x = 3$.

$$b) \frac{x}{6} + \frac{x}{10} + \frac{x}{15} + \frac{x}{21} + \frac{x}{28} + \frac{x}{36} + \frac{x}{45} + \frac{x}{55} + \frac{x}{66} + \frac{x}{78} = \frac{220}{39}$$

$$x \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{36} + \frac{1}{45} + \frac{1}{55} + \frac{1}{66} + \frac{1}{78} \right) = \frac{220}{39}$$

$$2x \cdot \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110} + \frac{1}{132} + \frac{1}{156} \right) = \frac{220}{39}$$

$$2x \cdot \left(\frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{9.10} + \frac{1}{10.11} + \frac{1}{11.12} + \frac{1}{12.13} \right) = \frac{220}{39}$$

$$2x \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} \right) = \frac{220}{39}$$

$$2x \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{13} \right) = \frac{220}{39}$$

$$2x = \frac{220}{39} : \frac{10}{39}$$

$$2x = 22$$

$$x = 11.$$

Vậy $x = 11$.

Bài 57:

a) Tìm x biết: $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$.

b) Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ biết: $2^x + 624 = 5^y$.

Trích đề HSG huyện Nam Đàn năm 2018 -2019

Lời giải

a) Từ giả thiết ta có: $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$.

TH1: $x - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ suy ra $x = \frac{5}{6}$.

TH2: $x - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$ suy ra $x = -\frac{1}{6}$.

Vậy $x \in \left\{ \frac{-1}{6}; \frac{5}{6} \right\}$.

b)

Nếu $x = 0$ thì $5^y = 2^0 + 624 = 625 = 5^4$ suy ra $y = 4 (y \in \mathbb{N})$

Nếu $x \neq 0$ thì vế trái là số chẵn, vế phải là số lẻ nên vô lý.

Vậy $x = 0, y = 4$.

Bài 58: Tìm các số nguyên x biết:

a) $(19x + 2.5^2) : 14 = (13 - 8)^2 - 4^2$

b) $(7x - 11)^3 = (-3)^2 \cdot 15 + 208$

Trích đề HSG Chu Văn An năm 2018 -2019

Lời giải

a) $(19x + 2.5^2) : 14 = (13 - 8)^2 - 4^2$

$$x = \left\{ 14 \left[(13-8)^2 - 4^2 \right] - 2.5^2 \right\} : 19 = 4.$$

Vậy $x = 4$.

$$b) (7x-11)^3 - 9.15 = 208$$

$$(7x-11)^3 = 9.15 + 208 = 343 = 7^3$$

$$7x-11 = 7$$

$$7x = 18$$

$$x = \frac{18}{7} \text{ (ktm)}$$

Vậy không có giá trị x nguyên thoả mãn.

Bài 59: Tìm số tự nhiên x , biết:

$$a) x + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+2010) = 2029099$$

$$b) 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2x = 210$$

Trích đề HSG huyện Hoà An năm 2018-2019

Lời giải

$$a) x + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+2010) = 2029099$$

$$2011x + 1 + 2 + \dots + 2010 = 2029099$$

$$2011x + \frac{2010 \cdot 2011}{2} = 2029099$$

$$2011x = 2029099 - \frac{2010 \cdot 2011}{2}$$

$$x = \left(2029099 - \frac{2010 \cdot 2011}{2} \right) : 2011 = 4$$

Vậy $x = 4$.

$$b) 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2x = 210$$

$$2 \cdot \frac{x(x+1)}{2} = 210$$

$$x(x+1) = 210 = 14 \cdot 15$$

$$x = 14.$$

Vậy $x = 14$.

Bài 60: Tìm x , biết: $\left(\frac{2}{11.13} + \frac{2}{13.15} + \dots + \frac{2}{19.21} \right) \cdot 462 - [2,04 : (x+1,05)] : 0,12 = 19$.

Trích đề HSG huyện Trục Ninh năm 2018-2019

Lời giải

$$\left(\frac{2}{11.13} + \frac{2}{13.15} + \dots + \frac{2}{19.21} \right) \cdot 462 - [2,04 : (x+1,05)] : 0,12 = 19$$

$$20 - [2,04 : (x+1,05)] : 0,12 = 19$$

$$[2,04 : (x+1,05)] : 0,12 = 1$$

$$x+1,05 = 17$$

$$x = 15,95.$$

Vậy $x = 15,95$.

Bài 61: Tìm các số nguyên x, y thoả mãn:

a) $(7x-11)^3 = (-3)^2 \cdot 15 + 208$

b) $(2x-7)^2 = 29 + 5 \cdot (-4)$

c) $(x-2)^2 (y-3) = -4$

*Trích đề HSG huyện Sơn Tây năm 2017-2018***Lời giải**

a) $(7x-11)^3 = (-3)^2 \cdot 15 + 208$

$(7x-11)^3 = 9 \cdot 15 + 208 = 343 = 7^3$

$7x-11=7$

$7x=18$

$x = \frac{18}{7}$ (ktm)

Vậy không có giá trị x nguyên thoả mãn.

b) $(2x-7)^2 = 29 + 5 \cdot (-4)$

$(2x-7)^2 = 29 - 20 = 9$

TH1: $2x-7=3$ suy ra $2x=7+3=10$ suy ra $x=10:2=5$.

TH2: $2x-7=-3$ suy ra $2x=7-3=4$ suy ra $x=4:2=2$.

Vậy $x \in \{2; 5\}$.

c) $(x-2)^2 (y-3) = -4$

Do $-4 = 1^2 \cdot (-4) = 2^2 \cdot (-1)$ nên có các trường hợp sau:

*) $(x-2)^2 = 1$ và $y-3 = -4$. suy ra: $x=3; y=-1$ hoặc $x=1; y=-1$.

*) $(x-2)^2 = 4$ và $y-3 = -1$. suy ra: $x=4; y=2$ hoặc $x=0; y=2$.

Vậy: $(x; y) \in \{(3; -1); (1; -1); (4; 2); (0; 2)\}$.**Bài 62:** Tìm x biết:

a) $x^2 - 9 = 0$

b) $\frac{3}{4} - (2x-1)^2 = 50\%$

*Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2019-2020***Lời giải**

a) Ta có: $x^2 - 9 = 0$ suy ra $x=3$ hoặc $x=-3$.

b) $\frac{3}{4} - (2x-1)^2 = 50\%$

$(2x-1)^2 = \frac{1}{4}$

TH1: $2x-1 = \frac{1}{2}$ suy ra $x = \frac{3}{4}$.

TH2: $2x-1 = -\frac{1}{2}$ suy ra $x = \frac{1}{4}$.

Vậy $x \in \left\{ \frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right\}$.

Bài 63: Tính $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{2352} + \frac{1}{2450}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{2352} + \frac{1}{2450} \\ &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{48.49} + \frac{1}{49.50} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{48} - \frac{1}{49} + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} \\ &= 1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50} \\ \text{Vậy } S &= \frac{49}{50} \end{aligned}$$

Bài 64: Tìm $x \in \mathbb{N}$, biết: $2^x + 2^{x+2} = \frac{200}{19} \cdot \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{19.20} \right)$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{200}{19} \cdot \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{19.20} \right) &= \frac{200}{19} \left(1 - \frac{1}{20} \right) = 10 \\ \Rightarrow 2^x + 2^{x+2} &= 10 \\ \Rightarrow 2^x (1+4) &= 10 \\ \Rightarrow 2^x = 2 &\Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Bài 65: Tính $B = 9 + 99 + 999 + \dots + 99\dots 9$ (n chữ số 9)

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2011- 2012

Lời giải

$$B = 10 - 1 + 100 - 1 + 1000 - 1 + \dots + 10\dots 0 (n+1 \text{ chữ số } 0) - 1$$

$$B = (10 + 100 + 1000 + \dots + 10\dots 0) - (1 + 1 + \dots + 1)$$

$$B = 11\dots 1 (n+1 \text{ chữ số } 1) - n$$

Bài 66: Tính $A = \frac{101+100+99+98+\dots+4+3+2+1}{101-100+99-98+\dots-4+3-2+1}$

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2011- 2012

Lời giải

$$A = \frac{(101+1) + (100+2) + \dots + (50+52) + 51}{51}$$

$$A = 51 \cdot \frac{2+2+\dots+2+1}{51}$$

$$A = 50 \cdot 2 + 1$$

$$A = 101$$

Bài 67: Tính $A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2021 + 2022$.

Trích đề HSG huyện Hải Hậu, năm 2011- 2012

Lời giải

Số số hạng của dãy là $\frac{(2022-1)}{1} + 1 = 2022$ (số hạng).

$$\text{Tổng } A = \frac{(1+2022) \cdot 2022}{2} = 2045253.$$

Bài 68: Thực hiện phép tính :

$$\text{a) } \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$$

$$\text{b) } \frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}$$

$$\text{c) } \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có : } & \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3} \\ &= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 7^3 \cdot 2^3} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3-1)}{2^{12} \cdot 3^5 (3+1)} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 (1-7)}{5^9 \cdot 7^3 (1+8)} = \frac{5 \cdot (-6)}{9} = \frac{-10}{3} \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có : } \frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6} = \frac{5 \cdot 2^{30} \cdot 3^{18} - 3^{20} \cdot 2^{29}}{5 \cdot 2^{28} \cdot 3^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}} = \frac{2^{29} \cdot 3^{18} (5 \cdot 2 - 3^2)}{2^{28} \cdot 3^{18} (5 \cdot 3 - 7 \cdot 2)} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{c) Ta có : } \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20} = \frac{2^{10} \cdot 3^8 - 2^{10} \cdot 3^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5} = \frac{2^{10} \cdot 3^8 (1-3)}{2^{10} \cdot 3^8 (1+5)} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

$$\text{Bài 69: Thực hiện phép tính: } \left(\frac{1,5+1-0,75}{2,5+\frac{5}{3}-1,25} + \frac{0,375-0,3+\frac{3}{11}+\frac{3}{12}}{-0,625+0,5-\frac{5}{11}-\frac{5}{12}} \right) : \frac{1890}{2005} + 115$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } & \left(\frac{1,5+1-0,75}{2,5+\frac{5}{3}-1,25} + \frac{0,375-0,3+\frac{3}{11}+\frac{3}{12}}{-0,625+0,5-\frac{5}{11}-\frac{5}{12}} \right) : \frac{1890}{2005} + 115 \\ &= \left(\frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{2} + \frac{5}{3} - \frac{5}{4}} + \frac{\frac{3}{8} - \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{\frac{-5}{8} + \frac{5}{10} - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} \right) : \frac{378}{401} + 115 = \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{-5} \right) : \frac{378}{401} + 115 = 0 : \frac{378}{401} + 115 = 115 \end{aligned}$$

Bài 70:

$$\text{a) Tính nhanh: } 16 + (27 - 7.6) - (94.7 - 27.99)$$

$$\text{b) Tính tổng: } A = \frac{2}{1.4} + \frac{2}{4.7} + \frac{2}{7.10} + \dots + \frac{2}{97.100}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } & 16 + (27 - 7.6) - (94.7 - 27.99) \\ &= 16 + 27 - 7.6 - 94.7 + 27.99 \\ &= 16 + 27 + 27.99 - 7.6 - 94.7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 16 + 27(99 + 1) - 7.(6 + 94) \\
&= 16 + 27.100 - 7.100 \\
&= 16 + 100(27 - 7) = 16 + 100.20 = 16 + 2000 = 2016
\end{aligned}$$

$$b) A = \frac{2}{1.4} + \frac{2}{4.7} + \frac{2}{7.10} + \dots + \frac{2}{97.100}$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{1.4} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) \Rightarrow \frac{2}{1.4} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{2}{4.7} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right);$$

$$\frac{2}{7.10} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right)$$

.....;

$$\frac{2}{97.100} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{100} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{99}{100} = \frac{33}{50}$$

Bài 71: Tính giá trị của các biểu thức sau bằng cách hợp lý:

$$1) A = 35.34 + 35.86 + 65.75 + 65.45$$

$$2) B = \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{2022} \right)$$

$$3) C = \frac{2}{4.9} + \frac{2}{9.14} + \frac{2}{14.19} + \dots + \frac{2}{64.69}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
A &= 35.34 + 35.86 + 65.75 + 65.45 \\
&= 35(34 + 86) + 65(75 + 45) \\
&= 35.120 + 65.120 = 120(35 + 65) = 120.100 = 12000
\end{aligned}$$

$$b) B = \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{2022} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2021}{2022}$$

$$= \frac{1}{2022}$$

$$c) C = \frac{2}{4.9} + \frac{2}{9.14} + \frac{2}{14.19} + \dots + \frac{2}{64.69} = \frac{2}{5} \left(\frac{5}{4.9} + \frac{5}{9.14} + \frac{5}{14.19} + \dots + \frac{5}{64.69} \right)$$

$$= \frac{2}{5} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{64} - \frac{1}{69} \right) = \frac{2}{5} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{69} \right) = \frac{13}{138}$$

Bài 72:

1. Thực hiện phép tính:

$$A = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots + 2018 - 2019 - 2020.$$

2. Tính tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 2013.2014.$

Lời giải

1. Từ 1, 2, 3, ..., 2020 có 2020 số.

Nhóm 4 số thành 4 nhóm ta được $2020 : 4 = 505$ (nhóm)

Ta có:

$$A = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots + 2018 - 2019 - 2020$$

$$A = (1 + 2 - 3 - 4) + (5 + 6 - 7 - 8) + \dots + (2017 + 2018 - 2019 - 2020)$$

$$A = (-4) \cdot 505 = -2020.$$

2. Ta có:

$$3A = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + \dots + 2013.2014.3$$

$$3A = 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + 2013.2014.(2015-2012)$$

$$3A = 1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + \dots + 2013.2014.2015 - 2012.2013.2014$$

$$3A = 2013.2014.2015$$

$$\Rightarrow A = 2723058910.$$

Bài 73: Thực hiện phép tính: $A = \left(\frac{1}{4.9} + \frac{1}{9.14} + \dots + \frac{1}{44.49} \right) \cdot \frac{1-3-5-\dots-49}{89}$

Lời giải

$$\text{Đặt : } B = \frac{1}{4.9} + \frac{1}{9.14} + \dots + \frac{1}{44.49} \Rightarrow 5B = \frac{5}{4.9} + \frac{5}{9.14} + \dots + \frac{5}{44.49} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{49} \right) = \frac{45}{4.49}$$

$$\Rightarrow B = \frac{9}{4.49}$$

$$\text{và } C = \frac{1-3-5-\dots-49}{89} = \frac{1-(3+5+\dots+49)}{89} = \frac{1-612}{89} = \frac{-611}{89}$$

$$\text{Khi đó : } A = B.C = \frac{9}{4.49} \cdot \frac{-611}{89}$$

Bài 74: Thực hiện phép tính: $\frac{(1+2+3+\dots+100)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)(63.1,2-21.3,6)}{1-2+3-4+\dots+99-100}$

Lời giải

$$\text{Ta có : } 63.1,2-21.3,6=0 \Rightarrow \frac{(1+2+3+\dots+100)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)(63.1,2-21.3,6)}{1-2+3-4+\dots+99-100} = 0$$

Bài 75: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện $2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n = 2^{n+1}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } S = 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n \Rightarrow S = 2^{n+1}$$

$$\text{Ta có : } 2.S = 2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + n.2^{n+1}.$$

$$\text{Suy ra : } S = 2S - S = (2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + n.2^{n+1}) - (2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n)$$

$$S = n.2^{n+1} - 2^3 - (2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n)$$

$$\text{Đặt } P = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n, \text{ ta tính được } P = 2P - P = 2^{n+1} - 2^3$$

$$\Rightarrow S = n.2^{n+1} - 2^3 - 2^{n+1} + 2^3 = (n-1).2^{n+1}$$

$$\text{Do đó } (n-1).2^{n+1} = 2^{n+1} \Rightarrow n-1 = 2^{10} \Rightarrow n = 2^{10} + 1 = 1025.$$

PHIẾU BÀI TẬP SỐ 2

SỬU TÀM CÁC BÀI TRONG CÁC ĐỀ CỦA NHỮNG NĂM TRƯỚC ĐÓ

Bài 1: Tính nhanh: $A = \frac{-5}{9} + \frac{8}{15} + \frac{-2}{11} + \frac{4}{-9} + \frac{7}{15}$.

Trích đề HSG huyện Tỉnh Gia năm 2018-2019

Bài 2: Thực hiện tính A bằng cách hợp lý nhất: $A = \frac{2000.2001-1000}{2000.2000+1000}$.

Trích đề HSG trường THCS Quê Phú (Quê Sơn) năm 2018 - 2019**Bài 3:** Tính tổng sau $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 97.98 + 98.99$.**Bài 4:** Tính tổng sau $A = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + 97.98.99 + 98.99.100$.**Bài 5:** Tính tổng $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$.**Trích đề HSG cấp trường năm 2019-2020****Bài 6:** Tính tổng sau $B = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{98} + 3^{100}$.**Bài 7:** Tính tổng sau $C = 5 + 5^3 + 5^5 + 5^7 + \dots + 5^{99} + 5^{101}$ **Bài 8:** Tính tổng $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \dots + 9 + \frac{19}{2}$.**Bài 9:** Tính tổng $S = 2 + 5 + 8 + 11 + \dots + 47 + 50$.**Bài 10:** Tính tổng $S = 5 + 10 + 15 + \dots + 100$.**Bài 11:** Tính tổng $A = 98 + 93 + 88 + \dots + 13 + 8 + 3$.**Bài 12:** Cho $S = 7 + 9 + 11 + \dots + 97 + 99$.a) Tính tổng S trên.

b) Tìm số hạng thứ 33 của tổng trên.

Bài 13: Cho dãy số 2; 7; 12;; 22;

a) Nêu quy luật của dãy số trên.

b) Viết tập hợp B gồm 5 số hạng liên tiếp của dãy số đó, bắt đầu từ số hạng thứ năm.

c) Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của dãy số.

Bài 14: Người ta viết liền nhau các số tự nhiên 123456....

a) Hỏi các chữ số đơn vị của các số 53; 328; 1587 đứng ở hàng thứ bao nhiêu?

b) Chữ số viết ở hàng thứ 427 là chữ số nào?

Bài 15: Tính tổng $S = \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} + 3 + \dots + \frac{101}{3} + \frac{103}{3} + 35$.**Bài 16:** Tính tổng $B = 1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 70 + 73$.**Bài 17:** Tính tổng $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{100}$.

*) *Phân tích:* Kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với 2. Do đó nếu ta nhân 2 vào tổng S thì ta có tổng $2S$ với các số hạng từ 2 đến 2^{100} giống như trong tổng S , khi đó nếu lấy số tổng $2S$ trừ đi tổng S thì các số hạng từ 2 đến 2^{100} bị triệt tiêu và tính được tổng S .

Bài 18: Tính tổng $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}$.**Bài 19:** Tính tổng $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2019 + 2020$.**Bài 20:** Tính tổng $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 2019 + 2021$.**Bài 21:** Tính tổng $S = 5 + 10 + 15 + \dots + 2015 + 2020$.

Bài 22: Tính tổng $S = 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \dots + \frac{4039}{2} + 2020$.

Bài 24: Tính tổng của 21 số lẻ liên tiếp đầu tiên? .

Bài 25: Tính tổng $S = \frac{1}{18} + \frac{1}{18.9} + \frac{1}{162.9} + \frac{1}{1458.9}$.

Bài 26: Thực hiện tính A bằng cách hợp lý nhất: $A = \frac{2000.2001 - 1000}{2000.2000 + 1000}$

Trích đề HSG THCS Quế Phú năm 2018-2019

Bài 27: Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$, biết:

a) $\frac{x-4}{y-3} = \frac{4}{3}$ và $x - y = 5$.

b) $(x+1)(3y-2) = -55$.

Trích đề HSG huyện Tỉnh Gia năm 2018 - 2019

Bài 28: Tìm x biết: $-\frac{7}{4}x \left(\frac{33}{12} + \frac{3333}{2020} + \frac{333333}{303030} + \frac{33333333}{42424242} \right) = 22$

Trích đề HSG trường THCS Phan Đình Phùng năm 2018-2019

Bài 29: Tìm một phân số tối giản, biết rằng khi cộng mẫu số vào tử số và cộng mẫu số vào mẫu số của phân số ấy thì ta được phân số mới, lớn gấp 2 lần phân số ban đầu.

Trích đề HSG trường THCS Phan Đình Phùng năm 2018-2019

Bài 30: Tìm y biết: $(y+1) + (y+2) + (y+3) + \dots + (y+50) = 1425$

Trích đề HSG trường THCS Quế Phú (Quế Sơn) năm 2018 - 2019

Bài 31: Tìm x , biết $x + 2x + 3x + \dots + 2010x + 2011x = 2012.2013$.

Bài 32: Tìm x , biết $(x+1) + (2x+3) + (3x+5) + \dots + (99x+197) + (100x+199) = 30200$.

Bài 33: Cho $B = 6 + 6^2 + 6^3 + \dots + 6^{2018} + 6^{2019}$. Tìm x để $5.B + 6 = 6^x$.

Bài 34: Cho $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$. Tìm x biết $2(A+2) = 2^{2x}$.

Bài 35:

a) Cho $M = (-a+b) - (b+c-a) + (c-a)$. Trong đó $b, c \in \mathbb{Z}$ còn a là một số nguyên âm. Chứng minh rằng biểu thức M luôn dương

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

Trích đề HSG huyện Tam Nông năm 2018-2019

Bài 36: Cho biểu thức $A = \frac{a^3 + 2a^2 - 1}{a^3 + 2a^2 + 2a + 1}$

a) Rút gọn biểu thức.

b) Chứng minh rằng nếu a là số nguyên thì giá trị của biểu thức tìm được ở câu a là một phân số tối giản.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 37: Tìm số tự nhiên n và chữ số a biết rằng: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \overline{aaa}$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 38: Tìm hai số x, y biết $(x+5)^{2020} + (4y-4)^{2020} = 0$.

Bài 39: Tìm hai số x, y biết $(2x-1)^2 + (2y-x)^{2020} - 8 = 12 - 5 \cdot 2^2$

Bài 40: Tìm ba số x, y, z biết $(3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2010} = 0$

Bài 41: Tìm số tự nhiên n, m biết $2^m - 2^n = 1024$.

Bài 42: Tìm x biết $(x+1) + (x+2) + (x+3) + \dots + (x+99) + (x+100) = 5070$.

Bài 43: Tìm x biết $(x+1) + (x+2) + (x+3) + \dots + (x+49) + (x+50) = 7450$

Bài 44: Tìm y biết: $(y+1) + (y+2) + (y+3) + \dots + (y+50) = 1425$

Trích đề HSG THCS Quế Phú năm 2018-2019

Bài 45: Rút gọn biểu thức:

$$a) A = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2499}\right)$$

$$b) B = \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}}{2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27}} : \frac{4 + \frac{4}{7} + \frac{4}{49} - \frac{4}{343}}{1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343}}$$

Trích đề HSG huyện Kinh Môn năm 2018 -2019

Bài 46: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) A = 68.74 + 27.68 - 68$$

$$b) B = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 539 - \left[639 - 8 \cdot (7^8 : 7^6 + 2017^0) \right] \right\}$$

$$c) C = \left(\frac{151515}{161616} + \frac{17^9}{17^{10}} \right) - \left(\frac{1500}{1600} - \frac{1616}{1717} \right)$$

$$d) D = \left(\frac{1}{2^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{3^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{4^2} - 1 \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{100^2} - 1 \right)$$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018 -2019

Bài 47: Tính:

$$a) A = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots + 2013 + 2014 - 2015 - 2016$$

$$b) B = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10 + 4 \cdot 6 \cdot 8 + 14 \cdot 16 \cdot 20}{3 \cdot 6 \cdot 15 + 6 \cdot 9 \cdot 12 + 21 \cdot 24 \cdot 30}$$

Trích đề HSG huyện Yên Việt năm 2018-201

Bài 48: Thực hiện các phép tính sau một cách hợp lý:

$$a) (10^2 + 11^2 + 12^2) : (13^2 + 14^2)$$

$$b) 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 9 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 8 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 7 \cdot 8^2$$

$$c) \frac{(3 \cdot 4 \cdot 2^{16})^2}{11 \cdot 2^{13} \cdot 4^{11} - 16^9}$$

$$d) 1152 - (374 + 1152) + (-65 + 374)$$

Trích đề HSG huyện Nghi Lộc năm 2018-2019

Bài 49: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) A = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} : 5 - \frac{1}{18} \cdot (-3)^2$$

$$b) B = 3 \cdot \left\{ 5 \cdot \left[(5^2 + 2^3) : 11 \right] - 16 \right\} + 2015$$

$$c) C = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2014.2016}\right)$$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hoá năm 2018 -2019

Bài 50: Thực hiện các phép tính:

a) $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$

b) $[528 : (19,3 - 15,3)] + 42.(128 + 75 - 32) - 7314$

Trích đề HSG Chu Văn An năm 2018-2019

Bài 51: Thực hiện phép tính:

a) $S = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \dots + \frac{61}{(30.31)^2}$

b) $B = 1 \frac{6}{41} \cdot \left(\frac{12 + \frac{12}{19} - \frac{12}{37} - \frac{12}{53}}{3 + \frac{3}{19} - \frac{3}{37} - \frac{3}{53}} \cdot \frac{4 + \frac{4}{15} + \frac{4}{4} + \frac{4}{2013}}{5 + \frac{5}{15} + \frac{5}{4} + \frac{5}{2013}} \right) \cdot \frac{12424243}{237373735}$

Trích đề HSG Tam Dương năm 2018-2019

Bài 52: Cho $A = \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{4} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2019} - 1\right) \left(\frac{1}{2020} - 1\right) \left(\frac{1}{2021} - 1\right)$

$$B = \left(-1 \frac{1}{2}\right) \left(-1 \frac{1}{3}\right) \left(-1 \frac{1}{4}\right) \dots \left(-1 \frac{1}{2019}\right) \left(-1 \frac{1}{2020}\right)$$

Tính giá trị biểu thức $M = A.B$.

Trích đề HSG Nguyễn Chích năm 2020-2021

Bài 53: Thực hiện phép tính

a) $M = \frac{3}{5.7} + \frac{3}{7.9} + \frac{3}{9.11} + \dots + \frac{3}{59.61}$

b) Cho $A = \frac{\frac{1}{99} + \frac{2}{98} + \frac{3}{97} + \dots + \frac{99}{1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}}$; $B = \frac{92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100}}{\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}}$

Tính $\frac{A}{B}$.

Trích đề HSG huyện Bắc Nghĩa năm 2018 -2019

Bài 54. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $13.4.47 + 53.166 - 53.114$.

b) $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots + 994 - 995 - 996 + 997 + 998$.

c) $\left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$.

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 -2023

Bài 55:

1) Tính giá trị biểu thức $A = 99^{99} - \left\{ 1, (3) - \left[5.2^3 - (-7)^2 + \frac{1}{3} + 99^9 \cdot (27^4 - 81^3 - 99^{90}) \right] \right\}$.

2) Tính tích $P = \left(1 + \frac{7}{9}\right) \left(1 + \frac{7}{20}\right) \left(1 + \frac{7}{33}\right) \dots \left(1 + \frac{7}{2900}\right)$.

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2020 -2021

Bài 56: Tìm số nguyên x , biết:

a) $2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7$

b) $\frac{x}{6} + \frac{x}{10} + \frac{x}{15} + \frac{x}{21} + \frac{x}{28} + \frac{x}{36} + \frac{x}{45} + \frac{x}{55} + \frac{x}{66} + \frac{x}{78} = \frac{220}{39}$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018 -2019

Bài 57:

a) Tìm x biết: $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$.

b) Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ biết: $2^x + 624 = 5^y$.

Trích đề HSG huyện Nam Đàn năm 2018 -2019

Bài 58: Tìm các số nguyên x biết:

a) $(19x + 2.5^2) : 14 = (13 - 8)^2 - 4^2$

b) $(7x - 11)^3 = (-3)^2 \cdot 15 + 208$

Trích đề HSG Chu Văn An năm 2018 -2019

Bài 59: Tìm số tự nhiên x , biết:

a) $x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 2010) = 2029099$

b) $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2x = 210$

Trích đề HSG huyện Hoà An năm 2018-2019

Bài 60: Tìm x , biết: $\left(\frac{2}{11.13} + \frac{2}{13.15} + \dots + \frac{2}{19.21}\right) \cdot 462 - [2,04 : (x + 1,05)] : 0,12 = 19$.

Trích đề HSG huyện Trục Ninh năm 2018-2019

Bài 61: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn:

a) $(7x - 11)^3 = (-3)^2 \cdot 15 + 208$

b) $(2x - 7)^2 = 29 + 5 \cdot (-4)$

c) $(x - 2)^2 (y - 3) = -4$

Trích đề HSG huyện Sơn Tây năm 2017-2018

Bài 62: Tìm x biết:

a) $x^2 - 9 = 0$

b) $\frac{3}{4} - (2x - 1)^2 = 50\%$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2019-2020

Bài 63: Tính $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{2352} + \frac{1}{2450}$.

Bài 64: Tìm $x \in \mathbb{N}$, biết: $2^x + 2^{x+2} = \frac{200}{19} \cdot \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{19.20}\right)$

Bài 65: Tính $B = 9 + 99 + 999 + \dots + 99\dots 9$ (n chữ số 9)

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2011- 2012

Bài 66: Tính $A = \frac{101 + 100 + 99 + 98 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1}{101 - 100 + 99 - 98 + \dots - 4 + 3 - 2 + 1}$

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2011- 2012

Bài 67: Tính $A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2021 + 2022$.

Bài 68: Thực hiện phép tính :

a)
$$\frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$$

b)
$$\frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}$$

c)
$$\frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20}$$

Bài 69: Thực hiện phép tính:
$$\left(\frac{1,5 + 1 - 0,75}{2,5 + \frac{5}{3} - 1,25} + \frac{0,375 - 0,3 + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{-0,625 + 0,5 - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} \right) : \frac{1890}{2005} + 115$$

Bài 70:

a) Tính nhanh: $16 + (27 - 7.6) - (94.7 - 27.99)$

b) Tính tổng: $A = \frac{2}{1.4} + \frac{2}{4.7} + \frac{2}{7.10} + \dots + \frac{2}{97.100}$

Bài 71: Tính giá trị của các biểu thức sau bằng cách hợp lý:

1) $A = 35.34 + 35.86 + 65.75 + 65.45$

2) $B = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2022}\right)$

3) $C = \frac{2}{4.9} + \frac{2}{9.14} + \frac{2}{14.19} + \dots + \frac{2}{64.69}$

Bài 72:

1. Thực hiện phép tính:

$A = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots + 2018 - 2019 - 2020.$

2. Tính tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 2013.2014.$

Bài 73: Thực hiện phép tính: $A = \left(\frac{1}{4.9} + \frac{1}{9.14} + \dots + \frac{1}{44.49} \right) \cdot \frac{1 - 3 - 5 - \dots - 49}{89}$

Bài 74: Thực hiện phép tính:
$$\frac{(1 + 2 + 3 + \dots + 100) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) (63.1, 2 - 21.3, 6)}{1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 99 - 100}$$

Bài 75: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện $2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^n = 2^{n+1}.$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>



CHỦ ĐỀ: TÍNH TOÁN VỚI SỐ TỰ NHIÊN, SỐ NGUYÊN, PHÂN SỐ

A. PHẦN NỘI DUNG

I. Thực hiện các phép tính.

Dạng 1: Thực hiện phép tính.

Bài 1: Một người leo núi với vận tốc 2km/h, lúc xuống núi với vận tốc 6km/h. Vận tốc trung bình của người đó trong toàn hành trình lên và xuống là:

- A. 3,5 km/h B. 4,5 km/h C. 4 km/h D. 3 km/h

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 2: Giá trị của $T = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{12} \cdot \dots \cdot \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64}$ bằng

- A. $\frac{1}{36^2}$ B. $\frac{1}{2^{30}}$ C. $\frac{1}{2^{36}}$ D. $\frac{1}{2^{32}}$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 3: Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{2 \cdot 8^4 \cdot 27^2 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4}$ ta được kết quả là:

- A. $\frac{2}{9}$ B. $\frac{8}{9}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{2}{3}$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 4: Thực hiện phép tính:

a) $P = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 400 - \left[673 - 2^3 \cdot (7^3 : 7 + 1) \right] \right\}$. b) $Q = \frac{4^3 \cdot 9^2 + 6^3 \cdot 120}{-8^2 \cdot 3^6 + 6^5}$

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } P &= 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 400 - \left[673 - 2^3 \cdot (7^3 : 7 + 1) \right] \right\} \\ &= 8 \cdot 125 - 3 \{ 400 - [673 - 8 \cdot 50] \} \\ &= 1000 - 3 \cdot [400 - 473] \\ &= 1000 - 3 \cdot (-73) \\ &= 1219 \end{aligned}$$

$$\text{b) } Q = \frac{4^3 \cdot 9^2 + 6^3 \cdot 120}{-8^2 \cdot 3^6 + 6^5} = \frac{2^6 \cdot 3^4 + 2^3 \cdot 3^3 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 5}{-2^6 \cdot 3^6 + 6^5} = \frac{2^6 \cdot 3^4 + 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5}{-2^6 \cdot 3^6 + 2^5 \cdot 3^5} = \frac{2^6 \cdot 3^4 \cdot 2 \cdot 3}{2^5 \cdot 3^5 \cdot (-5)} = \frac{-4}{5}$$

Bài 5: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = 68 \cdot 74 + 27 \cdot 68 - 68$

b) $B = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 539 - \left[639 - 8 \cdot (7^8 : 7^6 + 2017^0) \right] \right\}$

c) $C = \left(\frac{151515}{161616} + \frac{17^9}{17^{10}} \right) - \left(\frac{1500}{1600} - \frac{1616}{1717} \right)$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Lời giải



$$a) A = 68.74 + 27.68 - 68 = 68.(74 + 27 - 1) = 68.100 = 6800$$

$$b) B = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 539 - \left[639 - 8.(7^8 : 7^6 + 2017^0) \right] \right\}$$

$$= 8.125 - 3 \cdot \left\{ 539 - \left[639 - 8.(7^2 + 1) \right] \right\}$$

$$= 1000 - 3 \cdot \left\{ 539 - \left[639 + 8.50 \right] \right\}$$

$$= 1000 - 3.300 = 1000 - 900 = 100$$

$$c) C = \left(\frac{151515}{161616} + \frac{17^9}{17^{10}} \right) - \left(\frac{1500}{1600} - \frac{1616}{1717} \right) = \left(\frac{15}{16} + \frac{1}{17} \right) - \left(\frac{15}{16} - \frac{16}{17} \right)$$

$$= \left(\frac{15}{16} - \frac{15}{16} \right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{16}{17} \right) = 0 + 1 = 1$$

Bài 6: Thực hiện phép tính

$$a) A = \frac{5.(2^2 \cdot 3^2)^9 \cdot (2^2)^6 - 2.(2^2 \cdot 3)^{14} \cdot 3^4}{5.2^{28} \cdot 3^{18} - 7.2^{29} \cdot 3^{18}}$$

$$B = 81 \cdot \left[\frac{12 - \frac{12}{7} - \frac{12}{289} - \frac{12}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} \cdot \frac{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{169} + \frac{5}{91}}{6 + \frac{6}{13} + \frac{6}{169} + \frac{6}{91}} \right] \cdot \frac{158158158}{711711711}$$

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Lời giải

a) Ta có:

$$A = \frac{5.(2^2 \cdot 3^2)^9 \cdot (2^2)^6 - 2.(2^2 \cdot 3)^{14} \cdot 3^4}{5.2^{28} \cdot 3^{18} - 7.2^{29} \cdot 3^{18}}$$

$$= \frac{5.2^{18} \cdot 3^{18} \cdot 2^{12} - 2.2^{28} \cdot 3^{14} \cdot 3^4}{5.2^{28} \cdot 3^{18} - 7.2^{29} \cdot 3^{18}} = \frac{5.2^{30} \cdot 3^{18} - 2^{29} \cdot 3^{18}}{2^{28} \cdot 3^{18} \cdot (5 - 7.2)}$$

$$= \frac{2^{29} \cdot 3^{18} \cdot (5.2 - 1)}{2^{28} \cdot 3^{18} \cdot (5 - 14)} = \frac{2.9}{-9} = -2$$

b) Ta có:

$$B = 81 \cdot \left[\frac{12 - \frac{12}{7} - \frac{12}{289} - \frac{12}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} \cdot \frac{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{169} + \frac{5}{91}}{6 + \frac{6}{13} + \frac{6}{169} + \frac{6}{91}} \right] \cdot \frac{158158158}{711711711}$$

$$= 81 \cdot \left[\frac{12 \cdot \left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{289} - \frac{1}{85} \right)}{4 \cdot \left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{289} - \frac{1}{85} \right)} \cdot \frac{5 \cdot \left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{169} + \frac{1}{91} \right)}{6 \cdot \left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{169} + \frac{1}{91} \right)} \right] \cdot \frac{158.1001001}{711.1001001}$$

$$= 81 \cdot \left(\frac{12}{4} : \frac{5}{6} \right) \cdot \frac{158}{711} = 81 \cdot \frac{18}{5} \cdot \frac{2}{9} = \frac{324}{5} = 64,8$$

Bài 7: Tính:

$$1) A = \frac{5}{6} + 6 \frac{5}{6} \left(11 \frac{5}{20} - 9 \frac{1}{4} \right) : 8 \frac{1}{3}$$

$$2) B = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 400 - \left[673 - 2^9 \cdot (7^8 : 7^6 + 7^0) \right] \right\}$$



$$3) C = \frac{5}{2.1} + \frac{4}{1.11} + \frac{3}{11.2} + \frac{1}{2.15} + \frac{13}{15.4}$$

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

$$1) A = \frac{5}{6} + 6 \cdot \frac{5}{6} \left(11 \frac{5}{20} - 9 \frac{1}{4} \right) : 8 \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{5}{6} + 6 \cdot \frac{5}{6} \left(11 \frac{1}{4} - 9 \frac{1}{4} \right) : 8 \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{5}{6} + 6 \cdot \frac{5}{6} \cdot 2 : 8 \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{5}{6} + \frac{41}{6} \cdot 2 \cdot \frac{3}{25}$$

$$A = \frac{5}{6} + \frac{41}{25}$$

$$A = \frac{371}{150}$$

$$2) B = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 400 - \left[673 - 2^9 \cdot (7^8 : 7^6 + 7^0) \right] \right\} 873$$

$$B = 10^3 - 3 \left\{ 400 - \left[673 - 2^9 \cdot (7^2 + 1) \right] \right\}$$

$$B = 1000 - 3 \{ 400 - 673 + 2^9 \cdot 50 \}$$

$$B = -200 - 3 \{ -673 + 25600 \}$$

$$B = -200 + 3 \cdot 673 - 76800$$

$$B = -77000 + 3 \cdot 673$$

$$B = -74981$$

$$3) C = \frac{5}{2.1} + \frac{4}{1.11} + \frac{3}{11.2} + \frac{1}{2.15} + \frac{13}{15.4}$$

$$C = \frac{5}{2.1} + \left(\frac{4}{1.11} + \frac{3}{11.2} \right) + \left(\frac{1}{2.15} + \frac{13}{15.4} \right)$$

$$C = \frac{5}{2.1} + \left(\frac{8}{2.11} + \frac{3}{11.2} \right) + \left(\frac{2}{4.15} + \frac{13}{15.4} \right)$$

$$C = \frac{5}{2.1} + \frac{11}{2.11} + \frac{15}{4.15}$$

$$C = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$C = \frac{10}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$C = \frac{13}{4}$$

Bài 8: Tính giá trị các biểu thức sau:



$$a) A = 68.74 + 27.68 - 68$$

$$b) B = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 539 - \left[639 - 8 \cdot (7^8 : 7^6 + 2017^0) \right] \right\}$$

$$c) C = \left(\frac{151515}{161616} + \frac{17^9}{17^{10}} \right) - \left(\frac{1500}{1600} - \frac{1616}{1717} \right)$$

$$d) D = \left(\frac{1}{2^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{3^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{4^2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1 \right)$$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018- 2019

Lời giải

$$a) A = 68.74 + 27.68 - 68 = 68 \cdot (74 + 27 - 1) = 68 \cdot 100 = 6800$$

$$\begin{aligned} b) B &= 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 539 - \left[639 - 8 \cdot (7^8 : 7^6 + 2017^0) \right] \right\} \\ &= 8.125 - 3 \cdot \left\{ 539 - \left[639 - 8 \cdot (7^2 + 1) \right] \right\} \\ &= 1000 - 3 \cdot \left\{ 539 - \left[639 + 8 \cdot 50 \right] \right\} \\ &= 1000 - 3 \cdot 300 = 1000 - 900 = 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) C &= \left(\frac{151515}{161616} + \frac{17^9}{17^{10}} \right) - \left(\frac{1500}{1600} - \frac{1616}{1717} \right) = \left(\frac{15}{16} + \frac{1}{17} \right) - \left(\frac{15}{16} - \frac{16}{17} \right) \\ &= \left(\frac{15}{16} - \frac{15}{16} \right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{16}{17} \right) = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) D &= \left(\frac{1}{2^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{3^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{4^2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1 \right) = \left(\frac{1-4}{2^2} \right) \left(\frac{1-9}{3^2} \right) \dots \left(\frac{1-10000}{100^2} \right) \\ &= \frac{-3}{2^2} \cdot \frac{-8}{3^2} \cdot \frac{-15}{4^2} \dots \frac{-9999}{100^2} = - \frac{1.3}{2.3} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \dots \frac{99.1010}{100.100} \\ &= - \frac{(1.2.3 \dots 99) \cdot (3.4.5 \dots 101)}{(2.3.4 \dots 100) \cdot (2.3.4 \dots 100)} = - \frac{101}{200} \end{aligned}$$

Bài 9: Tính

$$B = (-528) + (-12) + (-211) + 540 + 2225$$

Trích đề 59 năm 2018- 2019

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= (-528) + (-12) + (-211) + 540 + 2225 \\ &= (-528) + (-12) + 540 + (-211 + 211) + 2014 = 2014 \end{aligned}$$

Bài 10: Thực hiện phép tính (hợp lí nếu có thể)

$$a) 1941 + [15 + (-1941) + (-5)]$$

$$b) (3,7 - 59,4) - (40,6 - 6,3)$$

$$c) \frac{2}{9} \cdot \frac{-3}{37} + \frac{-2}{9} \cdot \frac{34}{37} + 1 \frac{2}{9}$$

Trích đề HSG trường THCS Quỳnh Thiện năm 2021 – 2022



Lời giải

$$a) 1941 + [15 + (-1941) + (-5)] = (1941 - 1941) + (15 - 5) = 0 + 10 = 10$$

$$b) (3,7 - 59,4) - (40,6 - 6,3) = 3,7 - 59,4 - 40,6 + 6,3 = (3,7 + 6,3) - (59,4 + 40,6) \\ = 10 - 100 = -90$$

$$c) \frac{2}{9} \cdot \frac{-3}{37} + \frac{-2}{9} \cdot \frac{34}{37} + 1 \frac{2}{9} \\ = \frac{-2}{9} \cdot \left(\frac{3}{37} + \frac{34}{37} \right) + 1 \frac{2}{9} \\ = \frac{-2}{9} \cdot 1 + 1 + \frac{2}{9} \\ = \frac{-2}{9} + \frac{2}{9} + 1 = 0 + 1 = 1$$

Bài 11: Tính $N = \frac{5 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^9 \cdot (2^2)^6 - 2 \cdot (2^2 \cdot 3)^{14} \cdot 3^{16}}{5 \cdot 2^{28} \cdot 3^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}}$

Trích đề HSG huyện Đoàn Hùng năm 2018-2019

Lời giải

Ta có $N = \frac{5 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^9 \cdot (2^2)^6 - 2 \cdot (2^2 \cdot 3)^{14} \cdot 3^6}{5 \cdot 2^{28} \cdot 3^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}}$

$$= \frac{5 \cdot 2^{30} \cdot 3^{18} - 2^{29} \cdot 3^{20}}{2^{28} \cdot 3^{18} \cdot (5 \cdot 3 - 7 \cdot 2)} = \frac{2^{29} \cdot 3^{18} \cdot (5 \cdot 2 - 3^2)}{2^{28} \cdot 3^{18} \cdot (15 - 14)} = \frac{2}{1} = 2$$

Bài 12: Thực hiện các phép tính sau một cách hợp lý:

a) $(10^2 + 11^2 + 12^2) : (13^2 + 14^2)$

b) $1.2.3 \dots 9 - 1.2.3 \dots 8 - 1.2.3 \dots 7 \cdot 8^2$

c) $\frac{(3 \cdot 4 \cdot 2^{16})^2}{11 \cdot 2^{13} \cdot 4^{11} - 16^9}$

d) $1152 - (374 + 1152) + (-65 + 374)$

e) $13 - 12 + 11 + 10 - 9 + 8 - 7 - 6 + 5 - 4 + 3 + 2 - 1$

Trích đề HSG huyện Nông Công năm 2019-2020

Lời giải

a) $(10^2 + 11^2 + 12^2) : (13^2 + 14^2) = (100 + 121 + 144) : (169 + 196) = 365 : 365 = 1$

b) $1.2.3 \dots 9 - 1.2.3 \dots 7 \cdot 8 - 1.2.3 \dots 7 \cdot 8^2 = 1.2.3 \dots 7 \cdot 8 \cdot (9 - 1 - 8) = 1.2.3 \dots 7 \cdot 8 \cdot 0 = 0$



$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{(3 \cdot 4 \cdot 2^{16})^2}{11 \cdot 2^{13} \cdot 4^{11} - 16^9} &= \frac{(3 \cdot 2^2 \cdot 2^{16})^2}{11 \cdot 2^{13} \cdot (2^2)^{11} - (2^4)^9} = \frac{3^2 \cdot (2^{18})^2}{11 \cdot 2^{13} \cdot 2^{22} - 2^{36}} \\ &= \frac{3^2 \cdot 2^{36}}{11 \cdot 2^{35} - 2^{36}} = \frac{3^2 \cdot 2^{36}}{2^{35} \cdot (11 - 2)} = \frac{3^2 \cdot 2}{9} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{d) } 1152 - (374 + 1152) + (-65 + 374)$$

$$= 1152 - 374 - 1152 + -65 + 374 = (1152 - 1152) + (374 - 374) - 65 = -65$$

$$\text{e) } 13 - 12 + 11 + 10 - 9 + 8 - 7 - 6 + 5 - 4 + 3 + 2 - 1$$

$$= 13 - (12 - 11 - 10 + 9) + (8 - 7 - 6 + 5) - (4 - 3 - 2 - 1) = 13$$

Bài 13:

Tính giá trị của biểu thức $M = \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{1 \frac{1}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}} \right) : \frac{2021}{2022}$.

*Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022***Lời giải**

Ta có:

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{1 \frac{1}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}} \right) : \frac{2021}{2022} = \left(\frac{2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right)}{7 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right)} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right)} \right) : \frac{2021}{2022} \\ &= \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{7} \right) : \frac{2021}{2022} = \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{7} \right) : \frac{2021}{2022} = 0 \end{aligned}$$

Vậy $M = 0$

Bài 14: Tính tổng: $S = \frac{27 \cdot 4500 + 135 \cdot 550 \cdot 2}{2 + 4 + 6 + \dots + 18}$

*Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018***Lời giải**

$$\text{Xét tử : } 27 \cdot 4500 + 135 \cdot 550 \cdot 2 = 270 \cdot 450 + 270 \cdot 550 = 270000$$

$$\text{Xét mẫu: } 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 18 = \frac{(2+18) \cdot 9}{2} = 90$$

$$\Rightarrow S = 270000 : 90 = 3000$$

Bài 15: Tính:

$$\text{a) } A = \frac{101 + 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1}{101 - 100 + 99 - 98 + \dots + 3 - 2 + 1}$$



$$b) B = \frac{423134 \cdot 846267 - 423133}{423133 \cdot 846267 + 423134}$$

Trích đề HSG huyệnnăm 2019-2020

Lời giải

$$a) A = \frac{101 \cdot 51}{51} = 101$$

$$b) \frac{423133 \cdot 846267 + 846267 - 423133}{423133 \cdot 846267 + 423134} = 1$$

Bài 16: Tính hợp lý

$$a) 53 \cdot 81 - 47 \cdot 14 + 81 \cdot 47 - 14 \cdot 53$$

$$b) |1 - 2^{100}| + |5^{50} - 2^{100}| - |11 - 5^{50}|$$

$$c) \left(\frac{20162016}{20172017} + \frac{2017^{2016}}{2017^{2017}} \right) - \left(\frac{2016}{2017} - \frac{2016^{2017} \cdot 2017^{2016}}{2017^{2017} \cdot 2016^{2016}} \right)$$

$$d) \frac{6^{36} \cdot (50 \cdot 5^{40} - 10 \cdot 5^{34})}{30^{30} \cdot 10^4 \cdot (100 \cdot 15^5 - 4 \cdot 3^5)}$$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Lời giải

$$a) 53 \cdot 81 - 47 \cdot 14 + 81 \cdot 47 - 14 \cdot 53$$

$$= 81 \cdot (53 + 47) - 14 \cdot (47 + 53)$$

$$= 81 \cdot 100 - 14 \cdot 100$$

$$= 100 \cdot (81 - 14)$$

$$= 100 \cdot 67 = 6700$$

$$b) |1 - 2^{100}| + |5^{50} - 2^{100}| - |11 - 5^{50}|$$

$$= 2^{100} - 1 + 5^{50} - 2^{100} - 5^{50} + 11 = 10$$

$$c) \left(\frac{20162016}{20172017} + \frac{2017^{2016}}{2017^{2017}} \right) - \left(\frac{2016}{2017} - \frac{2016^{2017} \cdot 2017^{2016}}{2017^{2017} \cdot 2016^{2016}} \right)$$

$$= \frac{2016}{2017} + \frac{1}{2017} - \frac{2016}{2017} + \frac{2016}{2017} = 1$$

$$d) \frac{6^{36} \cdot (50 \cdot 5^{40} - 10 \cdot 5^{34})}{30^{30} \cdot 10^4 \cdot (100 \cdot 15^5 - 4 \cdot 3^5)}$$

$$= \frac{2^{36} \cdot 3^{36} \cdot 5^{35} \cdot (2 \cdot 5^2 \cdot 5^{40} - 2 \cdot 5 \cdot 5^{34})}{(2 \cdot 3 \cdot 5)^{30} \cdot 2^4 \cdot 5^4 \cdot (2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^5 \cdot 5^5 - 2^2 \cdot 3^5)} = \frac{2^{36} \cdot 3^{36} \cdot 2 \cdot 5^{35} \cdot (5^7 - 1)}{2^{34} \cdot 3^{30} \cdot 5^{34} \cdot 2^2 \cdot 3^5 \cdot (5^7 - 1)}$$

$$= \frac{2^{37} \cdot 3^{36} \cdot 5^{35} \cdot (5^7 - 1)}{2^{36} \cdot 3^{35} \cdot 5^{34} \cdot (5^7 - 1)} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

Bài 17: Cho biểu thức $A = \frac{5 \cdot 4^{2017} - 4^{2018} - 1}{1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{2016}}$. Chứng tỏ rằng biểu thức A có giá trị là một số nguyên.

**Lời giải**

Trước hết tính $M = 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{2016}$

$$4M = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{2016} + 4^{2017} = M - 1 + 4^{2017}$$

$$\Rightarrow 3M = 4^{2017} - 1$$

$$A = \frac{(4+1) \cdot 4^{2017} - 4^{2018} - 1}{1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{2016}} = \frac{4^{2018} + 4^{2017} - 4^{2018} - 1}{M} = \frac{4^{2017} - 1}{M} = 3$$

Bài 18:

1. Tính giá trị các biểu thức:

$$A = 1,4 \cdot \frac{15}{49} - \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} \right) : 2\frac{1}{5};$$

$$B = \frac{25^{13} \cdot 9^6 \cdot 24^7}{50^{12} \cdot 81^5 \cdot 40^3}.$$

2. Tính nhanh:

$$C = \frac{5}{12 \cdot 17} + \frac{3}{34 \cdot 10} + \frac{7}{60 \cdot 9} + \frac{8}{27 \cdot 35};$$

$$D = \left(\frac{7}{20} + 1 \right) \left(\frac{7}{33} + 1 \right) \left(\frac{7}{48} + 1 \right) \left(\frac{7}{65} + 1 \right) \left(\frac{7}{84} + 1 \right) \left(\frac{7}{105} + 1 \right).$$

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021 – 2022.

Lời giải

1. Tính giá trị các biểu thức:

$$A = 1,4 \cdot \frac{15}{49} - \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} \right) : 2\frac{1}{5}$$

$$= \frac{14}{10} \cdot \frac{15}{49} - \frac{12+10}{15} : \frac{11}{5}$$

$$= \frac{3}{7} - \frac{22}{15} \cdot \frac{5}{11}$$

$$= \frac{3}{7} - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{9-14}{21}$$

$$= -521.$$

Vậy $A = -521$

$$B = \frac{25^{13} \cdot 9^6 \cdot 24^7}{50^{12} \cdot 81^5 \cdot 40^3} = \frac{25^{13} \cdot 9^6 \cdot 3^7 \cdot 8^7}{25^{12} \cdot 2^{12} \cdot 9^{10} \cdot 5^3 \cdot 8^3} = \frac{25 \cdot 3^7 \cdot 8^4}{2^{12} \cdot 9^3 \cdot 5^3} = \frac{5^2 \cdot 3^7 \cdot 2^{12}}{2^{12} \cdot 3^6 \cdot 5^3} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Vậy } B = \frac{3}{5}$$

2. Tính nhanh:



$$\begin{aligned} C &= \frac{5}{12.17} + \frac{3}{34.10} + \frac{7}{60.9} + \frac{8}{27.35} \\ &= \frac{5}{12.17} + \frac{3}{17.20} + \frac{7}{20.27} + \frac{8}{27.35} \\ &= \frac{1}{12} - \frac{1}{17} + \frac{1}{17} - \frac{1}{20} + \frac{1}{20} - \frac{1}{27} + \frac{1}{27} - \frac{1}{35} \\ &= \frac{1}{12} - \frac{1}{35} \\ &= \frac{23}{420}. \end{aligned}$$

Vậy $C = \frac{23}{420}$

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{7}{20} + 1\right) \left(\frac{7}{33} + 1\right) \left(\frac{7}{48} + 1\right) \left(\frac{7}{65} + 1\right) \left(\frac{7}{84} + 1\right) \left(\frac{7}{105} + 1\right) \\ &= \frac{27}{20} \cdot \frac{40}{33} \cdot \frac{55}{48} \cdot \frac{72}{65} \cdot \frac{91}{84} \cdot \frac{112}{105} \\ &= \frac{9.3.10.4.11.5.12.6.13.7.8.14}{2.10.3.11.4.12.5.13.6.14.7.15} \\ &= \frac{8.9}{2.15} \\ &= \frac{4.3}{5} = \frac{12}{5}. \end{aligned}$$

Vậy $D = \frac{12}{5}$

Bài 19: Tính giá trị các biểu thức sau:

- 1) $A = -5^{22} - \left\{ -222 - \left[-122 - (100 - 5^{22}) + 2022 \right] \right\}$
- 2) $B = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{20}(1+2+3+\dots+20)$
- 3) $C = \frac{5 \cdot 4^6 \cdot 9^4 - 3^9 \cdot (-8)^4}{4 \cdot 2^{13} \cdot 3^8 + 2 \cdot 8^4 \cdot (-27)^3}$.

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2021-2022

Lời giải

1) Ta có: $A = -5^{22} - \left\{ -222 - \left[-122 - (100 - 5^{22}) + 2022 \right] \right\}$

$$A = -5^{22} + 222 + \left[-122 - (100 - 5^{22}) + 2022 \right]$$

$$A = -5^{22} + 222 - 122 - (100 - 5^{22}) + 2022$$

$$A = -5^{22} + 222 - 122 - 100 + 5^{22} + 2022$$



$$A = (-5^{22} + 5^{22}) + (222 - 122 - 100) + 2022 = 2022.$$

Vậy $A = 2022$.

2) Ta có:

$$B = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{20}(1+2+3+\dots+20)$$

$$B = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + \dots + \frac{1}{20} \cdot \frac{20 \cdot 21}{2}$$

$$B = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{21}{2}$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot (1+2+3+4+\dots+21)$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} = 105.$$

Vậy $B = 105$

$$3) \text{ Ta có: } C = \frac{5 \cdot 4^6 \cdot 9^4 - 3^9 \cdot (-8)^4}{4 \cdot 2^{13} \cdot 3^8 + 2 \cdot 8^4 \cdot (-27)^3} = \frac{5 \cdot (2^2)^6 \cdot (3^2)^4 - 3^9 \cdot ((-2)^3)^4}{2^2 \cdot 2^{13} \cdot 3^8 + 2 \cdot (2^3)^4 \cdot ((-3)^3)^3}$$

$$C = \frac{5 \cdot 2^{12} \cdot 3^8 - 3^9 \cdot 2^{12}}{2^{15} \cdot 3^8 - 2^{13} \cdot 3^9} = \frac{2^{12} \cdot 3^8 (5-3)}{2^{13} \cdot 3^8 (2^2-3)} = \frac{2^{12} \cdot 3^8 \cdot 2}{2^{13} \cdot 3^8 \cdot 1} = 1$$

Vậy $C = 1$.

Bài 20: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$1) A = 2021 - (374 + 2021) + (-2022 + 374).$$

$$2) B = \left(\frac{-2}{5} \cdot \frac{13}{131} + \frac{2}{131} \cdot \frac{-118}{5} \right) : \frac{4}{5}.$$

$$3) C = \frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{11}{12} + \frac{19}{20} + \frac{29}{30} + \frac{41}{42} + \frac{55}{56} + \frac{71}{72} + \frac{89}{90}.$$

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021-2022

Lời giải

$$1) A = 2021 - (374 + 2021) + (-2022 + 374)$$

$$A = 2021 - 374 - 2021 - 2022 + 374$$

$$A = (2021 - 2021) + (-374 + 374) - 2022$$

$$A = 0 + 0 - 2022$$

$$A = -2022$$

Vậy $A = -2022$

$$2) B = \left(\frac{-2}{5} \cdot \frac{13}{131} + \frac{2}{131} \cdot \frac{-118}{5} \right) : \frac{4}{5}$$



$$B = \left(\frac{-2}{5} \cdot \frac{1}{131} \cdot 13 + \frac{-2}{5} \cdot \frac{1}{131} \cdot 118 \right) : \frac{4}{5}$$

$$B = \frac{-2}{5} \cdot \frac{1}{131} (13 + 118) : \frac{4}{5}$$

$$B = \frac{-2}{5} \cdot \frac{1}{131} \cdot 131 \cdot \frac{5}{4}$$

$$B = \frac{-2}{5} \cdot \frac{5}{4}$$

$$B = \frac{-1}{2}$$

Vậy $B = \frac{-1}{2}$.

$$3) C = \frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{11}{12} + \frac{19}{20} + \frac{29}{30} + \frac{41}{42} + \frac{55}{56} + \frac{71}{72} + \frac{89}{90}$$

$$C = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{6}\right) + \left(1 - \frac{1}{12}\right) + \left(1 - \frac{1}{20}\right) + \left(1 - \frac{1}{30}\right) + \left(1 - \frac{1}{42}\right) + \left(1 - \frac{1}{56}\right) + \left(1 - \frac{1}{72}\right) + \left(1 - \frac{1}{90}\right)$$

$$C = \left(1 - \frac{1}{1.2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2.3}\right) + \left(1 - \frac{1}{3.4}\right) + \left(1 - \frac{1}{4.5}\right) + \left(1 - \frac{1}{5.6}\right) + \left(1 - \frac{1}{6.7}\right) + \left(1 - \frac{1}{7.8}\right) + \left(1 - \frac{1}{8.9}\right) + \left(1 - \frac{1}{9.10}\right)$$

$$C = 9.1 - \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{9.10}\right)$$

$$C = 9 - \left(\frac{2-1}{1.2} + \frac{3-2}{2.3} + \frac{4-3}{3.4} + \dots + \frac{10-9}{9.10}\right)$$

$$C = 9.1 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right)$$

$$C = 9 - \left(1 - \frac{1}{10}\right)$$

$$C = 9 - \frac{9}{10}$$

$$C = \frac{81}{10}$$

Vậy $C = \frac{81}{10}$.

Bài 21: Thực hiện phép tính: $A = 2016 \cdot \left[\frac{6 - \frac{6}{7} - \frac{6}{289} - \frac{6}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} \cdot \frac{3 + \frac{3}{13} + \frac{3}{169} + \frac{3}{91}}{6 + \frac{6}{13} + \frac{6}{169} + \frac{6}{91}} \right] \cdot \frac{304304304}{945945945}$

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015-2016

Lời giải

Ta có: $A = 2016 \cdot \left[\frac{6 - \frac{6}{7} - \frac{6}{289} - \frac{6}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} \cdot \frac{3 + \frac{3}{13} + \frac{3}{169} + \frac{3}{91}}{6 + \frac{6}{13} + \frac{6}{169} + \frac{6}{91}} \right] \cdot \frac{304304304}{945945945}$



$$\begin{aligned}
&= 2016 \cdot \left[\frac{6 \left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{289} - \frac{1}{85} \right)}{4 \left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{289} - \frac{1}{85} \right)} : \frac{3 \left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{169} + \frac{1}{91} \right)}{6 \left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{169} + \frac{1}{91} \right)} \right] \cdot \frac{304.1001001}{945.1001001} \\
&= 2016 \cdot \left(\frac{6}{4} : \frac{3}{6} \right) \cdot \frac{304}{945} \\
&= 2016 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{304}{945} = \frac{9728}{5}.
\end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{9728}{5}$

Bài 22: Thực hiện phép tính:

a) $A = 81 \cdot \left[\frac{12 - \frac{12}{7} - \frac{12}{289} - \frac{12}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} : \frac{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{169} + \frac{5}{91}}{6 + \frac{6}{13} + \frac{6}{169} + \frac{6}{91}} \right] \cdot \frac{158158158}{711711711}$

b) $B = \frac{5 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^9 \cdot (2^2)^6 - 2 \cdot (2^2 \cdot 3)^{14} \cdot 3^4}{5 \cdot 2^{28} \cdot 3^{18} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}}$.

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014-2015

Lời giải

a) Ta có: $A = 81 \cdot \left[\frac{12 - \frac{12}{7} - \frac{12}{289} - \frac{12}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} : \frac{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{169} + \frac{5}{91}}{6 + \frac{6}{13} + \frac{6}{169} + \frac{6}{91}} \right] \cdot \frac{158158158}{711711711}$

$$= 81 \cdot \left[\frac{12 \left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{289} - \frac{1}{85} \right)}{4 \left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{289} - \frac{1}{85} \right)} : \frac{5 \left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{169} + \frac{1}{91} \right)}{6 \left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{169} + \frac{1}{91} \right)} \right] \cdot \frac{158.1001001}{711.1001001}$$

$$= 81 \cdot \left(\frac{12}{4} : \frac{5}{6} \right) \cdot \frac{158}{711}$$

$$= 81 \cdot \frac{18}{5} \cdot \frac{2}{9} = \frac{324}{5}.$$

Vậy $A = \frac{324}{5}$.

b) Ta có: $B = \frac{5 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^9 \cdot (2^2)^6 - 2 \cdot (2^2 \cdot 3)^{14} \cdot 3^4}{5 \cdot 2^{28} \cdot 3^{18} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}}$

$$= \frac{5 \cdot 2^{18} \cdot 3^{18} \cdot 2^{12} - 2 \cdot 2^{28} \cdot 3^{14} \cdot 3^4}{5 \cdot 2^{28} \cdot 3^{18} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{5 \cdot 2^{30} \cdot 3^{18} - 2^{29} \cdot 3^{18}}{2^{28} \cdot 3^{18} (5 - 7.2)} \\
&= \frac{2^{29} \cdot 3^{18} (5.2 - 1)}{2^{28} \cdot 3^{18} (5 - 14)} \\
&= \frac{2.9}{-9} = -2.
\end{aligned}$$

Vậy $B = -2$

Bài 23: 1. Thực hiện phép tính:

$$a) P = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 400 - \left[673 - 2^3 \cdot (7^3 : 7 + 1) \right] \right\}; \quad b) Q = \frac{4^3 \cdot 9^2 + 6^3 \cdot 120}{-8^2 \cdot 3^6 + 6^5}.$$

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Lời giải

a) Ta có

$$\begin{aligned}
P &= 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 400 - \left[673 - 2^3 \cdot (7^3 : 7 + 1) \right] \right\} \\
&= 8 \cdot 125 - 3 \cdot \{ 400 - [673 - 8 \cdot 50] \} \\
&= 1000 - 3 \cdot [400 - 473] \\
&= 1000 - 3 \cdot (-73) \\
&= 1219.
\end{aligned}$$

Vậy $P = 1219$.

$$b) \text{ Ta có } Q = \frac{4^3 \cdot 9^2 + 6^3 \cdot 120}{-8^2 \cdot 3^6 + 6^5} = \frac{2^6 \cdot 3^4 + 2^3 \cdot 3^3 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 5}{-2^6 \cdot 3^6 + 6^5} = \frac{2^6 \cdot 3^4 + 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5}{-2^6 \cdot 3^6 + 2^5 \cdot 3^5} = \frac{2^6 \cdot 3^4 \cdot 2.3}{2^5 \cdot 3^5 \cdot (-5)} = \frac{-4}{5}.$$

$$\text{Vậy } Q = \frac{-4}{5}.$$

$$\text{Bài 24: Tính giá trị biểu thức: } A = \frac{8^{10} \cdot 3^{15} - 2^{30} \cdot 9^7}{2^{30} \cdot 27^5 - 4^{15} \cdot 3^{14}}.$$

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Lời giải

$$\begin{aligned}
A &= \frac{8^{10} \cdot 3^{15} - 2^{30} \cdot 9^7}{2^{30} \cdot 27^5 - 4^{15} \cdot 3^{14}} \\
A &= \frac{(2^3)^{10} \cdot 3^{15} - 2^{30} \cdot (3^2)^7}{2^{30} \cdot (3^3)^5 - (2^2)^{15} \cdot 3^{14}} \\
A &= \frac{2^{30} \cdot 3^{15} - 2^{30} \cdot 3^{14}}{2^{30} \cdot 3^{15} - 2^{30} \cdot 3^{14}}
\end{aligned}$$



$$A = \frac{2^{30} \cdot (3^{15} - 3^{14})}{2^{30} \cdot (3^{15} - 3^{14})}$$

$$A = 1.$$

Vậy $A = 1$.

Bài 25: Tính giá trị của các biểu thức sau bằng cách hợp lý (nếu có thể):

$$A = (-2013) \cdot 2014 + 1007 \cdot 26$$

$$B = \left(\frac{1313}{1414} + \frac{10}{160} \right) - \left(\frac{130}{140} - \frac{1515}{1616} \right).$$

$$C = \left(1 - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2021} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2022} \right).$$

$$D = x \cdot \frac{1}{3} + 2x \cdot \frac{3}{6} - 3x \cdot \frac{4}{9} \text{ với } x = 2022^{2021}.$$

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= (-2013) \cdot 2014 + 1007 \cdot 26 = (-2013) \cdot 2014 + 1007 \cdot 2 \cdot 13 = (-2013) \cdot 2014 + 2014 \cdot 13 \\ &= 2014 \cdot (-2013 + 13) = 2014 \cdot (-2000) = -4028. \end{aligned}$$

Vậy $A = -4028$.

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{1313}{1414} + \frac{10}{160} \right) - \left(\frac{130}{140} - \frac{1515}{1616} \right) = \left(\frac{13 \cdot 101}{14 \cdot 101} + \frac{1}{16} \right) - \left(\frac{13}{14} - \frac{15 \cdot 101}{16 \cdot 101} \right) = \left(\frac{13}{14} + \frac{1}{16} \right) - \left(\frac{13}{14} - \frac{15}{16} \right) \\ &= \frac{13}{14} + \frac{1}{16} - \frac{13}{14} + \frac{15}{16} = \left(\frac{13}{14} - \frac{13}{14} \right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{15}{16} \right) = 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Vậy $B = 1$.

$$C = \left(1 - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2021} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2022} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2020}{2021} \cdot \frac{2021}{2022} = \frac{1}{2022}.$$

Vậy $C = \frac{1}{2022}$.

$$D = x \cdot \frac{1}{3} + 2x \cdot \frac{3}{6} - 3x \cdot \frac{4}{9} \text{ với } x = 2022^{2021}.$$

$$\text{Ta có: } D = x \cdot \frac{1}{3} + 2x \cdot \frac{3}{6} - 3x \cdot \frac{4}{9} = x \cdot \frac{1}{3} + x \cdot 1 - x \cdot \frac{4}{3} = x \cdot \left(\frac{1}{3} + 1 - \frac{4}{3} \right) = x \cdot 0 = 0.$$

Nên giá trị của biểu thức D khi $x = 2022^{2021}$ là 0.

Bài 26: Tính hợp lý

$$\text{a) } A = \frac{5}{6} - \frac{-1}{12} + \frac{2}{3} - \frac{-2}{7} + \frac{1}{25} - \frac{-1}{4} - \frac{5}{42}$$

$$\text{b) } \frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}$$

Trích đề HSG THCS Ái Thượng năm 2021-2022

Lời giải

$$\text{a) } A = \left(\frac{2}{3} - \frac{-1}{4} - \frac{-1}{12} \right) + \left(\frac{5}{6} - \frac{-2}{7} - \frac{5}{42} \right) + \frac{1}{25} = 2 + \frac{1}{25} = \frac{51}{25}.$$



Vậy $A = \frac{51}{25}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } & \frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^9.6^{19} - 7.2^{29}.27^6} \\ &= \frac{5.2^{30}.3^{18} - 2^2.3^{20}.2^{27}}{5.2^9.2^{19}.3^{19} - 7.2^{29}.3^{18}} \\ &= \frac{2^{29}.3^{18}(5.2 - 3^2)}{2^{28}.3^{18}(5.3 - 7.2)} = 2. \end{aligned}$$

Bài 27: Tính giá trị các biểu thức sau:

1) $A = (-16) : (-8) + 6(2021 - 2022)^{2019} + 2026$.

2) $B = \left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{8}\right)\left(1 + \frac{1}{15}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{624}\right)$.

Trích đề HSG Huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{1) } A &= (-16) : (-8) + 6(2021 - 2022)^{2019} + 2026 \\ &= 2 + 6 \cdot (-1)^{2019} + 2026 = 2 + 6 \cdot (-1) + 2026 \\ &= 2 - 6 + 2026 = 2022. \\ \text{Vậy } A &= 2022. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2) } B &= \left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{8}\right)\left(1 + \frac{1}{15}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{624}\right) \\ &= \frac{3+1}{3} \cdot \frac{8+1}{8} \cdot \frac{15+1}{15} \dots \frac{624+1}{624} \\ &= \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{3.3}{2.4} \cdot \frac{4.4}{3.5} \dots \frac{25.25}{24.26} \\ &= \frac{2}{1} \cdot \frac{25}{26} = \frac{25}{13}. \\ \text{Vậy } B &= \frac{25}{13}. \end{aligned}$$

Bài 28: Tính: $M = \frac{\frac{7}{2012} + \frac{7}{9} - \frac{1}{4}}{\frac{5}{9} - \frac{3}{2012} - \frac{1}{2}}$.

Trích đề HSG Huyện Lý Nhân năm 2018-20219

Lời giải

$$N = \frac{\left(\frac{7}{2012} + \frac{7}{9} - \frac{1}{4}\right) \cdot 2012 \cdot 9 \cdot 2}{\left(\frac{5}{9} - \frac{3}{2012} - \frac{1}{2}\right) \cdot 2012 \cdot 9 \cdot 2} = \frac{7 \cdot 9 \cdot 2 + 7 \cdot 2012 \cdot 2 - 1006 \cdot 9}{5 \cdot 2012 \cdot 2 - 3 \cdot 9 \cdot 2 - 2012 \cdot 9} = \frac{7 \cdot 2021 - 503 \cdot 9}{5 \cdot 2012 - 3 \cdot 9 - 1006 \cdot 9} = \frac{9620}{979}.$$

Vậy $N = \frac{9620}{979}$.

Bài 29: Tính nhanh:



$$a) \frac{7}{13} \cdot \frac{7}{15} - \frac{5}{12} \cdot \frac{21}{39} + \frac{49}{91} \cdot \frac{8}{15}.$$

$$b) \left(\frac{12}{199} + \frac{23}{200} - \frac{34}{201} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right).$$

Trích đề HSG THCS Lý Tự Trọng năm 2015-2016

Lời giải

$$a) \frac{7}{13} \cdot \frac{7}{15} - \frac{5}{12} \cdot \frac{21}{39} + \frac{49}{91} \cdot \frac{8}{15}$$

$$= \frac{7}{13} \cdot \frac{7}{15} - \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{13} + \frac{7}{13} \cdot \frac{8}{15}$$

$$= \frac{7}{13} \cdot \left(\frac{7}{15} - \frac{7}{13} + \frac{8}{15} \right)$$

$$= \frac{7}{13} \cdot \left(1 - \frac{5}{12} \right)$$

$$= \frac{7}{13} \cdot \frac{7}{12} = \frac{49}{156}.$$

$$b) \left(\frac{12}{199} + \frac{23}{200} - \frac{34}{201} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right)$$

$$= \left(\frac{12}{199} + \frac{23}{200} - \frac{34}{201} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right)$$

$$= \left(\frac{12}{199} + \frac{23}{200} - \frac{34}{201} \right) \cdot 0 = 0.$$

Trắc nghiệm

Bài 30: Giá trị của biểu thức $A = \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+59}$ là:

A. $A = \frac{19}{60}$.

B. $A = \frac{19}{50}$.

C. $A = \frac{19}{40}$.

D. $A = \frac{19}{30}$.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: D. $A = \frac{19}{30}$.

Bài 31: Tính giá trị của biểu thức $2x^2y - 1$ với $x = -2$, $y = -3$.

A. 25.

B. 123.

C. -23.

D. -25.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: D. -25.

Bài 32: Kết quả của phép tính $5 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-7) - (-16)$ là:

A. 33.

B. -17.

C. 17.

D. -33.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: A. 33.

Bài 33: Kết quả của phép tính $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 99 - 100$ bằng:



A. 50.

B. -50.

C. -100.

D. 0.

*Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022***Lời giải****Đáp án:** B. -50.**Tự luận****Bài 34:** Thực hiện phép tính $P = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \cdot \{400 - [673 - 2^3 \cdot (7^3 : 7 + 1)]\}$.*Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022***Lời giải**

$$\begin{aligned}
P &= 2^3 \cdot 5^3 - 3 \{400 - [673 - 2^3 \cdot (7^3 : 7 + 1)]\} \\
&= 8.125 - 3 \cdot \{400 - [673 - 8 \cdot (7^2 + 1)]\} \\
&= 1000 - 3 \cdot \{400 - [673 - 8 \cdot 50]\} \\
&= 1000 - 3 \cdot \{400 - [673 - 400]\} \\
&= 1000 - 3 \cdot 127 = 1000 - 381 = 619
\end{aligned}$$

Bài 35: Tính giá trị các biểu thức sau: $A = -5^{22} - \{-222 - [-122 - (100 - 5^{22}) + 2022]\}$ *Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022***Lời giải**

$$\begin{aligned}
A &= -5^{22} - \{-222 - [-122 - (100 - 5^{22}) + 2022]\} \\
A &= -5^{22} + 222 - 122 - 100 + 5^{22} + 2022 \\
A &= (-5^{22} + 5^{22}) + (222 - 122 - 100) + 2022 \\
A &= 2022
\end{aligned}$$

Bài 36: Tính $B = \frac{7.9 + 14.27 + 21.36}{21.27 + 42.81 + 63.108}$ *Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022***Lời giải**

$$B = \frac{7.9 + 14.27 + 21.36}{21.27 + 42.81 + 63.108} = \frac{7.9(1 + 2.3 + 3.4)}{21.27(1 + 2.3 + 3.4)} = \frac{1}{9}$$

Bài 37: Thực hiện phép tính: $B = 2 + 5 + 9 + 14 + \dots + 4949 + 5049$.*Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022***Lời giải**

$$\begin{aligned}
B &= 2 + 5 + 9 + 14 + \dots + 4949 + 5049 \\
2B &= 4 + 10 + 18 + 28 + \dots + 9898 + 10098 \\
2B &= 1.4 + 2.5 + 3.6 + 4.7 + \dots + 98.101 + 99.102 \\
2B &= 1 \cdot (2 + 2) + 2 \cdot (2 + 3) + 3 \cdot (2 + 4) + 4 \cdot (2 + 5) + \dots + 98 \cdot (2 + 99) + 99 \cdot (100 + 2) \\
2B &= (1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + 98.99 + 99.100) + 2(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99) \\
&= 333300 + 9900 = 343200
\end{aligned}$$

Suy ra $B = 171600$.**Bài 38:** Tính giá trị của các biểu thức sau: $41,54 - 3,18 + 23,17 + 8,46 - 5,82 - 3,17$.*Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022***Lời giải**



$$41,54 - 3,18 + 23,17 + 8,46 - 5,82 - 3,17$$

$$= (41,54 + 8,46) - (3,18 + 5,82) + (23,17 - 3,17)$$

$$= 50 - 9 + 20 = 61.$$

Bài 39: Kết quả của phép tính $-2022.74 - 2022.27 + 2022$

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021 - 2022

Lời giải

$$= -(2022.74 + 2022.27 - 2022.1)$$

$$= -2022(74 + 27 - 1)$$

$$= -2022.100 = -202200$$

Bài 40: Thực hiện phép tính.

$$a) A = (-10)^2 - [(-2)^3 \cdot (7^{11} : 7^9 + 2022^0)]$$

$$b) B = \left(\frac{2121}{2323} + \frac{212121}{232323} + \frac{21212121}{23232323} \right) : \frac{21}{23}$$

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021 - 2022

Lời giải

$$a) A = (-10)^2 - [(-2)^3 \cdot (7^{11} : 7^9 + 2022^0)]$$

$$A = (-10)^2 - [(-2)^3 \cdot (7^{11} : 7^9 + 2022^0)]$$

$$= 100 - [-8 \cdot (7^2 + 1)]$$

$$= 100 - (-8 \cdot 50)$$

$$= 100 - (-400)$$

$$= 100 + 400$$

$$= 500$$

$$b) B = \left(\frac{2121}{2323} + \frac{212121}{232323} + \frac{21212121}{23232323} \right) : \frac{21}{23}$$

$$B = \left(\frac{21 \cdot 101}{23 \cdot 101} + \frac{21 \cdot 10101}{23 \cdot 10101} + \frac{21 \cdot 1010101}{23 \cdot 1010101} \right) : \frac{21}{23}$$

$$B = \left(\frac{21}{23} + \frac{21}{23} + \frac{21}{23} \right) : \frac{21}{23}$$

$$B = 3 \cdot \frac{21}{23} : \frac{21}{23} = 3$$

Bài 41: Tính giá trị biểu thức:

$$a) A = \left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10} \right) \cdot \frac{21}{24}$$

$$b) B = \frac{5}{6} + 6 \frac{5}{6} \left(11 \frac{5}{20} - 9 \frac{1}{4} \right) : 8 \frac{1}{3}$$

Trích đề HSG Liên trường năm 2021 - 2022

Lời giải

$$a) A = \left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10} \right) \cdot \frac{21}{24} = \left(\frac{272}{30} - \frac{168}{30} + \frac{186}{30} \right) \cdot \frac{21}{24}$$

$$= \frac{29}{3} \cdot \frac{21}{24} = \frac{203}{24} = 8 \frac{11}{24}$$

$$b) B = \frac{5}{6} + 6 \frac{5}{6} \left(11 \frac{5}{20} - 9 \frac{1}{4} \right) : 8 \frac{1}{3} = \frac{5}{6} + \frac{41}{6} \left(11 \frac{1}{4} - 9 \frac{1}{4} \right) : \frac{25}{3} = \frac{5}{6} + \frac{41}{6} \cdot 2 \cdot \frac{3}{25}$$

$$= \frac{5}{6} + \frac{41}{25} = \frac{125}{150} + \frac{246}{150} = \frac{371}{150} = 2 \frac{71}{150}$$

Bài 42: Thực hiện phép tính:



a) $A = (7-4)^2 \cdot 2 + [(-5) + (-7)] : (-3+5)^2$

b) $B = \frac{2^{15} \cdot 13 + 2^{15} \cdot 65}{2^{13} \cdot 104}$

*Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022***Lời giải**

a) $A = (7-4)^2 \cdot 2 + [(-5) + (-7)] : (-3+5)^2 = 3^2 \cdot 2 + (-12) : 2^2$
 $= 9 \cdot 2 + (-12) : 4 = 18 + (-3) = 15$

b) $B = \frac{2^{15} \cdot 13 + 2^{15} \cdot 65}{2^{13} \cdot 104} = \frac{2^{15} \cdot 78}{2^{13} \cdot 104}$
 $= \frac{4 \cdot 78}{104} = 3$

Bài 43: Tính giá trị các biểu thức sau: $C = \frac{5 \cdot 4^6 \cdot 9^4 - 3^9 \cdot (-8)^4}{4 \cdot 2^{13} \cdot 3^8 + 2 \cdot 8^4 \cdot (-27)^3}$.

*Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022***Lời giải**

$$C = \frac{5 \cdot 4^6 \cdot 9^4 - 3^9 \cdot (-8)^4}{4 \cdot 2^{13} \cdot 3^8 + 2 \cdot 8^4 \cdot (-27)^3}$$

$$C = \frac{5 \cdot 4^6 \cdot 9^4 - 3^9 \cdot 8^4}{4 \cdot 2^{13} \cdot 3^8 - 2 \cdot 8^4 \cdot 27^3}$$

$$C = \frac{5 \cdot 2^{12} \cdot 3^8 - 3^9 \cdot 2^{12}}{2^{15} \cdot 3^8 - 2^{13} \cdot 3^9}$$

$$C = \frac{2^{12} \cdot 3^8 \cdot (5-3)}{2^{13} \cdot 3^8 \cdot (2^2-3)} = \frac{2^{12} \cdot 3^8 \cdot 2}{2^{13} \cdot 3^8} = 1.$$

Bài 44: Thực hiện phép tính:

$$C = \frac{20 - \frac{20}{7} - \frac{20}{289} - \frac{20}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} : \frac{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{169} + \frac{5}{91}}{7 + \frac{7}{13} + \frac{7}{169} + \frac{7}{91}}$$

*Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022***Lời giải**

$$C = \frac{20 - \frac{20}{7} - \frac{20}{289} - \frac{20}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} : \frac{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{169} + \frac{5}{91}}{7 + \frac{7}{13} + \frac{7}{169} + \frac{7}{91}}$$

$$= \frac{20}{4} : \frac{5}{7}$$

$$= 5 \cdot \frac{7}{5} = 7$$

Dạng 2: Tính tổng dãy số tự nhiên theo quy luật.**Bài 1:** Kết quả của phép tính $1-2+3-4+5-6+\dots+99-100$ bằng:

A. 50

B. -50

C. -100

D. 0

*Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019***Bài 2:** Cho $E = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{200}(1+2+\dots+200)$ và $F = \frac{20300}{3}$.Tính $\frac{E}{F}$.*Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022*

**Lời giải**

$$\begin{aligned}
E &= 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{200}(1+2+\dots+200) \\
&= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+2) \cdot 2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+3) \cdot 3}{2} + \dots + \frac{1}{200} \cdot \frac{(1+200) \cdot 200}{2} \\
&= 1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{201}{2} \\
&= \frac{2+3+4+\dots+201}{2} \\
&= 10150 \\
\frac{E}{F} &= 10150 \cdot \frac{3}{20300} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Bài 3: Kết quả của phép tính $1-2+3-4+\dots+99-100$ là:

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Lời giải

$$\begin{aligned}
&1-2+3-4+\dots+99-100 \\
&= (1-2) + (3-4) + (5-6) + \dots + (99-100) \\
&= -1 + (-1) + (-1) + \dots + (-1) \\
&= 50 \cdot (-1) \\
&= -50
\end{aligned}$$

Bài 4: Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$1) -1-2+3+4-5-6+7+8-\dots-2013-2014+2015+2016$$

$$2) B = \left(\frac{1}{2}-1\right) : \left(\frac{1}{3}-1\right) : \left(\frac{1}{4}-1\right) : \left(\frac{1}{5}-1\right) : \dots : \left(\frac{1}{98}-1\right) : \left(\frac{1}{99}-1\right) : \left(\frac{1}{100}-1\right)$$

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Lời giải

$$\begin{aligned}
1) A &= -1-2+3+4-5-6+7+8-9-10+\dots-2013-2014+2015+2016 \\
&= (-1-2+3+4) + (-5-6+7+8) + (-9-10+11+12) + \dots + (-2013-2014+2015+2016)
\end{aligned}$$

Ta có tổng A có 2016 số hạng nên có $2016 : 4 = 504$ nhóm

$$A = 4 + 4 + 4 + \dots + 4 \text{ (tổng có 504 số 4)}$$

$$A = 4 \cdot 504 = 2016$$

$$2) B = \left(\frac{1}{2}-1\right) : \left(\frac{1}{3}-1\right) : \left(\frac{1}{4}-1\right) : \left(\frac{1}{5}-1\right) : \dots : \left(\frac{1}{98}-1\right) : \left(\frac{1}{99}-1\right) : \left(\frac{1}{100}-1\right)$$

$$B = \left(-\frac{1}{2}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{3}{4}\right) : \dots : \left(-\frac{98}{99}\right) : \left(-\frac{99}{100}\right)$$

$$B = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(-\frac{99}{98}\right) \cdot \left(-\frac{100}{99}\right)$$

Ta thấy tích B có 99 thừa số âm nên mang dấu âm

$$B = -\frac{1.3.4.5.6 \dots 98.99.100}{2.2.3.4.5 \dots 97.98.99} = \frac{-100}{2.2} = -25$$



Bài 5: Tính tổng $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2019 – 2020.

Lời giải

$$S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$$

$$3S = (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100).3$$

$$= 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + \dots + 99.100.3$$

$$= 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + 99.100.(101-98)$$

$$= 1.2.3 - 1.2.3 + 2.3.4 - 2.3.4 + 3.4.5 - \dots - 98.99.100 + 99.100.101$$

$$S = 99.101 : 3 = 33.100.101 = 33300$$

Vậy $S = 33300$.

Bài 6: Cho $A = 4 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$. Hỏi A có chia hết cho 128 không ?

Trích đề HSG trường Tân Lập năm 2018-2019

Lời giải

$$A = 4 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$$

$$A = 4 + (2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20})$$

$$A - 4 = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$$

$$2(A - 4) = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{21}$$

$$2(A - 4) - (A - 4) = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{21} - 2^2 - 2^3 - 2^4 - \dots - 2^{20}$$

$$A - 4 = 2^{21} - 2^2$$

$$A - 4 = 2^{21} - 4$$

$$A = 2^{21}$$

$$\text{Mà } 128 = 2^7$$

$$\text{Mà } 2^{21} : 2^7$$

Do đó $A : 128$.

Bài 7: Cho $A = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 99 - 100$.

a) Tính A

b) A có chia hết cho 2, cho 3, cho 5 không ?

c) A có bao nhiêu ước tự nhiên ? Bao nhiêu ước nguyên ?

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2018 -2019

Lời giải



$$A = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{2012} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}A = \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{2013} \quad (2)$$

Lấy (2) trừ (1) ta được:

$$\frac{3}{2}A - A = \left(\frac{3}{2}\right)^{2013} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}A = \left(\frac{3}{2}\right)^{2013} - \frac{5}{4} \Rightarrow A = \frac{3^{2013}}{2^{2012}} + \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } B - A = \frac{3^{2013}}{2^{2014}} - \frac{3^{2013}}{2^{2012}} + \frac{5}{2}$$

Bài 2: Cho $S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$

- Chứng minh rằng S là bội của -20
- Tính S , từ đó suy ra 3^{100} chia cho 4 dư 1

Trích đề HSG 059 năm 2018-2019

Lời giải

- Tổng S có 100 số hạng chia thành 25 nhóm, mỗi nhóm 4 số hạng

$$\begin{aligned} S &= 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99} \\ &= (1 + 3 + 3^2 - 3^3) + (3^4 - 3^5 + 3^6 - 3^7) + \dots + (3^{96} - 3^{97} + 3^{98} - 3^{99}) \\ &= (-20) + 3^4 \cdot (-20) + \dots + 3^{96} \cdot (-20) \Rightarrow S : -20 \end{aligned}$$

$$b) S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$$

$$3S = 3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 + \dots + 3^{99} - 3^{100}$$

$$\Rightarrow 3S + S = 4S = \frac{1 - 3^{100}}{4}$$

$$\Rightarrow 3^{100} - 1 : 4 \Rightarrow 3^{100} \text{ chia cho 4 dư 1.}$$

Bài 3: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$D = 15 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + \dots + 2^{2020}.$$

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021-2022

Lời giải

$$D = 15 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + \dots + 2^{2020}$$

$$E = 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + \dots + 2^{2020}$$

$$2E = 2^5 + 2^6 + 2^7 + \dots + 2^{2020} + 2^{2021}$$

$$2E - E = (2^5 + 2^6 + 2^7 + \dots + 2^{2020} + 2^{2021}) - (2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + \dots + 2^{2020})$$

$$E = 2^5 + 2^6 + 2^7 + \dots + 2^{2020} + 2^{2021} - 2^4 - 2^5 - 2^6 - 2^7 - \dots - 2^{2020}$$

$$E = (2^5 - 2^5) + (2^6 - 2^6) + (2^7 - 2^7) + \dots + (2^{2020} - 2^{2020}) + (2^{2021} - 2^4)$$

$$E = 2^{2021} - 16.$$

$$D = 15 + E = 15 + 2^{2021} - 16 = 2^{2021} - 1.$$

$$\text{Vậy } D = 2^{2021} - 1.$$



Bài 4: Cho $A = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{2012}$ và $B = \left(\frac{3}{2}\right)^{2013} : 2$

Tính $B - A$.

Trích đề HSG huyện Đồng Tháp năm 2018-2019

Lời giải

Ta có:

$$A = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{2012} \quad (1)$$

$$\frac{3}{2}A = \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{2012} + \left(\frac{3}{2}\right)^{2013} \quad (2)$$

Lấy (2) - (1) ta được:

$$\frac{3}{2}A - A = \left(\frac{3}{2}\right)^{2013} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$$

$$A = \frac{3^{2013}}{2^{2012}} + \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } B - A = \frac{3^{2013}}{2^{2014}} - \frac{3^{2013}}{2^{2012}} + \frac{5}{2}$$

Bài 5: Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2010}$

a) Rút gọn A .

b) Tìm x để $2A + 3 = 3^x$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2019 -2020

Lời giải

a) Rút gọn A

$$A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2010}$$

$$3A = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2011}$$

$$3A - A = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2011} - 3 - 3^2 - 3^3 - \dots - 3^{2010}$$

$$2A = 3^{2011} - 3$$

$$A = \frac{3^{2011} - 3}{2}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{3^{2011} - 3}{2}$$

b) Tìm x để $2A + 3 = 3^x$

$$2A + 3 = 3^x$$

$$2 \cdot \frac{3^{2011} - 3}{2} + 3 = 3^x$$



$$3^{2011} - 3 + 3 = 3^x$$

$$3^{2011} = 3^x$$

$$x = 2011$$

Vậy $x = 2011$.

Bài 6: Tính tổng: $M = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1000}$.

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Lời giải

$$M = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1000} \text{ nên } 3M = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1001}$$

$$3M - M = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1001} - (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1000})$$

$$2M = 3^{1001} - 1$$

$$M = \frac{3^{1001} - 1}{2}$$

$$\text{Vậy } M = \frac{3^{1001} - 1}{2}.$$

Bài 7. Cho tổng $A = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2008}$. Tính giá trị biểu thức: $B = 8A - 3^{2010}$

Trích đề HSG Liên trường năm 2021 -2022

Lời giải

$$A = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2008}$$

$$9A = 3^2 + 3^4 + 3^6 + 3^8 + \dots + 3^{2010}$$

$$9A - A = 8A = 3^{2010} - 1$$

$$B = 8A - 3^{2010} = 3^{2010} - 1 - 3^{2010} = -1$$

Bài 8: Cho x là tổng của tất cả các số nguyên có 2 chữ số, y là số nguyên âm lớn nhất. Hãy tính giá trị của biểu thức $A = 2009 \cdot x^{2006} - 2008 \cdot y^{2007}$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Theo bài ta có: $x = -99 + (-98) + \dots + (-11) + (-10) + 10 + 11 + \dots + 98 + 99$

Suy ra $x = 0$ suy ra $x^{2006} = 0$; $y = -1$ suy ra $\Rightarrow y^{2007} = -1$

$$A = 2009 \cdot x^{2006} - 2008 \cdot y^{2007} = 0 - (-2008) = 2008$$

Dạng 4: Tổng dãy phân số theo quy luật.

Bài 1: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$, biết: $A = \frac{1}{3.8} + \frac{1}{8.13} + \frac{1}{13.18} + \frac{1}{18.21}$; $B = \frac{1}{3.7} + \frac{1}{7.11} + \frac{1}{11.15} + \frac{1}{15.19} + \frac{1}{19.23}$

A. $\frac{A}{B} = \frac{5}{4}$

B. $\frac{A}{B} = 1$

C. $\frac{A}{B} = \frac{4}{5}$

D. $\frac{A}{B} = 20$.

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 2: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$D = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$$

**Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019****Lời giải**

$$\begin{aligned}
 D &= \left(\frac{1}{2^2}-1\right)\left(\frac{1}{3^2}-1\right)\left(\frac{1}{4^2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{100^2}-1\right) = \left(\frac{1-4}{2^2}\right)\left(\frac{1-9}{3^2}\right)\dots\left(\frac{1-10000}{100^2}\right) \\
 &= \frac{-3}{2^2} \cdot \frac{-8}{3^2} \cdot \frac{-15}{4^2} \dots \frac{-9999}{100^2} = -\frac{1.3}{2.3} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \dots \frac{99.1010}{100.100} \\
 &= -\frac{(1.2.3\dots 99) \cdot (3.4.5\dots 101)}{(2.3.4\dots 100) \cdot (2.3.4\dots 100)} = -\frac{101}{200}
 \end{aligned}$$

Bài 3: Tính: $\left[92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100}\right] : \left[\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}\right]$

Trích đề HSG trường Nguyễn Khuyến năm 20...-20...**Lời giải**

$$\begin{aligned}
 B &= \left[92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100}\right] : \left[\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}\right] \\
 B &= \frac{\left(1 - \frac{1}{9}\right) + \left(1 - \frac{2}{10}\right) + \dots + \left(1 - \frac{92}{100}\right)}{\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}} = \frac{\frac{8}{9} + \frac{8}{10} + \dots + \frac{8}{100}}{\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{100}\right)} = 8 : \frac{1}{5} = 40
 \end{aligned}$$

Bài 4: Cho $A = \frac{4}{7.31} + \frac{6}{7.41} + \frac{9}{10.41} + \frac{7}{10.57}$ và $B = \frac{7}{19.31} + \frac{5}{19.43} + \frac{3}{23.43} + \frac{11}{23.57}$

Tỷ số $\frac{A}{B}$ là bao nhiêu

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019**Lời giải**

$$A = \frac{4}{7.31} + \frac{6}{7.41} + \frac{9}{10.41} + \frac{7}{10.57}$$

$$\frac{A}{5} = \frac{4}{35.31} + \frac{6}{35.41} + \frac{9}{50.41} + \frac{7}{50.57}$$

$$\frac{A}{5} = \frac{1}{31} - \frac{1}{35} + \frac{1}{35} - \frac{1}{41} + \frac{1}{41} - \frac{1}{50} + \frac{1}{50} - \frac{1}{57}$$

$$\frac{A}{5} = \frac{1}{31} - \frac{1}{57}$$

$$\Rightarrow A = 5 \cdot \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{57}\right)$$

$$\frac{B}{2} = \frac{7}{38.31} + \frac{5}{38.43} + \frac{3}{46.43} + \frac{11}{46.57}$$



$$\frac{B}{2} = \frac{1}{31} - \frac{1}{38} + \frac{1}{38} - \frac{1}{43} + \frac{1}{43} - \frac{1}{46} + \frac{1}{46} - \frac{1}{57}$$

$$\frac{B}{2} = \frac{1}{31} - \frac{1}{57}$$

$$\Rightarrow B = 2 \cdot \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{57} \right)$$

$$\frac{A}{B} = \frac{5 \cdot \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{57} \right)}{2 \cdot \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{57} \right)} = \frac{5}{2}$$

Bài 5: Tính giá trị biểu thức sau:

$$B = \left(2017 - \frac{1}{4} - \frac{2}{5} - \frac{3}{6} - \frac{4}{7} - \dots - \frac{2017}{2020} \right) : \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \frac{1}{30} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{10100} \right)$$

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Lời giải

$$\text{Đặt } B_1 = 2017 - \frac{1}{4} - \frac{2}{5} - \frac{3}{6} - \frac{4}{7} - \dots - \frac{2017}{2020}$$

$$\Rightarrow B_1 = \left(1 - \frac{1}{4} \right) + \left(1 - \frac{2}{5} \right) + \left(1 - \frac{3}{6} \right) + \left(1 - \frac{4}{7} \right) + \dots + \left(1 - \frac{2017}{2020} \right)$$

$$\Rightarrow B_1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{3}{6} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{3}{2020}$$

$$\Rightarrow B_1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2020} \right)$$

$$\text{Đặt } B_2 = \frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \frac{1}{30} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{10100}$$

$$\Rightarrow B_2 = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2020} \right)$$

$$B = \frac{B_1}{B_2} = \frac{3}{\frac{1}{5}} = 15$$

Bài 6: Tính nhanh:

a) $\frac{3^2}{1.4} + \frac{3^2}{4.7} + \frac{3^2}{7.10} + \dots + \frac{3^2}{97.100}$

b) $M = \frac{1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2012}}{3^{2004} - 3}$

c) $D = \frac{2}{20} + \frac{2}{30} + \frac{2}{42} + \frac{2}{56} + \frac{2}{72} + \frac{2}{90}$

Trích đề 59 HSG huyện năm 2018- 2019

Lời giải



$$\begin{aligned} a) A &= \frac{3^2}{1.4} + \frac{3^2}{4.7} + \frac{3^2}{7.10} + \dots + \frac{3^2}{97.100} = 3 \cdot \left(\frac{3}{1.4} + \frac{3}{4.7} + \frac{3}{7.10} + \dots + \frac{3}{97.100} \right) \\ &= 3 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{100} \right) = 3 \cdot \frac{99}{100} = \frac{297}{100} \end{aligned}$$

$$b) M = \frac{1+3+3^2+3^3+\dots+3^{2012}}{3^{2014}-3}$$

$$A = 1+3+3^2+3^3+\dots+3^{2012} \Rightarrow A = 3^{2013} - 1$$

$$B = 3^{2014} - 3 \Rightarrow B = 3 \cdot (3^{2013} - 1)$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{3}$$

$$c) D = 2 \cdot \left(\frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{9.10} \right)$$

$$\Rightarrow D = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right)$$

$$\Rightarrow D = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10} \right)$$

$$\Rightarrow D = 2 \cdot \frac{6}{40} = \frac{3}{10}$$

Bài 7: Cho biểu thức $D = \frac{(2!)^2}{1^2} + \frac{(2!)^2}{3^2} + \frac{(2!)^2}{5^2} + \frac{(2!)^2}{7^2} + \dots + \frac{(2!)^2}{2015^2}$

So sánh D với 6. Biết $n! = 1.2.3 \dots n (n \in \mathbb{N})$

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Lời giải

Ta có:

$$D = \frac{(2!)^2}{1^2} + \frac{(2!)^2}{3^2} + \frac{(2!)^2}{5^2} + \frac{(2!)^2}{7^2} + \dots + \frac{(2!)^2}{2015^2}$$

$$D = \frac{2^2}{1^2} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^2}{5^2} + \frac{2^2}{7^2} + \dots + \frac{2^2}{2015^2}$$

$$D = 4 + 2 \cdot \left(\frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \dots + \frac{2}{2015^2} \right)$$

$$D < 4 + 2 \cdot \left(\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{2013.2015} \right)$$

$$= 4 + 2 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2015} \right)$$

$$= 4 + 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2015} \right) = 4 + 2 - \frac{2}{2015} < 6$$

$$\Rightarrow D < 6$$

Bài 8: Thực hiện phép tính (hợp lí nếu có thể) $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{399} + \frac{1}{483}$



Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{399} + \frac{1}{483} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{23} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{22}{23} = \frac{11}{23} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{19.21} + \frac{1}{21.23} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{19.21} + \frac{2}{21.23} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{1}{21} - \frac{1}{23} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{23} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{22}{23} = \frac{11}{23} \end{aligned}$$

Bài 9: Không quy đồng hãy tính tổng sau:

$$A = \frac{-1}{20} + \frac{-1}{30} + \frac{-1}{42} + \frac{-1}{56} + \frac{-1}{72} + \frac{-1}{90}$$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{-1}{20} + \frac{-1}{30} + \frac{-1}{42} + \frac{-1}{56} + \frac{-1}{72} + \frac{-1}{90} \\ &= - \left(\frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{9.10} \right) \\ &= - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \\ &= - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10} \right) = \frac{-3}{20} \end{aligned}$$

Bài 10: Chứng minh rằng $\frac{1}{28} + \frac{1}{30} + \frac{1}{32} + \frac{1}{34} + \dots + \frac{1}{52} = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{5.12} + \frac{1}{7.16} + \dots + \frac{1}{25.52}$.

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021 – 2022.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{5.12} + \dots + \frac{1}{25.52} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{25.26} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{25} - \frac{1}{26} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{25} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{26} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{25} + \frac{1}{26} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{26} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{25} + \frac{1}{26} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{13} \right) \right] \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{26} \right)$$

$$= \frac{1}{28} + \frac{1}{30} + \frac{1}{32} + \frac{1}{34} + \dots + \frac{1}{52}$$

Bài 11: Cho $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{48} + \frac{1}{49} + \frac{1}{50}$. và $P = \frac{1}{49} + \frac{2}{48} + \frac{3}{47} + \dots + \frac{48}{2} + \frac{49}{1}$.

Hãy tính $\frac{S}{P}$.

Trích đề HSG huyện Ngọc Lặc năm 2018 -2019

Lời giải

$$P = \frac{1}{49} + \frac{2}{48} + \frac{3}{47} + \dots + \frac{48}{2} + \frac{49}{1}$$

$$= \left(\frac{1}{49} + 1 \right) + \left(\frac{2}{48} + 1 \right) + \left(\frac{3}{47} + 1 \right) + \dots + \left(\frac{48}{2} + 1 \right) + 1$$

$$= \left(\frac{50}{49} + \frac{50}{48} + \frac{50}{47} + \dots + \frac{50}{2} \right) + 1$$

$$= \frac{50}{50} + \frac{50}{49} + \frac{50}{48} + \dots + \frac{50}{2}$$

$$= 50 \cdot \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{49} + \frac{1}{48} + \dots + \frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{S}{P} = \frac{\frac{1}{50} + \frac{1}{49} + \frac{1}{48} + \dots + \frac{1}{2}}{50 \cdot \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{49} + \frac{1}{48} + \dots + \frac{1}{2} \right)} = \frac{1}{50}$$

Bài 12: Tính: $A = \frac{1}{4.9} + \frac{1}{9.14} + \frac{1}{14.19} + \dots + \frac{1}{64.69}$.

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2019 -2020

Lời giải

$$A = \frac{1}{4.9} + \frac{1}{9.14} + \frac{1}{14.19} + \dots + \frac{1}{64.69}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{64} - \frac{1}{69} \right)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{69} \right) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{69}{4.69} - \frac{4}{4.69} \right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{65}{4.69} = \frac{13}{4.69}$$

Bài 13: Tính tổng $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$.

Trích đề HSG cấp Trường năm 2019-2020

**Lời giải**

$$\begin{aligned}
S &= 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100 \\
3S &= (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100).3 \\
&= 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + \dots + 99.100.3 \\
&= 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + 99.100.(101-98) \\
&= 1.2.3 - 1.2.3 + 2.3.4 - 2.3.4 + 3.4.5 - \dots - 98.99.100 + 99.100.101 \\
S &= 99.100.101 : 3 = 33.100.101 = 333300 \\
\text{Vậy } S &= 33300.
\end{aligned}$$

Bài 14: Thực hiện tính:

$$E = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{200}(1+2+\dots+200).$$

*Trích đề HSG Huyện Hoài Nhơn năm 2015-2016***Lời giải**

Từ $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ được:

$$\begin{aligned}
E &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2.3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3.4}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4.5}{2} + \dots + \frac{1}{200} \cdot \frac{200.201}{2} \\
&= 1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{201}{2}
\end{aligned}$$

$$E + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{201}{2} = \frac{1}{2}(1+2+4+\dots+201)$$

$$E = \frac{1}{2}(1+2+4+\dots+201) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{201.202}{2} - \frac{1}{2} = 10150$$

Bài 15: Cho $E = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{200}(1+2+\dots+200)$ và $F = \frac{20300}{3}$.

Tính $\frac{E}{F}$.

*Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022***Lời giải**

Ta có

$$\begin{aligned}
E &= 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{200}(1+2+\dots+200) \\
&= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+2).2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+3).3}{2} + \dots + \frac{1}{200} \cdot \frac{(1+200).200}{2}
\end{aligned}$$



$$= 1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{201}{2}$$

$$= \frac{2 + 3 + 4 + \dots + 201}{2}$$

$$= 10150.$$

Do đó $\frac{E}{F} = 10150 \cdot \frac{3}{20300} = \frac{3}{2}$

Bài 16: Cho $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{48} + \frac{1}{49} + \frac{1}{50}$ và $P = \frac{1}{49} + \frac{2}{48} + \frac{3}{47} + \dots + \frac{48}{2} + \frac{49}{1}$.

Hãy tính $\frac{S}{P}$.

Trích đề HSG Huyện Ngọc Lặc năm 2018-2019

Lời giải

$$P = \frac{1}{49} + \frac{2}{48} + \frac{3}{47} + \dots + \frac{48}{2} + \frac{49}{1}$$

$$= \left(\frac{1}{49} + 1\right) + \left(\frac{2}{48} + 1\right) + \left(\frac{3}{47} + 1\right) + \dots + \left(\frac{48}{2} + 1\right) + 1$$

$$= \left(\frac{50}{49} + \frac{50}{48} + \frac{50}{47} + \dots + \frac{50}{2}\right) + 1 = \frac{50}{50} + \frac{50}{49} + \frac{50}{48} + \dots + \frac{50}{2}$$

$$= 50 \cdot \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{49} + \frac{1}{48} + \dots + \frac{1}{2}\right)$$

Do đó $\frac{S}{P} = \frac{\frac{1}{50} + \frac{1}{49} + \frac{1}{48} + \dots + \frac{1}{2}}{50 \cdot \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{49} + \frac{1}{48} + \dots + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{50}$

Bài 17: Cho $A = \frac{1}{3.8} + \frac{1}{8.13} + \frac{1}{13.18} + \dots + \frac{1}{33.38}$ và $B = \frac{1}{3.10} + \frac{1}{10.17} + \frac{1}{17.24} + \dots + \frac{1}{31.38}$.

Tính tỷ số $\frac{A}{B}$.

Trích đề HSG cấp Trường năm 2019-2020

Lời giải

$$A = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{13}\right) + \dots + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{33} - \frac{1}{38}\right)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{33} - \frac{1}{38}\right) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{38}\right)$$



$$B = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{10} \right) + \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{17} \right) + \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{24} \right) + \dots + \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{38} \right)$$

$$= \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{31} - \frac{1}{38} \right) = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{38} \right)$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{7}} = \frac{7}{5}$$

Trắc nghiệm

Bài 18: Cho $A = \frac{4}{7.31} + \frac{6}{7.41} + \frac{9}{10.41} + \frac{7}{10.57}$; $B = \frac{7}{19.31} + \frac{5}{19.43} + \frac{3}{23.43} + \frac{11}{23.57}$

Tỷ số $\frac{A}{B}$ là:

- A. $\frac{7}{4}$. B. $\frac{7}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{11}{4}$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: C. $\frac{5}{2}$.

Tự luận

Bài 19: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100}$.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100}$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{99} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100} \right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{99} \right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100} \right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{50} \right)$$

$$= \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100}$$

Vậy $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100}$.

Bài 20: Tính giá trị của các biểu thức sau: $K = \frac{4}{11.16} + \frac{4}{16.21} + \frac{4}{21.26} + \dots + \frac{4}{61.66}$.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có:



$$K = 4 \left(\frac{1}{11.16} + \frac{1}{16.21} + \frac{1}{21.26} + \dots + \frac{1}{61.66} \right)$$

$$5K = 4 \left(\frac{5}{11.16} + \frac{5}{16.21} + \frac{5}{21.26} + \dots + \frac{5}{61.66} \right)$$

$$5K = 4 \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{61} - \frac{1}{66} \right)$$

$$5K = 4 \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{66} \right) \Rightarrow 5K = 4 \cdot \frac{55}{11.66}$$

$$K = \frac{4}{66} = \frac{2}{33}$$

$$\text{Vậy } K = \frac{2}{33}$$

Bài 21: Cho $E = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{200}(1+2+3+\dots+200)$ và

$$F = \frac{20300}{3}. \text{ Tính } \frac{E}{F}.$$

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Lời giải

$$E = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{200}(1+2+\dots+200)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+2) \cdot 2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+3) \cdot 3}{2} + \dots + \frac{1}{200} \cdot \frac{(1+200) \cdot 200}{2}$$

$$= 1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{201}{2}$$

$$= \frac{2+3+4+\dots+201}{2}$$

$$= 10150$$

$$\frac{E}{F} = 10150 \cdot \frac{3}{20300} = \frac{3}{2}$$

Bài 22: Tính giá trị các biểu thức sau: $B = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{20}(1+2+3+\dots+20)$

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Lời giải

$$B = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{20}(1+2+3+\dots+20)$$

$$B = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + \dots + \frac{1}{20} \cdot \frac{20 \cdot 21}{2}$$

$$B = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{21}{2}$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot (1+2+3+\dots+20)$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} = 105.$$

Bài 23: Tính $B = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2499}\right)$.

**Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022****Lời giải**

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2499}\right) \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15} \cdots \frac{2500}{2499} \\ &= \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdots \frac{50 \cdot 50}{49 \cdot 51} \\ &= \frac{2 \cdot 50}{51} = \frac{100}{51} \end{aligned}$$

II. Tìm số chưa biết.**Dạng 1: Tìm số chưa biết (không có lũy thừa).****Bài 1.** Tìm y , biết: $x - y = -2015$; $y - z = -2016$; $z + x = 2017$

- A. $y = -1007$ B. $y = 1007$ C. $y = -1008$ D. $y = 1008$

*Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019***Bài 2.** Cho $x, y \in \mathbb{Z}$. Tìm y , biết: $xy + 5x - 3y = 15$

- A. $y = -3$ B. $y = 3$ C. $y = -5$ D. $y = 5$

*Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019***Bài 3.** Tìm x , biết: $|x - 1| - 5 = -2$

- A. $x \in \{2\}$ B. $x \in \{4\}$ C. $x \in \{-2; 4\}$ D. $x \in \emptyset$

*Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019***Bài 4.** Cho x, y là hai số thỏa mãn: $(x + 2)^2 + |y - 3| = 0$. Tổng hai số $x + y$ bằng:

- A. -5 B. 5 C. 1 D. -1

*Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019***Bài 5.** Tìm x , biết: $\frac{-(x+1)}{4} = \frac{-9}{x+1}$

- A. $x \in \{5\}$ B. $x \in \{-7\}$ C. $x \in \{5; -7\}$ D. $x \in \emptyset$

*Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019***Bài 6.** Tìm x , biết: $\frac{5}{4 \cdot 3} + \frac{3}{4 \cdot 11} + \frac{3}{7 \cdot 11} + \frac{9}{7 \cdot 23} = \frac{2x}{69}$

- A. $x = 5$ B. $x = 10$ C. $x = 20$ D. $x = 40$

*Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019***Bài 7.** Số tự nhiên x thỏa mãn: $\left(\frac{1}{1 \cdot 51} + \frac{1}{2 \cdot 52} + \frac{1}{3 \cdot 53} + \cdots + \frac{1}{10 \cdot 60}\right)x = \frac{1}{1 \cdot 11} + \frac{1}{2 \cdot 12} + \frac{1}{3 \cdot 13} + \cdots + \frac{1}{50 \cdot 60}$ là:

- A. $x = 5$ B. $x = 4$ C. $x = 7$ D. $x = 9$

*Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021 - 2022***Bài 8:** Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn điều kiện: $\frac{11}{17} < \frac{a}{b} < \frac{23}{29}$ và $8b - 9a = 31$ *Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018***Lời giải**



$$8b - 9a = 31 \Rightarrow b = \frac{31 + 9a}{8} = \frac{32 - 1 + 8a + a}{8} \in \mathbb{N} \Rightarrow (a-1):8$$

$$\Rightarrow a = 8q + 1 (q \in \mathbb{N})$$

$$b = \frac{31 + 9(8q + 1)}{8} = 9q + 5 \Rightarrow \frac{11}{17} < \frac{8q + 1}{9q + 5} < \frac{23}{29}$$

$$11(9q + 5) < 17(8q + 1) \Rightarrow 37q > 38 \Rightarrow q > 1$$

$$29(8q + 1) < 23(9q + 5) \Rightarrow 25q < 86 \Rightarrow q < 4 \Rightarrow q \in \{2; 3\}$$

$$q = 2 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{17}{23}; q = 3 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{25}{32}$$

Bài 9: Tìm x biết: $x + |-3| = 0$

Trích đề HSG Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020

Lời giải

Ta có: $|-3| = 3$ nên $x + |-3| = 0 \Rightarrow x = -3$

Bài 10: a) Tìm x , biết: $\frac{x-2}{10} + \frac{x-2}{15} + \frac{x-2}{21} + \frac{x-2}{28} + \frac{x-2}{36} = 20$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) sao cho: $xy + 7x - 3y - 27 = 0$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Lời giải

$$a) \frac{x-2}{10} + \frac{x-2}{15} + \frac{x-2}{21} + \frac{x-2}{28} + \frac{x-2}{36} = 20$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{20} + \frac{x-2}{30} + \frac{x-2}{42} + \frac{x-2}{56} + \frac{x-2}{72} = 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{4.5} + \frac{x-2}{5.6} + \frac{x-2}{6.7} + \frac{x-2}{7.8} + \frac{x-2}{8.9} = 10$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right) = 10$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) = 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{36} \cdot (x-2) = 10$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 72 \Rightarrow x = 74$$

$$b) xy + 7x - 3y - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y+7) - 3(y+7) = 6$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(y+7) = 6$$

$$x-3 \quad -6 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 6$$

$$y+7 \quad -1 \quad -2 \quad -3 \quad -6 \quad 6 \quad 3 \quad 2 \quad 1$$

$$x \quad -3 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 9$$

$$y \quad -8 \quad -9 \quad -10 \quad -13 \quad -1 \quad -4 \quad -5 \quad -6$$

Vậy các cặp số nguyên $(x, y) \in \{(-3, -8); (0, -9); (1, -10); (1, -13); (4, -1); (5, -4); (6, -5); (9, -6)\}$

Bài 11: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $2xy - x - y = 2$.



Lời giải

Ta có:

$$2xy - x - y = 2$$

$$4xy - 2x - 2y = 4$$

$$4xy - 2x - 2y + 1 = 5$$

$$2x(2y-1) - (2y-1) = 5$$

$$(2x-1)(2y-1) = 5$$

$2x-1$	1	5	-1	-5
$2y-1$	5	1	-5	-1
x	1	3	0	-2
y	3	1	-2	0

Vậy các cặp số nguyên x, y thỏa mãn là $(1;3)$, $(3;1)$, $(-2;0)$, $(0;-2)$ **Bài 12:** Tìm số nguyên x , biết:

a) $2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7$

b) $\frac{x}{6} + \frac{x}{10} + \frac{x}{15} + \frac{x}{21} + \frac{x}{28} + \frac{x}{36} + \frac{x}{45} + \frac{x}{55} + \frac{x}{66} + \frac{x}{78} = \frac{220}{39}$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Lời giải

a) $2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7 \Leftrightarrow 2016 : [25 - (3x + 2)] = 63$

$$\Leftrightarrow 25 - (3x + 2) = 2016 : 63 \Rightarrow 25 - (3x + 2) = 32$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2 = -7 \Leftrightarrow 3x = -9 \Leftrightarrow x = -3$$

b) $\frac{x}{6} + \frac{x}{10} + \frac{x}{15} + \frac{x}{21} + \frac{x}{28} + \frac{x}{36} + \frac{x}{45} + \frac{x}{55} + \frac{x}{66} + \frac{x}{78} = \frac{220}{39}$

$$\Leftrightarrow x \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{36} + \frac{1}{45} + \frac{1}{55} + \frac{1}{66} + \frac{1}{78} \right) = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110} + \frac{1}{132} + \frac{1}{156} \right) = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 13} \right) = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} \right) = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{13} \right) = \frac{220}{39} \Rightarrow x = 11$$

Bài 13: Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho $xy - 2x + y + 1 = 0$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Lời giải

$$xy - 2x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow x(y-2) + (y-2)$$

$$= -3 \Leftrightarrow (x+1)(y-2) = -3 = 1 \cdot (-3) = (-3) \cdot 1$$

Từ đó suy ra $(x; y) \in \{(0; -1); (-4; 3)\}$



Bài 14: 1) Tìm số tự nhiên x , biết: $(x-5)\frac{30}{100} = \frac{20x}{100} + 5$.

2) Tìm số tự nhiên a, b, c, d nhỏ nhất sao cho: $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}; \frac{b}{c} = \frac{12}{21}; \frac{c}{d} = \frac{6}{11}$.

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

1) Tìm số tự nhiên x , biết: $(x-5)\frac{30}{100} = \frac{20x}{100} + 5$.

$$(x-5)\frac{30}{100} = \frac{20x}{100} + 5$$

$$\Leftrightarrow (x-5) \cdot \frac{3}{10} = \frac{x}{5} + 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{10}x - \frac{3}{2} = \frac{x}{5} + 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{10}x - \frac{x}{5} = 5 + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{10} = \frac{13}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 65$$

Vậy $x = 65$

2) Tìm số tự nhiên a, b, c, d nhỏ nhất sao cho: $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}; \frac{b}{c} = \frac{12}{21}; \frac{c}{d} = \frac{6}{11}$.

Điều kiện: $a, b, c, d \neq 0$

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{a}{20} = \frac{b}{12}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{12}{21} \Rightarrow \frac{b}{12} = \frac{c}{21}$$

$$\text{Suy ra } \frac{a}{20} = \frac{b}{12} = \frac{c}{21} \Rightarrow \frac{a}{40} = \frac{b}{24} = \frac{c}{42}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{6}{11} \Rightarrow \frac{c}{6} = \frac{d}{11} \Rightarrow \frac{c}{42} = \frac{d}{77}$$

$$\text{Suy ra } \frac{a}{40} = \frac{b}{24} = \frac{c}{42} = \frac{d}{77}$$

$$\text{Vì } a, b, c, d \in \mathbb{N} \text{ và là các số nhỏ nhất } \Rightarrow \frac{a}{40} = \frac{b}{24} = \frac{c}{42} = \frac{d}{77} = 1 \Rightarrow a = 40; b = 24; c = 42; d = 77$$

Vậy $a = 40; b = 24; c = 42; d = 77$

Bài 15: Tổng của hai số tự nhiên là 102. Nếu thêm chữ số 0 vào bên phải số bé rồi cộng với số lớn ta được tổng mới là 417. Khi đó số lớn là:

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Lời giải

Gọi a là số bé, b là số lớn, ta có

$$a + b = 102; \overline{a0} + b = 10a + b = 417$$

$$\Rightarrow 10a + b - (a + b) = 417 - 102$$

$$\Rightarrow 9a = 315$$



$$\Rightarrow a = 315 : 9 = 35$$

$$\Rightarrow b = 102 - 35 = 67$$

Vậy số lớn là 67

Bài 16: Cho 7 ô liên tiếp sau

	-13		a			-27
--	-----	--	-----	--	--	-----

Biết rằng tổng của ba ô bất kỳ luôn bằng 0. Khi đó giá trị của a là bao nhiêu?

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Lời giải

Gọi các số cần tìm lần lượt là b, c, d, e

b	-13	c	a	d	e	-27
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Ta có $b + (-13) + c = 0$ và $-13 + c + a = 0$

$$\text{Nên } b + (-13) + c = -13 + a + c$$

$$\Rightarrow b = a$$

$$\text{Có } -13 + c + a = c + a + d \Rightarrow d = -13$$

$$\text{Có } -13 + e + (-27) = 0 \Rightarrow e = 40$$

$$\text{Có } a + (-13) + 40 = 0 \Rightarrow a + 27 = 0 \Rightarrow a = -27$$

$$\Rightarrow b = -27$$

$$\text{Có } (-27) + (-13) + c = 0$$

$$\Rightarrow -40 + c = 0$$

$$\Rightarrow c = 40$$

Ta có bảng:

-27	-13	40	-27	-13	40	-27
-----	-----	----	-----	-----	----	-----

Bài 17: Trung bình cộng của tử số và mẫu số của một phân số là 68. Cộng thêm vào tử số của phân số đó 4 đơn vị thì ta được phân số mới bằng phân số $\frac{3}{2}$. Phân số lúc đầu là phân số nào?

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Lời giải

$$\text{Tổng tử số và mẫu số là: } 68 \cdot 2 = 136$$

$$\text{Tổng lúc sau: } 136 + 4 = 140$$

$$\text{Tử số: } 140 : (3 + 2) \cdot 3 - 4 = 80$$

$$\text{Mẫu số: } 136 - 80 = 56$$

$$\text{Phân số lúc đầu là } \frac{80}{56}$$

Bài 18: Tìm $x; y$ biết:



$$\text{a) } \frac{-4}{5} - \frac{3}{5} : x = 2$$

$$\text{b) } 2xy - x = 14 - 4y \quad (x; y \text{ là số nguyên})$$

Trích đề HSG trường THCS Quỳnh Thiện năm 2021 – 2022

Lời giải

$$\text{a) } \frac{-4}{5} - \frac{3}{5} : x = 2 \Rightarrow \frac{3}{5} : x = \frac{-4}{5} - 2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5} : x = \frac{-14}{5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{5} : \frac{-14}{5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-3}{14}$$

$$\text{b) } 2xy - x = 14 - 4y \quad (x, y \text{ là số nguyên}).$$

$$2xy + 4y - x = 14$$

$$2y(x + 2) - (x + 2) = 14 - 2$$

$$(x + 2)(2y - 1) = 12 \quad (*)$$

Vì $x; y \in \mathbb{Z}$ nên $x + 2 \in \mathbb{Z}$ và $2y - 1 \in \mathbb{Z}$

Do đó từ (*) suy ra $2y - 1 \in U(12)$

Mặt khác $2y - 1$ lẻ nên $2y - 1 \in \{1; -1; 3; -3\} \Rightarrow y \in \{1; 0; 2; -1\}$.

Thay các giá trị của y vào (*) ta có 4 cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn bài toán là: $(1; 0)$; $(-14; 0)$; $(2; 2)$; $(-6; -1)$.

Bài 19: Tìm x , biết:

$$\text{a) } (19x + 2.5^2) : 14 = (13 - 8)^2 - 4^2$$

$$\text{b) } x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 30) = 1240$$

$$\text{c) } 11 - (-53 + x) = 97$$

$$\text{d) } -(x + 84) + 213 = -16$$

Trích đề HSG huyện Nông Công năm 2019-2020

Lời giải

$$\text{a) } (19x + 2.5^2) : 14 = (13 - 8)^2 - 4^2$$

$$\Rightarrow x = \left\{ 14 \cdot \left[(13 - 8)^2 - 4^2 \right] - 2.5^2 \right\} : 19 = 4$$

$$\text{b) } x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 30) = 1240$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x + x + x + \dots + x)}_{31 \text{ số hạng } x} + (1 + 2 + \dots + 30) = 1240$$



$$\Rightarrow 31x = 1240 - 31.15 \Rightarrow x = \frac{775}{31} = 25$$

$$c) 11 - (-53 + x) = 97$$

$$\Rightarrow x = 11 - 97 - (-53) = -33$$

$$d) -(x + 84) + 213 = -16$$

$$\Rightarrow -(x + 84) = -16 - 213$$

$$\Rightarrow -(x + 84) = -229$$

$$\Rightarrow x + 84 = 229$$

$$\Rightarrow x = 229 - 84 = 145$$

Bài 20: Tìm số tự nhiên x biết: $2 \cdot \left(\frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{x(x+1)} \right) = \frac{1}{9}$

Trích đề HSG huyện Đoàn Hùng năm 2018-2019

Lời giải

$$2 \cdot \left(\frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{x(x+1)} \right) = \frac{1}{9}$$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{2}{9} - \frac{2}{x+1} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{2}{x+1} = \frac{1}{9} \Rightarrow x+1 = 18 \Rightarrow x = 17$$

Bài 21: Tìm x , biết $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} \right) x = \frac{2012}{1} + \frac{2011}{2} + \frac{2010}{3} + \dots + \frac{2}{2011} + \frac{1}{2012}$

Trích đề HSG huyện Quế Sơn năm 2018-2019

Lời giải

$$\text{Biến đổi: } \frac{2012}{1} + \frac{2011}{2} + \frac{2010}{3} + \dots + \frac{1}{2012}$$

$$= \frac{2012}{1} + 1 + \frac{2011}{2} + 1 + \frac{2010}{3} + 1 + \dots + \frac{1}{2012} + 1 + 1$$

$$= \frac{2013}{2} + \frac{2013}{3} + \dots + \frac{2013}{2012} + \frac{2013}{2013}$$

$$= 2013 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} \right)$$

$$x = 2013 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} \right) : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} \right) = 2013$$

Bài 22: Tìm các số tự nhiên x, y sao cho $(2x+1)(y-5) = 12$.

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015-2016

Lời giải



Ta có $(2x+1)(y-5)=12$ nên $2x+1; y-5$ là ước của 12.

Mà $12=1.12=2.6=3.4$

Do $2x+1$ lẻ nên $2x+1=1$ hoặc $2x+1=3$

$2x+1$	1	3
$y-5$	12	4
x	0	1
y	17	9

Vậy $(x, y) = \{(0; 17); (1; 9)\}$.

Bài 23: Tìm số tự nhiên x , biết: $\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{8.9.10}\right).x = \frac{23}{45}$.

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015-2016

Lời giải

Áp dụng công thức: $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} \right)$

Theo đề bài: $\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{8.9.10}\right).x = \frac{23}{45}$

$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \frac{2}{3.4.5} + \dots + \frac{2}{8.9.10} \right).x = \frac{23}{45}$

$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{8.9} - \frac{1}{9.10} \right).x = \frac{23}{45}$

$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{90} \right).x = \frac{23}{45}$

$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{45}{90} - \frac{1}{90} \right).x = \frac{23}{45}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{44}{90}.x = \frac{23}{45}$

$\frac{11}{45}.x = \frac{23}{45}$

$x = \frac{23}{11}$.

Mà x là số tự nhiên.

Vậy không có giá trị của x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 24: Tìm x biết: $\frac{13}{28}x = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{555}{222} + \frac{4444}{12221} + \frac{33333}{244442} + \frac{11}{330} + \frac{13}{60} \right)$

Trích đề HSG huyện Vĩnh Phúc năm 2015-2016

**Lời giải**

$$\frac{13}{28} \cdot x = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{555}{222} + \frac{4444}{12221} + \frac{33333}{244442} + \frac{11}{330} + \frac{13}{60} \right)$$

$$\frac{13}{28} \cdot x = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{5.111}{2.111} + \frac{4.1111}{11.1111} + \frac{3.11111}{22.11111} + \frac{11}{30.11} + \frac{13}{60} \right)$$

$$\frac{13}{28} \cdot x = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{5}{2} + \frac{4}{11} + \frac{3}{22} + \frac{1}{30} + \frac{13}{60} \right)$$

$$\frac{13}{28} \cdot x = \frac{1}{7} \cdot \left[\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{30} + \frac{13}{60} \right) + \left(\frac{4}{11} + \frac{3}{22} \right) \right]$$

$$\frac{13}{28} \cdot x = \frac{1}{7} \cdot \left[\left(\frac{150}{60} + \frac{2}{60} + \frac{13}{60} \right) + \left(\frac{8}{22} + \frac{3}{22} \right) \right]$$

$$\frac{13}{28} \cdot x = \frac{1}{7} \cdot \left[\frac{165}{60} + \frac{11}{22} \right]$$

$$\frac{13}{28} \cdot x = \frac{1}{7} \cdot \left[\frac{15.11}{15.4} + \frac{11}{11.2} \right]$$

$$\frac{13}{28} \cdot x = \frac{1}{7} \cdot \left[\frac{11}{4} + \frac{1}{2} \right]$$

$$\frac{13}{28} \cdot x = \frac{1}{7} \cdot \left[\frac{11}{4} + \frac{2}{4} \right]$$

$$\frac{13}{28} \cdot x = \frac{1}{7} \cdot \frac{13}{4}$$

$$\frac{13}{28} \cdot x = \frac{13}{28}$$

$$x = \frac{13}{28} : \frac{13}{28}$$

$$x = 1.$$

Vậy $x = 1$.

Bài 25: Tìm x biết: $\frac{-2}{3} \left(x - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3} (2x - 1).$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014-2015

Lời giải

$$\frac{-2}{3} \cdot \left(x - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3} \cdot (2x - 1)$$



$$\frac{-2}{3}x - \left(\frac{-1}{6}\right) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$\frac{-2}{3}x + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$\frac{-2}{3}x - \frac{2}{3}x = \frac{-1}{3} - \frac{1}{6}$$

$$-x \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{-2}{6} - \frac{1}{6}$$

$$\frac{-4}{3}x = \frac{-1}{2}$$

$$x = \frac{-1}{2} : \frac{-4}{3}$$

$$x = \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{4}$$

$$x = \frac{3}{8}$$

Vậy $x = \frac{3}{8}$.

Bài 26:

Tìm x biết: a) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$;

b) $\frac{-x}{4} = \frac{-9}{x}$.

Trích đề HSG huyện Bạc Liêu năm 2018-2019

Lời giải

a) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$

$$x = -\frac{5}{6} : \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{-10}{9}$$

Vậy $x = \frac{-10}{9}$.

b) $\frac{-x}{4} = \frac{-9}{x}$

$$-x^2 = -36$$

$$x^2 = 36$$

$$x^2 = 6^2$$



$$x = \pm 6$$

Vậy $x = \pm 6$.

Bài 27: Tìm x biết:

$$a) \frac{x-2}{2} = \frac{8}{x-2} \quad (x \neq 2).$$

$$b) \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} + x = 1.$$

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Lời giải

a)

$$\frac{x-2}{2} = \frac{8}{x-2} \quad (x \neq 2)$$

$$(x-2).(x-2) = 8.2$$

$$(x-2)^2 = 16$$

$$(x-2)^2 = 4^2$$

$$x-2 = 4 \text{ hoặc } x-2 = -4$$

$$\text{Với } x-2 = 4$$

$$x = 6$$

$$\text{Với } x-2 = -4$$

$$x = -2.$$

Vậy $x \in \{6; -2\}$.

$$b) \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} + x = 1.$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} + x = 1$$

$$1 - \frac{1}{100} + x = 1.$$

$$x = \frac{1}{100}$$

Vậy $x = \frac{1}{100}$.

Bài 28: Tìm x là số tự nhiên, biết:

$$a) x : \left(9\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) = \frac{0,4 + \frac{2}{9} - \frac{2}{11}}{1,6 + \frac{8}{9} - \frac{8}{11}} ;$$

$$b) \frac{x+1}{2} = \frac{8}{x+1} .$$

Trích đề HSG THCS Ái Thượng năm 2021-2022

Lời giải

$$a) x : \left(9\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) = \frac{0,4 + \frac{2}{9} - \frac{2}{11}}{1,6 + \frac{8}{9} - \frac{8}{11}}$$



$$x:8 = \frac{0,4 + \frac{2}{7} - \frac{2}{11}}{4\left(0,4 + \frac{2}{7} - \frac{2}{11}\right)}$$

$$x:8 = \frac{1}{4}$$

$$x = 2$$

Vậy $x = 2$.

$$\text{b) } \frac{x+1}{2} = \frac{8}{x+1}$$

$$(x+1)^2 = 16 = (\pm 4)^2$$

Do đó $x+1=4$ hoặc $x+1=-4$

Với $x+1=4$

$$x = 3$$

Với $x+1=-4$

$$x = -5$$

Do $x \in \mathbb{N}$ nên $x = 3$.

Bài 29: Tìm x biết $\left(\frac{1}{8} + 2\frac{5}{4} - 2,75\right)x - 7 = \left(\frac{3}{2} + 0,65 + \frac{7}{200}\right):0,07$.

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2018-2019

Lời giải

$$\left(\frac{1}{8} + 2\frac{5}{4} - 2,75\right)x - 7 = \left(\frac{3}{2} + 0,65 + \frac{7}{200}\right):0,07$$

$$\frac{5}{8}x - 7 = \frac{437}{200} : \frac{7}{100}$$

$$\frac{5}{8}x - 7 = \frac{437}{200} \cdot \frac{100}{7}$$

$$\frac{5}{8}x = \frac{437}{14} + 7$$

$$\frac{5}{8}x = \frac{535}{14}$$

$$x = \frac{535}{14} : \frac{5}{8}$$

$$x = 61\frac{1}{7}$$

Vậy $x = 61\frac{1}{7}$.

Bài 30: Tìm x , biết : $\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{8.9.10}\right).x = \frac{22}{45}$



Lời giải

$$\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{8.9.10}\right).x = \frac{22}{45}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{8.9} - \frac{1}{9.10}\right).x = \frac{22}{45}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{90}\right).x = \frac{22}{45}$$

$$x = 2$$

Vậy $x = 2$.

Bài 31: Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $(2x-1)(xy+1) = 6$.

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có: $2x-1; xy+1 \in U(6)$; $U(6) = 1.6 = 2.3 = (-1).(-6) = (-2).(-3)$

Do $2x-1$ là số lẻ nên ta có

$$\text{TH1: } \begin{cases} 2x-1=1 \\ xy+1=6 \end{cases}, \text{ suy ra: } x=1; y=5.$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 2x-1=-1 \\ xy+1=-6 \end{cases}, \text{ suy ra: } x=0, \text{ với mọi giá trị của } y \text{ (không có giá trị } x, y \text{ thỏa mãn)}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} 2x-1=3 \\ xy+1=2 \end{cases}, \text{ suy ra: } x=2; y=\frac{1}{2} \text{ (không thỏa mãn điều kiện } x, y \text{ là số nguyên)}$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} 2x-1=-3 \\ xy+1=-2 \end{cases}, \text{ suy ra: } x=-1; y=3$$

Vậy $(x, y) \in \{(1;5); (-1;3)\}$

Bài 32: Tìm số nguyên x biết: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right)x = \frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{8}{2} + \frac{9}{1}$

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đông (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right)x = \frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{8}{2} + \frac{9}{1}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right).x = \left(\frac{1}{9} + 1\right) + \left(\frac{2}{8} + 1\right) + \dots + \left(\frac{8}{2} + 1\right) + 1$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right).x = \frac{10}{9} + \frac{10}{8} + \dots + \frac{10}{2} + \frac{10}{10}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right).x = 10 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right)$$

$$x = 10$$

Vậy $x = 10$.

Bài 33: Tìm các cặp số nguyên x, y thỏa mãn: $3xy + 2x - 5y = 6$.

**Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022****Lời giải**

$$3xy + 2x - 5y = 6$$

$$x(3y + 2) - 5y = 6$$

$$3x(3y + 2) - 15y = 18$$

$$3x(3y + 2) - 15y - 10 = 18 - 10$$

$$3x(3y + 2) - 5(3y + 2) = 8$$

$$(3x - 5)(3y + 2) = 8$$

$$3y + 2 \in U(8) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$$

Mà $3y + 2$ là số chia 3 dư 2 nên $3y + 2 \in \{-1; 2; -4; 8\}$

Ta có bảng sau:

$3y + 2$	-4	-1	2	8
$3x - 5$	-2	-8	4	1
y	-2	-1	0	2
x	1	-1	3	2

Vậy $(x; y) \in \{(1; -2); (-1; -1); (3; 0); (2; 2)\}$.

Bài 34: Tìm x , biết: $\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{8.9}\right).x = \frac{23}{45}$.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022**Lời giải**

$$\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{8.9}\right).x = \frac{23}{45}$$

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right).x = \frac{23}{45}$$

$$\frac{8}{9}.x = \frac{23}{45}$$

$$x = \frac{23}{40}$$

Bài 35: Tìm x biết: $x - \frac{20}{11.13} - \frac{20}{13.15} - \dots - \frac{20}{53.55} = \frac{3}{11}$.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021 - 2022**Lời giải**

$$x - \frac{20}{11.13} - \frac{20}{13.15} - \dots - \frac{20}{53.55} = \frac{3}{11}$$

$$x - 10 \cdot \left(\frac{2}{11.13} + \frac{2}{13.15} + \dots + \frac{2}{53.55}\right) = \frac{3}{11}$$

$$x - 10 \cdot \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{53} - \frac{1}{55}\right) = \frac{3}{11}$$

$$x - 10 \cdot \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{55}\right) = \frac{3}{11}$$

$$x - 10 \cdot \frac{4}{55} = \frac{3}{11}$$



$$x = \frac{3}{11} + \frac{8}{11}$$

$$x = 1$$

Vậy $x = 1$.

Bài 36: Tìm x , biết: $105 - [(2x + 7) - 13] = 25$.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022
Lời giải

$$105 - [(2x + 7) - 13] = 25$$

$$(2x + 7) - 13 = 105 - 25$$

$$(2x + 7) - 13 = 80$$

$$2x + 7 = 93$$

$$2x = 86$$

$$x = 43$$

Vậy $x = 43$.

Bài 37: Tìm x biết: $\frac{1}{4} : 2x = 1$

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022
Lời giải

$$\frac{1}{4} : 2x = 1$$

$$\frac{1}{8}x = 1$$

$$x = 1 : \frac{1}{8}$$

$$x = 1.8 = 8$$

Bài 38: Tìm x biết:

a) $(\frac{3x}{7} + 1) : (-4) = \frac{-1}{28}$

b) $1 + 5 + 9 + 13 + 17 + \dots + x = 4950$

Trích đề HSG Liên trường năm 2021 - 2022

Lời giải

a) $(\frac{3x}{7} + 1) : (-4) = \frac{-1}{28}$ suy ra $\frac{3x}{7} = \frac{1}{7} - 1$ suy ra $3x = -6$ suy ra $x = -2$

b) $1 + 5 + 9 + 13 + 17 + \dots + x = 4950$

Ta có: $5 = 2 + 3$; $9 = 4 + 5$; $13 = 6 + 7$; $17 = 8 + 9$...

Do vậy $x = a + (a + 1)$ ($a \in \mathbb{N}$)

Nên $1 + 5 + 9 + 13 + 16 + \dots + x = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots + a + (a + 1) = 4950$

Hay $(a + 1)(a + 1 + 1) : 2 = 4950$

$(a + 1)(a + 2) = 9900 = 99.100$

Suy ra: $a = 98$. Do đó: $x = 98 + (98 + 1) = 197$

Bài 39: Tìm x , biết:

a) $6x(x - 5) + 2x(5 - 3x) = -60$

b) $\frac{x-1}{2022} + \frac{x-2}{2021} = \frac{x-3}{2020} + \frac{x-4}{2019}$

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Lời giải

a) $6x(x - 5) + 2x(5 - 3x) = -60$

$6x^2 - 30x + 10x - 6x^2 = -60$



$$-20x = -60$$

$$x = 3$$

Vậy $x = 3$

$$b) \frac{x-1}{2022} + \frac{x-2}{2021} = \frac{x-3}{2020} + \frac{x-4}{2019}$$

$$\left(\frac{x-1}{2022} - 1\right) + \left(\frac{x-2}{2021} - 1\right) - \left(\frac{x-3}{2020} - 1\right) - \left(\frac{x-4}{2019} - 1\right) = 0$$

$$\frac{x-2023}{2022} + \frac{x-2023}{2021} - \frac{x-2023}{2020} - \frac{x-2023}{2019} = 0$$

$$(x-2023) \left(\frac{1}{2022} + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2020} - \frac{1}{2019} \right) = 0$$

$$\text{Vì } \frac{1}{2022} + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2020} - \frac{1}{2019} \neq 0$$

Nên $x - 2023 = 0$ suy ra $x = 2023$

Vậy $x = 2023$

Bài 40: Tìm x , biết $105 - [(2x+7) - 13] = 25$

Trích đề HSG huyện Chí Linh năm 2021-2022

Lời giải

$$105 - [(2x+7) - 13] = 25$$

$$105 - [(2x+7) - 13] = 25$$

$$105 - [(2x+7) - 13] = 5^2$$

$$(2x+7) - 13 = 105 - 25$$

$$(2x+7) - 13 = 80$$

$$2x+7 = 93$$

$$2x = 86$$

$$x = 43$$

Bài 41: Tìm các số tự nhiên x, y biết: $2y+6 = \frac{15-y}{x} \cdot 26$

Trích đề HSG huyện Kỳ Anh năm 2021-2022

Lời giải

Vì $2y+6 = \frac{15-y}{x}$ nên x phải là số khác 0

$$2y+6 = \frac{15-y}{x} \Rightarrow 2xy+6x = 15-y \Rightarrow 2xy+6x+y = 15 \Rightarrow 2x(y+3) + (y+3) = 18$$

$$\Rightarrow (2x+1)(y+3) = 18$$

$$\Rightarrow 2x+1 \in U(18) \quad (1) \text{ và } \Rightarrow y+3 = \frac{18}{2x+1}$$

Vì x là số tự nhiên khác 0 thì $2x+1$ là số lẻ lớn hơn 1 (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\Rightarrow 2x+1 \in \{3; 9\}$

$2x+1$	3	9
$y+3$	6	2
x	1	4
y	3	//



Vậy cặp số tự nhiên cần tìm là $x = 1; y = 3$

Dạng 2: Tìm số chưa biết có chứa lũy thừa.

Bài 1: Tìm x , biết: $2^x - 15 = 17$

- A. $x = 1$ B. $x = 5$ C. $x = 16$ D. $x = 30$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 2: Cho $T = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2022}$. Tìm số tự nhiên n , biết $2 \cdot T + 3 = 3^n$. Khi đó n bằng:

- A. 2020 B. 2023 C. 2021 D. 2022

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 3: Tìm số tự nhiên x , biết a là số nguyên tố chẵn thỏa mãn $a^x = 1024$.

- A. $x = 8$ B. $x = 9$ C. $x = 10$ D. $x = 16$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 4: Biết x là số tự nhiên thỏa mãn $5 \cdot 3^x - 135 = 0$. Giá trị của $P = 674x - 2021$ bằng

- A. -1 B. 2 C. 0 D. 1

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 5: Biết $(x; y)$ là cặp số thỏa mãn $(x - y - 1)^{2020} + y^{2022} = 0$. Khi đó giá trị của $2022x - y$ bằng:

- A. 2019 B. 2020 C. 2021 D. 2022

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 6: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện $2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Lời giải

Đặt $S = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^n \Rightarrow S = 2^{n+1}$

Ta có: $2 \cdot S = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^5 + \dots + n \cdot 2^{n+1}$.

Suy ra: $S = 2S - S = (2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^5 + \dots + n \cdot 2^{n+1}) - (2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^n)$

$S = n \cdot 2^{n+1} - 2^3 - (2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n)$

Đặt $P = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n$, ta tính được $P = 2P - P = 2^{n+1} - 2^3$

$\Rightarrow S = n \cdot 2^{n+1} - 2^3 - 2^{n+1} + 2^3 = (n-1) \cdot 2^{n+1}$

Do đó $(n-1) \cdot 2^{n+1} = 2^{n+1} \Rightarrow n-1 = 2^{10} \Rightarrow n = 2^{10} + 1 = 1025$. Vậy $n = 1025$

Bài 7: Tìm các số tự nhiên x, y sao cho : $7^x + 12^y = 50$

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Lời giải

Ta có: $12^2 = 144 > 50$ và $y \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq y \leq 1 \Rightarrow y \in \{0; 1\}$

$7^3 > 50$ và $x \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$

Với $y = 1 \Rightarrow 7^x + 12^1 = 50 \Rightarrow 7^x = 38$ (ktm)

Với $y = 0 \Rightarrow 7^x + 12^0 = 50 \Rightarrow 7^x = 49 \Rightarrow x = 2$

Vậy $x = 2, y = 0$

Bài 8: Tìm x biết: $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Lời giải

$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$



$$\Leftrightarrow 2^x \cdot (1+2+2^2+2^3) = 480$$

$$\Leftrightarrow 2^x \cdot 15 = 480 \Rightarrow 2^x = 32 = 2^5$$

$$\Rightarrow x = 5$$

Bài 9: Tìm số nguyên x biết : $(2x-15)^5 = (2x-15)^3$.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Lời giải

$$\text{TH1: } 2x - 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{15}{2}$$

$$\text{TH2: } 2x - 15 = 1 \Rightarrow x = 8$$

Bài 10: a) Tìm x biết: $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$

b) Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ biết: $2^x + 624 = 5^y$

Trích đề HSG trường Nguyễn Khuyến năm 2020 -2021

Lời giải

$$\text{a) Từ giả thiết ta có: } \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} = \left(\pm \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{6} \\ x = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

b) Nếu $x = 0$ thì $5^y = 2^0 + 624 = 625 = 5^4 \Rightarrow y = 4 (y \in \mathbb{N})$

Nếu $x \neq 0$ thì vế trái là số chẵn, vế phải là số lẻ nên vô lý

Vậy $x = 0, y = 4$

Bài 11: Cho số nguyên a lớn hơn 32 . Hỏi tồn tại hay không số tự nhiên k thỏa mãn $k < a^{41}$ mà có ít nhất 61 chữ số 0 ở tận cùng?

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

Có $a > 32, (a \in \mathbb{Z})$

$$\Rightarrow a^{41} > 32^{41}$$

Lại có: $32^{41} = 32 \cdot 32^{40} = 32 \cdot (32^2)^{20} = 32 \cdot 1024^{20} > 32 \cdot 1000^{20} = 32 \cdot 10^{60} > 10^{61}$ (có 61 chữ số 0 tận cùng).

Suy ra $a^{41} > 10^{61}$

Với $k < a^{41}$ thì có tồn tại số k thỏa mãn đề bài.

Bài 12: Tìm x biết: $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$

Trích đề HSG huyện Quế Sơn năm 2018-2019

Lời giải

$$2^x + 2.2^x + 4.2^x + 8.2^x = 480$$

$$15.2^x = 480 \Rightarrow 2^x = 480 : 15 = 32 = 2^5$$

$$\Rightarrow x = 5$$

Bài 13: Tìm $x; y$ biết:

a) $2^3.3^2 - (x - 13) = -15 + 2022^0$;

b) $x^2 + 357 = y^2$ ($x; y$ là số nguyên tố)

Trích đề HSG trường THCS Quỳnh Thiện năm 2021 – 2022

a) $2^3.3^2 - (x - 13) = -15 + 2022^0 \Rightarrow 8.9 - (x - 13) = -15 + 1$

$$\Rightarrow x - 13 = 72 - (-14) \Rightarrow x = 86 + 13 \Rightarrow x = 99$$

b) $x^2 + 357 = y^2$ (1) ($x; y$ là số nguyên tố)

Từ (1) suy ra $y^2 > 375 \Rightarrow y$ là số nguyên tố lớn hơn 2 $\Rightarrow y$ là số lẻ

$\Rightarrow x^2$ chẵn, mà x là số nguyên tố suy ra $x = 2$.

Thay $x = 2$ vào (1) ta có: $4 + 357 = y^2 \Rightarrow y^2 = 361$

$$\Rightarrow y^2 = 19^2 = (-19)^2 \text{ mà } y \text{ là số nguyên tố } \Rightarrow y = 19$$

Vậy 2 số nguyên tố cần tìm là: $x = 2; y = 19$

Bài 14: Cho $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2022} + 5^{2023}$. Tìm số tự nhiên n , biết rằng: $4M + 5 = 25.5^n$

Trích đề HSG trường THCS Quỳnh Thiện năm 2021 – 2022

Lời giải

$$M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2023}$$

$$5M = 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2024}$$

$$5M - M = \dots = 5^{2024} - 5$$

$$4M + 5 = 5^{2024}$$

Mà theo bài ra ta có: $4M + 5 = 25.5^n$

$$25.5^n = 5^{2024}$$

$$5^2.5^n = 5^{2024}$$

$$5^{n+2} = 5^{2024}$$

$$n + 2 = 2024 \Rightarrow n = 2022.$$

Bài 15: Tìm $x, y \in \mathbb{N}$, biết $2^x + 624 = 5^y$.

Lời giải

Nếu $x=0$ thì $2^0 + 624 = 5^y$

$$625 = 5^y$$

$$5^y = 5^4$$

$$y = 4$$

Nếu $x \neq 0$ thì 2^x là số chẵn $\Rightarrow 2^x + 624$ là số chẵn

Mà 5 là số lẻ nên 5^y là số lẻ

Với $x, y \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$ thì $2^x + 624 \neq 5^y$

Vậy $x=0$; $y=4$.

Bài 16: Tìm 2 số tự nhiên A và B biết rằng A có n ước số tự nhiên là a_1, a_2, \dots, a_n và B có m ước số tự nhiên là b_1, b_2, \dots, b_m thỏa mãn $a_1^2 \cdot a_2^2 \dots a_n^2 = 729$ và $b_1^2 \cdot b_2^2 \dots b_m^2 = 1296$.

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015-2016

Lời giải

Từ $a_1^2 \cdot a_2^2 \dots a_n^2 = 729$ suy ra $a_1 a_2 \dots a_n = 27$.

Giả sử $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Khi đó $a_n = A$ và $a_n : a_1, a_n : a_2, \dots, a_n : a_{n-1}$

Mặt khác $a_1 a_2 \dots a_n = 27 = 1.3.9$ nên $a_n = 9$. Từ đó $A = 9$

Lại có $b_1^2 b_2^2 \dots b_m^2 = 1296 = 36^2$, suy ra $b_1 b_2 \dots b_m = 36$.

Giả sử $b_1 < b_2 < \dots < b_m$. Khi đó $b_m = B$ và $b_m : b_1, b_m : b_2, \dots, b_m : b_{m-1}$.

Vì $b_1 b_2 \dots b_m = 36 = 1.2.3.6$ nên $b_m = 6$ hay $B = 6$.

Vậy $A = 9; B = 6$.

Bài 17: Tìm x biết:

a) $(4x-15)^{2016} = (4x-15)^{2015}$

b) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} - 480 = 0$.

c) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn : $x^4 - 7^y = 2014$

Trích đề HSG huyện Vĩnh Tường năm 2015-2016

Lời giải

a) $(4x-15)^{2016} = (4x-15)^{2015}$

$$(4x-15)^{2016} - (4x-15)^{2015} = 0$$

$$(4x-15)^{2015} \cdot [(4x-15)-1] = 0$$

Nên $(4x-15)^{2015} = 0$ hoặc $(4x-15)-1=0$

Với $(4x-15)^{2015} = 0$

$$4x-15=0$$

$$x = \frac{15}{4}$$

Với $(4x-15)-1=0$

$$4x-15-1=0$$

$$x=4$$

Vậy $x = \frac{15}{4}; x=4$

b) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} - 480 = 0$

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$$

$$2^x + 2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^3 = 480$$

$$2^x (1 + 2 + 2^2 + 2^3) = 480$$

$$2^x (1 + 2 + 4 + 8) = 480$$

$$2^x \cdot 15 = 480$$

$$2^x = 480 : 15$$

$$2^x = 32$$

$$2^x = 2^5$$

$$x=5$$

Vậy $x=5$.

c) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn : $x^4 - 7^y = 2014$

Ta có 2014 chia 7 dư 5

$7y$ chia hết cho 7

$x^4 : 7$ dư 5

Lại có : x chia 7 có thể dư 0 ; ± 1 ; ± 2 ; ± 3 .

x^4 chia 7 có thể dư 0, 1, 16, 81 tức 0; 1; 2; 4. Vậy không tồn tại x^4 chia 7 dư 5.

Bài 18: Tìm x biết: $\frac{1}{5} \cdot 2^x + \frac{1}{3} \cdot 2^{x+1} = \frac{1}{5} \cdot 2^7 + \frac{1}{3} \cdot 2^8$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014-2015

Lời giải

$$\frac{1}{5} \cdot 2^x + \frac{1}{3} \cdot 2^{x+1} = \frac{1}{5} \cdot 2^7 + \frac{1}{3} \cdot 2^8$$

$$\frac{1}{5} \cdot 2^x + \frac{2}{3} \cdot 2^x = \frac{1}{5} \cdot 2^7 + \frac{2}{3} \cdot 2^7$$

$$\frac{13}{5} \cdot 2^x = \frac{13}{5} \cdot 2^7$$

$$2^x = 2^7$$

$$x = 7$$

Vậy $x = 7$.

Bài 19: Tìm x, y, z biết: $(x - y^2 + z)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 0$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014-2015

Lời giải

Ta có :

$$\text{Vì } (x - y^2 + z)^2 \geq 0 \quad \forall x, y, z; \quad (y - 2)^2 \geq 0 \quad \forall y; \quad (z + 3)^2 \geq 0 \quad \forall z$$

$$\text{Nên } (x - y^2 + z)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 0 \text{ thì } (x - y^2 + z)^2 = 0; (y - 2)^2 = 0; (z + 3)^2 = 0$$

$$\begin{cases} x - y^2 + z = 0 \\ y - 2 = 0 \\ z + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 4 - 3 = 0 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

Vậy $x = 7; y = 2; z = -3$.

Bài 20: Tìm x biết:

$$5^{2x-3} - 3 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 2$$

Trích đề HSG huyện Anh Sơn năm 2018-2019

Lời giải

$$5^{2x-3} - 3 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 2$$

$$5^{2x-3} = 5^2 \cdot 2 + 3 \cdot 5^2$$

$$5^{2x-3} = 5^3$$

$$2x - 3 = 3$$

$$x = 3$$

Vậy $x = 3$.

Bài 21: Tìm số tự nhiên x , biết: $5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} = \underbrace{1\ 000\dots 0}_{18\text{..chu..so..0}} : 2^{18}$.

Trích đề HSG huyện Anh Sơn năm 2018-2019

Lời giải

Ta có:

$$5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} = \underbrace{1\ 000\dots 0}_{18\text{..chu..so..0}} : 2^{18}$$

$$5^{x+x+1+x+2} = 10^{18} : 2^{18}$$

$$5^{3x+3} = 5^{18} \cdot 2^{18} : 2^{18}$$

$$5^{3x+3} = 5^{18}$$

$$3x+3=18$$

$$x=5$$

Vậy $x=5$

Bài 22: Tìm số nguyên x biết: $(2x-15)^5 = (2x-15)^3$.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Lời giải

Ta có $(2x-15)^5 = (2x-15)^3$

$$(2x-15)^5 - (2x-15)^3 = 0$$

$$(2x-15)^3 \cdot (2x-15)^2 - (2x-15)^3 = 0$$

$$(2x-15)^3 \cdot [(2x-15)^2 - 1] = 0$$

TH1: $(2x-15)^3 = 0$

$$2x-15=0$$

$$2x=15$$

$$x = \frac{15}{2} \text{ (loại)}$$

TH2: $(2x-15)^2 - 1 = 0$

$$(2x-15)^2 = 1$$

Suy ra $2x-15=1$ hoặc $2x-15=-1$

Với $2x-15=1$

$$2x=16$$

$$x=8$$

Với $2x-15=-1$

$$2x=14$$

$$x = 7$$

Vậy $x \in \{7; 8\}$.

Bài 23: Tìm x biết: $1 - \left(x - 4\frac{1}{2}\right) : \frac{25}{22} = (-2022)^0 - \frac{11}{5}$.

Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Lời giải

$$1 - \left(x - 4\frac{1}{2}\right) : \frac{25}{22} = (-2022)^0 - \frac{11}{5}$$

$$1 - \left(x - \frac{9}{2}\right) \cdot \frac{22}{25} = 1 - \frac{11}{5}$$

$$\left(x - \frac{9}{2}\right) \cdot \frac{22}{25} = \frac{11}{5}$$

$$x - \frac{9}{2} = \frac{11}{5} \cdot \frac{25}{22}$$

$$x - \frac{9}{2} = \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{5}{2} + \frac{9}{2}$$

$$x = 7$$

Vậy $x = 7$.

Bài 24: Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2010}$. Tìm x để $2A + 3 = 3^x$.

Trích đề HSG cấp Trường năm 2019-2020

Lời giải

$$A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2010}$$

$$3A = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2011}$$

$$2A = 3^{2011} - 3$$

$$A = \frac{3^{2011} - 3}{2}$$

Mà $2A + 3 = 3^x$

$$3^{2011} - 3 + 3 = 3^x$$

$$x = 2011$$

Vậy $x = 2011$

Bài 25: Tìm các số tự nhiên x, y biết: $2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x$

Trích đề HSG Trường THCS Ái Thượng năm 2021-2022

Lời giải

$$2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x$$

$$2^{x+1} \cdot 3^y = 4 \cdot 3^x = 2^{2x} \cdot 3^x$$

$$\frac{2^{2x}}{2^{x+1}} = \frac{3^y}{3^x}$$

$$2^{x-1} = 3^{y-x}$$

Nhận thấy : $(2;3) = 1$

$$x-1 = y-x = 0$$

$$x = y = 1$$

Bài 25: Tìm các số tự nhiên x, y sao cho: $5^x + 12^y = 26$.

Trích đề HSG Huyện Hoài Nhơn năm 2015-2016

Lời giải

Ta có $12^2 = 144 > 26$ và $y \in \mathbb{N}$ nên $0 \leq y \leq 1$ suy ra $y \in \{0;1\}$

+) Với $y = 1$ thì $5^x + 12^1 = 26$

$$5^x = 14 \text{ không tìm được } x \in \mathbb{N}.$$

+) Với $y = 0$ thì $5^x + 12^0 = 26$

$$5^x = 25$$

$$5^x = 5^2$$

$$x = 2$$

Vậy $x = 2; y = 0$.

Trắc nghiệm

Bài 27: Tìm x , biết: $2^x - 15 = 17$.

A. $x = 1$.

B. $x = 5$.

C. $x = 16$.

D. $x = 30$.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: B. $x = 5$.

Tự luận

Bài 28: Cho x, y là các số tự nhiên thỏa mãn: $2^x + 5999 = 4y$.

Tính giá trị của biểu thức $D = (x-1)^{2021} + (y-1501)^{2022}$.

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

Lời giải

Ta có $4y$ là số chẵn với y là số tự nhiên mà $2^x + 5999 = 4y$.

Suy ra $2^x + 5999$ là số chẵn mà 5999 là số lẻ nên 2^x là số lẻ nên $x = 0$.

Ta có $4y = 1 + 5999$ suy ra $4y = 6000$ nên $y = 1500$.

$$\text{Vậy } D = (0-1)^{2021} + (1500-1501)^{2022} = -1 + 1 = 0.$$

Bài 29: Gọi x là tổng các chữ số của số $a = 3^{2022} + 2021$, gọi y là tổng các chữ số của x và gọi z là tổng các chữ số của y . Tìm z .

Lời giải

Ta có $a = 3^{2022} + 2021$

$$a = (3^2)^{1011} + 2021$$

$$a = 9^{1011} + 2021$$

$$a < 10^{1011} + 2021$$

$$a < 10...02021.$$

Suy ra a có không quá 1012 chữ số.

Vì x là tổng các chữ số của a nên $x \leq 1012 \cdot 9$ hay $x \leq 9108$

Suy ra x có không quá 4 chữ số.

Vì y là tổng các chữ số của x nên $y \leq 4 \cdot 9$ hay $y \leq 36$

Suy ra y có không quá 2 chữ số.

Vì z là tổng các chữ số của y mà $y \leq 36$ nên $z \leq 3 + 9$ hay $z \leq 12$

Ta có a và x có cùng số dư khi chia cho 9 mà a chia cho 9 dư 5 nên x chia cho 9 dư 5

Lại có y và x có cùng số dư khi chia cho 9 mà x chia cho 9 dư 5 nên y chia cho 9 dư 5

y và z có cùng số dư khi chia cho 9 mà y chia cho 9 dư 5 nên z chia cho 9 dư 5
mà $z \leq 12$ nên $z = 5$.

Vậy $z = 5$.

Bài 30: Tìm x , biết: $(x+1)^2 + (-2)^3 = 28^0$

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Lời giải

$$(x+1)^2 + (-2)^3 = 28^0$$

$$(x+1)^2 - 8 = 1$$

$$(x+1)^2 = 1 + 8$$

$$(x+1)^2 = 9$$

$$\Rightarrow x+1 = 3 \text{ hoặc } x+1 = -3$$

$$x = 2 \text{ hoặc } x = -4$$

Vậy $x \in \{-4; 2\}$.

Bài 31: Tìm số nguyên x biết: $14 \cdot 7^{2021} = 35 \cdot 7^{2021} - 3 \cdot 49^x$

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Lời giải

$$14 \cdot 7^{2021} = 35 \cdot 7^{2021} - 3 \cdot 49^x$$

$$3 \cdot 49^x = 35 \cdot 7^{2021} - 14 \cdot 7^{2021}$$

$$3 \cdot 7^{2x} = 7^{2022} \cdot (5 - 2) = 3 \cdot 7^{2022}$$

$$7^{2x} = 7^{2022}$$

$$2 \cdot x = 2022$$

$$x = 1011$$

Vậy $x = 1011$.

Bài 32: Tìm x biết: $(x-5)^5 = (x-5)^3$.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021 - 2022

Lời giải

$$(x-5)^5 = (x-5)^3$$

$$(x-5)^5 - (x-5)^3 = 0$$

$$(x-5)^3 \cdot [(x-5) - 1] = 0$$

$$(x-5)^3 \cdot (x-6) = 0$$

$$\text{TH1: } (x-5)^3 = 0 \Rightarrow x-5=0 \Rightarrow x=5.$$

$$\text{TH2: } x-6=0 \Rightarrow x=6.$$

$$\text{Vậy } x \in \{5; 6\}.$$

Bài 33: Tìm x , biết: $7^x + 7^{x+2} + 7^{x+3} = 2751$

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022
Lời giải

$$7^x + 7^{x+2} + 7^{x+3} = 2751$$

$$7^x + 7^x \cdot 49 + 7^x \cdot 253 = 2751$$

$$7^x (1 + 49 + 253) = 2751$$

$$7^x \cdot 393 = 2751$$

$$7^x = 7$$

$$x = 1$$

$$\text{Vậy } x = 1.$$

Bài 34: Tìm x biết: $\frac{x-1}{2} - \frac{32}{x-1} = 0$

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022
Lời giải

$$\frac{x-1}{2} - \frac{32}{x-1} = 0$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{32}{x-1}$$

$$(x-1)(x-1) = 2 \cdot 32$$

$$(x-1)^2 = 64 = 8^2 = (-8)^2$$

$$\text{Nếu } (x-1)^2 = 8^2$$

$$x-1=8$$

$$x=9$$

$$\text{Nếu } (x-1)^2 = (-8)^2$$

$$x-1=-8$$

$$x=-7$$

$$\text{Vậy } x \in \{9; -7\}$$

Bài 35: Đặt $m = 3^9$. Gọi x là số tự nhiên thỏa mãn $m^m = 3^x$. Tìm số tự nhiên n sao cho $3^n = x$.

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022

Lời giải

$$\text{Ta có } m^m = 3^x \text{ suy ra } (3^9)^m = 3^x \text{ suy ra } 3^{9m} = 3^x$$

$$9m = x \text{ suy ra } 9 \cdot 3^9 = x \text{ suy ra } 3^{11} = x$$

$$\text{Đề } 3^n = x \text{ mà } 3^{11} = x \text{ nên } n = 11$$

Bài 36: Tìm x biết $(2x+1)^2 - 9 = 0$

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022

Lời giải

$$(2x+1)^2 = 9 = 3^2 = (-3)^2$$

Với $2x+1=3$

Thì $x=1$

Với $2x+1=-3$

Thì $x=-2$

Vậy $x \in \{1; -2\}$

B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

(copy đề bài ở các dạng trên để làm phiếu phô tô cho HS)

I. Thực hiện các phép tính.

Dạng 1: Thực hiện phép tính.

Bài 1: Một người leo núi với vận tốc 2km/h, lúc xuống núi với vận tốc 6km/h. Vận tốc trung bình của người đó trong toàn hành trình lên và xuống là:

A. 3,5 km/h

B. 4,5 km/h

C. 4 km/h

D. 3 km/h

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 2: Giá trị của $T = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{12} \cdot \dots \cdot \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64}$ bằng

A. $\frac{1}{36^2}$

B. $\frac{1}{2^{30}}$

C. $\frac{1}{2^{36}}$

D. $\frac{1}{2^{32}}$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 3: Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{2 \cdot 8^4 \cdot 27^2 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4}$ ta được kết quả là:

A. $\frac{2}{9}$

B. $\frac{8}{9}$

C. $\frac{4}{9}$

D. $\frac{2}{3}$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 4: Thực hiện phép tính:

$$a) P = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 400 - \left[673 - 2^3 \cdot (7^3 : 7 + 1) \right] \right\}, \quad b) Q = \frac{4^3 \cdot 9^2 + 6^3 \cdot 120}{-8^2 \cdot 3^6 + 6^5}$$

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021 - 2022

Bài 5: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = 68 \cdot 74 + 27 \cdot 68 - 68$

b) $B = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 539 - \left[639 - 8 \cdot (7^8 : 7^6 + 2017^0) \right] \right\}$

c) $C = \left(\frac{151515}{161616} + \frac{17^9}{17^{10}} \right) - \left(\frac{1500}{1600} - \frac{1616}{1717} \right)$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Bài 6: Thực hiện phép tính

$$b) A = \frac{5 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^9 \cdot (2^2)^6 - 2 \cdot (2^2 \cdot 3)^{14} \cdot 3^4}{5 \cdot 2^{28} \cdot 3^{18} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}}$$

$$B = 81 \cdot \left[\frac{12 - \frac{12}{7} - \frac{12}{289} - \frac{12}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} ; \frac{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{169} + \frac{5}{91}}{6 + \frac{6}{13} + \frac{6}{169} + \frac{6}{91}} \right] \cdot \frac{158158158}{711711711}$$

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Bài 7: Tính: 1) $A = \frac{5}{6} + 6 \frac{5}{6} \left(11 \frac{5}{20} - 9 \frac{1}{4} \right) : 8 \frac{1}{3}$

2) $B = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 400 - \left[673 - 2^9 \cdot (7^8 : 7^6 + 7^0) \right] \right\}$

3) $C = \frac{5}{2.1} + \frac{4}{1.11} + \frac{3}{11.2} + \frac{1}{2.15} + \frac{13}{15.4}$

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Bài 8: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = 68.74 + 27.68 - 68$

b) $B = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 539 - \left[639 - 8 \cdot (7^8 : 7^6 + 2017^0) \right] \right\}$

c) $C = \left(\frac{151515}{161616} + \frac{17^9}{17^{10}} \right) - \left(\frac{1500}{1600} - \frac{1616}{1717} \right)$

d) $D = \left(\frac{1}{2^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{3^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{4^2} - 1 \right) \dots \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1 \right)$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018- 2019

Bài 9: Tính

$$B = (-528) + (-12) + (-211) + 540 + 2225$$

Trích đề 59 năm 2018- 2019

Bài 10: Thực hiện phép tính (hợp lý nếu có thể)

a) $1941 + [15 + (-1941) + (-5)]$

b) $(3,7 - 59,4) - (40,6 - 6,3)$

c) $\frac{2}{9} \cdot \frac{-3}{37} + \frac{-2}{9} \cdot \frac{34}{37} + 1 \frac{2}{9}$

Trích đề HSG trường THCS Quỳnh Thiện năm 2021 – 2022

Bài 11: Tính $N = \frac{5 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^9 \cdot (2^2)^6 - 2 \cdot (2^2 \cdot 3)^{14} \cdot 3^{16}}{5 \cdot 2^{28} \cdot 3^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}}$

Trích đề HSG huyện Đoàn Hùng năm 2018-2019

Bài 12: Thực hiện các phép tính sau một cách hợp lý:

a) $(10^2 + 11^2 + 12^2) : (13^2 + 14^2)$

b) $1.2.3 \dots 9 - 1.2.3 \dots 8 - 1.2.3 \dots 7 \cdot 8^2$

c) $\frac{(3.4.2^{16})^2}{11.2^{13}.4^{11} - 16^9}$

d) $1152 - (374 + 1152) + (-65 + 374)$

e) $13 - 12 + 11 + 10 - 9 + 8 - 7 - 6 + 5 - 4 + 3 + 2 - 1$

Trích đề HSG huyện Nông Công năm 2019-2020

Bài 13:

Tính giá trị của biểu thức $M = \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{1\frac{1}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}} \right) : \frac{2021}{2022}$.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 14: Tính tổng: $S = \frac{27 \cdot 4500 + 135 \cdot 550 \cdot 2}{2 + 4 + 6 + \dots + 18}$

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Bài 15: Tính:

a) $A = \frac{101 + 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1}{101 - 100 + 99 - 98 + \dots + 3 - 2 + 1}$

b) $B = \frac{423134 \cdot 846267 - 423133}{423133 \cdot 846267 + 423134}$

Trích đề HSG huyện năm 2019-2020

Bài 16: Tính hợp lý

a) $53 \cdot 81 - 47 \cdot 14 + 81 \cdot 47 - 14 \cdot 53$

b) $|1 - 2^{100}| + |5^{50} - 2^{100}| - |11 - 5^{50}|$

c) $\left(\frac{20162016}{20172017} + \frac{2017^{2016}}{2017^{2017}} \right) - \left(\frac{2016}{2017} - \frac{2016^{2017} \cdot 2017^{2016}}{2017^{2017} \cdot 2016^{2016}} \right)$

d) $\frac{6^{36} \cdot (50.5^{40} - 10 \cdot 5^{34})}{30^{30} \cdot 10^4 \cdot (100 \cdot 15^5 - 4 \cdot 3^5)}$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 17: Cho biểu thức $A = \frac{5.4^{2017} - 4^{2018} - 1}{1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{2016}}$. Chứng tỏ rằng biểu thức A có giá trị là một số nguyên.

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 18:

1. Tính giá trị các biểu thức:

$A = 1,4 \cdot \frac{15}{49} - \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} \right) : 2\frac{1}{5}$;

$B = \frac{25^{13} \cdot 9^6 \cdot 24^7}{50^{12} \cdot 81^5 \cdot 40^3}$.

2. Tính nhanh:

$$C = \frac{5}{12.17} + \frac{3}{34.10} + \frac{7}{60.9} + \frac{8}{27.35};$$

$$D = \left(\frac{7}{20} + 1\right) \left(\frac{7}{33} + 1\right) \left(\frac{7}{48} + 1\right) \left(\frac{7}{65} + 1\right) \left(\frac{7}{84} + 1\right) \left(\frac{7}{105} + 1\right).$$

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021 – 2022.

Bài 19: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$1) A = -5^{22} - \left\{ -222 - \left[-122 - (100 - 5^{22}) + 2022 \right] \right\}$$

$$2) B = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{20}(1+2+3+\dots+20)$$

$$3) C = \frac{5 \cdot 4^6 \cdot 9^4 - 3^9 \cdot (-8)^4}{4 \cdot 2^{13} \cdot 3^8 + 2 \cdot 8^4 \cdot (-27)^3}.$$

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2021-2022

Bài 20: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$1) A = 2021 - (374 + 2021) + (-2022 + 374)$$

$$2) B = \left(\frac{-2}{5} \cdot \frac{13}{131} + \frac{2}{131} \cdot \frac{-118}{5} \right) : \frac{4}{5}$$

$$3) C = \frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{11}{12} + \frac{19}{20} + \frac{29}{30} + \frac{41}{42} + \frac{55}{56} + \frac{71}{72} + \frac{89}{90}$$

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021-2022

Bài 21: Thực hiện phép tính: $A = 2016 \cdot \left[\frac{6 - \frac{6}{7} - \frac{6}{289} - \frac{6}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} : \frac{3 + \frac{3}{13} + \frac{3}{169} + \frac{3}{91}}{6 + \frac{6}{13} + \frac{6}{169} + \frac{6}{91}} \right] \cdot \frac{304304304}{945945945}$

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015-2016

Bài 22: Thực hiện phép tính:

$$a) A = 81 \cdot \left[\frac{12 - \frac{12}{7} - \frac{12}{289} - \frac{12}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} : \frac{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{169} + \frac{5}{91}}{6 + \frac{6}{13} + \frac{6}{169} + \frac{6}{91}} \right] \cdot \frac{158158158}{711711711}$$

$$b) B = \frac{5 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^9 \cdot (2^2)^6 - 2 \cdot (2^2 \cdot 3)^{14} \cdot 3^4}{5 \cdot 2^{28} \cdot 3^{18} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}}$$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014-2015

Bài 23: 1. Thực hiện phép tính:

$$a) P = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \left\{ 400 - \left[673 - 2^3 \cdot (7^3 : 7 + 1) \right] \right\}; \quad b) Q = \frac{4^3 \cdot 9^2 + 6^3 \cdot 120}{-8^2 \cdot 3^6 + 6^5}.$$

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Bài 24: Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{8^{10} \cdot 3^{15} - 2^{30} \cdot 9^7}{2^{30} \cdot 27^5 - 4^{15} \cdot 3^{14}}$.

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Bài 25: Tính giá trị của các biểu thức sau bằng cách hợp lý (nếu có thể):

$$A = (-2013) \cdot 2014 + 1007 \cdot 26$$

$$B = \left(\frac{1313}{1414} + \frac{10}{160} \right) - \left(\frac{130}{140} - \frac{1515}{1616} \right)$$

$$C = \left(1 - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2021} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2022} \right)$$

$$D = x \cdot \frac{1}{3} + 2x \cdot \frac{3}{6} - 3x \cdot \frac{4}{9} \text{ với } x = 2022^{2021}$$

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Bài 26: Tính hợp lý

a) $A = \frac{5}{6} - \frac{-1}{12} + \frac{2}{3} - \frac{-2}{7} + \frac{1}{25} - \frac{-1}{4} - \frac{5}{42}$

b) $\frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}$

Trích đề HSG THCS Ái Thượng năm 2021-2022

Bài 27: Tính giá trị các biểu thức sau:

1) $A = (-16) : (-8) + 6(2021 - 2022)^{2019} + 2026$.

2) $B = \left(1 + \frac{1}{3} \right) \left(1 + \frac{1}{8} \right) \left(1 + \frac{1}{15} \right) \cdots \left(1 + \frac{1}{624} \right)$.

Trích đề HSG Huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Bài 28: Tính: $M = \frac{\frac{7}{2012} + \frac{7}{9} - \frac{1}{4}}{\frac{5}{9} - \frac{3}{2012} - \frac{1}{2}}$.

Trích đề HSG Huyện Lý Nhân năm 2018-20219

Bài 29: Tính nhanh:

a) $\frac{7}{13} \cdot \frac{7}{15} - \frac{5}{12} \cdot \frac{21}{39} + \frac{49}{91} \cdot \frac{8}{15}$

b) $\left(\frac{12}{199} + \frac{23}{200} - \frac{34}{201} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right)$

Trích đề HSG THCS Lý Tự Trọng năm 2015-2016

Trắc nghiệm

Bài 30: Giá trị của biểu thức $A = \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+59}$ là:

A. $A = \frac{19}{60}$.

B. $A = \frac{19}{50}$.

C. $A = \frac{19}{40}$.

D. $A = \frac{19}{30}$.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 31: Tính giá trị của biểu thức $2x^2y - 1$ với $x = -2$, $y = -3$.

- A. 25. B. 123. C. -23. D. -25.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 32: Kết quả của phép tính $5.(-3)^2 + 4.(-7) - (-16)$ là:

- A. 33. B. -17. C. 17. D. -33.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 33: Kết quả của phép tính $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 99 - 100$ bằng:

- B. 50. B. -50. C. -100. D. 0.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Tự luận

Bài 34: Thực hiện phép tính $P = 2^3 \cdot 5^3 - 3 \cdot \left\{ 400 - \left[673 - 2^3 \cdot (7^3 : 7 + 1) \right] \right\}$.

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Bài 35: Tính giá trị các biểu thức sau: $A = -5^{22} - \left\{ -222 - \left[-122 - (100 - 5^{22}) + 2022 \right] \right\}$

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Bài 36: Tính $B = \frac{7.9 + 14.27 + 21.36}{21.27 + 42.81 + 63.108}$

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 37: Thực hiện phép tính: $B = 2 + 5 + 9 + 14 + \dots + 4949 + 5049$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Bài 38: Tính giá trị của các biểu thức sau: $41,54 - 3,18 + 23,17 + 8,46 - 5,82 - 3,17$

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Bài 39: Kết quả của phép tính $-2022.74 - 2022.27 + 2022$

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021 - 2022

Bài 40: Thực hiện phép tính.

a) $A = (-10)^2 - \left[(-2)^3 \cdot (7^{11} : 7^9 + 2022^0) \right]$

b) $B = \left(\frac{2121}{2323} + \frac{212121}{232323} + \frac{21212121}{23232323} \right) : \frac{21}{23}$

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021 - 2022

Bài 41: Tính giá trị biểu thức:

a) $A = \left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10} \right) \cdot \frac{21}{24}$.

b) $B = \frac{5}{6} + 6 \frac{5}{6} \left(11 \frac{5}{20} - 9 \frac{1}{4} \right) : 8 \frac{1}{3}$.

Trích đề HSG Liên trường năm 2021 - 2022

Bài 42: Thực hiện phép tính:

a) $A = (7 - 4)^2 \cdot 2 + [(-5) + (-7)] : (-3 + 5)^2$

b) $B = \frac{2^{15} \cdot 13 + 2^{15} \cdot 65}{2^{13} \cdot 104}$

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Bài 43: Tính giá trị các biểu thức sau: $C = \frac{5.4^6 \cdot 9^4 - 3^9 \cdot (-8)^4}{4.2^{13} \cdot 3^8 + 2.8^4 \cdot (-27)^3}$.

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Bài 44: Thực hiện phép tính:

$$C = \frac{20 - \frac{20}{7} - \frac{20}{289} - \frac{20}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} : \frac{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{169} + \frac{5}{91}}{7 + \frac{7}{13} + \frac{7}{169} + \frac{7}{91}}$$

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Dạng 2: Tính tổng dãy số tự nhiên theo quy luật.**Bài 1:** Kết quả của phép tính $1-2+3-4+5-6+\dots+99-100$ bằng:

- A. 50 B. -50 C. -100 D. 0

*Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019***Bài 2:** Cho $E = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{200}(1+2+\dots+200)$ và $F = \frac{20300}{3}$.Tính $\frac{E}{F}$.*Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022***Bài 3:** Kết quả của phép tính $1-2+3-4+\dots+99-100$ là:*Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018-2019***Bài 4:** Tính giá trị của các biểu thức sau:

1) $-1-2+3+4-5-6+7+8-\dots-2013-2014+2015+2016$

2) $B = \left(\frac{1}{2}-1\right) : \left(\frac{1}{3}-1\right) : \left(\frac{1}{4}-1\right) : \left(\frac{1}{5}-1\right) : \dots : \left(\frac{1}{98}-1\right) : \left(\frac{1}{99}-1\right) : \left(\frac{1}{100}-1\right)$

*Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018-2019***Bài 5:** Tính tổng $S = 1.2+2.3+3.4+\dots+99.100$ *Trích đề HSG cấp trường năm 2019 – 2020.***Bài 6:** Cho $A = 4+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{20}$. Hỏi A có chia hết cho 128 không ?*Trích đề HSG trường Tân Lập năm 2018-2019***Bài 7:** Cho $A = 1-2+3-4+\dots+99-100$.

- a) Tính A
 b) A có chia hết cho 2, cho 3, cho 5 không ?
 c) A có bao nhiêu ước tự nhiên ? Bao nhiêu ước nguyên ?

*Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2018-2019***Trắc nghiệm****Bài 8:** Kết quả của phép tính $1-2+3-4+5-6+\dots+99-100$ là:

- A. 50. B. -50. C. -100. D. 0.

*Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022***Bài 9:** Cho 7 ô liên tiếp sau:

	-13		a			-27
--	-----	--	-----	--	--	-----

Biết rằng tổng ba ô liên tiếp bất kỳ luôn bằng 0. Khi đó giá trị của a là:

- A. -13. B. -27. C. 13. D. 27.

*Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022***Tự luận****Bài 10:** Tính tổng $S = 1.2+2.3+3.4+\dots+99.100$ *Trích đề HSG cấp trường năm 2019-2020*

Dạng 3: Tính toán với tổng của dãy lũy thừa.

Bài 1: Cho $A = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{2012}$ và $B = \left(\frac{3}{2}\right)^{2013} : 2$. Tính $B - A$

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Bài 2: Cho $S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$

- c) Chứng minh rằng S là bội của -20
d) Tính S , từ đó suy ra 3^{100} chia cho 4 dư 1

Trích đề HSG 059 năm 2018-2019

Bài 3: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$D = 15 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + \dots + 2^{2020}.$$

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021-2022

Bài 4: Cho $A = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{2012}$ và $B = \left(\frac{3}{2}\right)^{2013} : 2$

Tính $B - A$.

Trích đề HSG huyện Đông Tháp năm 2018-2019

Bài 5: Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2010}$

- c) Rút gọn A .
d) Tìm x để $2A + 3 = 3^x$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2019-2020

Bài 6: Tính tổng: $M = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1000}$.

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Bài 7: Cho tổng $A = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2008}$. Tính giá trị biểu thức: $B = 8A - 3^{2010}$

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Bài 8: Cho x là tổng của tất cả các số nguyên có 2 chữ số, y là số nguyên âm lớn nhất. Hãy tính giá trị của biểu thức $A = 2009 \cdot x^{2006} - 2008y^{2007}$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Dạng 4: Tổng dãy phân số theo quy luật.

Bài 1: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$, biết: $A = \frac{1}{3.8} + \frac{1}{8.13} + \frac{1}{13.18} + \frac{1}{18.21}$; $B = \frac{1}{3.7} + \frac{1}{7.11} + \frac{1}{11.15} + \frac{1}{15.19} + \frac{1}{19.23}$

B. $\frac{A}{B} = \frac{5}{4}$

B. $\frac{A}{B} = 1$

C. $\frac{A}{B} = \frac{4}{5}$

D. $\frac{A}{B} = 20$.

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 2: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$D = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Bài 3: Tính: $\left[92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100}\right] : \left[\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}\right]$

Trích đề HSG trường Nguyễn Khuyến năm 20...-20...

Bài 4: Cho $A = \frac{4}{7.31} + \frac{6}{7.41} + \frac{9}{10.41} + \frac{7}{10.57}$ và $B = \frac{7}{19.31} + \frac{5}{19.43} + \frac{3}{23.43} + \frac{11}{23.57}$

Tỷ số $\frac{A}{B}$ là bao nhiêu

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 5: Tính giá trị biểu thức sau:

$$B = \left(2017 - \frac{1}{4} - \frac{2}{5} - \frac{3}{6} - \frac{4}{7} - \dots - \frac{2017}{2020}\right) : \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \frac{1}{30} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{10100}\right)$$

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 6: Tính nhanh:

d) $\frac{3^2}{1.4} + \frac{3^2}{4.7} + \frac{3^2}{7.10} + \dots + \frac{3^2}{97.100}$

e) $M = \frac{1+3+3^2+3^3+\dots+3^{2012}}{3^{2004}-3}$

f) $D = \frac{2}{20} + \frac{2}{30} + \frac{2}{42} + \frac{2}{56} + \frac{2}{72} + \frac{2}{90}$

Trích đề 59 HSG huyện năm 2018- 2019

Bài 7: Cho biểu thức $D = \frac{(2!)^2}{1^2} + \frac{(2!)^2}{3^2} + \frac{(2!)^2}{5^2} + \frac{(2!)^2}{7^2} + \dots + \frac{(2!)^2}{2015^2}$

So sánh D với 6. Biết $n! = 1.2.3.\dots.n$ ($n \in \mathbb{N}$)

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Bài 8: Thực hiện phép tính (hợp lí nếu có thể) $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{399} + \frac{1}{483}$

Trích đề HSG trường THCS Quỳnh Thiện năm 2021 – 2022

Bài 9: Không quy đồng hãy tính tổng sau:

$$A = \frac{-1}{20} + \frac{-1}{30} + \frac{-1}{42} + \frac{-1}{56} + \frac{-1}{72} + \frac{-1}{90}$$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Bài 10: Chứng minh rằng $\frac{1}{28} + \frac{1}{30} + \frac{1}{32} + \frac{1}{34} + \dots + \frac{1}{52} = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{5.12} + \frac{1}{7.16} + \dots + \frac{1}{25.52}$.

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021 – 2022.

Bài 11: Cho $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{48} + \frac{1}{49} + \frac{1}{50}$ và $P = \frac{1}{49} + \frac{2}{48} + \frac{3}{47} + \dots + \frac{48}{2} + \frac{49}{1}$.

Hãy tính $\frac{S}{P}$.

Trích đề HSG huyện Ngọc Lặc năm 2018 -2019

Bài 12: Tính: $A = \frac{1}{4.9} + \frac{1}{9.14} + \frac{1}{14.19} + \dots + \frac{1}{64.69}$.

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2019 -2020

Bài 13: Tính tổng $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$.

Trích đề HSG cấp Trường năm 2019-2020

Bài 14: Thực hiện tính:

$$E = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{200}(1+2+\dots+200).$$

Trích đề HSG Huyện Hoà Nhon năm 2015-2016

Bài 15: Cho $E = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{200}(1+2+\dots+200)$ và

$$F = \frac{20300}{3}. \text{ Tính } \frac{E}{F}.$$

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Bài 16: Cho $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{48} + \frac{1}{49} + \frac{1}{50}$ và $P = \frac{1}{49} + \frac{2}{48} + \frac{3}{47} + \dots + \frac{48}{2} + \frac{49}{1}$.

Hãy tính $\frac{S}{P}$.

Trích đề HSG Huyện Ngọc Lặc năm 2018-2019

Bài 17: Cho $A = \frac{1}{3.8} + \frac{1}{8.13} + \frac{1}{13.18} + \dots + \frac{1}{33.38}$ và $B = \frac{1}{3.10} + \frac{1}{10.17} + \frac{1}{17.24} + \dots + \frac{1}{31.38}$.

Tính tỷ số $\frac{A}{B}$.

Trích đề HSG cấp Trường năm 2019-2020

Trắc nghiệm

Bài 18: Cho $A = \frac{4}{7.31} + \frac{6}{7.41} + \frac{9}{10.41} + \frac{7}{10.57}$; $B = \frac{7}{19.31} + \frac{5}{19.43} + \frac{3}{23.43} + \frac{11}{23.57}$

Tỷ số $\frac{A}{B}$ là:

A. $\frac{7}{4}$.

B. $\frac{7}{2}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{11}{4}$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải

Tự luận

Bài 19: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100}$.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021 - 2022

Bài 20: Tính giá trị của các biểu thức sau: $K = \frac{4}{11.16} + \frac{4}{16.21} + \frac{4}{21.26} + \dots + \frac{4}{61.66}$.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Bài 21: Cho $E = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{200}(1+2+3+\dots+200)$ và $F = \frac{20300}{3}$. Tính $\frac{E}{F}$.

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Bài 22: Tính giá trị các biểu thức sau: $B = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{20}(1+2+3+\dots+20)$

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Bài 23: Tính $B = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2499}\right)$.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

II. Tìm số chưa biết.

Dạng 1: Tìm số chưa biết (không có lũy thừa).

Bài 1. Tìm y , biết: $x - y = -2015$; $y - z = -2016$; $z + x = 2017$

- A. $y = -1007$ B. $y = 1007$ C. $y = -1008$ D. $y = 1008$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019

Bài 2. Cho $x, y \in \mathbb{Z}$. Tìm y , biết: $xy + 5x - 3y = 15$

- A. $y = -3$ B. $y = 3$ C. $y = -5$ D. $y = 5$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019

Bài 3. Tìm x , biết: $|x-1| - 5 = -2$

- A. $x \in \{2\}$ B. $x \in \{4\}$ C. $x \in \{-2; 4\}$ D. $x \in \emptyset$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019

Bài 4. Cho x, y là hai số thỏa mãn: $(x+2)^2 + |y-3| = 0$. Tổng hai số $x + y$ bằng:

- A. -5 B. 5 C. 1 D. -1

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019

Bài 5. Tìm x , biết: $\frac{-(x+1)}{4} = \frac{-9}{x+1}$

- A. $x \in \{5\}$ B. $x \in \{-7\}$ C. $x \in \{5; -7\}$ D. $x \in \emptyset$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019

Bài 6. Tìm x , biết: $\frac{5}{4.3} + \frac{3}{4.11} + \frac{3}{7.11} + \frac{9}{7.23} = \frac{2x}{69}$

- B. $x = 5$ B. $x = 10$ C. $x = 20$ D. $x = 40$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019

Bài 7. Số tự nhiên x thỏa mãn: $\left(\frac{1}{1 \cdot 51} + \frac{1}{2 \cdot 52} + \frac{1}{3 \cdot 53} + \dots + \frac{1}{10 \cdot 60}\right)x = \frac{1}{1 \cdot 11} + \frac{1}{2 \cdot 12} + \frac{1}{3 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{50 \cdot 60}$

là:

- B. $x = 5$ B. $x = 4$ C. $x = 7$ D. $x = 9$

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021 - 2022

Bài 8: Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn điều kiện: $\frac{11}{17} < \frac{a}{b} < \frac{23}{29}$ và $8b - 9a = 31$

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Bài 9: Tìm x biết: $x + |-3| = 0$

Trích đề HSG Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020

Bài 10: a) Tìm x , biết: $\frac{x-2}{10} + \frac{x-2}{15} + \frac{x-2}{21} + \frac{x-2}{28} + \frac{x-2}{36} = 20$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) sao cho: $xy + 7x - 3y - 27 = 0$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 11: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $2xy - x - y = 2$.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Bài 12: Tìm số nguyên x , biết:

a) $2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7$

b) $\frac{x}{6} + \frac{x}{10} + \frac{x}{15} + \frac{x}{21} + \frac{x}{28} + \frac{x}{36} + \frac{x}{45} + \frac{x}{55} + \frac{x}{66} + \frac{x}{78} = \frac{220}{39}$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Bài 13: Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho $xy - 2x + y + 1 = 0$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Bài 14: 1) Tìm số tự nhiên x , biết: $(x-5) \frac{30}{100} = \frac{20x}{100} + 5$.

2) Tìm số tự nhiên a, b, c, d nhỏ nhất sao cho: $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}; \frac{b}{c} = \frac{12}{21}; \frac{c}{d} = \frac{6}{11}$.

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Bài 15: Tổng của hai số tự nhiên là 102. Nếu thêm chữ số 0 vào bên phải số bé rồi cộng với số lớn ta được tổng mới là 417. Khi đó số lớn là:

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 16: Cho 7 ô liên tiếp sau

	-13		a			-27
--	-----	--	-----	--	--	-----

Biết rằng tổng của ba ô bất kỳ luôn bằng 0. Khi đó giá trị của a là bao nhiêu?

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 17: Trung bình cộng của tử số và mẫu số của một phân số là 68. Cộng thêm vào tử số của phân số đó 4 đơn vị thì ta được phân số mới bằng phân số $\frac{3}{2}$. Phân số lúc đầu là phân số nào?

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 18: Tìm $x; y$ biết:

a) $\frac{-4}{5} - \frac{3}{5} : x = 2$

b) $2xy - x = 14 - 4y$ ($x; y$ là số nguyên)

Trích đề HSG trường THCS Quỳnh Thiện năm 2021 – 2022

Bài 19: Tìm x , biết:

a) $(19x + 2.5^2) : 14 = (13 - 8)^2 - 4^2$

b) $x + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+30) = 1240$

c) $11 - (-53 + x) = 97$

d) $-(x+84) + 213 = -16$

Trích đề HSG huyện Nông Cống năm 2019-2020

Bài 20: Tìm số tự nhiên x biết: $2 \cdot \left(\frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{x(x+1)} \right) = \frac{1}{9}$

Trích đề HSG huyện Đoàn Hùng năm 2018-2019

Bài 21: Tìm x , biết $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} \right) x = \frac{2012}{1} + \frac{2011}{2} + \frac{2010}{3} + \dots + \frac{2}{2011} + \frac{1}{2012}$

Trích đề HSG huyện Quế Sơn năm 2018-2019

Bài 22: Tìm các số tự nhiên x, y sao cho $(2x+1)(y-5) = 12$.

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015-2016

Bài 23: Tìm số tự nhiên x , biết: $\left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 10} \right) x = \frac{23}{45}$.

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015-2016

Bài 24: Tìm x biết: $\frac{13}{28}x = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{555}{222} + \frac{4444}{12221} + \frac{33333}{244442} + \frac{11}{330} + \frac{13}{60} \right)$.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Phúc năm 2015-2016

Bài 25: Tìm x biết: $\frac{-2}{3} \left(x - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3}(2x-1)$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014-2015

Bài 26: Tìm x biết: a) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$;

b) $\frac{-x}{4} = \frac{-9}{x}$;

*Trích đề HSG huyện Bạc Liêu năm 2018-2019***Bài 27:** Tìm x biết:

a) $\frac{x-2}{2} = \frac{8}{x-2} \quad (x \neq 2)$.

b) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} + x = 1$.

*Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022***Bài 28:** Tìm x là số tự nhiên, biết:

a) $x : \left(9\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) = \frac{0,4 + \frac{2}{9} - \frac{2}{11}}{1,6 + \frac{8}{9} - \frac{8}{11}}$;

b) $\frac{x+1}{2} = \frac{8}{x+1}$.

Trích đề HSG THCS Ái Thượng năm 2021-2022

Bài 29: Tìm x biết $\left(\frac{1}{8} + 2\frac{5}{4} - 2,75\right)x - 7 = \left(\frac{3}{2} + 0,65 + \frac{7}{200}\right):0,07$.

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2018-2019

Bài 30: Tìm x , biết: $\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{8.9.10}\right).x = \frac{22}{45}$

Trích đề HSG huyện Hoài Nhơn năm 2015-2016

Bài 31: Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $(2x-1)(xy+1) = 6$.

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Bài 32: Tìm số nguyên x biết: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right)x = \frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{8}{2} + \frac{9}{1}$

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Bài 33: Tìm các cặp số nguyên x, y thỏa mãn: $3xy + 2x - 5y = 6$.

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Bài 34: Tìm x , biết: $\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{8.9}\right).x = \frac{23}{45}$.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 35: Tìm x biết: $x - \frac{20}{11.13} - \frac{20}{13.15} - \dots - \frac{20}{53.55} = \frac{3}{11}$.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021 - 2022

Bài 36: Tìm x , biết: $105 - [(2x+7) - 13] = 25$.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Bài 37: Tìm x biết: $\frac{1}{4} : 2x = 1$

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022

Bài 38: Tìm x biết:

a) $\left(\frac{3x}{7} + 1\right) : (-4) = \frac{-1}{28}$

b) $1 + 5 + 9 + 13 + 17 + \dots + x = 4950$

Trích đề HSG Liên trường năm 2021 -2022

Bài 39: Tìm x , biết:

a) $6x(x-5) + 2x(5-3x) = -60$

b) $\frac{x-1}{2022} + \frac{x-2}{2021} = \frac{x-3}{2020} + \frac{x-4}{2019}$

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Bài 40: Tìm x , biết $105 - [(2x+7) - 13] = 25$

Trích đề HSG huyện Chí Linh năm 2021-2022

Bài 41: Tìm các số tự nhiên x, y biết: $2y + 6 = \frac{15-y}{x} \cdot 26$

Trích đề HSG huyện Kỳ Anh năm 2021-2022

Dạng 2: Tìm số chưa biết có chứa lũy thừa.

Bài 1: Tìm x , biết: $2^x - 15 = 17$

A. $x = 1$

B. $x = 5$

C. $x = 16$

D. $x = 30$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 2: Cho $T = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2022}$. Tìm số tự nhiên n , biết $2 \cdot T + 3 = 3^n$. Khi đó n bằng:

A. 2020

B. 2023

C. 2021

D. 2022

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 3: Tìm số tự nhiên x , biết a là số nguyên tố chẵn thỏa mãn $a^x = 1024$.

- A. $x = 8$ B. $x = 9$ C. $x = 10$ D. $x = 16$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 4: Biết x là số tự nhiên thỏa mãn $5 \cdot 3^x - 135 = 0$. Giá trị của $P = 674x - 2021$ bằng

- A. -1 B. 2 C. 0 D. 1

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 5: Biết $(x; y)$ là cặp số thỏa mãn $(x - y - 1)^{2020} + y^{2022} = 0$. Khi đó giá trị của $2022x - y$ bằng:

- A. 2019 B. 2020 C. 2021 D. 2022

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 6: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện $2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 7: Tìm các số tự nhiên x, y sao cho : $7^x + 12^y = 50$

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Bài 8: Tìm x biết: $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 9: Tìm số nguyên x biết : $(2x - 15)^5 = (2x - 15)^3$.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Bài 10: a) Tìm x biết: $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$ b) Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ biết: $2^x + 624 = 5^y$

Trích đề HSG trường Nguyễn Khuyến năm 2020 -2021

Bài 11: Cho số nguyên a lớn hơn 32 . Hỏi tồn tại hay không số tự nhiên k thỏa mãn $k < a^{41}$ mà có ít nhất 61 chữ số 0 ở tận cùng?

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Bài 12: Tìm x biết: $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$

Trích đề HSG huyện Quế Sơn năm 2018-2019

Bài 13: Tìm $x; y$ biết:

- a) $2^3 \cdot 3^2 - (x - 13) = -15 + 2022^0$; b) $x^2 + 357 = y^2$ ($x; y$ là số nguyên tố)

Trích đề HSG trường THCS Quỳnh Thiện năm 2021 – 2022

Bài 14: Cho $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2022} + 5^{2023}$. Tìm số tự nhiên n , biết rằng: $4M + 5 = 25 \cdot 5^n$

Trích đề HSG trường THCS Quỳnh Thiện năm 2021 – 2022

Bài 15: Tìm $x, y \in \mathbb{N}$, biết $2^x + 624 = 5^y$.

Trích đề HSG huyện Diêm Châu năm 2015-2016

Bài 16: Tìm 2 số tự nhiên A và B biết rằng A có n ước số tự nhiên là a_1, a_2, \dots, a_n và B có m ước số tự nhiên là b_1, b_2, \dots, b_m thỏa mãn $a_1^2 \cdot a_2^2 \dots a_n^2 = 729$ và $b_1^2 \cdot b_2^2 \dots b_m^2 = 1296$.

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015-2016

Bài 17: Tìm x biết:

a) $(4x-15)^{2016} = (4x-15)^{2015}$

b) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} - 480 = 0.$

c) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^4 - 7^y = 2014$

Trích đề HSG huyện Vĩnh Tường năm 2015-2016

Bài 18: Tìm x biết: $\frac{1}{5} \cdot 2^x + \frac{1}{3} \cdot 2^{x+1} = \frac{1}{5} \cdot 2^7 + \frac{1}{3} \cdot 2^8$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014-2015

Bài 19: Tìm x, y, z biết: $(x - y^2 + z)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 0$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014-2015

Bài 20: Tìm x biết: $5^{2x-3} - 3 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 2$

Trích đề HSG huyện Anh Sơn năm 2018-2019

Bài 21: Tìm số tự nhiên x , biết: $5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} = \underbrace{1000\dots0}_{18 \text{..chu...so..0}} : 2^{18}.$

Trích đề HSG huyện Anh Sơn năm 2018-2019

Bài 22: Tìm số nguyên x biết: $(2x - 15)^5 = (2x - 15)^3.$

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Bài 23: Tìm x biết: $1 - \left(x - 4\frac{1}{2}\right) : \frac{25}{22} = (-2022)^0 - \frac{11}{5}.$

Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Bài 24: Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2010}$. Tìm x để $2A + 3 = 3^x$.

Trích đề HSG cấp Trường năm 2019-2020

Bài 25: Tìm các số tự nhiên x, y biết: $2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x$

Trích đề HSG Trường THCS Ái Thượng năm 2021-2022

Bài 26: Tìm các số tự nhiên x, y sao cho: $5^x + 12^y = 26.$

*Trích đề HSG Huyện Hoà Nhon năm 2015-2016***Trắc nghiệm**

Bài 27: Tìm x , biết: $2^x - 15 = 17.$

A. $x = 1.$

B. $x = 5.$

C. $x = 16.$

D. $x = 30.$

*Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022***Tự luận**

Bài 28: Cho x, y là các số tự nhiên thỏa mãn: $2^x + 5999 = 4y.$

Tính giá trị của biểu thức $D = (x-1)^{2021} + (y-1501)^{2022}.$

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

Bài 29: Gọi x là tổng các chữ số của số $a = 3^{2022} + 2021$, gọi y là tổng các chữ số của x và gọi z là tổng các chữ số của y . Tìm z .

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

Bài 30: Tìm x , biết: $(x+1)^2 + (-2)^3 = 28^0$

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Bài 31: Tìm số nguyên x biết: $14.7^{2021} = 35.7^{2021} - 3.49^x$

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Bài 32: Tìm x biết: $(x-5)^5 = (x-5)^3$.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021 - 2022

Bài 33: Tìm x , biết: $7^x + 7^{x+2} + 7^{x+3} = 2751$

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Bài 34: Tìm x biết: $\frac{x-1}{2} - \frac{32}{x-1} = 0$

Bài 35: Đặt $m = 3^9$. Gọi x là số tự nhiên thỏa mãn $m^m = 3^x$. Tìm số tự nhiên n sao cho $3^n = x$.

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022

Bài 36: Tìm x biết $(2x+1)^2 - 9 = 0$

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022

C. SỬU TÂM CÁC BÀI TƯƠNG TỰ

Bài 1: Tính $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{2352} + \frac{1}{2450}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{2352} + \frac{1}{2450} \\ &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{48.49} + \frac{1}{49.50} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{48} - \frac{1}{49} + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} \\ &= 1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50} \\ \text{Vậy } S &= \frac{49}{50} \end{aligned}$$

Bài 2: Tìm $x \in \mathbb{N}$, biết: $2^x + 2^{x+2} = \frac{200}{19} \cdot \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{19.20} \right)$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{200}{19} \cdot \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{19.20} \right) &= \frac{200}{19} \left(1 - \frac{1}{20} \right) = 10 \\ &\Rightarrow 2^x + 2^{x+2} = 10 \\ &\Rightarrow 2^x (1 + 4) = 10 \\ &\Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Bài 3: Tính $B = 9 + 99 + 999 + \dots + 99\dots 9$ (n chữ số 9)

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2011- 2012

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= 10 - 1 + 100 - 1 + 1000 - 1 + \dots + 10\dots 0 (n+1 \text{ chữ số } 0) - 1 \\ B &= (10 + 100 + 1000 + \dots + 10\dots 0) - (1 + 1 + \dots + 1) \\ B &= 11\dots 1 (n+1 \text{ chữ số } 1) - n \end{aligned}$$

Bài 4: Tính $A = \frac{101 + 100 + 99 + 98 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1}{101 - 100 + 99 - 98 + \dots - 4 + 3 - 2 + 1}$

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2011- 2012

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{(101+1) + (100+2) + \dots + (50+52) + 51}{51} \\ A &= 51 \cdot \frac{2+2+\dots+2+1}{51} \\ A &= 50 \cdot 2 + 1 \\ A &= 101 \end{aligned}$$

Bài 5: Tính $A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2021 + 2022$.

Trích đề HSG huyện Hải Hậu, năm 2011- 2012

Lời giải

Số số hạng của dãy là $\frac{(2022-1)}{1} + 1 = 2022$ (số hạng).

$$\text{Tổng } A = \frac{(1+2022) \cdot 2022}{2} = 2045253.$$

Bài 6: Thực hiện phép tính :

$$\text{a) } \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$$

$$\text{b) } \frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}$$

$$\text{c) } \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có : } & \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3} \\ &= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 7^3 \cdot 2^3} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3-1)}{2^{12} \cdot 3^5 (3+1)} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 (1-7)}{5^9 \cdot 7^3 (1+8)} = \frac{5 \cdot (-6)}{9} = \frac{-10}{3} \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có : } \frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6} = \frac{5 \cdot 2^{30} \cdot 3^{18} - 3^{20} \cdot 2^{29}}{5 \cdot 2^{28} \cdot 3^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}} = \frac{2^{29} \cdot 3^{18} (5 \cdot 2 - 3^2)}{2^{28} \cdot 3^{18} (5 \cdot 3 - 7 \cdot 2)} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{c) Ta có : } \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20} = \frac{2^{10} \cdot 3^8 - 2^{10} \cdot 3^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5} = \frac{2^{10} \cdot 3^8 (1-3)}{2^{10} \cdot 3^8 (1+5)} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

$$\text{Bài 7: Thực hiện phép tính: } \left(\frac{1,5+1-0,75}{2,5+\frac{5}{3}-1,25} + \frac{0,375-0,3+\frac{3}{11}+\frac{3}{12}}{-0,625+0,5-\frac{5}{11}-\frac{5}{12}} \right) : \frac{1890}{2005} + 115$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } & \left(\frac{1,5+1-0,75}{2,5+\frac{5}{3}-1,25} + \frac{0,375-0,3+\frac{3}{11}+\frac{3}{12}}{-0,625+0,5-\frac{5}{11}-\frac{5}{12}} \right) : \frac{1890}{2005} + 115 \\ &= \left(\frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{2} + \frac{5}{3} - \frac{5}{4}} + \frac{\frac{3}{8} - \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{\frac{-5}{8} + \frac{5}{10} - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} \right) : \frac{378}{401} + 115 = \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{-5} \right) : \frac{378}{401} + 115 = 0 : \frac{378}{401} + 115 = 115 \end{aligned}$$

Bài 8:

$$\text{a) Tính nhanh: } 16 + (27 - 7.6) - (94.7 - 27.99)$$

$$\text{b) Tính tổng: } A = \frac{2}{1.4} + \frac{2}{4.7} + \frac{2}{7.10} + \dots + \frac{2}{97.100}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } & 16 + (27 - 7.6) - (94.7 - 27.99) \\ &= 16 + 27 - 7.6 - 94.7 + 27.99 \\ &= 16 + 27 + 27.99 - 7.6 - 94.7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 16 + 27(99 + 1) - 7.(6 + 94) \\
 &= 16 + 27.100 - 7.100 \\
 &= 16 + 100(27 - 7) = 16 + 100.20 = 16 + 2000 = 2016
 \end{aligned}$$

$$b) A = \frac{2}{1.4} + \frac{2}{4.7} + \frac{2}{7.10} + \dots + \frac{2}{97.100}$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{1.4} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) \Rightarrow \frac{2}{1.4} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{2}{4.7} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right);$$

$$\frac{2}{7.10} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right)$$

.....;

$$\frac{2}{97.100} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{100} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{99}{100} = \frac{33}{50}$$

Bài 9: Tính giá trị của các biểu thức sau bằng cách hợp lý:

$$1) A = 35.34 + 35.86 + 65.75 + 65.45$$

$$2) B = \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{2022} \right)$$

$$3) C = \frac{2}{4.9} + \frac{2}{9.14} + \frac{2}{14.19} + \dots + \frac{2}{64.69}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 A &= 35.34 + 35.86 + 65.75 + 65.45 \\
 &= 35(34 + 86) + 65(75 + 45) \\
 &= 35.120 + 65.120 = 120(35 + 65) = 120.100 = 12000
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) B &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{2022} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2021}{2022} \\
 &= \frac{1}{2022}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) C &= \frac{2}{4.9} + \frac{2}{9.14} + \frac{2}{14.19} + \dots + \frac{2}{64.69} = \frac{2}{5} \left(\frac{5}{4.9} + \frac{5}{9.14} + \frac{5}{14.19} + \dots + \frac{5}{64.69} \right) \\
 &= \frac{2}{5} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{64} - \frac{1}{69} \right) = \frac{2}{5} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{69} \right) = \frac{13}{138}
 \end{aligned}$$

Bài 10:

1. Thực hiện phép tính:

$$A = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots + 2018 - 2019 - 2020.$$

2. Tính tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 2013.2014$.

Lời giải

1. Từ 1, 2, 3, ..., 2020 có 2020 số.

Nhóm 4 số thành 4 nhóm ta được $2020 : 4 = 505$ (nhóm)

Ta có:

$$A = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots + 2018 - 2019 - 2020$$

$$A = (1+2-3-4) + (5+6-7-8) + \dots + (2017+2018-2019-2020)$$

$$A = (-4) \cdot 505 = -2020.$$

2. Ta có:

$$3A = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + \dots + 2013.2014.3$$

$$3A = 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + 2013.2014.(2015-2012)$$

$$3A = 1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + \dots + 2013.2014.2015 - 2012.2013.2014$$

$$3A = 2013.2014.2015$$

$$\Rightarrow A = 2723058910.$$

Bài 11: Thực hiện phép tính: $A = \left(\frac{1}{4.9} + \frac{1}{9.14} + \dots + \frac{1}{44.49} \right) \cdot \frac{1-3-5-\dots-49}{89}$

Lời giải

$$\text{Đặt: } B = \frac{1}{4.9} + \frac{1}{9.14} + \dots + \frac{1}{44.49} \Rightarrow 5B = \frac{5}{4.9} + \frac{5}{9.14} + \dots + \frac{5}{44.49} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{49} \right) = \frac{45}{4.49}$$

$$\Rightarrow B = \frac{9}{4.49}$$

$$\text{và } C = \frac{1-3-5-\dots-49}{89} = \frac{1-(3+5+\dots+49)}{89} = \frac{1-612}{89} = \frac{-611}{89}$$

$$\text{Khi đó: } A = B.C = \frac{9}{4.49} \cdot \frac{-611}{89}$$

Bài 12: Thực hiện phép tính: $\frac{(1+2+3+\dots+100)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)(63.1,2-21.3,6)}{1-2+3-4+\dots+99-100}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 63.1,2-21.3,6=0 \Rightarrow \frac{(1+2+3+\dots+100)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)(63.1,2-21.3,6)}{1-2+3-4+\dots+99-100} = 0$$

Bài 13: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện $2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n = 2^{n+1}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } S = 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n \Rightarrow S = 2^{n+1}$$

$$\text{Ta có: } 2.S = 2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + n.2^{n+1}.$$

$$\text{Suy ra: } S = 2S - S = (2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + n.2^{n+1}) - (2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n)$$

$$S = n.2^{n+1} - 2^3 - (2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n)$$

$$\text{Đặt } P = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n, \text{ ta tính được } P = 2P - P = 2^{n+1} - 2^3$$

$$\Rightarrow S = n.2^{n+1} - 2^3 - 2^{n+1} + 2^3 = (n-1).2^{n+1}$$

$$\text{Do đó } (n-1).2^{n+1} = 2^{n+1} \Rightarrow n-1 = 2^{10} \Rightarrow n = 2^{10} + 1 = 1025.$$

I. Thực hiện các phép tính.

Bài 1: Tính nhanh: $A = \frac{-5}{9} + \frac{8}{15} + \frac{-2}{11} + \frac{4}{-9} + \frac{7}{15}$.

Trích đề HSG huyện Tĩnh Gia năm 2018-2019

Lời giải

$$A = \frac{-5}{9} + \frac{8}{15} + \frac{-2}{11} + \frac{4}{-9} + \frac{7}{15}$$

$$= \left(\frac{-5}{9} + \frac{-4}{9} \right) + \left(\frac{8}{15} + \frac{7}{15} \right) + \frac{-2}{11}$$

$$= -1 + 1 + \frac{-2}{11} = \frac{-2}{11}$$

Bài 2: Thực hiện tính A bằng cách hợp lý nhất: $A = \frac{2000 \cdot 2001 - 1000}{2000 \cdot 2000 + 1000}$.

Trích đề HSG trường THCS Quế Phú (Quế Sơn) năm 2018 - 2019

Lời giải

$$A = \frac{2000 \cdot 2001 - 1000}{2000 \cdot 2000 + 1000} = \frac{2000 \cdot 2000 + 2000 - 1000}{2000 \cdot 2000 + 1000} = \frac{2000 \cdot 2000 + 1000}{2000 \cdot 2000 + 1000} = 1$$

Bài 3: Tính tổng sau $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 97.98 + 98.99$.

Lời giải

Nhân hai vế của tổng trên với 3 (hiệu giữa số đứng sau với số đứng trước) ta được:

$$3A = 1.2(3-0) + 2.3(4-1) + \dots + 97.98(99-96) + 98.99(100-97)$$

$$3A = (1.2.3 - 0.1.2) + (2.3.4 - 1.2.3) + \dots + (97.98.99 - 96.97.98) + (98.99.100 - 97.98.99)$$

$$3A = 98.99.100.$$

$$\text{Suy ra } A = \frac{98.99.100}{3}.$$

Bài 4: Tính tổng sau $A = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + 97.98.99 + 98.99.100$.

Lời giải

$$4A = 1.2.3(4-0) + 2.3.4(5-1) + 3.4.5(6-2) + \dots + 97.98.99(100-96) + 98.99.100(101-97)$$

$$4A = (1.2.3.4 - 0.1.2.3) + (2.3.4.5 - 1.2.3.4) + \dots$$

$$+ (97.98.99.100 - 96.97.98.99) + (98.99.100.101 - 97.98.99.100)$$

$$4A = 98.99.100.101$$

$$\text{Suy ra } A = \frac{98.99.100.101}{4}.$$

Bài 5: Tính tổng $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2019-2020

Lời giải

$$S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$$

$$3S = (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100) \cdot 3$$

$$= 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + \dots + 99.100.3$$

$$= 1.2.3 + 2.3 \cdot (4-1) + 3.4 \cdot (5-2) + \dots + 99.100 \cdot (101-98)$$

$$= 1.2.3 - 1.2.3 + 2.3.4 - 2.3.4 + 3.4.5 - \dots - 98.99.100 + 99.100.101$$

$$S = 99.100.101 : 3 = 33.100.101$$

$$\text{Vậy } S = 333300.$$

Bài 6: Tính tổng sau $B = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{98} + 3^{100}$.

Lời giải

Nhân tổng B với 3^2 ta được:

$$3^2 \cdot B = 3^2 + 3^4 + 3^6 + 3^8 + \dots + 3^{100} + 3^{102}.$$

$$\Rightarrow 9B - B = (3^2 - 3^2) + (3^4 - 3^4) + \dots + (3^{100} - 3^{100}) + 3^{102} - 1$$

$$\Rightarrow 8B = 3^{102} - 1.$$

$$\Rightarrow B = (3^{102} - 1) : 8.$$

Bài 7: Tính tổng sau $C = 5 + 5^3 + 5^5 + 5^7 + \dots + 5^{99} + 5^{101}$

Lời giải:

Nhân tổng C với 5^2 ta được:

$$\begin{aligned} 5^2.C &= 5^3 + 5^5 + 5^7 + 5^9 + \dots + 5^{101} + 5^{103} \\ \Rightarrow 25C - C &= (5^3 - 5^3) + (5^5 - 5^5) + \dots + (5^{101} - 5^{101}) + 5^{103} - 5 \\ \Rightarrow 24C &= 5^{103} - 5 \\ \Rightarrow C &= (5^{103} - 5) : 24. \end{aligned}$$

Bài 8: Tính tổng $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \dots + 9 + \frac{19}{2}$.

*) *Phân tích:*

Đây là ví dụ mà các số hạng trong tổng vừa là số nguyên, vừa là phân số. Để tìm ra quy luật của các số hạng trong tổng ta cần viết các số nguyên trong tổng dưới dạng phân số có mẫu số là 2. Khi đó ta có tổng các phân số có cùng mẫu số, và tổng các tử số chính là tổng các số tự nhiên liên tiếp

Lời giải:

$$\text{Ta có: } S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \dots + 9 + \frac{19}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \dots + \frac{19}{2} = \frac{1+2+\dots+19}{2}$$

Xét tổng $1+2+\dots+18+19$ là tổng của 19 số tự nhiên liên tiếp

$$1+2+\dots+18+19 = \frac{(19+1).19}{2} = 190$$

$$\text{Ta có tổng } S = \frac{190}{2} = 95.$$

Bài 9: Tính tổng $S = 2 + 5 + 8 + 11 + \dots + 47 + 50$.

Lời giải:

Các số hạng cách đều nhau một giá trị $d = 3$

$$\text{Tổng này có } (50 - 2) : 3 + 1 = 17 \text{ số hạng } \Rightarrow S = 17.(50 + 2) : 2 = 442$$

Bài 10: Tính tổng $S = 5 + 10 + 15 + \dots + 100$.

Lời giải:

Các số hạng cách đều nhau một giá trị $d = 5$

Tổng này có $(100 - 5) : 5 + 1 = 20$ số hạng

$$\Rightarrow S = 20.(100 + 5) : 2 = 1050$$

Bài 11: Tính tổng $A = 98 + 93 + 88 + \dots + 13 + 8 + 3$.

Lời giải:

$$\text{Tổng } A \text{ có } (98 - 3) : 5 + 1 = 20 \text{ (số hạng)} \Rightarrow A = \frac{(98 + 3).20}{2} = 1010$$

Bài 12: Cho $S = 7 + 9 + 11 + \dots + 97 + 99$.

a) Tính tổng S trên.

b) Tìm số hạng thứ 33 của tổng trên.

Lời giải:

+ Số hạng đầu là: 7 và số hạng cuối là: 99.

+ Khoảng cách giữa hai số hạng là: 2

+ S có số số hạng được tính bằng cách $(99 - 7) : 2 + 1 = 47$

Tổng của dãy: $S = (99 + 7).47 : 2 = 2491$

b) Số hạng thứ 33 của tổng trên là: $(33 - 1).2 + 7 = 71$

Bài 13: Cho dãy số 2;7;12;...;22;...

a) Nêu quy luật của dãy số trên.

b) Viết tập hợp B gồm 5 số hạng liên tiếp của dãy số đó, bắt đầu từ số hạng thứ năm.

c) Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của dãy số.

Lời giải:

Xét dãy số 2;7;12;...22...

a) Quy luật: Dãy số cách đều với khoảng cách 5.

b) $B = \{22;27;32;37;42\}$

c) Gọi số hạng thứ 100 của dãy là x , ta có: $(x - 2) : 5 + 1 = 100$

$\Rightarrow x = 497$. Do vậy tổng 100 số hạng đầu của dãy là:

$(2 + 497) \cdot 100 : 2 = 24950$

Bài 14: Người ta viết liền nhau các số tự nhiên 123456....

a) Hỏi các chữ số đơn vị của các số 53; 328; 1587 đứng ở hàng thứ bao nhiêu?

b) Chữ số viết ở hàng thứ 427 là chữ số nào?

Lời giải:

Viết liền nhau các số tự nhiên 123456...

a) 9 chữ số đầu tiên: 1,2,...,9.

44 số có hai chữ số tiếp theo: 10,11,...,53.

\Rightarrow Chữ số hàng đơn vị của số 53 ở hàng số: $9 + 44.2 = 97$

Tương tự, chữ số hàng đơn vị của số 328 ở hàng số $9 + 90.2 + 229.3 = 876$;

chữ số hàng đơn vị của số 1587 ở hàng số $9 + 90.2 + 900.3 + 588.4 = 5241$.

b) Ta có: $427 = 9 + 90.2 + 79.3$

Khi đó số thứ 81 có 3 chữ số là: 179.

Chữ số viết ở hàng thứ 427 là chữ số 1.

Bài 15: Tính tổng $S = \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} + 3 + \dots + \frac{101}{3} + \frac{103}{3} + 35$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } S = \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} + 3 + \dots + \frac{101}{3} + \frac{103}{3} + 35 = \frac{1+3+5+7+\dots+101+103+105}{3}$$

Xét tổng $1+3+5+\dots+101+103+105$ là tổng các số tự nhiên lẻ liên tiếp từ 1 đến 105, các số tự nhiên lẻ liên tiếp cách đều nhau 2 đơn vị

Tổng này có: $n = (105-1):2+1 = 53$ số hạng

$$1+3+5+\dots+101+103+105 = \frac{(105+1).53}{2} = 2809$$

$$\text{Ta có tổng } S = \frac{2809}{3}$$

Bài 16: Tính tổng $B = 1+4+7+10+\dots+70+73$.

Lời giải:

$$B = 1+4+7+10+\dots+70+73$$

$$\Rightarrow 6B = 1.6+4.6+7.6+10.6+\dots+70.6+73.6$$

$$\Rightarrow 6B = 1.(4+2)+4.(7-1)+7(10-4)+\dots+73(76-70)$$

$$\Rightarrow 6B = 1.4+1.2+4.7-1.4+7.10-7.4+\dots+73.76-73.70$$

$$\Rightarrow 6B = 2+73.76$$

$$\Rightarrow 6B = 5550$$

$$\Rightarrow B = 925$$

*) *Nhận xét:* Như vậy tùy từng dạng bài và mức độ tiếp thu kiến thức của mỗi học sinh, thầy cô có thể vận dụng linh hoạt các phương pháp giải sao cho học trò dễ nhớ, phù hợp.

*) *Mở rộng:* Viết công thức tổng quát tính tổng dãy số tự nhiên liên tiếp cách đều sau:

$$A_n = 1+2+3+\dots+(n-1)+n$$

Lời giải:

Bằng các cách tính tổng tương tự như bài toán 1 ta có:

$$A_n = n(n+1):2 \quad (n \in N^*) \quad (1)$$

Tuy nhiên có thể hướng dẫn học sinh chứng minh bằng phương pháp qui nạp:

- Khi $n=1$ ta có: $A_1 = 1(1+1):2 = 1$ đúng.

- Giả sử bài toán đúng với $n=k > 1$ ($k \in N$), nghĩa là: $A_k = 1+2+3+\dots+(k-1)+k = k(k+1):2$

- Ta xét:

$$A_{k+1} = 1+2+3+\dots+(k-1)+k+(k+1)$$

$$= A_k + (k+1)$$

$$= k(k+1):2 + (k+1)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Tức là bài toán đúng với $n = k+1$.

Vậy với mọi số tự nhiên n khác 0, ta có: $A_n = 1+2+3+\dots+(n-1)+n = n(n+1):2$

Nhận xét: Ta có thể chứng minh (1) bằng phương pháp qui nạp sau đó áp dụng để tính các tổng có dạng đó.

Bài 17: Tính tổng $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{100}$.

**) Phân tích:* Kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với 2. Do đó nếu ta nhân 2 vào tổng S thì ta có tổng $2S$ với các số hạng từ 2 đến 2^{100} giống như trong tổng S , khi đó nếu lấy số tổng $2S$ trừ đi tổng S thì các số hạng từ 2 đến 2^{100} bị triệt tiêu và tính được tổng S .

Lời giải:

Ta có: $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100}$

Nhân 2 vào tổng S ta được $2S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{101}$

$$\Rightarrow 2S - S = S = 2^{101} - 1$$

Bài 18: Tính tổng $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}$.

**) Phân tích:* Kể từ số hạng thứ nhất, mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với $\frac{1}{2}$. Do đó nếu ta nhân 2 vào tổng S thì ta có tổng $2S$ với các số hạng từ $\frac{1}{2}$ đến $\frac{1}{2^{99}}$, giống như trong tổng S , khi đó nếu lấy tổng $2S$ trừ đi tổng S thì các số hạng từ $\frac{1}{2}$ đến $\frac{1}{2^{99}}$ bị triệt tiêu và tính được tổng S .

Lời giải:

Ta có $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \Rightarrow 2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{99}}$

$$\Rightarrow 2S - S = S = 2 - \frac{1}{2^{100}}$$

Bài 19: Tính tổng $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2019 + 2020$.

Lời giải

Số số hạng của dãy là $(2020 - 1) : 1 + 1 = 2020$.

Tổng $S = (1 + 2020) \cdot 2020 : 2 = 2041210$.

Bài toán tổng quát: Tính tổng $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$.

Số số hạng của dãy là $(n - 1) : 1 + 1 = n$.

Tổng $S = (n + 1)n : 2$.

Bài 20: Tính tổng $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 2019 + 2021$.

Lời giải

Số số hạng của dãy là $(2021 - 1) : 2 + 1 = 1011$.

Tổng $S = (1 + 2021) \cdot 1011 : 2 = 1022121$.

Bài 21: Tính tổng $S = 5 + 10 + 15 + \dots + 2015 + 2020$.

Lời giải

Số số hạng của dãy là $(2020 - 5) : 5 + 1 = 404$.

Tổng $S = (5 + 2020).404 : 2 = 409050$.

Bài 22: Tính tổng $S = 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \dots + \frac{4039}{2} + 2020$.

Lời giải

Số số hạng của dãy là $(2020 - 1) : \frac{1}{2} + 1 = 4039$.

Tổng $S = (1 + 2020).4039 : 2 = 4081409,5$.

Bài 23: Tính tổng các số tự nhiên có hai chữ số? .

Lời giải

Số số hạng của dãy: $\frac{(99 - 10)}{1} + 1 = 90$

Tổng của dãy: $A = \frac{99 + 10}{2}.90 = 4905$

Bài 24: Tính tổng của 21 số lẻ liên tiếp đầu tiên? .

Lời giải

Tổng 21 số lẻ liên tiếp đầu tiên là: $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 33 + 35 + 37 + 39 + 41$

Tính tổng theo công thức trong phương pháp

Các số hạng liên tiếp trong tổng cách đều nhau một giá trị $d = 2$ và trong tổng có 21 số hạng nên:

$$S = 1 + 3 + 5 + \dots + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 = \frac{(41 + 1).21}{2} = 441$$

Vậy tổng của 19 số lẻ liên tiếp đầu tiên là: $42.10 + 21 = 441$

Bài 25: Tính tổng $S = \frac{1}{18} + \frac{1}{18.9} + \frac{1}{162.9} + \frac{1}{1458.9}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } S = \frac{1}{18} + \frac{1}{18.9} + \frac{1}{162.9} + \frac{1}{1458.9} = \frac{1}{2.9} + \frac{1}{2.9^2} + \frac{1}{2.9^3} + \frac{1}{2.9^4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9^4} \right)$$

$$\text{Nhân 2 vào tổng } S \text{ ta được: } 2S = \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9^4}$$

$$\text{Nhân 9 vào tổng } 2S \text{ ta được: } 18S = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3}$$

$$\text{Trừ tổng } 18S \text{ cho tổng } 2S \text{ ta được: } 18S - 2S = 16S = 1 - \frac{1}{9^4}$$

$$\text{Suy ra } 16S = \frac{9^4 - 1}{9^4} \text{ suy ra } S = \frac{9^4 - 1}{16.9^4} = \frac{410}{6561}$$

Bài 26. Thực hiện tính A bằng cách hợp lý nhất: $A = \frac{2000.2001 - 1000}{2000.2000 + 1000}$

Trích đề HSG THCS Quế Phú năm 2018-2019

Lời giải

$$A = \frac{2000.2000 + 2000 - 1000}{2000.2000 + 1000} = \frac{2000.2000 + 1000}{2000.2000 + 1000} = 1$$

II. Tìm số chưa biết

Bài 1: Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$, biết:

a) $\frac{x-4}{y-3} = \frac{4}{3}$ và $x-y=5$.

b) $(x+1)(3y-2) = -55$.

Trích đề HSG huyện Tĩnh Gia năm 2018 - 2019

Lời giải

a) Điều kiện $y \neq 3$ ta có: $3x-12=4y-12$, suy ra $3x=4y$

Từ $x-y=5$, suy ra $x=5+y$

Ta có: $3y+15=4y$, suy ra $y=15$ nên $x=5+15=20$

Vậy $x=20; y=15$.

b) $(x+1).(3y-2) = -55 = (-11).5 = (-5).11$

Sau khi thử các trường hợp ta thu được $(x; y) \in \{(4; -3); (-6; -1)\}$.

Bài 2: Tìm x biết: $-\frac{7}{4}x \left(\frac{33}{12} + \frac{3333}{2020} + \frac{333333}{303030} + \frac{33333333}{42424242} \right) = 22$

Trích đề HSG trường THCS Phan Đình Phùng năm 2018-2019

Lời giải

$$-\frac{7}{4}x \cdot \left(\frac{33}{12} + \frac{3333}{2020} + \frac{333333}{303030} + \frac{33333333}{42424242} \right) = 22$$

$$-\frac{7}{4}x \cdot 33 \cdot \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} \right) = 22$$

$$-\frac{7}{4}x \cdot 33 \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} \right) = 22$$

$$-\frac{7}{4}x \cdot 33 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) = 22$$

$$-\frac{7}{4}x \cdot 33 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) = 22$$

$$x = -2$$

Vậy $x = -2$.

Bài 3: Tìm một phân số tối giản, biết rằng khi cộng mẫu số vào tử số và cộng mẫu số vào mẫu số của phân số ấy thì ta được phân số mới, lớn gấp 2 lần phân số ban đầu.

Trích đề HSG trường THCS Phan Đình Phùng năm 2018-2019

Lời giải

Gọi phân số tối giản lúc đầu là $\frac{a}{b}$.

Nếu chỉ cộng mẫu số vào mẫu số thì ta được phân số $\frac{a}{b+b} = \frac{a}{2b}$, phân số này nhỏ hơn phân số $\frac{a}{b}$ hai lần.

Để $\frac{a+b}{2b}$ gấp hai lần phân số lúc đầu thì $a+b$ phải bằng 4 lần a .

Nên mẫu số b phải gấp 3 lần tử số a .

Nên phân số tối giản cần tìm là $\frac{1}{3}$.

Bài 4: Tìm y biết: $(y+1) + (y+2) + (y+3) + \dots + (y+50) = 1425$

Lời giải

$$(y+1)+(y+2)+(y+3)+\dots+(y+50)=1425$$

$$50y+1+2+3+\dots+50=1425$$

$$50y+1275=1425$$

$$50y=150$$

$$y=3$$

Vậy $y=3$.

Bài 5: Tìm x , biết $x+2x+3x+\dots+2010x+2011x=2012.2013$.

Lời giải

$$x+2x+3x+\dots+2010x+2011x=2012.2013$$

$$x(1+2+3+\dots+2010+2011)=2012.2013 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } A=1+2+3+\dots+2010+2011$$

$$A=\frac{(1+2011).2011}{2}=1006.2011. \text{ Thay vào (1) ta được:}$$

$$x.1006.2011=2012.2013$$

$$\text{Suy ra } x=\frac{2012.2013}{1006.2011}=\frac{2.2013}{2011}. \text{ Vậy } x=\frac{4026}{2011}.$$

Bài 6: Tìm x , biết $(x+1)+(2x+3)+(3x+5)+\dots+(99x+197)+(100x+199)=30200$.

Lời giải

$$(x+1)+(2x+3)+(3x+5)+\dots+(99x+197)+(100x+199)=30200$$

$$(x+2x+3x+\dots+99x+100x)+(1+3+5+\dots+197+199)=30200$$

$$x(1+2+3+\dots+99+100)+(1+3+5+7+\dots+197+199)=30200 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } A=1+2+3+\dots+99+100$$

$$\text{Ta có } A=\frac{(1+100).100}{2}=101.50=5050.$$

$$\text{Đặt } B=1+3+5+\dots+197+199$$

$$\text{Ta có } B=\frac{(1+199).100}{2}=10000.$$

Thay A và B vào (1) ta được:

$$x.5050+10000=30200$$

$$5050x=30200-10000$$

$$5050x=20200$$

$$x=4.$$

Vậy $x=4$.

Bài 7: Cho $B=6+6^2+6^3+\dots+6^{2018}+6^{2019}$. Tìm x để $5.B+6=6^x$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 6.B=6^2+6^3+6^4+\dots+6^{2019}+6^{2020}.$$

$$\text{Suy ra } 6.B-B=(6^2-6^2)+(6^3-6^3)+\dots+(6^{2019}-6^{2019})+6^{2020}-6$$

$$\text{hay } 5.B=6^{2020}-6.$$

$$\text{Do } 5.B+6=6^x$$

$$\text{nên } 6^{2020}-6+6=6^x$$

$$6^{2020} = 6^x$$

$$x = 2020.$$

Vậy $x = 2020$

Bài 8: Cho $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$. Tìm x biết $2(A + 2) = 2^{2x}$.

Lời giải

Ta có $2.A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{100} + 2^{101}$.

$$\text{Suy ra } 2.A - A = (2^2 - 2^2) + (2^3 - 2^3) + (2^{100} - 2^{100}) + 2^{101} - 2$$

$$\text{Suy ra } A = 2^{101} - 2.$$

$$\text{Do } 2.(A + 2) = 2^{2x}$$

$$\text{nên } 2.(2^{101} - 2 + 2) = 2^{2x}$$

$$2.2^{101} = 2^{2x}$$

$$2^{202} = 2^{2x}$$

$$2x = 202$$

$$x = 101.$$

Vậy $x = 101$.

Bài 9:

a) Cho $M = (-a + b) - (b + c - a) + (c - a)$. Trong đó $b, c \in \mathbb{Z}$ còn a là một số nguyên âm. Chứng minh rằng biểu thức M luôn dương

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

Trích đề HSG huyện Tam Nông năm 2018-2019

Lời giải

a) Ta có: $M = (-a + b) - (b + c - a) + (c - a)$

$$M = -a + b - b - c + a + c - a$$

$M = -a$ mà a là số nguyên âm nên M luôn dương.

b) $x = 0, y = 0$ hoặc $x = 2, y = 2$.

Bài 10: Cho biểu thức $A = \frac{a^3 + 2a^2 - 1}{a^3 + 2a^2 + 2a + 1}$

a) Rút gọn biểu thức.

b) Chứng minh rằng nếu a là số nguyên thì giá trị của biểu thức tìm được ở câu a là một phân số tối giản.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

a) Ta có: $A = \frac{a^3 + 2a^2 - 1}{a^3 + 2a^2 + 2a + 1} = \frac{(a+1)(a^2 + a - 1)}{(a+1)(a^2 + a + 1)} = \frac{a^2 + a - 1}{a^2 + a + 1} (a \neq -1)$

b) Gọi d là ƯCLN của $a^2 + a - 1; a^2 + a + 1$

Vì $a^2 + a - 1 = a(a+1) - 1$ là số lẻ nên d là số lẻ.

$$\text{Mặt khác, } 2 = [a^2 + a + 1 - (a^2 + a - 1)] : d$$

Nên $d = 1$ tức là $a^2 + a + 1$ và $a^2 + a - 1$ là nguyên tố cùng nhau.

Vậy biểu thức A là phân số tối giản.

Bài 11: Tìm số tự nhiên n và chữ số a biết rằng: $1+2+3+\dots+n = \overline{aaa}$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Từ $1; 2; \dots; n$ có n số hạng.

$$\text{Suy ra } 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Mà theo bài ta có: $1+2+3+\dots+n = \overline{aaa}$.

$$\text{Suy ra } \frac{(n+1)n}{2} = \overline{aaa} = a.111 = a.3.37$$

$$\text{hay } n(n+1) = 2.3.37.a$$

Vì tích $n(n+1)$ chia hết cho số nguyên tố 37 nên n hoặc $n+1$ chia hết cho 37 .

Vì số $\frac{(n+1)n}{2}$ có 3 chữ số nên $n+1 < 74$ nên $n=37$ hoặc $n+1=37$

$$\text{Với } n=37 \text{ thì } \frac{37.38}{2} = 703 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Với } n+1=37 \Rightarrow \frac{36.37}{2} = 666 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Vậy } n=36, a=6 \Rightarrow 1+2+3+\dots+36 = 666.$$

Bài 12: Tìm hai số x, y biết $(x+5)^{2020} + (4y-4)^{2020} = 0$.

Lời giải

$$\text{Vì } (x+5)^{2020} \geq 0, (4y-4)^{2020} \geq 0.$$

$$\text{Nên để } (x+5)^{2020} + (4y-4)^{2020} = 0 \text{ thì } \begin{cases} x+5=0 \\ 4y-4=0 \end{cases}.$$

Bài 13: Tìm hai số x, y biết $(2x-1)^2 + (2y-x)^{2020} - 8 = 12 - 5.2^2$

Lời giải

$$(2x-1)^2 + (2y-x)^{2020} - 8 = 12 - 5.2^2$$

$$\Rightarrow (2x-1)^2 + (2y-x)^{2020} = 0.$$

$$\text{Vì } (2x-1)^2 \geq 0, (2y-x)^{2020} \geq 0$$

$$\text{Nên để } \Rightarrow (2x-1)^2 + (2y-x)^{2020} = 0 \text{ thì } \begin{cases} 2x-1=0 \\ 2y-x=0 \end{cases}.$$

Bài 14: Tìm ba số x, y, z biết $(3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2010} = 0$

Lời giải

$$\text{Vì } (3x-5)^{2006} \geq 0, (y^2-1)^{2008} \geq 0, (x-z)^{2010} \geq 0.$$

$$\text{Nên để } (3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2010} = 0 \text{ thì } \begin{cases} 3x-5=0 \\ y^2-1=0 \\ x-z=0 \end{cases}.$$

Bài 15: Tìm số tự nhiên n, m biết $2^m - 2^n = 1024$.

Lời giải

Ta thấy $m > n$.

$$\Rightarrow 2^{m-n+n} - 2^n = 1024$$

$$\Rightarrow 2^{m-n}.2^n - 2^n = 1024$$

$$\Rightarrow 2^n \cdot (2^{m-n} - 1) = 2^{10}$$

Nhận thấy $2^{m-n} - 1$ là số lẻ

$$\text{Nên } \begin{cases} 2^n = 2^{10} \\ 2^{m-n} - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 10 \\ m = 11 \end{cases}$$

Bài 16: Tìm x biết $(x+1)+(x+2)+(x+3)+\dots+(x+99)+(x+100) = 5070$.

Lời giải

$$(x+1)+(x+2)+(x+3)+\dots+(x+99)+(x+100) = 5070$$

$$\Rightarrow (x+x+x+\dots+x+x) + (1+2+3+\dots+99+100) = 5070$$

$$\Rightarrow 100x + (1+2+3+\dots+99+100) = 5070 \quad (1)$$

Đặt $A = 1+2+3+\dots+99+100$

$$\Rightarrow A = \frac{(1+100) \cdot 100}{2} = 101.50 = 5050. \text{ Thay vào (1) ta được}$$

$$100x + 5050 = 5070$$

$$\Rightarrow 100x = 5070 - 5050$$

$$\Rightarrow 100x = 20$$

$$\Rightarrow x = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}. \text{ Vậy } x = \frac{1}{5}.$$

Bài 17: Tìm x biết $(x+1)+(x+2)+(x+3)+\dots+(x+49)+(x+50) = 7450$

Lời giải

$$(x+1)+(x+2)+(x+3)+\dots+(x+49)+(x+50) = 7475$$

$$\Rightarrow (x+x+x+\dots+x+x) + (1+2+3+\dots+49+50) = 7475$$

$$\Rightarrow 50x + (1+2+3+\dots+49+50) = 7475. \quad (1)$$

Đặt $A = 1+2+3+\dots+49+50$

$$\Rightarrow A = \frac{(1+50) \cdot 50}{2} = 51.25 = 1275. \text{ Thay vào (1) ta được}$$

$$50x + 1275 = 7475$$

$$\Rightarrow 50x = 7475 - 1275$$

$$\Rightarrow 50x = 6200$$

$$\Rightarrow x = \frac{6200}{50} = 124. \text{ Vậy } x = 124.$$

Bài 18. Tìm y biết: $(y+1)+(y+2)+(y+3)+\dots+(y+50) = 1425$

Trích đề HSG THCS Quế Phú năm 2018-2019

Lời giải

$$50y + 1+2+3+\dots+50 = 1425$$

$$50y + 1275 = 1425$$

$$50y = 150$$

$$y = 3$$



CHỦ ĐỀ: TÍNH TOÁN VỚI SỐ TỰ NHIÊN, SỐ NGUYÊN, PHÂN SỐ
A. PHẦN NỘI DUNG

I. Thực hiện các phép tính.**Dạng 1: Thực hiện phép tính.****Bài 1:** Tính hợp lý:

a) $A = 2018^2 - 2017 \cdot 2018$

b) $B = (-1) \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^4 \dots (-1)^{99} \cdot (-1)^{100}$

c)
$$C = \frac{88 - \frac{1}{6} - \frac{2}{7} - \frac{3}{8} - \dots - \frac{88}{93}}{-\frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} - \dots - \frac{1}{186}}$$

*Trích đề HSG huyện Ứng Hòa năm 2022 - 2023***Lời giải**

a) $A = 2018 \cdot (2018 - 2017) = 2018 \cdot 1 = 2018$

b) $B = (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \dots (-1) \cdot 1$ (Có 50 thừa số -1) nên $B = 1$.

c)
$$C = \frac{88 - \frac{1}{6} - \frac{2}{7} - \frac{3}{8} - \dots - \frac{88}{93}}{-\frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} - \dots - \frac{1}{186}}$$

$$C = \frac{\frac{5}{6} + \frac{5}{7} + \frac{5}{8} + \dots + \frac{5}{93}}{-\frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} - \dots - \frac{1}{186}}$$

$$C = \frac{5 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{93} \right)}{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{93} \right)}$$

$C = -10.$

Bài 2: Thực hiện các phép tính sau một cách hợp lý:

a) $A = 1152 - (374 + 1152) + (-65 + 374)$

b)
$$\frac{101 + 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1}{101 - 100 + 99 - 98 + \dots + 3 - 2 + 1}$$

*Trích đề HSG đề xuất năm 2021 - 2022***Lời giải**

a) $A = 1152 - (374 + 1152) + (-65 + 374)$

$A = 1152 - 374 - 1152 - 65 + 374$

$A = (1152 - 1152) + (-374 + 374) - 65$

$A = -65.$

b) Ta có:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 + 101 = [(101 - 1) : 1 + 1](101 + 1) : 2 = \frac{101 \cdot 102}{2} \quad (1)$$

$$101 - 100 + 99 - 98 + \dots + 3 - 2 + 1 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 51 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :



$$\frac{101 + 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1}{101 - 100 + 99 - 98 + \dots + 3 - 2 + 1} = \frac{101 \cdot 102 : 2}{51} = 101.$$

Vậy $\frac{101 + 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1}{101 - 100 + 99 - 98 + \dots + 3 - 2 + 1} = 101$

Bài 3: Tính $2022.121 - 2022.11.11 + 2023$.

Trích đề HSG đề xuất năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} & 2022.121 - 2022.11.11 + 2023 \\ &= 2022.11.11 - 2022.11.11 + 2023 \\ &= 0 + 2023 \\ &= 2023 \end{aligned}$$

Bài 4: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = -5^{22} - \left\{ -222 - \left[-122 - (100 - 5^{22}) + 2022 \right] \right\}$

b) $B = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{20}(1+2+3+\dots+20)$

Trích đề HSG đề xuất năm 2021 - 2022

Lời giải

a) $A = -5^{22} - \left\{ -222 - \left[-122 - (100 - 5^{22}) + 2022 \right] \right\}$

$$A = -5^{22} + 222 - 122 - 100 + 5^{22} + 2022$$

$$A = (-5^{22} + 5^{22}) + (222 - 122 - 100) + 2022$$

$$A = 2022.$$

b) $B = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{20}(1+2+3+\dots+20)$

$$B = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + \dots + \frac{1}{20} \cdot \frac{20 \cdot 21}{2}$$

$$B = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{21}{2}$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot (1+2+3+\dots+20)$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} = 105.$$

Bài 5: Tính:

a) $A = -21 \cdot 7^2 + 17 \cdot 7^2 - 90 \cdot 7^2 + 94 \cdot (-51)$

b) $C = \frac{5 \cdot 6 + 2 \cdot 10 \cdot 12 - 3 \cdot 15 \cdot 18 - 7 \cdot 35 \cdot 42}{3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 10 - 3 \cdot 9 \cdot 15 - 7 \cdot 21 \cdot 35} + \frac{2022 \cdot 2022 \cdot 2021 - 2021 \cdot 2021 \cdot 2022}{2^2 + 3^3 + 4^4 + \dots + 2022^{2022}}$

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2021 - 2022

Lời giải

a) $A = -21 \cdot 7^2 + 17 \cdot 7^2 - 90 \cdot 7^2 + 94 \cdot (-51)$

$$= 7^2 \cdot (-21 + 17 - 90) + 94 \cdot (-51)$$

$$= 7^2 \cdot (-94) + 94 \cdot (-51)$$

$$= 94 \cdot [(-49) + (-51)]$$



$$= 94.(-100)$$

$$= -9400.$$

$$b) \frac{5.6 + 2.10.12 - 3.15.18 - 7.35.42}{3.5 + 2.6.10 - 3.9.15 - 7.21.35} + \frac{2022 \cdot 2022 \cdot 2021 - 2021 \cdot 2021 \cdot 2022}{2^2 + 3^3 + 4^4 + \dots + 2022^{2022}}$$

$$= \frac{5.6(1 + 2.2.2 - 3.3.3 - 7.7.7)}{3.5(1 + 2.2.2 - 3.3.3 - 7.7.7)} + \frac{2022 \cdot 10001 \cdot 2021 - 2021 \cdot 10001 \cdot 2022}{2^2 + 3^3 + 4^4 + \dots + 2022^{2022}}$$

$$= \frac{5.6}{3.5} + \frac{0}{2^2 + 3^3 + 4^4 + \dots + 2022^{2022}}$$

$$= 2.$$

Bài 6: Tính giá trị các biểu thức sau (Tính hợp lý nếu có thể):

a) $A = -674.168 + 2022.(-44)$

b) $B = -\frac{10}{13} + \frac{5}{17} - \frac{3}{13} + \frac{12}{17} + \frac{195}{1890}$

Trích đề HSG huyện Nam Định năm 2021 – 2022

Lời giải

a) $A = -674.168 + 2022.(-44)$

$$A = -674.3.56 + 2022.(-44)$$

$$A = -2022.56 + 2022.(-44)$$

$$A = -2022(56 + 44)$$

$$A = -2022.100$$

$$A = -202200$$

b) $B = -\frac{10}{13} + \frac{5}{17} - \frac{3}{13} + \frac{12}{17} + \frac{195}{1890}$

$$= -\frac{10}{13} - \frac{3}{13} + \frac{5}{17} + \frac{12}{17} + \frac{195}{1890}$$

$$= -1 + 1 + \frac{195}{1890}$$

$$= \frac{195}{1890}.$$

Bài 7: Thực hiện phép tính bằng cách hợp lý:

a) $A = -2013.2014 + 1007.26$

b) $B = \left(\frac{1313}{1414} + \frac{10}{160} \right) - \left(\frac{130}{140} - \frac{1515}{1616} \right)$

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2017 -2018

Lời giải

a) $A = -2013.2014 + 1007.2.13$

$$A = -2013.2014 + 2014.13$$

$$A = 2014(-2013 + 13)$$

$$A = 2014.(-2000)$$

$$A = -4028000.$$

b) $B = \left(\frac{1313}{1414} + \frac{10}{160} \right) - \left(\frac{130}{140} - \frac{1515}{1616} \right)$



$$B = \left(\frac{13}{14} + \frac{1}{16} \right) - \left(\frac{13}{14} - \frac{15}{16} \right)$$

$$B = \frac{13}{14} + \frac{1}{16} - \frac{13}{14} + \frac{15}{16}$$

$$B = \left(\frac{13}{14} - \frac{13}{14} \right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{15}{16} \right)$$

$$B = 0 + 1$$

$$B = 1.$$

Bài 8:

1) Tính $A = \frac{3}{4} + \frac{7}{8} : 7 - \frac{1}{32} \cdot (-4)^2$.

2) Tính nhanh hợp lý: $B = 2022 \cdot 2022 - 2025 \cdot 2019$.

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2017 -2018

Lời giải

1) $A = \frac{3}{4} + \frac{7}{8} : 7 - \frac{1}{32} \cdot (-4)^2 = \frac{3}{4} + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} - \frac{1}{32} \cdot 16 = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

2) $B = 2022 \cdot 2022 - 2025 \cdot 2019 = 2022 \cdot (2025 - 3) - 2025 \cdot (2020 - 1)$
 $= 2022 \cdot 2025 - 2022 \cdot 3 - 2025 \cdot 2020 + 2025$
 $= 2025 \cdot (2022 - 2020) - 2022 \cdot 3 + 2025$
 $= 2025 \cdot 2 + 2025 - 2022 \cdot 3$
 $= 3 \cdot 2025 - 2022 \cdot 3$
 $= 3 \cdot 3 = 9$.

Bài 9: Rút gọn $\frac{10.11 + 50.55 + 70.77}{11.12 + 55.60 + 77.84}$

Trích đề HSG huyện Tam Dương năm 2021 -2022

Lời giải

Ta có:

$$\frac{10.11 + 50.55 + 70.77}{11.12 + 55.60 + 77.84} = \frac{10.11 \cdot (1 + 5.5 + 7.7)}{11.12 \cdot (1 + 5.5 + 7.7)} = \frac{5}{6}$$

Bài 10: Thực hiện phép tính:

a) $A = \frac{24.47 - 23}{24 + 47 - 23} \cdot \frac{3 + \frac{3}{7} - \frac{3}{11} + \frac{3}{1001} - \frac{3}{13}}{\frac{9}{1001} - \frac{9}{13} + \frac{9}{7} - \frac{9}{11} + 9}$

b) $M = \frac{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2012}}{2^{2014} - 2}$

Trích đề HSG huyện Kim Sơn năm 2021 -2022

Lời giải

a) Đặt $A = B \cdot C$

$$B = \frac{24.47 - 23}{24 + 47 - 23} = \frac{1128 - 23}{71 - 23} = \frac{1105}{48}$$



$$C = \frac{3 + \frac{3}{7} - \frac{3}{11} + \frac{3}{1001} - \frac{3}{13}}{\frac{9}{1001} - \frac{9}{13} + \frac{9}{7} - \frac{9}{11} + 9} = \frac{3 \left(1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{1001} - \frac{1}{13} \right)}{9 \left(\frac{1}{1001} - \frac{1}{13} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + 1 \right)} = \frac{1}{3}$$

Suy ra $A = \frac{1105}{144}$.

b) $M = \frac{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2012}}{2^{2014} - 2}$

Đặt $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2012}$

$2A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2012} + 2^{2013}$

$2A - A = (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2012} + 2^{2013}) - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2012})$

$A = 2^{2013} - 1$

Đặt: $B = 2^{2014} - 2 = 2(2^{2013} - 1)$.

$M = \frac{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2012}}{2^{2014} - 2} = \frac{2^{2013} - 1}{2(2^{2013} - 1)} = \frac{1}{2}$.

Vậy $M = \frac{1}{2}$.

Bài 11: Thực hiện phép tính:

a) $A = 4,5 \cdot \frac{1}{9} + \left(2\frac{2}{3} - \frac{4}{9} \right) : 25\%$

b) $B = 2011 - [39 - (2^3 \cdot 3 - 21)^2] : (-3) + 2021^0$

c) $C = \left(1 + \frac{1}{1.3} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2.4} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3.5} \right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2018.2020} \right)$

Trích đề HSG huyện Kinh Môn năm 2019 -2020

Lời giải

a) $A = 4,5 \cdot \frac{1}{9} + \left(2\frac{2}{3} - \frac{4}{9} \right) : 25\%$

$= \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{9} + \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{9} \right) : \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{2} + \left(\frac{24}{9} - \frac{4}{9} \right) \cdot 4$

$= \frac{1}{2} + \frac{20}{9} \cdot 4$

$= \frac{9}{18} + \frac{160}{18} = \frac{169}{18}$.

b) $B = 2011 - [39 - (2^3 \cdot 3 - 21)^2] : (-3) + 2021^0$

$B = 2011 - [39 - (3)^2] : (-3) + 1$

$B = 2011 + 10 + 1 = 2022$



$$\begin{aligned} \text{c) } C &= \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2018.2020}\right) = \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \cdots \frac{2019^2}{2018.2020} \\ &= \frac{(2.3.4 \dots 2019)(2.3.4 \dots 2019)}{(1.2.3 \dots 2.18)(3.4.5 \dots 2020)} = \frac{2019 \cdot 2}{2020} = \frac{2019}{1010}. \end{aligned}$$

Bài 12:

$$\text{a) Rút gọn biểu thức: } A = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2499}\right)$$

$$\text{b) Tính nhanh: } B = \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}}{2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27}} : \frac{4 + \frac{4}{7} + \frac{4}{49} - \frac{4}{343}}{1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343}}$$

*Trích đề HSG huyện Kinh Môn năm 2018 -201***Lời giải**

$$\text{a) } A = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2499}\right)$$

$$A = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15} \cdots \frac{2500}{2499}$$

$$A = \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{3.3}{2.4} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdots \frac{50.50}{49.51}$$

$$A = \frac{2.3.4 \dots 50}{1.2.3 \dots 49} \cdot \frac{2.3.4 \dots 50}{3.4.5 \dots 51}$$

$$A = \frac{50}{1} \cdot \frac{2}{51}$$

$$A = \frac{100}{51}.$$

$$\text{Vậy } A = \frac{100}{51}.$$

$$\text{b) } B = \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}}{2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27}} : \frac{4 + \frac{4}{7} + \frac{4}{49} - \frac{4}{343}}{1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343}}$$

$$B = \frac{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}\right)}{2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}\right)} : \frac{4 \cdot \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343}\right)}{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343}\right)}$$

$$B = \frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Vậy } B = \frac{1}{8}.$$

Bài 13: Tính:

$$\text{a) } 1152 - (374 + 1152) + (374 - 65)$$

$$\text{b) } \frac{7}{12} + \frac{5}{6} + \frac{1}{4} - \frac{3}{7} - \frac{5}{12}$$



Lời giải

$$a) A = 1152 - (374 + 1152) + (374 - 65)$$

$$A = 1152 - 374 - 1152 + 374 - 65$$

$$A = (1152 - 1152) + (374 - 374) - 65$$

$$A = -65.$$

Vậy $A = -65$.

$$b) B = \frac{7}{12} + \frac{5}{6} + \frac{1}{4} - \frac{3}{7} - \frac{5}{12}$$

$$B = \left(\frac{7}{12} - \frac{5}{12} \right) + \frac{5}{6} + \frac{1}{4} - \frac{3}{7}$$

$$B = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} + \frac{1}{4} - \frac{3}{7}$$

$$B = 1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{7}$$

$$B = \frac{5}{4} - \frac{3}{7}$$

$$B = \frac{35}{28} - \frac{12}{28}$$

$$B = \frac{23}{28}.$$

Vậy $B = \frac{23}{28}$.

Bài 14: Tính: $M = \frac{\frac{7}{2012} + \frac{7}{9} - \frac{1}{4}}{\frac{5}{9} - \frac{3}{2012} - \frac{1}{2}}$.

Lời giải

$$M = \frac{\frac{7}{2012} + \frac{7}{9} - \frac{1}{4}}{\frac{5}{9} - \frac{3}{2012} - \frac{1}{2}}$$

$$M = \frac{7.9.2 + 7.2012.2 - 1006.9}{5.2012.2 - 3.9.2 - 2012.9}$$

$$M = \frac{7.2021 - 503.9}{5.2012 - 3.9 - 1006.9}$$

$$M = \frac{9620}{979}.$$

Vậy $M = \frac{9620}{979}$.

Bài 15: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $2 \cdot \left[(6^2 - 24) : 4 \right] + 2014$



$$b) \left(1 + 2\frac{1}{3} - 3\frac{1}{4}\right) : \left(1 + 3\frac{7}{12} - 4\frac{1}{2}\right)$$

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018 -2019

Lời giải

$$a) 2 \cdot \left[(6^2 - 24) : 4 \right] + 2014 = 2 \cdot \left[(36 - 24) : 4 \right] + 2014 = 2020.$$

$$b) \left(1 + 2\frac{1}{3} - 3\frac{1}{4}\right) : \left(1 + 3\frac{7}{12} - 4\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{7}{12} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12} : \frac{1}{12} = 1.$$

Bài 16: Thực hiện phép tính:

$$a) A = \left[540 : (23,7 - 19,7) \right] + 42(132 + 75 - 36) - 7317$$

$$b) \text{ Tìm tích: } \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{4} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100} - 1\right).$$

Trích đề HSG huyện Bạch Thông năm 2018 -2019

Lời giải

$$a) A = \left[540 : (23,7 - 19,7) \right] + 42(132 + 75 - 36) - 7317$$

$$A = (540 : 4) + 42 \cdot 171 - 7317$$

$$A = 135 + 7182 - 7317$$

$$A = 0.$$

Vậy $A = 0$.

$$b) B = \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{4} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{99} - 1\right) \left(\frac{1}{100} - 1\right)$$

$$B = \frac{-1}{2} \cdot \frac{-2}{3} \cdot \frac{-3}{4} \dots \frac{-99}{100}$$

$$B = \frac{-(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 99)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 99 \cdot 100}$$

$$B = \frac{-1}{100}.$$

$$\text{Vậy } B = \frac{-1}{100}.$$

Bài 17: Thực hiện phép tính (tính nhanh nếu có thể)

$$a) M = \left(\frac{-5}{7} + \frac{5}{11}\right) : \left(\frac{-10}{3}\right) + \left(\frac{-2}{7} + \frac{6}{11}\right) : \left(\frac{-10}{3}\right)$$

$$b) P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{100}}$$

Trích đề HSG huyện Phúc Thọ năm 2018 -2019

Lời giải

$$a) M = \left(\frac{-5}{7} + \frac{5}{11}\right) : \left(\frac{-10}{3}\right) + \left(\frac{-2}{7} + \frac{6}{11}\right) : \left(\frac{-10}{3}\right)$$

$$M = \frac{-2}{10} \cdot \left(\frac{-5}{7} + \frac{5}{11} + \frac{-2}{7} + \frac{6}{11}\right)$$

$$M = \frac{-3}{10} \cdot (-1 + 1)$$



$$M = \frac{-3}{10} \cdot 0$$

$$M = 0.$$

Vậy $M = 0$.

$$b) P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{100}} \quad (1)$$

$$2P = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{99}} \quad (2)$$

$$2P - P = \left(2 + \frac{1}{2^{99}}\right) - \left(\frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{100}}\right)$$

$$P = 2 + \frac{1}{2^{99}} - \frac{1}{2^{99}}$$

$$P = 2.$$

Vậy $P = 2$.

Bài 18: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) A = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} : 5 - \frac{1}{18} \cdot (-3)^2$$

$$b) B = 3 \cdot \{5 \cdot [(5^2 + 2^3) : 11] - 16\} + 2015$$

$$c) C = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2014.2016}\right)$$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hoá năm 2018 -2019

Lời giải

$$a) A = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} : 5 - \frac{1}{18} \cdot (-3)^2$$

$$A = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{18} \cdot 9$$

$$A = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} - \frac{3}{6}$$

$$A = \frac{5}{6} - \frac{3}{6}$$

$$A = \frac{2}{6}$$

$$A = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{3}.$$

$$b) B = 3 \cdot \{5 \cdot [(5^2 + 2^3) : 11] - 16\} + 2015$$

$$B = 3 \cdot \{5 \cdot [33 : 11] - 16\} + 2015$$

$$B = (-3) + 2015$$

$$B = 2012.$$

Vậy $B = 2012$.



$$c) C = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2014.2016}\right)$$

$$C = \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \dots \frac{2015^2}{2014.2016}$$

$$C = \frac{(2.3.4 \dots 2015) \cdot (2.3.4 \dots 2015)}{(1.2.3 \dots 2014) \cdot (3.4.5 \dots 2016)}$$

$$C = \frac{2015}{1008}$$

$$\text{Vậy } C = \frac{2015}{1008}$$

Bài 19: Tính nhanh: $16 + (27 - 7.6) - (94.7 - 27.99)$.

Trích đề HSG huyện Quỳnh Lưu năm 2018 -2019

Lời giải

$$\begin{aligned} 16 + (27 - 7.6) - (94.7 - 27.99) &= 16 + 27 - 7.6 - 94.7 + 27.99 = 16 + 27 + 27.99 - 7.6 - 94.7 \\ &= 16 + 27.100 - 7.100 = 16 + 100 \cdot (27 - 7) = 16 + 100 \cdot 20 = 16 + 2000 = 2016. \end{aligned}$$

Bài 20: Tính hợp lý

a) $21.7^2 - 11.7^2 + 90.7^2 + 49.125.16$

b)
$$B = \frac{2.2014}{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2014}}$$

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021 -2022

Lời giải

a) $A = 21.7^2 - 11.7^2 + 90.7^2 + 49.125.16$

$$A = 7^2 \cdot (21 - 11 + 90) + 49.125.16$$

$$A = 49.100 + 49.25.5.4.4$$

$$A = 49.100 + 49.100.20$$

$$A = 49.100 \cdot (1 + 20)$$

$$A = 49.100 \cdot 21 = 102900.$$

$$\text{Vậy } A = 102900.$$

b)

Ta có $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}(n+1)n$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó $\frac{1}{1+2+3+\dots+n} = 2 \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

Suy ra:
$$\begin{aligned} B &= \frac{2.2014}{1+2 \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2014} - \frac{1}{2015}\right) \right]} \\ &= \frac{2.2014}{1+2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2015}\right)} = \frac{2.2014}{2 - \frac{2}{2015}} \end{aligned}$$

Mà $2 - \frac{2}{2015} = \frac{2.2015 - 2}{2015} = \frac{2(2015 - 1)}{2015} = \frac{2.2014}{2015}$.



$$B = \frac{2.2014.2015}{2.2014}$$

$$B = 2015.$$

Vậy $B = 2015.$

Bài 21: Thực hiện phép tính:

$$A = 1800 : \left\{ 450 : \left[450 - (4.5^3 - 2^3.5^2) \right] \right\}$$

$$B = \frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^{10}.6^{19} - 7.2^{29}.27^6}$$

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Lời giải

$$A = 1800 : \left\{ 450 : \left[450 - (4.5^3 - 2^3.5^2) \right] \right\}$$

$$= 1800 : \left\{ 450 : \left[450 - (4.125 - 8.25) \right] \right\}$$

$$= 1800 : \left\{ 450 : [450 - 300] \right\}$$

$$= 1800 : \{ 450 : 150 \}$$

$$= 1800 : 3 = 600.$$

$$B = \frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^{10}.6^{19} - 7.2^{29}.27^6}$$

$$= \frac{5.2^{2.15}.3^{2.9} - 2^2.3^{20}.2^{3.9}}{5.2^{10}.2^{19}.3^{19} - 7.2^{29}.3^{3.6}}$$

$$= \frac{5.2^{30}.3^{18} - 2^2.3^{20}.2^{27}}{5.2^{29}.3^{19} - 7.2^{29}.3^{18}}$$

$$= \frac{2^{29}.3^{18}(5.2 - 3^2)}{2^{29}.3^{18}(5.3 - 7)}$$

$$= \frac{10 - 9}{15 - 7} = \frac{1}{8}$$

Bài 22: Thực hiện phép tính:

$$A = 12 - 3 - [(2021 - 2022)^{100} - 10^2 + 3^2] + (-2022)^0$$

$$B = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right)$$

Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Lời giải

$$A = 12 - 3 - [(2021 - 2022)^{100} - 10^2 + 3^2] + (-2022)^0$$

$$A = 9 - [(-1)^{100} - 100 + 9] + 1$$

$$A = 9 - [1 - 100 + 9] + 1$$



$$A = 9 - 1 + 100 - 9 + 1$$

$$A = (9 - 9) + (1 - 1) + 100$$

$$A = 100$$

Vậy $A = 100$.

$$B = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right)$$

$$B = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100}$$

$$B = \frac{3 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \dots \cdot 99}{4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot \dots \cdot 100}$$

$$B = \frac{(1 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 5) \cdot \dots \cdot (9 \cdot 11)}{(2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 4) \cdot \dots \cdot (10 \cdot 10)}$$

$$B = \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9) \cdot (3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 10 \cdot 11)}{(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 9 \cdot 10) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 10)}$$

$$B = \frac{11}{20}$$

Vậy $B = \frac{11}{20}$.

Bài 23: Tính giá trị của các biểu thức sau bằng cách hợp lý:

$$A = 35 \cdot 34 + 35 \cdot 86 + 65 \cdot 75 + 65 \cdot 45$$

$$B = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2022}\right)$$

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Lời giải

$$A = 35 \cdot 34 + 35 \cdot 86 + 65 \cdot 75 + 65 \cdot 45$$

$$= 35(34 + 86) + 65(75 + 45)$$

$$= 35 \cdot 120 + 65 \cdot 120$$

$$= 120(35 + 65)$$

$$= 120 \cdot 100$$

$$= 12000$$

$$B = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2022}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2021}{2022}$$



$$= \frac{1}{2022}$$

Bài 24: Tính giá trị của biểu thức

$$1) A = 22 + (27 - 7.6) - (94.7 - 27.99)$$

$$2) B = 3 \cdot \left\{ 5 \cdot \left[(5^2 + 2^3) : 11 \right] - 16 \right\} + 2025$$

$$3) C = 1 + \frac{1}{2} \cdot (1+2) + \frac{1}{3} \cdot (1+2+3) + \frac{1}{4} \cdot (1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{200} \cdot (1+2+\dots+200)$$

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Lời giải

$$1) A = 22 + (27 - 7.6) - (94.7 - 27.99)$$

$$= 22 + 27 - 7.6 - 94.7 + 27.99$$

$$= 22 + 27 + 27.99 - 7.6 - 94.7$$

$$= 22 + 27(99+1) - 7 \cdot (6+94)$$

$$= 22 + 27 \cdot 100 - 7 \cdot 100$$

$$= 22 + 100(27 - 7)$$

$$= 22 + 100 \cdot 20 = 22 + 2000 = 2022$$

$$2) B = 3 \cdot \left\{ 5 \cdot \left[(5^2 + 2^3) : 11 \right] - 16 \right\} + 2025$$

$$= 3 \cdot \left\{ 5 \cdot [33 : 11] - 16 \right\} + 2025$$

$$= 3 \cdot \{15 - 16\} + 2025$$

$$= 3 \cdot (-1) + 2025 = 2022$$

$$3) \text{ Từ } 1+2+3+\dots+n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \text{ được:}$$

$$E = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} + \dots + \frac{1}{200} \cdot \frac{200 \cdot 201}{2}$$

$$= 1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{201}{2}$$

$$E + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{201}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (1+2+4+\dots+201)$$

$$E = \frac{1}{2} (1+2+4+\dots+201) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{201 \cdot 202}{2} - \frac{1}{2} = 10150$$

Bài 25: Thực hiện phép tính



$$1) 936 - [508 - 5(5^{10} : 5^8 + 2022^0)]$$

$$2) \frac{2^6 \cdot 18 + 2^7}{2^6 \cdot 5^2 - 2^6 \cdot 3}$$

3) $A = x - y$ với x là số nguyên dương nhỏ nhất và y là số nguyên âm lớn nhất.

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Lời giải

$$1) 936 - [508 - 5(5^{10} : 5^8 + 2022^0)]$$

$$= 936 - [508 - 5(5^2 - 1)]$$

$$= 936 - (508 - 5 \cdot 26)$$

$$= 936 - (508 - 130)$$

$$= 558$$

$$2) \frac{2^6 \cdot 18 + 2^7}{2^6 \cdot 5^2 - 2^6 \cdot 3} = \frac{2^6(18+2)}{2^6(5^2-3)} = \frac{18+2}{25-3} = \frac{20}{22} = \frac{10}{11}$$

3) Vì x là số nguyên dương nhỏ nhất và y là số nguyên âm lớn nhất.

$$\Rightarrow x = 1, y = -1$$

$$\Rightarrow A = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$$

Bài 26: Thực hiện phép tính.

$$a) \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{22}{19} - \frac{15}{21} \right) + \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{-3}{19} + \frac{-2}{7} \right)$$

$$b) \frac{-3}{4} \cdot 4 \frac{8}{13} - 0,75 \cdot 3 \frac{5}{13};$$

$$c) 96 \cdot 7^2 - 37 \cdot 7^2 + 15 \cdot 7^2 - 49 \cdot 174$$

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021-2022

Lời giải

$$a) \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{22}{19} - \frac{15}{21} \right) + \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{-3}{19} + \frac{-2}{7} \right)$$

$$= \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{22}{19} + \frac{-3}{19} \right) + \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{-15}{21} + \frac{-2}{7} \right)$$

$$= \frac{2}{7} \cdot \frac{19}{19} + \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{-5}{7} + \frac{-2}{7} \right) = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \cdot (-1) = 0$$

$$b) \frac{-3}{4} \cdot 4 \frac{8}{13} - 0,75 \cdot 3 \frac{5}{13} = \frac{-3}{4} \cdot \left(4 + \frac{8}{13} \right) - \frac{3}{4} \cdot \left(3 + \frac{5}{13} \right)$$



$$= \frac{-3}{4} \cdot \left(4 + \frac{8}{13} + 3 + \frac{5}{13} \right) = \frac{-3}{4} \cdot 8 = -6$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & 96.7^2 - 37.7^2 + 15.7^2 - 49.174 \\ &= 96.49 - 37.49 + 15.49 - 49.174 \\ &= 49(96 - 37 + 15 - 174) = 49 \cdot (-100) = -4900 \end{aligned}$$

Bài 27: Tính: $3\frac{1}{4} : \left[4 \cdot (-3) - 2^3 : \frac{16}{15} \right]$

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} 3\frac{1}{4} : \left[4 \cdot (-3) - 2^3 : \frac{16}{15} \right] &= \frac{13}{4} : \left(-12 - 8 \cdot \frac{15}{16} \right) \\ &= \frac{13}{4} : \left(-12 - \frac{15}{2} \right) = \frac{13}{4} : \left(\frac{-39}{2} \right) \\ &= \frac{-1}{6} \end{aligned}$$

Bài 28: Tính $\left\{ 20 - \left[(700 + 2 \cdot 10^2) : 30 \right] \right\} : 5$

Trích đề HSG huyện Tiền Hải năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} & \left\{ 20 - \left[(700 + 2 \cdot 10^2) : 30 \right] \right\} : 5 \\ &= \left\{ 20 - \left[(700 + 200) : 30 \right] \right\} : 5 \\ &= (20 - 900 : 30) : 5 \\ &= (20 - 30) : 5 \\ &= -10 : 5 = -2. \end{aligned}$$

Bài 29:

a) $(1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 2022^{2022})(8^2 - 576 : 3^2)$

b) $\frac{2^6 \cdot 18 + 2^7}{2^6 \cdot 5^2 - 2^6 \cdot 3}$

c) $\left(\frac{171717}{151515} + \frac{171717}{353535} + \frac{171717}{636363} + \frac{171717}{999999} \right) : \frac{8}{11}$

d) $\frac{32}{3 \cdot 7} + \frac{6}{7 \cdot 41} + \frac{9}{41 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 51} + \frac{19}{51 \cdot 14}$

Trích đề HSG huyện Quế Võ năm 2021 - 2022

Lời giải

a) Do $8^2 - 576 : 3^2 = 64 - 576 : 9 = 64 - 64 = 0$ nên $(1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 2022^{2022})(8^2 - 576 : 3^2) = 0$.

b) $\frac{2^6 \cdot 18 + 2^7}{2^6 \cdot 5^2 - 2^6 \cdot 3} = \frac{2^6 \cdot 2 \cdot 9 + 2^7}{2^6 \cdot 25 - 2^6 \cdot 3} = \frac{2^7 \cdot 9 + 2^7}{2^6 \cdot (25 - 3)} = \frac{2^7 \cdot (9 + 1)}{2^6 \cdot 22} = \frac{2 \cdot 10}{22} = \frac{10}{11}$.



$$\begin{aligned}
\text{c) } & \left(\frac{171717}{151515} + \frac{171717}{353535} + \frac{171717}{636363} + \frac{171717}{999999} \right) : \frac{8}{11} \\
& = \left(\frac{17 \cdot 10101}{15 \cdot 10101} + \frac{17 \cdot 10101}{35 \cdot 10101} + \frac{17 \cdot 10101}{63 \cdot 10101} + \frac{17 \cdot 10101}{99 \cdot 10101} \right) \cdot \frac{11}{8} \\
& = 17 \cdot \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} \right) \cdot \frac{11}{8} = 17 \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11} \right) \cdot \frac{11}{8} \\
& = \frac{17}{2} \cdot \left(\frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \frac{2}{9 \cdot 11} \right) \cdot \frac{11}{8} = \frac{17}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) \cdot \frac{11}{8} \\
& = \frac{17}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{11} \right) \cdot \frac{11}{8} = \frac{17}{2} \cdot \frac{8}{3 \cdot 11} \cdot \frac{11}{8} = \frac{17}{2 \cdot 3} = \frac{17}{6}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } & \frac{32}{3 \cdot 7} + \frac{6}{7 \cdot 41} + \frac{9}{41 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 51} + \frac{19}{51 \cdot 14} = 5 \cdot \left(\frac{32}{3 \cdot 35} + \frac{6}{35 \cdot 41} + \frac{9}{41 \cdot 50} + \frac{1}{50 \cdot 51} + \frac{19}{51 \cdot 70} \right) \\
& = 5 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{35} + \frac{1}{35} - \frac{1}{41} + \frac{1}{41} - \frac{1}{50} + \frac{1}{50} - \frac{1}{51} + \frac{1}{51} - \frac{1}{70} \right) = 5 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{70} \right) = 5 \cdot \frac{70-3}{3 \cdot 70} = 5 \cdot \frac{67}{3 \cdot 5 \cdot 14} = \frac{67}{42}.
\end{aligned}$$

Bài 30:

Tính giá trị của biểu thức $M = \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{1}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}} \right) : \frac{2021}{2022}$.

*Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021-2022***Lời giải**

$$\begin{aligned}
\text{1. Ta có: } M & = \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{1}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}} \right) : \frac{2021}{2022} = \left(\frac{2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right)}{7 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right)} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{1}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}} \right) : \frac{2021}{2022} \\
& = \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{\frac{7}{2}} \right) : \frac{2021}{2022} = \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{7} \right) : \frac{2021}{2022} = 0
\end{aligned}$$

Vậy $M = 0$ **Bài 31:** Tính giá trị biểu thức sau.

$$N = \frac{4}{1.3} + \frac{4}{3.5} + \frac{4}{5.7} + \dots + \frac{4}{99.101}$$

*Trích đề HSG huyện Chương Mỹ năm 2021 - 2022***Lời giải**



Ta có:

$$N = \frac{4}{1.3} + \frac{4}{3.5} + \frac{4}{5.7} + \dots + \frac{4}{99.101} = 2\left(\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{99.101}\right)$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{101}\right) = 2 \cdot \frac{100}{101} = \frac{200}{101}$$

Dạng 2: Tính tổng dãy số tự nhiên theo quy luật.

Bài 1: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \left(\frac{1}{2} - 1\right) : \left(\frac{1}{3} - 1\right) : \left(\frac{1}{4} - 1\right) : \left(\frac{1}{5} - 1\right) : \dots : \left(\frac{1}{98} - 1\right) : \left(\frac{1}{99} - 1\right) : \left(\frac{1}{100} - 1\right)$$

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Lời giải

$$A = \left(\frac{1}{2} - 1\right) : \left(\frac{1}{3} - 1\right) : \left(\frac{1}{4} - 1\right) : \left(\frac{1}{5} - 1\right) : \dots : \left(\frac{1}{98} - 1\right) : \left(\frac{1}{99} - 1\right) : \left(\frac{1}{100} - 1\right)$$

$$A = \left(-\frac{1}{2}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{3}{4}\right) : \dots : \left(-\frac{98}{99}\right) : \left(-\frac{99}{100}\right)$$

$$A = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(-\frac{99}{98}\right) \cdot \left(-\frac{100}{99}\right)$$

Ta thấy tích A có 99 thừa số âm nên mang dấu âm

$$A = -\frac{1.3.4.5.6 \dots 98.99.100}{2.2.3.4.5 \dots 97.98.99} = \frac{-100}{2.2} = -25$$

Bài 2: Tính $B = \frac{1.2021 + 2.2020 + 3.2019 + \dots + 2021.1}{1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 2021.2022}$.

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2021 - 2022

Lời giải

Với $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow n(n+1) = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

Do đó

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 2021.2022$$

$$= 2.1 + 2.(1+2) + 2.(1+2+3) + \dots + 2.(1+2+3+\dots+2021)$$

$$= 2.(1.2021 + 2.2020 + 3.2019 + \dots + 2021.1)$$



$$\text{Suy ra } B = \frac{1}{2}$$

Bài 3:

Tìm chữ số tận cùng của tổng $S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2004^{8009}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2004^{8009}.$$

Ta thấy mọi lũy thừa trong S đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 1 (các lũy thừa đều có dạng $n^{4(n-2)+1}$, $n \in \{2; 3; \dots; 2004\}$)

Vì một số tự nhiên bất kì, khi nâng lên lũy thừa bậc $4n+1$ ($n \in \mathbb{N}$) thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

Chữ số tận cùng của một tổng các lũy thừa được xác định bằng cách tính tổng các chữ số tận cùng của từng lũy thừa trong tổng. Mọi lũy thừa trong S và các cơ số tương ứng đều có chữ số tận cùng giống nhau, bằng chữ số tận cùng của tổng :

$$(2+3+\dots+9)+199.(1+2+\dots+9)+1+2+3+4 = 200(1+2+\dots+9)+9 = 9009$$

Vậy chữ số tận cùng của tổng S là 9.

Trích đề HSG huyện Chương Mỹ năm 2021-2022

Bài 4:

Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện $2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n = 2^{n+1}$.

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021-2022

Lời giải

$$\text{Đặt } S = 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n \Rightarrow S = 2^{n+1}$$

$$\text{Ta có: } 2.S = 2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + n.2^{n+1}.$$

$$\text{Suy ra: } S = 2S - S = (2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + n.2^{n+1}) - (2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n)$$

$$S = n.2^{n+1} - 2^3 - (2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n)$$

$$\text{Đặt } P = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n, \text{ ta tính được } P = 2P - P = 2^{n+1} - 2^3$$

$$\Rightarrow S = n.2^{n+1} - 2^3 - 2^{n+1} + 2^3 = (n-1).2^{n+1}$$

$$\text{Do đó } (n-1).2^{n+1} = 2^{n+1} \Rightarrow n-1 = 2^{10} \Rightarrow n = 2^{10} + 1 = 1025. \text{ Vậy...}$$

Dạng 3: Tính toán với tổng của dãy lũy thừa.

$$\text{Bài 1: Tính hợp lý: } B = \frac{35.6^{10}.2^{23}.3^6 - 2^{22}.5.6^{15}}{9.6^{19}.2^9 - 4.3^{17}.2^{26}}.$$

Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021-2022

Lời giải



$$B = \frac{35 \cdot 6^{10} \cdot 2^{23} \cdot 3^6 - 2^{22} \cdot 5 \cdot 6^{15}}{9 \cdot 6^{19} \cdot 2^9 - 4 \cdot 3^{17} \cdot 2^{26}}$$

$$B = \frac{35 \cdot 2^{33} \cdot 3^{16} - 2^{37} \cdot 3^{15} \cdot 5}{2^{28} \cdot 3^{21} - 2^{28} \cdot 3^{17}}$$

$$B = \frac{5 \cdot 2^{33} \cdot 3^{15} \cdot (7 \cdot 3 - 2^4)}{2^{28} \cdot 3^{17} \cdot (3^4 - 1)}$$

$$B = \frac{5 \cdot 2^5 \cdot 5}{3^2 \cdot 80}$$

$$B = \frac{5 \cdot 2^4 \cdot 10}{2^4 \cdot 5 \cdot 9} = \frac{10}{9}$$

Bài 2: Tính hợp lý: $\frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}$

Trích đề HSG huyện Nam Đàn năm 2021-2022

Lời giải

$$\frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6} = \frac{5 \cdot 2^{30} \cdot 3^{18} - 2^2 \cdot 3^{20} \cdot 2^{27}}{5 \cdot 2^9 \cdot 2^{19} \cdot 3^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}} = \frac{2^{29} \cdot 3^{18} \cdot (5 \cdot 2 - 3^2)}{2^{28} \cdot 3^{18} \cdot (5 \cdot 3 - 7 \cdot 2)} = 2$$

Bài 3: Thực hiện phép tính: $B = \frac{2^{10} \cdot 13 + 2^{10} \cdot 65}{2^8 \cdot 104}$

Trích đề HSG huyện Bạch Thông năm 2018 -2019

Lời giải

$$B = \frac{2^{10} \cdot 13 + 2^{10} \cdot 65}{2^8 \cdot 104}$$

$$B = \frac{2^{10} \cdot 13 \cdot (1+5)}{2^8 \cdot 8 \cdot 13}$$

$$B = \frac{2^{10} \cdot 13 \cdot (1+5)}{2^8 \cdot 8 \cdot 13}$$

$$B = \frac{2^{10} \cdot 13 \cdot 6}{2^8 \cdot 2^3 \cdot 13} = 3$$

Vậy $B = 3$.

Bài 4: Tính:

a) $\frac{11 \cdot 3^{22} \cdot 3^7 - 9^{15}}{(2 \cdot 3^{14})^2}$

b) $\frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{3^2} \cdot \frac{15}{4^2} \cdots \frac{899}{30^2}$

Trích đề HSG huyện Ba Vì năm 2018 -2019

Lời giải

a) $A = \frac{11 \cdot 3^{22} \cdot 3^7 - 9^{15}}{(2 \cdot 3^{14})^2}$

$$A = \frac{11 \cdot 3^{29} - 3^{30}}{2^2 \cdot 3^{28}}$$



$$A = \frac{3^{29} \cdot (11-3)}{2^2 \cdot 3^{28}}$$

$$A = \frac{3^{29} \cdot 2^3}{2^2 \cdot 3^{28}} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Vậy $A = 6$.

$$b) B = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{3^2} \cdot \frac{15}{4^2} \cdots \frac{899}{30^2}$$

$$B = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdots \frac{29.31}{30.30}$$

$$B = \frac{1.2.3 \cdots 29}{2.3.4 \cdots 30} \cdot \frac{3.4.5 \cdots 31}{2.3.4 \cdots 30}$$

$$B = \frac{1}{30} \cdot \frac{31}{2}$$

$$B = \frac{31}{60}.$$

Vậy $B = \frac{31}{60}$.

Bài 5: Rút gọn $C = \frac{5 \cdot 4^6 \cdot 9^4 - 3^9 \cdot (-8)^4}{4 \cdot 2^{13} \cdot 3^8 + 2 \cdot 8^4 \cdot (-27)^3}$.

Trích đề HSG đề xuất năm 2021 -2022

Lời giải

$$C = \frac{5 \cdot 4^6 \cdot 9^4 - 3^9 \cdot (-8)^4}{4 \cdot 2^{13} \cdot 3^8 + 2 \cdot 8^4 \cdot (-27)^3}$$

$$C = \frac{5 \cdot 4^6 \cdot 9^4 - 3^9 \cdot 8^4}{4 \cdot 2^{13} \cdot 3^8 - 2 \cdot 8^4 \cdot 27^3}$$

$$C = \frac{5 \cdot 2^{12} \cdot 3^8 - 3^9 \cdot 2^{12}}{2^{15} \cdot 3^8 - 2^{13} \cdot 3^9}$$

$$C = \frac{2^{12} \cdot 3^8 \cdot (5-3)}{2^{13} \cdot 3^8 \cdot (2^2-3)}$$

$$C = \frac{2^{12} \cdot 3^8 \cdot 2}{2^{13} \cdot 3^8} = 1.$$

Bài 6: Rút gọn

$$a) B = \left(\frac{2016 \cdot 2016}{2017 \cdot 2017} + \frac{2017^{2016}}{2017^{2017}} \right) - \left(\frac{2016}{2017} - \frac{2016^{2017} \cdot 2017^{2016}}{2017^{2017} \cdot 2016^{2016}} \right)$$

$$b) C = \frac{6^{36} \cdot (50 \cdot 5^{40} - 10 \cdot 5^{34})}{30^{30} \cdot 10^4 \cdot (100 \cdot 15^5 - 4 \cdot 3^5)}$$

Trích đề HSG đề Khoái Châu năm 2021 -2022

Lời giải

$$a) B = \left(\frac{2016 \cdot 2016}{2017 \cdot 2017} + \frac{2017^{2016}}{2017^{2017}} \right) - \left(\frac{2016}{2017} - \frac{2016^{2017} \cdot 2017^{2016}}{2017^{2017} \cdot 2016^{2016}} \right) = \frac{2016}{2017} + \frac{1}{2017} - \frac{2016}{2017} + \frac{2016}{2017} = 1.$$



$$\begin{aligned} \text{b) } C &= \frac{6^{36} \cdot (50 \cdot 5^{40} - 10 \cdot 5^{34})}{30^{30} \cdot 10^4 \cdot (100 \cdot 15^5 - 4 \cdot 3^5)} \\ C &= \frac{2^{36} \cdot 3^{36} \cdot 5^{35} \cdot (2 \cdot 5^2 \cdot 5^{40} - 2 \cdot 5 \cdot 5^{34})}{(2 \cdot 3 \cdot 5)^{30} \cdot 2^4 \cdot 5^4 \cdot (2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^5 \cdot 5^5 - 2^2 \cdot 3^5)} \\ C &= \frac{2^{36} \cdot 3^{36} \cdot 2 \cdot 5^{35} \cdot (5^7 - 1)}{2^{34} \cdot 3^{30} \cdot 5^{34} \cdot 2^2 \cdot 3^5 \cdot (5^7 - 1)} \\ C &= \frac{2^{37} \cdot 3^{36} \cdot 5^{35} \cdot (5^7 - 1)}{2^{36} \cdot 3^{35} \cdot 5^{34} \cdot (5^7 - 1)} \\ C &= 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30. \end{aligned}$$

Bài 7: Thực hiện phép tính: $C = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2022}$

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } C &= 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2022} \\ \Rightarrow 3^2 C &= 3^2 (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2022}) \\ \Rightarrow 9C &= 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2024} \\ \Rightarrow 9C - C &= (3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2024}) - (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2022}) \\ \Rightarrow 8C &= 3^{2024} - 1 \\ \Rightarrow C &= \frac{3^{2024} - 1}{8} \end{aligned}$$

Dạng 4: Tổng dãy phân số theo quy luật.

Bài 1: Thực hiện các phép tính sau một cách hợp lý:

$$\frac{2}{1.4} + \frac{2}{4.7} + \frac{2}{7.10} + \dots + \frac{2}{97.100}$$

Trích đề HSG đề xuất năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} &\frac{2}{1.4} + \frac{2}{4.7} + \frac{2}{7.10} + \dots + \frac{2}{97.100} \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{3}{1.4} + \frac{3}{4.7} + \frac{3}{7.10} + \dots + \frac{3}{97.100} \right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{100} \right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{100} \right) = \frac{33}{50}. \end{aligned}$$

Bài 2: Thực hiện các phép tính sau một cách hợp lý: $B = \frac{5}{1.4} + \frac{5}{4.7} + \frac{5}{7.10} + \dots + \frac{5}{97.100}$.

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2021-2022

Lời giải



$$B = \frac{5}{1.4} + \frac{5}{4.7} + \frac{5}{7.10} + \dots + \frac{5}{97.100}$$

$$B = \left(\frac{3}{1.4} + \frac{3}{4.7} + \frac{3}{7.10} + \dots + \frac{3}{97.100} \right) \cdot \frac{5}{3}$$

$$B = \frac{5}{3} \left(\frac{3}{1.4} + \frac{3}{4.7} + \frac{3}{7.10} + \dots + \frac{3}{97.100} \right)$$

$$B = \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{100} \right)$$

$$B = \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{100} \right) = \frac{5}{3} \cdot \frac{99}{100} = \frac{33}{20}$$

Bài 3: Thực hiện phép tính bằng cách hợp lý:

$$C = -\frac{2}{20} - \frac{2}{30} - \frac{2}{42} - \frac{2}{56} - \frac{2}{72} - \frac{2}{90}$$

Trích đề HSG huyện Nam Định năm 2021 – 2022

Lời giải

$$C = -\frac{2}{20} - \frac{2}{30} - \frac{2}{42} - \frac{2}{56} - \frac{2}{72} - \frac{2}{90}$$

$$= -2 \cdot \left(\frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{9.10} \right)$$

$$= -2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) = -2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10} \right)$$

$$= -2 \cdot \left(\frac{5}{20} - \frac{2}{20} \right) = -2 \cdot \frac{3}{20} = -\frac{3}{10}$$

Bài 4: Tính $S = \frac{10}{2.7} + \frac{10}{7.12} + \frac{10}{12.17} + \dots + \frac{10}{2017.2022}$

Trích đề HSG huyện Nam Đàn năm 2018 - 2019

Lời giải

$$S = \frac{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2022} \right)$$

$$S = 2 \cdot \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2022} \right)$$

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2022}$$

$$S = 1 - \frac{1}{1011}$$

$$S = \frac{1010}{1011}$$

Bài 5: Tính: $A = \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \dots + \frac{1}{97.99}$

Trích đề HSG huyện Tiên Du năm 2021 -2022

Lời giải

$$A = \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \dots + \frac{1}{97.99}$$



$$2A = \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{7.9} + \dots + \frac{2}{97.99}$$

$$2A = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{99}$$

$$2A = \frac{1}{3} - \frac{1}{99} = \frac{32}{99}$$

$$A = \frac{32}{99} : 2 \Rightarrow A = \frac{16}{99}$$

Bài 6: Tính tổng: $A = \frac{2}{1.4} + \frac{2}{4.7} + \frac{2}{7.10} + \dots + \frac{2}{97.100}$.

Trích đề HSG huyện Quỳnh Lưu năm 2018 -2019

Lời giải

$$A = \frac{2}{1.4} + \frac{2}{4.7} + \frac{2}{7.10} + \dots + \frac{2}{97.100}$$

$$A = \frac{2}{1.4} + \frac{2}{4.7} + \frac{2}{7.10} + \dots + \frac{2}{97.100}$$

$$A = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{100} \right)$$

$$A = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{100} \right)$$

$$A = \frac{33}{50}$$

Bài 7: Tính giá trị của biểu thức sau bằng cách hợp lý:

$$C = \frac{2}{4.9} + \frac{2}{9.14} + \frac{2}{14.19} + \dots + \frac{2}{64.69}$$

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Lời giải

$$C = \frac{2}{4.9} + \frac{2}{9.14} + \frac{2}{14.19} + \dots + \frac{2}{64.69}$$

$$= \frac{2}{5} \left(\frac{5}{4.9} + \frac{5}{9.14} + \frac{5}{14.19} + \dots + \frac{5}{64.69} \right)$$

$$= \frac{2}{5} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{64} - \frac{1}{69} \right)$$

$$= \frac{2}{5} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{69} \right)$$

$$= \frac{13}{138}$$

Bài 8: Thực hiện phép tính $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

**Lời giải**

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} \\ &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{9.10} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \\ &= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

II. Tìm số chưa biết.**Dạng 1: Tìm số chưa biết (không có lũy thừa).**

Bài 1: Tìm x biết rằng $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(x-2)x} = \frac{1011}{2021}$.

Trích đề HSG huyện Trực Ninh năm 2021 -2022

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(x-2)x} = \frac{1011}{2021}$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{1011}{2021} \cdot 2$$

$$\frac{x-1}{x} = \frac{2022}{2021} \text{ suy ra } x = -2021$$

Vậy $x = -2021$.

Bài 2: Tìm số nguyên x biết: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right)x = \frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{8}{2} + \frac{9}{1}$

Trích đề HSG huyện Ninh Bình năm 2021-2022

Lời giải

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right)x = \frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{8}{2} + \frac{9}{1}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right).x = \left(\frac{1}{9} + 1\right) + \left(\frac{2}{8} + 1\right) + \dots + \left(\frac{8}{2} + 1\right) + 1$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right).x = \frac{10}{9} + \frac{10}{8} + \dots + \frac{10}{2} + \frac{10}{10}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right).x = 10 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right)$$

$$x = 10$$

Vậy $x = 10$

Bài 3: Tìm x biết: $(2x+5) - 17 = -238$.

Trích đề HSG huyện Sóc Sơn năm 2021 – 2022

Lời giải

$$(2x+5) - 17 = -238$$

$$2x+5 = -238+17$$



$$2x + 5 = -221$$

$$2x = -221 - 5$$

$$2x = -226$$

$$x = -226 : 2$$

$$x = -113$$

Vậy $x = -113$.

Bài 4: Tìm x biết:

a) $(2 - 4 + 6 - 8 + 10 - 12 + \dots + 98 - 100) + x = 1972$.

b) $\frac{2}{(x+1)(x+3)} + \frac{3}{(x+3)(x+6)} + \frac{4}{(x+6)(x+10)} = \frac{x}{(x+1)(x+10)}$.

Trích đề HSG huyện Hà Đông năm 2021 -2022

Lời giải

a) $(2 - 4 + 6 - 8 + 10 - 12 + \dots + 98 - 100) + x = 1972$

Từ 2 đến 100 có số số hạng là $(100 - 2) : 2 + 1 = 50$ (số hạng).

$$\text{Vậy } (2 - 4 + 6 - 8 + 10 - 12 + \dots + 98 - 100) = \frac{50 \cdot (-2)}{2} = -50.$$

Do đó: $-50 + x = 1972$ suy ra $x = 2022$.

Vậy $x = 2022$.

b) $\frac{2}{(x+1)(x+3)} + \frac{3}{(x+3)(x+6)} + \frac{4}{(x+6)(x+10)} = \frac{x}{(x+1)(x+10)}$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+10} = \frac{x}{(x+1)(x+10)} \quad \text{ĐK: } x \neq \{-1; -3; -6; -10\}$$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+10} = \frac{x}{(x+1)(x+10)}$$

$$\frac{x+10}{(x+1)(x+10)} - \frac{x+1}{(x+1)(x+10)} = \frac{x}{(x+1)(x+10)}$$

$$x+10 - x - 1 = x$$

$$x = 9 \quad (\text{tm}).$$

Vậy $x = 9$.

Bài 5: Tìm số tự nhiên x biết: $(x+5) + (x+10) + (x+15) + \dots + (x+60) = 450$.

Trích đề HSG huyện Kim Sơn năm 2021 -2022

Lời giải

$$(x+5) + (x+10) + (x+15) + \dots + (x+60) = 450 \quad (1)$$

Vế trái (1) có: $(60 - 5) : 5 + 1 = 12$ dấu ngoặc, nên ta có

$$(x+5) + (x+10) + (x+15) + \dots + (x+60) = 450$$

$$\underbrace{(x+x+\dots+x)}_{12 \text{ số hạng } x} + (5+10+15+\dots+60) = 450$$

$$12 \cdot x - \frac{2}{2} = 450$$

$$12x + 390 = 450$$

$$12x = 450 - 390$$



$$12x = 60$$

$$x = 60 : 12$$

$$x = 5$$

Vậy $x = 5$.

Bài 6: Tìm số tự nhiên x thỏa mãn: $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2x = 110$.

Trích đề HSG huyện Sơn Tây năm 2021 – 2022

Lời giải

Ta có: $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2x = 110$

$$2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + x) = 110$$

$$(1 + 2 + 3 + \dots + x) = 55$$

$$x(x+1) : 2 = 55$$

$$x(x+1) = 110 = 10 \cdot 11$$

Vì $x(x+1)$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp suy ra $x = 10$.

Vậy $x = 10$.

Bài 7: Tìm x biết:

a) $(19x + 2.5^2) : 14 = (13 - 8)^2 - 4^2$.

b) $\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 11x$.

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021 -2022

Lời giải

a) $(19x + 2.5^2) : 14 = (13 - 8)^2 - 4^2$.

$$(19x + 50) : 14 = 9$$

$$19x + 50 = 9 \cdot 14 = 126$$

$$19x = 126 - 50$$

$$19x = 76$$

$$x = 76 : 19 = 4$$

b) Nhận xét: Vế trái của đẳng thức luôn không âm. Suy ra vế phải của đẳng thức cũng không âm
Suy ra : $11x \geq 0$ suy ra $x \geq 0$.

Với : $x \geq 0$ ta có :

$$\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 11x$$

$$x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + x + \frac{1}{20} + \dots + x + \frac{1}{110} = 11x$$

Suy ra: $x = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$. (TM)

Vậy: $x = \frac{10}{11}$.

Bài 8: Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết: $x : \left(9\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) = \frac{0,4 + \frac{2}{9} - \frac{2}{11}}{1,6 + \frac{8}{9} - \frac{8}{11}}$.



Lời giải

$$x : \left(9\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) = \frac{0,4 + \frac{2}{9} - \frac{2}{11}}{1,6 + \frac{8}{9} - \frac{8}{11}}$$

$$\Rightarrow x : 8 = \frac{0,4 + \frac{2}{9} - \frac{2}{11}}{4 \left(0,4 + \frac{2}{9} - \frac{2}{11} \right)}$$

$$\Rightarrow x : 8 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 2.$$

Vậy $x = 2$

Bài 9: Tìm x , biết: $1 + \left(x - \frac{1}{4} \right) : \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - 3\frac{1}{4}$.

Lời giải

$$1 + \left(x - \frac{1}{4} \right) : \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - 3\frac{1}{4}$$

$$1 + \left(x - \frac{1}{4} \right) : \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - \frac{13}{4}$$

$$1 + \left(x - \frac{1}{4} \right) : \frac{3}{2} = -1$$

$$\left(x - \frac{1}{4} \right) : \frac{3}{2} = -1 - 1$$

$$\left(x - \frac{1}{4} \right) : \frac{3}{2} = -2$$

$$x - \frac{1}{4} = -3$$

$$x = \frac{-11}{4} = -2\frac{3}{4}$$

$$\text{Vậy } x = -2\frac{3}{4}$$

Bài 10: Tìm x , biết: $\frac{1}{2} + \frac{5}{6} : x = \frac{1}{3}$.

Lời giải



$$\frac{1}{2} + \frac{5}{6} : x = \frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{6} : x = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{6} : x = \frac{-1}{6}$$

$$x = \frac{5}{6} : \frac{-1}{6}$$

$$x = -5$$

Vậy $x = -5$.

Bài 11: Tìm x biết: $x : \frac{1}{3} + \frac{5}{7} = 9\frac{5}{7}$

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

$$x : \frac{1}{3} + \frac{5}{7} = 9\frac{5}{7}$$

$$x : \frac{1}{3} + \frac{5}{7} = \frac{68}{7}$$

$$x : \frac{1}{3} = \frac{68}{7} - \frac{5}{7}$$

$$x : \frac{1}{3} = 9$$

$$x = 9 \cdot \frac{1}{3}$$

$$x = 3$$

Bài 12: Tìm x biết:

$$1) \frac{2}{3} - 2 : \left(x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{10}{3}$$

$$2) x + (x-1) + (x-5) + (x-9) + \dots + (x-101) = -516$$

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Lời giải

$$1) \frac{2}{3} - 2 : \left(x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{10}{3}$$

$$2 : \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} + \frac{10}{3}$$

$$2 : \left(x - \frac{1}{2}\right) = 4$$



$$x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x = 1$$

$$2) x + (x-1) + (x-5) + (x-9) + \dots + (x-101) = -516$$

$$x + 26x - (1+5+9+\dots+101) = -516$$

$$27x - (1+101) \cdot 26 : 2 = -516$$

$$27x - 1326 = -516$$

$$27x = 810$$

$$x = 30$$

Bài 13: Tìm x biết: $x - 35\%x + \frac{8}{5} = -2\frac{19}{20}$

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021-2022

Lời giải

$$x - 35\%x + \frac{8}{5} = -2\frac{19}{20}$$

$$x - \frac{7}{20}x + \frac{8}{5} = \frac{-59}{20}$$

$$\frac{13}{20}x = \frac{-59}{20} - \frac{8}{5}$$

$$\frac{13}{20}x = \frac{-91}{20}$$

$$x = \frac{-91}{20} : \frac{13}{20} = -7$$

Bài 14: Tìm x biết $x : \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} \right) = 100$

Trích đề HSG huyện Tiền Hải năm 2021-2022

Lời giải

$$x : \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} \right) = 100$$

$$x : \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) = 100$$



$$x : \left(1 - \frac{1}{100}\right) = 100$$

$$x : \frac{99}{100} = 100$$

$$x = 99.$$

Bài 15: Tìm các số tự nhiên x, y, z nhỏ nhất khác không sao cho $18.x = 24.y = 36.z$.

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021-2022

Lời giải

$$\text{Đặt } 18x = 24y = 36z = m \text{ (với } m \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow m : 18; m : 24; m : 36$$

Do x, y, z nhỏ nhất khác không thỏa mãn $18x = 24y = 36z = m$ nên m cũng nhỏ nhất mà $m : 18; m : 24; m : 36 \Rightarrow m = BCNN(18, 24, 36)$

$$\text{Ta tìm được } BCNN(18, 24, 36) = 72$$

$$\text{Với } m = 72 \text{ ta tìm được } x = 4; y = 3; z = 2$$

$$\text{Vậy } x = 4; y = 3; z = 2$$

Dạng 2: Tìm số chưa biết có chứa lũy thừa.

Bài 1: Tìm số tự nhiên x biết: $7.2 + 288 : (x-5)^2 = 2^4$.

Lời giải

$$7.2 + 288 : (x-5)^2 = 2^4 \Rightarrow (x-5)^2 = 144 = 12^2 = (-12)^2$$

$$\text{TH1: } x-5 = 12 \text{ suy ra } x = 17 \text{ (tm)}$$

$$\text{TH2: } x-5 = -12 \text{ suy ra } x = -7 \text{ (ktm)}$$

$$\text{Vậy } x = 17.$$

Bài 2:

a) Tìm x biết $(3x+1)^2 = 100$.

b) Tìm x là số tự nhiên, biết $5^{2x+3} - 2.5^2 = 5^2.3$.

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2021 -2022

Lời giải

a) Ta có: $(3x+1)^2 = 100$ suy ra $(3x+1)^2 = 10^2$ (Do $3x+1 > 0$) suy ra $3x+1 = 10$ suy ra $x = 3$.

Vậy $x = 3$.

b) Ta có: $5^{2x+3} - 2.5^2 = 5^2.3$ suy ra $5^{2x+3} = 5^2.3 + 2.5^2$ suy ra $5^{2x+3} = 5^2.5$ suy ra $5^{2x+3} = 5^3$ suy ra $2x+3 = 3$ suy ra $x = 0$.

Vậy $x = 0$.

Bài 3: Tìm số nguyên x biết: $14.7^{2021} = 35.7^{2021} - 3.49^x$

Trích đề HSG huyện Tân Kỳ năm 2021 – 2022

Lời giải

$$14.7^{2021} = 35.7^{2021} - 3.49^x$$



$$3.49^x = 35.7^{2021} - 14.7^{2021}$$

$$3.7^{2x} = 7^{2022} \cdot (5 - 2) = 3.7^{2022}$$

$$7^{2x} = 7^{2022}$$

$$2.x = 2022$$

$$x = 1011.$$

Vậy $x = 1011.$

Bài 4: Tìm x biết: $(6 - 2x)^3 = 3^3 \cdot 5^2 + 325.$

Trích đề HSG huyện Hà Đông năm 2021 -2022

Lời giải

$$(6 - 2x)^3 = 3^3 \cdot 5^2 + 325$$

$$(6 - 2x)^3 = 27 \cdot 25 + 325$$

$$(6 - 2x)^3 = 675 + 325$$

$$(6 - 2x)^3 = 1000$$

$$(6 - 2x)^3 = 10^3$$

$$6 - 2x = 10$$

$$x = -2.$$

Vậy $x = -2.$

Bài 5: Tìm số tự nhiên x biết: $8.6 + 288 : (x - 3)^2 = 50.$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hoá năm 2018-2019

Lời giải

$$8.6 + 288 : (x - 3)^2 = 50$$

$$(x - 3)^2 = 144 = 12^2 = (-12)^2$$

TH1: $x - 3 = 12$ suy ra $x = 15$ (tm).

TH2: $x - 3 = -12$ suy ra $x = -9$ (ktm).

Vậy $x = 15.$

Bài 6: Tìm x biết:

a) $[(3x - 54) \cdot 8] : 4 = 18$

b) $(2x - 15)^5 = (2x - 15)^3$

c) $x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 2013) = 2035147$

Trích đề HSG huyện Vĩnh lộc năm 2017 - 2018

Lời giải

a) $[(3x - 54) \cdot 8] : 4 = 18$

$$(3x - 54) \cdot 8 = 72$$

$$3x - 54 = 9$$

$$3x = 63$$

$$x = 63 : 3$$

$$x = 21.$$

Vậy $x = 21.$



$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & (2x-15)^5 = (2x-15)^3 \\ & (2x-15)^5 - (2x-15)^3 = 0 \\ & (2x-15)^3 \cdot [(2x-15)^2 - 1] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{TH1: } (2x-15)^3 = 0$$

$$2x-15=0$$

$$x=7,5$$

$$\text{TH2: } (2x-15)^2 - 1 = 0$$

$$(2x-15)^2 = 1^2 = (-1)^2$$

Suy ra $2x-15=1$ hoặc $2x-15=-1$

Suy ra $x=8$ hoặc $x=7$.

Vậy $x \in \{7; 7,5; 8\}$.

$$\text{c)} \quad x+(x+1)+(x+2)+\dots+(x+2013)=2035147$$

$$2014x+(1+2+3+\dots+2013)=203514$$

$$2014x+2027091=2035147$$

$$2014x=8056$$

$$x=8056:2014$$

$$x=4$$

Vậy $x=4$.

Bài 7: Tìm số tự nhiên x , biết: $5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} = \underbrace{1000\dots0}_{18 \text{ chữ số } 0} : 2^{18}$

Trích đề HSG huyện Tam Dương năm 2017- 2018

Lời giải

Ta có: $5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} = \underbrace{1000\dots0}_{18 \text{ chữ số } 0} : 2^{18}$ suy ra $5^{x+x+1+x+2} = 10^{18} : 2^{18}$ suy ra $5^{3x+3} = \frac{10^{18}}{2^{18}} = \left(\frac{10}{2}\right)^{18} = 5^{18}$

Suy ra $3x+3=18$ suy ra $x=5$.

Vậy $x=5$.

Bài 8: Tìm số tự nhiên x , biết:

$$\text{a)} \quad 5^x = 125$$

$$\text{b)} \quad 3^{2x} = 81$$

$$\text{c)} \quad 5^{2x-3} - 2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 3$$

Trích đề HSG huyện Duy Xuyên năm 2019 - 2020

Lời giải

$$\text{a)} \quad 5^x = 125 = 5^3 \text{ suy ra } x=3.$$

Vậy $x=3$.

$$\text{b)} \quad 3^{2x} = 81 = 3^4 \text{ suy ra } 2x=4 \text{ suy ra } x=2.$$

Vậy $x=2$.

$$\text{c)} \quad 5^{2x-3} - 2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 3$$

$$5^{2x-3} = 5^2 \cdot 3 + 5^2 \cdot 2$$



$$5^{2x-3} = 5^2(3+2) = 5^3$$

$$2x - 3 = 3$$

$$2x = 6$$

$$x = 6 : 2 = 3.$$

Vậy $x = 3$.

Bài 9: Tìm số nguyên x biết: $2^x \cdot 2^{x+1} \cdot 2^{x+2} = \underbrace{1000\dots0}_{18 \text{ chữ số } 0} : 5^{18}$

18 chữ số 0

..... Huyện Giao Thủy năm 2018 - 2019

Lời giải

$$2^x \cdot 2^{x+1} \cdot 2^{x+2} = \underbrace{1000\dots0}_{18 \text{ chữ số } 0} : 5^{18} \text{ suy ra } 2^{3x+3} = 10^{18} : 5^{18} = 2^{18} \text{ suy ra } 3x+3=18 \text{ suy ra } x=5.$$

Vậy $x = 5$.

Bài 10: Tìm số nguyên x biết:

$$1) 2024 : [25 - (3x + 2)] = 2^3 \cdot 11$$

$$2) \frac{1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100}{x^2 + (x^2 + 1) + (x^2 + 2) + \dots + (x^2 + 99)} = 50 \frac{116}{131}$$

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Lời giải

$$1) 2024 : [25 - (3x + 2)] = 2^3 \cdot 11$$

$$2024 : [25 - (3x + 2)] = 88$$

$$25 - (3x + 2) = 2024 : 88 = 23$$

$$3x + 2 = 25 - 23 = 2$$

$$3x = 2 - 2 = 0$$

$$x = 0.$$

Vậy $x = 0$.

$$2) \text{Đặt } A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$$

$$3A = 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + 99.100.(101-98)$$

$$3A = 1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + \dots + 99.100.101 - 98.99.100$$

$$3A = 99.100.101$$

$$A = 333300.$$

$$\text{Đặt } B = x^2 + (x^2 + 1) + (x^2 + 2) + \dots + (x^2 + 99) = 100x^2 + (1 + 2 + 3 + \dots + 99)$$

$$B = 100x^2 + 4950$$

$$\frac{1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100}{x^2 + (x^2 + 1) + (x^2 + 2) + \dots + (x^2 + 99)} = \frac{333300}{100x^2 + 4950}$$

$$\frac{333300}{100x^2 + 4950} = 50 \frac{116}{131} = \frac{6666}{131} \Rightarrow \frac{50}{100x^2 + 4950} = \frac{1}{131}$$

$$100x^2 + 4950 = 50.131.$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4 \text{ hoặc } x = -4.$$



Vậy $x \in \{-4; 4\}$.

Bài 11: Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết: $(2x-15)^5 = (2x-15)^3$.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} (2x-15)^5 &= (2x-15)^3 \\ \Rightarrow (2x-15)^5 - (2x-15)^3 &= 0 \\ \Rightarrow (2x-15)^3 \cdot (2x-15)^2 - (2x-15)^3 \cdot 1 &= 0 \\ \Rightarrow (2x-15)^3 \cdot [(2x-15)^2 - 1] &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} (2x-15)^3 = 0 \\ (2x-15)^2 - 1 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2x-15 = 0 \\ (2x-15)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-15 = 0 \\ 2x-15 = 1 \\ 2x-15 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7,5 \\ x = 8 \\ x = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x = 7$ hoặc $x = 8$

Vậy $x \in \{7; 8\}$.

Bài 12: Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết: $3 \cdot 2^{x+2} - 2^{x-1} = 7 \cdot 4^{1011} + 9 \cdot 2^{2021}$.

Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^{x+2} - 2^{x-1} &= 7 \cdot 4^{1011} + 9 \cdot 2^{2021} \\ \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{x-1} \cdot 2^3 - 2^{x-1} &= 2^{2021} \cdot (7 \cdot 2 + 3^2) \\ \Leftrightarrow 2^{x-1} \cdot (3 \cdot 2^3 - 1) &= 2^{2021} \cdot 23 \\ \Leftrightarrow 2^{x-1} \cdot 23 &= 2^{2021} \cdot 23 \\ \Leftrightarrow 2^{x-1} &= 2^{2021} \end{aligned}$$

Do cơ số $2 > 1$ nên $x-1 = 2021 \Leftrightarrow x = 2022$ (thỏa mãn).

Vậy $x = 2022$.

Bài 13: Tìm x , biết: $35 \cdot 7^{2021} - 3 \cdot 49^x = 14 \cdot 7^{2021}$.

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Lời giải

$$\begin{aligned} 14 \cdot 7^{2021} &= 35 \cdot 7^{2021} - 3 \cdot 49^x \\ 3 \cdot 49^x &= 35 \cdot 7^{2021} - 14 \cdot 7^{2021} \\ 3 \cdot 7^{2x} &= 7^{2021} \cdot (35 - 14) \\ 3 \cdot 7^{2x} &= 3 \cdot 7^{2021} \\ 7^{2x} &= 7^{2021} \end{aligned}$$



$$2x = 2022$$

$$x = 2022 : 2$$

$$x = 1011$$

Vậy $x = 1011$.

Bài 14: Tìm x biết: $(-4) + (x+7)^2 = 12$

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Lời giải

$$(-4) + (x+7)^2 = 12$$

$$(x+7)^2 = 12 + 4$$

$$(x+7)^2 = 16$$

$$x+7 = \pm 4$$

$$\begin{cases} x+7 = 4 \\ x+7 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -11 \end{cases}$$

Bài 15: Tìm x biết:

1) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$ (với $x \in \mathbb{N}$)

2) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^{2022} = \left(2x - \frac{1}{2}\right)^{2021}$

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Lời giải

1) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$

$$2^x + 2.2^x + 2^2.2^x + 2^3.2^x = 480$$

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3).2^x = 480$$

$$15.2^x = 480$$

$$2^x = 32$$

$$2^x = 2^5$$

$$x = 5$$

2) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^{2022} = \left(2x - \frac{1}{2}\right)^{2021}$

TH1: $2x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

TH2: $2x - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$



Bài 16: Tìm các cặp số tự nhiên x, y thỏa mãn $5^x + 11^y = 26$

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Lời giải

Vì x, y là các số tự nhiên: $5^x + 11^y = 26 \Rightarrow x, y \geq 0$

+ Với $y \geq 2$ thì $5^x + 11^y \geq 11^2 > 26 \Rightarrow y \geq 2$ không thỏa mãn đề bài.

+ Với $y = 0$, ta có $5^x + 11^0 = 26$

$$\Rightarrow 5^x = 26 - 1$$

$$\Rightarrow 5^x = 5^2$$

$$\Rightarrow x = 2$$

+ Với $y = 1$, ta có $5^x + 11^1 = 26$

$$\Rightarrow 5^x + 11 = 26$$

$$\Rightarrow 5^x = 26 - 11$$

$$\Rightarrow 5^x = 15 \text{ (loại vì } x \text{ là số tự nhiên)}$$

Vậy $x = 2; y = 0$ thỏa mãn.

Bài 17: Tìm x biết:

a) $4 \cdot 3^x - 34 = 2022^0 + 1^{2022}$;

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021-2022

Lời giải

$$4 \cdot 3^x - 34 = 2022^0 + 1^{2022}$$

$$4 \cdot 3^x - 34 = 2$$

$$4 \cdot 3^x = 36$$

$$3^x = 9$$

$$3^x = 3^2$$

Vậy $x = 2$

Bài 18: Tìm x biết: $(x-1)^3 = -64$

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Lời giải

$$(x-1)^3 = -64$$

$$(x-1)^3 = (-4)^3$$

$$x-1 = -4$$

$$x = -4 + 1$$

$$x = -3$$

Bài 19: Cho các số $(x; y)$ thỏa mãn: $(x-2)^4 + (y-x+1)^6 = 0$



Tính giá trị của biểu thức: $C = 2x^3 + 15y^3 - 11$

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Lời giải

$$(x-2)^4 \geq 0; (y-x+1)^6 \geq 0 \quad \forall x, y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-2)^4 = 0 \\ (y-x+1)^6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Thay $x = 2; y = 1$ vào biểu thức C ta có $C = 2.2^3 + 15.1^3 - 11 = 20$

Bài 20: Tìm $x; y \in N$ biết: $73 - x^2 = 4(y-5)^2$

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Lời giải

$$73 - x^2 = 4(y-5)^2$$

$$\text{Vì } x^2 \geq 0 \text{ và } 4(y-5)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 73 \quad (1)$$

$$\text{Mà } 73 - x^2 = 4(y-5)^2 \text{ suy ra } 73 - x^2 \text{ chẵn suy ra } x^2 \text{ lẻ} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } x^2 \in \{1; 9; 25; 49\} \quad (3)$$

$$\text{Lại có } 73 - x^2 = 4(y-5)^2 \text{ suy ra } \frac{73 - x^2}{4} = (y-5)^2$$

$$\text{Hay } \frac{73 - x^2}{4} \text{ là số chính phương} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) } x^2 = 9 \Rightarrow (y-5)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} y-5 = 4 \\ y-5 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 9 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vì } x; y \in N \text{ nên các cặp } (x; y) \text{ cần tìm là } (3; 9); (3; 1)$$

Bài 21: Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $(x-1)^2 + 5y^2 = 6$.

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2021-2022

Lời giải

$$(x-1)^2 + 5y^2 = 6 \quad (1)$$

$$\text{Từ (1) suy ra } 5y^2 \leq 6 \Rightarrow y^2 \leq \frac{6}{5}$$

$$\text{Mà } y^2 \text{ là số chính phương nên } y^2 \in \{0; 1\}$$

$$+ \text{ Với } y^2 = 0 \text{ ta có } (x-1)^2 = 6 \text{ (vô lí vì 6 không là số chính phương)}$$



$$+ \text{ Với } y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=-1 \end{cases} \text{ ta có } (x-1)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ x-1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (x, y) \in \{(2;1), (2;-1); (0;1); (0;-1)\}$$

Bài 22:1) Tìm x thỏa mãn:

a) $(7x-11)^3 = 2^5 \cdot 5^2 + 2 \cdot 10^2$

b) $2 \cdot 3^x + 5 \cdot 3^{x+1} = 153$

*Trích đề HSG huyện Quế Võ năm 2021-2022***Lời giải**1) Tìm x :

$$\begin{aligned} \text{a) } (7x-11)^3 &= 2^5 \cdot 5^2 + 2 \cdot 10^2 \Rightarrow (7x-11)^3 = 2^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 10^2 \Rightarrow (7x-11)^3 = 8 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^2 \\ &\Rightarrow (7x-11)^3 = 10^2 \cdot (8+2) \Rightarrow (7x-11)^3 = 10^3 \Rightarrow 7x-11=10 \Rightarrow 7x=21 \Rightarrow x=3. \end{aligned}$$

Vậy $x=3$.

$$\begin{aligned} \text{b) } 2 \cdot 3^x + 5 \cdot 3^{x+1} &= 153 \Rightarrow 2 \cdot 3^x + 5 \cdot 3^x \cdot 3 = 153 \Rightarrow 3^x \cdot (2+15) = 153 \Rightarrow 3^x \cdot 17 = 153 \\ &\Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x=2. \end{aligned}$$

Vậy $x=2$.**Bài 23:**1. Tìm x biết:

a) $\frac{2x-3}{3} + \frac{-3}{2} = \frac{5-3x}{6} - \frac{1}{3}$

c) $2^{x+2} - 2^x = 96$

b) $\frac{x+2023}{1945} + \frac{x+2023}{1944} = \frac{x+2023}{1943} + \frac{x+2023}{1942}$

2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $\frac{x}{8} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$

*Trích đề HSG huyện Chương Mỹ năm 2021-2022***Lời giải**1. Tìm x biết:

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } \frac{2x-3}{3} + \frac{-3}{2} &= \frac{5-3x}{6} - \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2(2x-3)}{6} + \frac{-9}{6} = \frac{5-3x}{6} - \frac{2}{6} \\ &\Rightarrow 4x-6-9=5-3x-2 \Rightarrow 7x=18 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{18}{7}$$

$$\text{b) } \frac{x+2023}{1945} + \frac{x+2023}{1944} = \frac{x+2023}{1943} + \frac{x+2023}{1942} \Rightarrow (x+2023) \left(\frac{1}{1945} + \frac{1}{1944} - \frac{1}{1943} - \frac{1}{1942} \right) = 0$$

$$\text{Vì } \frac{1}{1945} + \frac{1}{1944} - \frac{1}{1943} - \frac{1}{1942} \neq 0 \text{ nên } x+2023=0$$

$$\text{Vậy } x = -2023$$



c) Ta có $2^{x+2} - 2^x = 96 \Rightarrow 2^x(2^2 - 1) = 96 \Rightarrow 2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5$

Vậy $x = 5$

2. Ta có $\frac{x}{8} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{x}{8} - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{x-2}{8} \Rightarrow y(x-2) = 8 = 1.8 = 2.4 = (-1).(-8) = (-2).(-4)$

Do x, y là các số nguyên nên ta có bảng sau:

$x-2$	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
y	-1	-2	-4	-8	8	4	2	1
x	-6	-2	0	1	3	4	6	10

Vậy các cặp số nguyên (x, y) cần tìm là:

$(-6; -1); (-2; -2); (0; -4); (1; -8); (3; 8); (4; 4); (6; 2); (10; 1)$

**B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP****I. Thực hiện các phép tính.****Dạng 1: Thực hiện phép tính.****Bài 1:** Tính hợp lý

a) $A = 2018^2 - 2017 \cdot 2018$

b) $B = (-1) \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^4 \dots (-1)^{99} \cdot (-1)^{100}$

c)
$$C = \frac{88 - \frac{1}{6} - \frac{2}{7} - \frac{3}{8} - \dots - \frac{88}{93}}{-1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} - \dots - \frac{1}{186}}$$

*Trích đề HSG huyện Ứng Hòa năm 2022 - 2023***Bài 2:** Thực hiện các phép tính sau một cách hợp lý:

a) $A = 1152 - (374 + 1152) + (-65 + 374)$

b)
$$\frac{101 + 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1}{101 - 100 + 99 - 98 + \dots + 3 - 2 + 1}$$

*Trích đề HSG đề xuất năm 2021 - 2022***Bài 3:** Tính $2022.121 - 2022.11.11 + 2023$.*Trích đề HSG đề xuất năm 2021 - 2022***Bài 4:** Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = -5^{22} - \left\{ -222 - \left[-122 - (100 - 5^{22}) + 2022 \right] \right\}$

b) $B = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{20}(1+2+3+\dots+20)$

*Trích đề HSG đề xuất năm 2021 - 2022***Bài 5:** Tính:

a) $A = -21.7^2 + 17.7^2 - 90.7^2 + 94.(-51)$

b) $C = \frac{5.6 + 2.10.12 - 3.15.18 - 7.35.42}{3.5 + 2.6.10 - 3.9.15 - 7.21.35} + \frac{2022 \cdot 2022 \cdot 2021 - 2021 \cdot 2021 \cdot 2022}{2^2 + 3^3 + 4^4 + \dots + 2022^{2022}}$

*Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2021 - 2022***Bài 6:** Tính giá trị các biểu thức sau (*Tính hợp lý nếu có thể*):

a) $A = -674.168 + 2022.(-44)$

b) $B = -\frac{10}{13} + \frac{5}{17} - \frac{3}{13} + \frac{12}{17} + \frac{195}{1890}$

*Trích đề HSG huyện Nam Định năm 2021 - 2022***Bài 7:** Thực hiện phép tính bằng cách hợp lý:

a) $A = -2013.2014 + 1007.26$

b) $B = \left(\frac{1313}{1414} + \frac{10}{160} \right) - \left(\frac{130}{140} - \frac{1515}{1616} \right)$

*Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2017 - 2018***Bài 8:**

1) Tính $A = \frac{3}{4} + \frac{7}{8} : 7 - \frac{1}{32} \cdot (-4)^2$.

2) Tính nhanh hợp lý $B = 2022.2022 - 2025.2019$.

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2017 - 2018



Bài 9: Rút gọn $\frac{10.11+50.55+70.77}{11.12+55.60+77.84}$.

Trích đề HSG huyện Tam Dương năm 2021 -2022

Bài 10: Thực hiện phép tính:

a) $A = \frac{24.47-23}{24+47-23} \cdot \frac{3+\frac{3}{7}-\frac{3}{11}+\frac{3}{1001}-\frac{3}{13}}{\frac{9}{1001}-\frac{9}{13}+\frac{9}{7}-\frac{9}{11}+9}$

b) $M = \frac{1+2+2^2+2^3+\dots+2^{2012}}{2^{2014}-2}$

Trích đề HSG huyện Kim Sơn năm 2021 -2022

Bài 11: .Thực hiện phép tính:

1) $A = 4,5 \cdot \frac{1}{9} + \left(2\frac{2}{3} - \frac{4}{9}\right) : 25\%$

2) $B = 2011 - [39 - (2^3 \cdot 3 - 21)^2] : (-3) + 2021^0$

3) $C = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2018.2020}\right)$

Trích đề HSG huyện Kinh Môn năm 2019 -2020

Bài 12:

a) Rút gọn biểu thức: $A = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2499}\right)$

b) Tính nhanh $B = \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}}{2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27}} : \frac{4 + \frac{4}{7} + \frac{4}{49} - \frac{4}{343}}{1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343}}$

Trích đề HSG huyện Kinh Môn năm 2018 -2019

Bài 13: Tính:

a) $1152 - (374 + 1152) + (374 - 65)$

b) $\frac{7}{12} + \frac{5}{6} + \frac{1}{4} - \frac{3}{7} - \frac{5}{12}$.

Trích đề HSG huyện Ba Vì năm 2018 2019

Bài 14: Tính: $M = \frac{\frac{7}{5} + \frac{7}{9} - \frac{1}{4}}{\frac{5}{9} - \frac{3}{2012} - \frac{1}{2}}$.

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2018 -2019

Bài 15: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $2 \cdot \left[(6^2 - 24) : 4 \right] + 2014$

b) $\left(1 + 2\frac{1}{3} - 3\frac{1}{4}\right) : \left(1 + 3\frac{7}{12} - 4\frac{1}{2}\right)$

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018 -2019

Bài 16: Thực hiện phép tính

a) $A = [540 : (23, 7 - 19, 7)] + 42(132 + 75 - 36) - 7317$



b) Tìm tích $\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{4}-1\right)\dots\left(\frac{1}{100}-1\right)$

Trích đề HSG huyện Bạch Thông năm 2018 -2019

Bài 17: Thực hiện phép tính (tính nhanh nếu có thể):

a) $M = \left(\frac{-5}{7} + \frac{5}{11}\right) : \left(\frac{-10}{3}\right) + \left(\frac{-2}{7} + \frac{6}{11}\right) : \left(\frac{-10}{3}\right)$

b) $P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{100}}$

Trích đề HSG huyện Phúc Thọ năm 2018 -2019

Bài 18: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} : 5 - \frac{1}{18} \cdot (-3)^2$

b) $B = 3 \cdot \{5 \cdot [(5^2 + 2^3) : 11] - 16\} + 2015$

c) $C = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right)\left(1 + \frac{1}{2.4}\right)\left(1 + \frac{1}{3.5}\right)\dots\left(1 + \frac{1}{2014.2016}\right)$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hoá năm 2018 -2019

Bài 19: Tính nhanh: $16 + (27 - 7.6) - (94.7 - 27.99)$.

Trích đề HSG huyện Quỳnh Lưu năm 2018 -2019

Bài 20: Tính hợp lý

a) $21.7^2 - 11.7^2 + 90.7^2 + 49.125.16$

b) $B = \frac{2 \cdot 2014}{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2014}}$

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021 -2022

Bài 21: Thực hiện phép tính:

$$A = 1800 : \left\{ 450 : \left[450 - (4.5^3 - 2^3 \cdot 5^2) \right] \right\}$$

$$B = \frac{5.4^{15} \cdot 9^9 - 4.3^{20} \cdot 8^9}{5.2^{10} \cdot 6^{19} - 7.2^{29} \cdot 27^6}$$

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Bài 22: Thực hiện phép tính:

$$A = 12 - 3 - [(2021 - 2022)^{100} - 10^2 + 3^2] + (-2022)^0$$

$$B = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right)$$

Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Bài 23: Tính giá trị của các biểu thức sau bằng cách hợp lý:

$$A = 35.34 + 35.86 + 65.75 + 65.45$$

$$B = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2022}\right)$$

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Bài 24: Tính giá trị của biểu thức



$$A = 22 + (27 - 7.6) - (94.7 - 27.99)$$

$$B = 3 \cdot \left\{ 5 \cdot \left[(5^2 + 2^3) : 11 \right] - 16 \right\} + 2025$$

$$C = 1 + \frac{1}{2} \cdot (1+2) + \frac{1}{3} \cdot (1+2+3) + \frac{1}{4} \cdot (1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{200} \cdot (1+2+\dots+200)$$

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Bài 25: Thực hiện phép tính

1) $936 - \left[508 - 5(5^{10} : 5^8 + 2022^0) \right]$

2) $\frac{2^6 \cdot 18 + 2^7}{2^6 \cdot 5^2 - 2^6 \cdot 3}$

3) $A = x - y$ với x là số nguyên dương nhỏ nhất và y là số nguyên âm lớn nhất.

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Bài 26: Thực hiện phép tính.

a) $\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{22}{19} - \frac{15}{21} \right) + \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{-3}{19} + \frac{-2}{7} \right)$

b) $\frac{-3}{4} \cdot 4 \frac{8}{13} - 0,75 \cdot 3 \frac{5}{13}$;

c) $96.7^2 - 37.7^2 + 15.7^2 - 49.174$

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021-2022

Bài 27: Tính: $3 \frac{1}{4} : \left[4 \cdot (-3) - 2^3 : \frac{16}{15} \right]$

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2021 - 2022

Bài 28: Tính $\left\{ 20 - \left[(700 + 2 \cdot 10^2) : 30 \right] \right\} : 5$

Trích đề HSG huyện Tiền Hải năm 2021 - 2022

Bài 29:

a) $(1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 2022^{2022})(8^2 - 576 : 3^2)$

b) $\frac{2^6 \cdot 18 + 2^7}{2^6 \cdot 5^2 - 2^6 \cdot 3}$

c) $\left(\frac{171717}{151515} + \frac{171717}{353535} + \frac{171717}{636363} + \frac{171717}{999999} \right) : \frac{8}{11}$

d) $\frac{32}{3 \cdot 7} + \frac{6}{7 \cdot 41} + \frac{9}{41 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 51} + \frac{19}{51 \cdot 14}$

Trích đề HSG huyện Quế Võ năm 2021 - 2022

Bài 30: 1. Tính giá trị của biểu thức $M = \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}} \right) : \frac{2021}{2022}$.

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021-2022

Bài 31: Tính giá trị biểu thức sau.



$$N = \frac{4}{1.3} + \frac{4}{3.5} + \frac{4}{5.7} + \dots + \frac{4}{99.101}$$

Trích đề HSG huyện Chương Mỹ năm 2021 - 2022

Dạng 2: Tính tổng dãy số tự nhiên theo quy luật.

Bài 1: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \left(\frac{1}{2} - 1\right) : \left(\frac{1}{3} - 1\right) : \left(\frac{1}{4} - 1\right) : \left(\frac{1}{5} - 1\right) : \dots : \left(\frac{1}{98} - 1\right) : \left(\frac{1}{99} - 1\right) : \left(\frac{1}{100} - 1\right)$$

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Bài 2: Tính $B = \frac{1.2021 + 2.2020 + 3.2019 + \dots + 2021.1}{1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 2021.2022}$.

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2021 - 2022

Dạng 3: Tính toán với tổng của dãy lũy thừa.

Bài 1: Tính hợp lý: $B = \frac{35.6^{10}.2^{23}.3^6 - 2^{22}.5.6^{15}}{9.6^{19}.2^9 - 4.3^{17}.2^{26}}$.

Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021-2022

Bài 2: Tính hợp lý: $\frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^9.6^{19} - 7.2^{29}.27^6}$.

Trích đề HSG huyện Nam Đàn năm 2021-2022

Bài 3: Thực hiện phép tính: $B = \frac{2^{10}.13 + 2^{10}.65}{2^8.104}$.

Trích đề HSG huyện Bạch Thông năm 2018 -2019

Bài 4: Tính:

a) $\frac{11.3^{22}.3^7 - 9^{15}}{(2.3^{14})^2}$

b) $\frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{3^2} \cdot \frac{15}{4^2} \dots \frac{899}{30^2}$

Trích đề HSG huyện Ba Vì năm 2018 -2019

Bài 5: Rút gọn $B = \frac{35.6^{10}.2^{23}.3^6 - 2^{22}.5.6^{15}}{9.6^{19}.2^9 - 4.3^{17}.2^{26}}$.

Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021 -2022

Bài 6: Rút gọn: $C = \frac{5.4^6.9^4 - 3^9.(-8)^4}{4.2^{13}.3^8 + 2.8^4.(-27)^3}$.

Trích đề HSG đề xuất năm 2021 -2022

Bài 7: Rút gọn:

a) $B = \left(\frac{20162016}{20172017} + \frac{2017^{2016}}{2017^{2017}}\right) - \left(\frac{2016}{2017} - \frac{2016^{2017}.2017^{2016}}{2017^{2017}.2016^{2016}}\right)$



$$b) C = \frac{6^{36} \cdot (50.5^{40} - 10.5^{34})}{30^{30} \cdot 10^4 \cdot (100.15^5 - 4.3^5)}$$

Trích đề HSG đề Khoái Châu năm 2021 -2022

Bài 8: Thực hiện phép tính: $C = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2022}$

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Bài 9:

Tìm chữ số tận cùng của tổng $S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2004^{8009}$

Trích đề HSG huyện Chương Mỹ năm 2021-2022

Bài 10:

Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện $2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n = 2^{n+11}$.

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021-2022

Dạng 4: Tổng dãy phân số theo quy luật.

Bài 1: Thực hiện các phép tính sau một cách hợp lý:

$$\frac{2}{1.4} + \frac{2}{4.7} + \frac{2}{7.10} + \dots + \frac{2}{97.100}$$

Trích đề HSG đề xuất năm 2021 - 2022

Bài 2: Thực hiện các phép tính sau một cách hợp lý $B = \frac{5}{1.4} + \frac{5}{4.7} + \frac{5}{7.10} + \dots + \frac{5}{97.100}$

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2021-2022

Bài 3: Thực hiện phép tính bằng cách hợp lý:

$$C = -\frac{2}{20} - \frac{2}{30} - \frac{2}{42} - \frac{2}{56} - \frac{2}{72} - \frac{2}{90}$$

Trích đề HSG huyện Nam Định năm 2021 – 2022

Bài 4: Tính $S = \frac{10}{2.7} + \frac{10}{7.12} + \frac{10}{12.17} + \dots + \frac{10}{2017.2022}$.

Trích đề HSG huyện Nam Đàn năm 2018 - 2019

Bài 5: Tính: $A = \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \dots + \frac{1}{97.99}$

Trích đề HSG huyện Tiên Du năm 2021 -2022

Bài 6: Tính tổng: $A = \frac{2}{1.4} + \frac{2}{4.7} + \frac{2}{7.10} + \dots + \frac{2}{97.100}$.

Trích đề HSG huyện Quỳnh Lưu năm 2018 -2019

Bài 7: Tính giá trị của biểu thức sau bằng cách hợp lý:

$$C = \frac{2}{4.9} + \frac{2}{9.14} + \frac{2}{14.19} + \dots + \frac{2}{64.69}$$

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Bài 8: Thực hiện phép tính $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

II. Tìm số chưa biết.



Dạng 1: Tìm số chưa biết (không có lũy thừa).

Bài 1: Tìm x biết rằng: $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(x-2)x} = \frac{1011}{2021}$.

Trích đề HSG huyện Trực Ninh năm 2021 -2022

Bài 2: Tìm số nguyên x biết:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right)x = \frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{8}{2} + \frac{9}{1}$$

Trích đề HSG huyện Ninh Bình năm 2021-2022

Bài 3: Tìm x biết: $(2x+5)-17 = -238$.

Trích đề HSG huyện Sóc Sơn năm 2021 – 2022

Bài 4: Tìm x biết:

a) $(2-4+6-8+10-12+\dots+98-100)+x=1972$

b) $\frac{2}{(x+1)(x+3)} + \frac{3}{(x+3)(x+6)} + \frac{4}{(x+6)(x+10)} = \frac{x}{(x+1)(x+10)}$

Trích đề HSG huyện Hà Đông năm 2021 -2022

Bài 5: Tìm số tự nhiên x biết: $(x+5)+(x+10)+(x+15)+\dots+(x+60)=450$.

Trích đề HSG huyện Kim Sơn năm 2021 -2022

Bài 6: Tìm số tự nhiên x thỏa mãn: $2+4+6+8+\dots+2x=110$.

Trích đề HSG huyện Sơn Tây năm 2021 – 2022

Bài 7: Tìm x biết:

a) $(19x+2.5^2):14=(13-8)^2-4^2$.

b) $\left|x+\frac{1}{2}\right|+\left|x+\frac{1}{6}\right|+\left|x+\frac{1}{12}\right|+\left|x+\frac{1}{20}\right|+\dots+\left|x+\frac{1}{110}\right|=11x$.

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021 -2022

Bài 8: Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết: $x:\left(9\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)=\frac{0,4+\frac{2}{9}-\frac{2}{11}}{1,6+\frac{8}{9}-\frac{8}{11}}$.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Bài 9: Tìm x , biết: $1+\left(x-\frac{1}{4}\right):\frac{3}{2}=\frac{9}{4}-3\frac{1}{4}$.

Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Bài 10: Tìm x , biết: $\frac{1}{2}+\frac{5}{6}:x=\frac{1}{3}$.

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Bài 11: Tìm x biết: $x:\frac{1}{3}+\frac{5}{7}=9\frac{5}{7}$

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Bài 12: Tìm x biết:



$$1) \frac{2}{3} - 2 : \left(x - \frac{1}{2} \right) = -\frac{10}{3}$$

$$2) x + (x-1) + (x-5) + (x-9) + \dots + (x-101) = -516$$

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Bài 13: Tìm x biết: $x - 35\%x + \frac{8}{5} = -2\frac{19}{20}$

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021-2022

Bài 14: Tìm x biết $x : \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} \right) = 100$

Trích đề HSG huyện Tiền Hải năm 2021-2022

Bài 15:

Tìm các số tự nhiên x, y, z nhỏ nhất khác không sao cho $18.x = 24.y = 36.z$.

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021-2022

Dạng 2: Tìm số chưa biết có chứa lũy thừa.

Bài 1: Tìm số tự nhiên x biết: $7.2 + 288 : (x-5)^2 = 2^4$.

Bài 2:

a) Tìm x biết: $(3x+1)^2 = 100$.

b) Tìm x là số tự nhiên, biết: $5^{2x+3} - 2.5^2 = 5^2 . 3$

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2021 -2022

Bài 3: Tìm số nguyên x , biết: $14.7^{2021} = 35.7^{2021} - 3.49^x$.

Trích đề HSG huyện Tân Kỳ năm 2021 – 2022

Bài 4: Tìm x biết: $(6-2x)^3 = 3^3.5^2 + 325$.

Trích đề HSG huyện Hà Đông năm 2021 -2022

Bài 5: Tìm số tự nhiên x biết: $8.6 + 288 : (x-3)^2 = 50$.

Trích đề HSG huyện Hoàng Hoá năm 2018-2019

Bài 6: Tìm x biết:

a) $[(3x-54).8] : 4 = 18$

b) $(2x-15)^5 = (2x-15)^3$

c) $x + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+2013) = 2035147$

Trích đề HSG huyện Vĩnh lộc năm 2017 - 2018

Bài 7: Tìm số tự nhiên x , biết: $5^x . 5^{x+1} . 5^{x+2} = \underbrace{1000\dots 0}_{18 \text{ chữ số } 0} : 2^{18}$

18 chữ số 0

Trích đề HSG huyện Tam Dương năm 2017- 2018

Bài 8: Tìm số tự nhiên x , biết:

a) $5^x = 125$

b) $3^{2x} = 81$

c) $5^{2x-3} - 2.5^2 = 5^2 . 3$



Trích đề HSG huyện Duy Xuyên năm 2019 - 2020

Bài 9: Tìm số nguyên x biết: $2^x \cdot 2^{x+1} \cdot 2^{x+2} = \underbrace{1000\dots 0}_{\text{có 18 chữ số 0}} : 5^{18}$ (có 18 chữ số 0)

Trích đề HSG huyện Giao Thủy năm 2018 -2019

Bài 10: Tìm số nguyên x , biết:

1) $2024 : [25 - (3x + 2)] = 2^3 \cdot 11$

2) $\frac{1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100}{x^2 + (x^2 + 1) + (x^2 + 2) + \dots + (x^2 + 99)} = 50 \frac{116}{131}$

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Bài 11: Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết: $(2x - 15)^5 = (2x - 15)^3$.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Bài 12: Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết: $3 \cdot 2^{x+2} - 2^{x-1} = 7 \cdot 4^{1011} + 9 \cdot 2^{2021}$.

Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Bài 13: Tìm x , biết: $35 \cdot 7^{2021} - 3 \cdot 49^x = 14 \cdot 7^{2021}$.

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Bài 14: Tìm x biết: $(-4) + (x + 7)^2 = 12$

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Bài 15: Tìm x biết:

1) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$ (với $x \in \mathbb{N}$)

2) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^{2022} = \left(2x - \frac{1}{2}\right)^{2021}$

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Bài 16: Tìm các cặp số tự nhiên x, y thỏa mãn $5^x + 11^y = 26$

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Bài 17: Tìm x biết:

a) $4 \cdot 3^x - 34 = 2022^0 + 1^{2022}$;

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021-2022

Bài 18: Tìm x biết: $(x - 1)^3 = -64$

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Bài 19: Cho các số $(x; y)$ thỏa mãn: $(x - 2)^4 + (y - x + 1)^6 = 0$

Tính giá trị của biểu thức: $C = 2x^3 + 15y^3 - 11$

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Bài 20: Tìm $x; y \in \mathbb{N}$ biết: $73 - x^2 = 4(y - 5)^2$

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022



Bài 21: Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $(x-1)^2 + 5y^2 = 6$.

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2021-2022

Bài 22:

1) Tìm x thỏa mãn:

a) $(7x-11)^3 = 2^5 \cdot 5^2 + 2 \cdot 10^2$

b) $2 \cdot 3^x + 5 \cdot 3^{x+1} = 153$

Trích đề HSG huyện Quế Võ năm 2021-2022

Bài 23:

1. Tìm x biết:

a) $\frac{2x-3}{3} + \frac{-3}{2} = \frac{5-3x}{6} - \frac{1}{3}$

c) $2^{x+2} - 2^x = 96$

b) $\frac{x+2023}{1945} + \frac{x+2023}{1944} = \frac{x+2023}{1943} + \frac{x+2023}{1942}$

2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $\frac{x}{8} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$

C. SỬU TÀM CÁC BÀI TRONG CÁC ĐỀ CỦA NHỮNG NĂM TRƯỚC ĐÓ

Dạng 1: Tính nhanh hoặc rút gọn hoặc tính giá trị

Bài 1: Rút gọn biểu thức:

a) $A = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2499}\right)$

b) $B = \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}}{2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27}} : \frac{4 + \frac{4}{7} + \frac{4}{49} - \frac{4}{343}}{1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343}}$

Trích đề HSG huyện Kinh Môn năm 2018 -2019

Lời giải

$$A = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2499}\right)$$

$$A = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15} \cdot \dots \cdot \frac{2500}{2499}$$

$$A = \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{3.3}{2.4} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdot \dots \cdot \frac{50.50}{49.51}$$

$$A = \frac{2.3.4 \dots 50}{1.2.3 \dots 49} \cdot \frac{2.3.4 \dots 50}{3.4.5 \dots 51}$$

$$A = \frac{50}{1} \cdot \frac{2}{51} = \frac{100}{51}$$

Vậy $A = \frac{100}{51}$.



$$b) B = \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}}{2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27}} : \frac{4 + \frac{4}{7} + \frac{4}{49} - \frac{4}{343}}{1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343}}$$

$$B = \frac{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}\right)}{2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}\right)} : \frac{4 \cdot \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343}\right)}{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343}\right)}$$

$$B = \frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8}.$$

Vậy $B = \frac{1}{8}$.

Bài 2: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = 68.74 + 27.68 - 68$

b) $B = 2^3.5^3 - 3\{539 - [639 - 8.(7^8 : 7^6 + 2017^0)]\}$

c) $C = \left(\frac{151515}{161616} + \frac{17^9}{17^{10}}\right) - \left(\frac{1500}{1600} - \frac{1616}{1717}\right)$

d) $D = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right)\left(\frac{1}{3^2} - 1\right)\left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018 -2019

Lời giải

a) $A = 68.74 + 27.68 - 68$

$$A = 68.(74 + 27 - 1)$$

$$A = 68.100$$

$$A = 6800.$$

b) $B = 2^3.5^3 - 3\{539 - [639 - 8.(7^8 : 7^6 + 2017^0)]\}$

$$= 8.125 - 3.\{539 - [639 - 8.(7^2 + 1)]\}$$

$$= 1000 - 3.\{539 - [639 + 8.50]\}$$

$$= 1000 - 3.300$$

$$= 1000 - 900 = 100.$$

c) $C = \left(\frac{151515}{161616} + \frac{17^9}{17^{10}}\right) - \left(\frac{1500}{1600} - \frac{1616}{1717}\right) = \left(\frac{15}{16} + \frac{1}{17}\right) - \left(\frac{15}{16} - \frac{16}{17}\right) = 0 + 1 = 1.$

d) $D = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right)\left(\frac{1}{3^2} - 1\right)\left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$

$$= \left(\frac{1-4}{2^2}\right)\left(\frac{1-9}{3^2}\right) \dots \left(\frac{1-10000}{100^2}\right) = \frac{-3}{2^2} \cdot \frac{-8}{3^2} \cdot \frac{-15}{4^2} \dots \frac{-9999}{100^2} = -\frac{1.3}{2.3} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \dots \frac{99.1010}{100.100}$$

$$= -\frac{(1.2.3 \dots 99).(3.4.5 \dots 101)}{(2.3.4 \dots 100).(2.3.4 \dots 100)} = -\frac{101}{200}.$$

Bài 3: Tính:



$$a) A = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots + 2013 + 2014 - 2015 - 2016$$

$$b) B = \frac{2.4.10 + 4.6.8 + 14.16.20}{3.6.15 + 6.9.12 + 21.24.30}$$

Trích đề HSG huyện Yên Việt năm 2018-2019

Lời giải

$$a) A = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots + 2013 + 2014 - 2015 - 2016$$

Tính được số số hạng của A là: $(2016 - 1) : 1 + 1 = 2016$ (số hạng)

Nhóm 4 số hạng liên tiếp vào 1 nhóm:

$$A = (1 + 2 - 3 - 4) + (5 + 6 - 7 - 8) + \dots + (2013 + 2014 - 2015 - 2016)$$

$$A = \underbrace{-4 + (-4) + \dots + (-4)}_{504 \text{ số } (-4)}$$

$$A = -4.504$$

$$A = -2016.$$

Vậy $A = -2016$.

$$b) B = \frac{2.4.10 + 4.6.8 + 14.16.20}{3.6.5 + 6.9.12 + 21.24.30}$$

$$B = \frac{8.(1.2.5 + 2.3.4 + 7.8.10)}{27.(1.2.5 + 2.3.4 + 7.8.10)}$$

$$B = \frac{8}{27}.$$

Vậy $B = \frac{8}{27}$.

Bài 4: Thực hiện các phép tính sau một cách hợp lý:

$$a) (10^2 + 11^2 + 12^2) : (13^2 + 14^2)$$

$$b) 1.2.3 \dots 9 - 1.2.3 \dots 8 - 1.2.3 \dots 7.8^2$$

$$c) \frac{(3.4.2^{16})^2}{11.2^{13}.4^{11} - 16^9}$$

$$d) 1152 - (374 + 1152) + (-65 + 374)$$

Trích đề HSG huyện Nghi Lộc năm 2018-2019

Lời giải

$$a) (10^2 + 11^2 + 12^2) : (13^2 + 14^2)$$

$$= (100 + 121 + 144) : (169 + 196)$$

$$= 365 : 365$$

$$= 1.$$

$$b) 1.2.3 \dots 9 - 1.2.3 \dots 8 - 1.2.3 \dots 7.8^2 = 1.2.3 \dots 7.8.(9 - 1 - 8) = 1.2.3 \dots 7.8 \dots \times 0 = 0.$$

$$c) \frac{(3.4.2^{16})^2}{11.2^{13}.4^{11} - 16^9} = \frac{(3.2^2.2^{16})^2}{11.2^{13} \cdot (2^2)^{11} - (2^4)^9} = \frac{3^2 \cdot (2^{18})^2}{11.2^{13} \cdot 2^{22} - 2^{36}} = \frac{3^2 \cdot 2^{36}}{11.2^{35} - 2^{36}} = \frac{3^2 \cdot 2^{36}}{2^{35} \cdot (11 - 2)} = \frac{3^2 \cdot 2}{9} = 2.$$



$$\begin{aligned} d) & 1152 - (374 + 1152) + (-65 + 374) = 1152 - 374 - 1152 - 65 + 374 \\ & = (1152 - 1152) + (374 - 374) - 65 \\ & = -65. \end{aligned}$$

Bài 5: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) A = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} : 5 - \frac{1}{18} \cdot (-3)^2$$

$$b) B = 3 \cdot \{5 \cdot [(5^2 + 2^3) : 11] - 16\} + 2015$$

$$c) C = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2014.2016}\right)$$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hoá năm 2018 - 2019

Lời giải

$$a) A = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} : 5 - \frac{1}{18} \cdot (-3)^2$$

$$A = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} - \frac{3}{6}$$

$$A = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$b) B = 3 \cdot \{5 \cdot [(5^2 + 2^3) : 11] - 16\} + 2015$$

$$B = 3 \cdot \{5 \cdot [33 : 11] - 16\} + 2015$$

$$B = 3 \cdot \{15 - 16\} + 2015$$

$$B = -3 + 2015$$

$$B = 2012.$$

$$c) C = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2014.2016}\right)$$

$$C = \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \dots \frac{2015^2}{2014.2016}$$

$$C = \frac{(2.3.4 \dots 2015) \cdot (2.3.4 \dots 2015)}{(1.2.3 \dots 2014) \cdot (3.4.5 \dots 2016)}$$

$$C = \frac{2015.2}{2016} = \frac{2015}{1008}$$

$$C = \frac{2015}{1008}.$$

Bài 6: Thực hiện các phép tính:

$$a) S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$$

$$b) [528 : (19, 3 - 15, 3)] + 42 \cdot (128 + 75 - 32) - 7314$$

Trích đề HSG Chu Văn An năm 2018-2019

Lời giải

$$a) S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$$

$$3S = 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + 99.100.(101-98)$$

$$S = 1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + \dots + 99.100.101 - 98.99.100$$



$$\begin{aligned}
 S &= 99.100.101 : 3 = 333300 \\
 \text{b)} [528 : (19, 3 - 15, 3)] + 42 \cdot (128 + 75 - 32) - 7314 \\
 &= (528 : 4) + 42 \cdot 171 - 7314 \\
 &= 121 + 7182 - 7314 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Bài 7: Thực hiện phép tính:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} S &= \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \dots + \frac{61}{(30.31)^2} \\
 \text{b)} B &= 1 \frac{6}{41} \cdot \left(\frac{12 + \frac{12}{19} - \frac{12}{37} - \frac{12}{53}}{3 + \frac{3}{19} - \frac{3}{37} - \frac{3}{53}} ; \frac{4 + \frac{4}{15} + \frac{4}{4} + \frac{4}{2013}}{5 + \frac{5}{15} + \frac{5}{4} + \frac{5}{2013}} \right) \cdot \frac{12424243}{237373735}
 \end{aligned}$$

Trích đề HSG Tam Dương năm 2018-2019

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \text{ với } n \in \mathbb{N}^*$$

$$S = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \dots + \frac{61}{(30.31)^2}$$

$$S = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{30^2} - \frac{1}{31^2}\right) = 1 - \frac{1}{31^2} = \frac{31^2 - 1}{31^2} = \frac{960}{961}$$

$$\text{b)} B = 1 \frac{6}{41} \cdot \left(\frac{12 + \frac{12}{19} - \frac{12}{37} - \frac{12}{53}}{3 + \frac{3}{19} - \frac{3}{37} - \frac{3}{53}} ; \frac{4 + \frac{4}{15} + \frac{4}{4} + \frac{4}{2013}}{5 + \frac{5}{15} + \frac{5}{4} + \frac{5}{2013}} \right) \cdot \frac{12424243}{237373735}$$

$$B = \frac{47}{41} \cdot \left[\frac{12 \cdot \left(1 + \frac{1}{19} - \frac{1}{37} - \frac{1}{53}\right)}{3 \cdot \left(1 + \frac{1}{19} - \frac{1}{37} - \frac{1}{53}\right)} ; \frac{4 \cdot \left(1 + \frac{1}{15} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2013}\right)}{5 \cdot \left(1 + \frac{1}{15} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2013}\right)} \right] \cdot \frac{41.3.1010101}{47.5.1010101}$$

$$B = \frac{47}{41} \cdot \left(4 \cdot \frac{5}{4}\right) \cdot \frac{41.3}{47.5}$$

$$B = 3.$$

Bài 8: Cho $A = \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{4} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2019} - 1\right) \left(\frac{1}{2020} - 1\right) \left(\frac{1}{2021} - 1\right)$

$$B = \left(-1\frac{1}{2}\right) \left(-1\frac{1}{3}\right) \left(-1\frac{1}{4}\right) \dots \left(-1\frac{1}{2019}\right) \left(-1\frac{1}{2020}\right)$$

Tính giá trị biểu thức $M = A \cdot B$.

Trích đề HSG Nguyễn Chích năm 2020-2021

Lời giải

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{4} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2019} - 1\right) \left(\frac{1}{2020} - 1\right) \left(\frac{1}{2021} - 1\right) \\
 &= \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{3}{4}\right) \dots \left(-\frac{2018}{2019}\right) \left(-\frac{2019}{2020}\right) \left(-\frac{2020}{2021}\right) \text{ (2020 thừa số)}
 \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2021}.$$

$$\begin{aligned} B &= \left(-1\frac{1}{2}\right)\left(-1\frac{1}{3}\right)\left(-1\frac{1}{4}\right)\dots\left(-1\frac{1}{2019}\right)\left(-1\frac{1}{2020}\right) \\ &= \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{5}{4}\right)\dots\left(-\frac{2020}{2019}\right)\left(-\frac{2021}{2020}\right) \quad (2019 \text{ thừa số}) \\ &= \frac{-2021}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } M = A.B = \frac{1}{2021} \cdot \frac{-2021}{2} = \frac{-1}{2}.$$

Bài 9: Thực hiện phép tính

$$\text{a) } M = \frac{3}{5.7} + \frac{3}{7.9} + \frac{3}{9.11} + \dots + \frac{3}{59.61}$$

$$\text{b) Cho } A = \frac{\frac{1}{99} + \frac{2}{98} + \frac{3}{97} + \dots + \frac{99}{1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}}; B = \frac{92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100}}{\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}}$$

Tính $\frac{A}{B}$.

Trích đề HSG huyện Bắc Nghĩa năm 2018 - 2019

Lời giải

$$\text{a) } M = \frac{3}{5.7} + \frac{3}{7.9} + \frac{3}{9.11} + \dots + \frac{3}{59.61}$$

$$M = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{5.7} + \frac{2}{7.9} + \dots + \frac{2}{59.61} \right)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{59} - \frac{1}{61} \right)$$

$$M = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{61} \right)$$

$$M = \frac{3}{2} \cdot \frac{56}{305} = \frac{84}{305}$$

$$\text{b) } A = \frac{\frac{1}{99} + \frac{2}{98} + \frac{3}{97} + \dots + \frac{99}{1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}}; B = \frac{92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100}}{\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}}$$

$$\text{Tính } A = \frac{\frac{1}{99} + \frac{2}{98} + \frac{3}{97} + \dots + \frac{99}{1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}}$$

$$\frac{1}{99} + \frac{2}{98} + \frac{3}{97} + \dots + \frac{99}{1} = \left(\frac{100}{99} - 1 \right) + \left(\frac{100}{98} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{100}{2} - 1 \right) + \frac{99}{1}$$

$$= \left(\frac{100}{99} + \frac{100}{98} + \frac{100}{97} + \dots + \frac{100}{2} \right) - (1+1+1+\dots+1) + \frac{99}{1}$$



$$= \frac{100}{99} + \frac{100}{98} + \frac{100}{97} + \dots + \frac{100}{2} + \frac{100}{100} = 100 \cdot \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{99} + \frac{1}{98} + \dots + \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Vậy } A = \frac{100 \cdot \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{99} + \dots + \frac{1}{2} \right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}} = 100 \quad (1)$$

$$\text{Tính: } B = \frac{92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100}}{\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}}$$

$$92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100} = 92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100}$$

$$= 92 - \left(1 - \frac{8}{9}\right) - \left(1 - \frac{8}{10}\right) - \left(1 - \frac{8}{11}\right) - \dots - \left(1 - \frac{8}{100}\right)$$

$$= 92 - (1+1+1+1+\dots+1) + \left(\frac{8}{9} + \frac{8}{10} + \frac{8}{11} + \dots + \frac{8}{100}\right)$$

$$= 0 + 40 \cdot \left(\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}\right)$$

$$\text{Vậy } B = \frac{40 \left(\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}\right)}{\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}} = 40 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{A}{B} = \frac{100}{40} = \frac{5}{2}$.

Bài 10. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $13.4.47 + 53.166 - 53.114$.

b) $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots + 994 - 995 - 996 + 997 + 998$.

c) $\left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$.

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 -2023

Lời giải

a) $13.4.47 + 53.166 - 53.114$

$$= 52.47 + 53.(166 - 114)$$

$$= 52.47 + 53.52$$

$$= 52.(47 + 53)$$

$$= 52.100 = 5200$$

b) $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots + 994 - 995 - 996 + 997 + 998$

$$= 1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + \dots + (994 - 995 - 996 + 997) + 998$$

$$= 1 + 0 + \dots + 0 + 998$$

$$= 999.$$

c) $\left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$

$$= \left(\frac{1-4}{2^2}\right) \left(\frac{1-9}{3^2}\right) \left(\frac{1-16}{4^2}\right) \dots \left(\frac{1-1000}{100^2}\right)$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{-3}{2^2} \cdot \frac{-8}{3^2} \cdot \frac{-15}{4^2} \cdots \frac{-9999}{100^2} \\
&= -\frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{2.4}{3^2} \cdot \frac{3.5}{4^2} \cdots \frac{99.101}{100^2} \quad (\text{Có } 99 \text{ số âm nên tích là số âm}) \\
&= -\frac{(1.2.3 \cdots 99)(3.4.5 \cdots 101)}{(2.3.4 \cdots 100)(2.3.4 \cdots 100)} = -\frac{1.101}{100.2} = -\frac{101}{200}.
\end{aligned}$$

Bài 11:

1) Tính giá trị biểu thức $A = 99^{99} - \left\{ 1, (3) - \left[5.2^3 - (-7)^2 + \frac{1}{3} + 99^9 \cdot (27^4 - 81^3 - 99^{90}) \right] \right\}$.

2) Tính tích $P = \left(1 + \frac{7}{9}\right) \left(1 + \frac{7}{20}\right) \left(1 + \frac{7}{33}\right) \cdots \left(1 + \frac{7}{2900}\right)$.

*Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2020 -2021***Lời giải**

$$1) A = 99^{99} - \left\{ 1, (3) - \left[5.2^3 - (-7)^2 + \frac{1}{3} + 99^9 \cdot (27^4 - 81^3 - 99^{90}) \right] \right\}$$

$$A = 99^{99} - \left\{ 1, (3) - \left[5.2^3 - (-7)^2 + \frac{1}{3} + 99^9 \cdot (3^{12} - 3^{12} - 99^{90}) \right] \right\}$$

$$= 99^{99} - \left\{ 1, (3) - \left[5.2^3 - (-7)^2 + \frac{1}{3} - 99^{99} \right] \right\}$$

$$= 99^{99} - \left\{ 1, (3) - 5.2^3 + (-7)^2 - \frac{1}{3} + 99^{99} \right\}$$

$$= 99^{99} - \frac{4}{3} + 40 - 49 + \frac{1}{3} - 99^{99} = -10.$$

Vậy $A = -10$.

$$2) P = \left(1 + \frac{7}{9}\right) \left(1 + \frac{7}{20}\right) \left(1 + \frac{7}{33}\right) \cdots \left(1 + \frac{7}{2900}\right)$$

$$= \frac{2.8.3.9.4.10 \cdots 51.57}{1.9.2.10.3.11 \cdots 50.58} = \frac{2.3.4 \cdots 51}{1.2.3 \cdots 50} \cdot \frac{8.9.10 \cdots 57}{9.10.11 \cdots 58} = \frac{51.8}{58} = \frac{204}{29}.$$

$$\text{Vậy } P = \frac{204}{29}.$$

Dạng 2: Tìm số chưa biết không chứa lũy thừa hoặc có chứa lũy thừa.**Bài 1:** Tìm số nguyên x , biết:

a) $2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7$

b) $\frac{x}{6} + \frac{x}{10} + \frac{x}{15} + \frac{x}{21} + \frac{x}{28} + \frac{x}{36} + \frac{x}{45} + \frac{x}{55} + \frac{x}{66} + \frac{x}{78} = \frac{220}{39}$

*Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018 -2019***Lời giải**

a) $2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7$

$$25 - (3x + 2) = 2016 : 63$$

$$25 - (3x + 2) = 32$$

$$3x + 2 = -7$$

$$3x = -9$$



$$x = -3.$$

Vậy $x = 3$.

$$b) \frac{x}{6} + \frac{x}{10} + \frac{x}{15} + \frac{x}{21} + \frac{x}{28} + \frac{x}{36} + \frac{x}{45} + \frac{x}{55} + \frac{x}{66} + \frac{x}{78} = \frac{220}{39}$$

$$x \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{36} + \frac{1}{45} + \frac{1}{55} + \frac{1}{66} + \frac{1}{78} \right) = \frac{220}{39}$$

$$2x \cdot \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110} + \frac{1}{132} + \frac{1}{156} \right) = \frac{220}{39}$$

$$2x \cdot \left(\frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{9.10} + \frac{1}{10.11} + \frac{1}{11.12} + \frac{1}{12.13} \right) = \frac{220}{39}$$

$$2x \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} \right) = \frac{220}{39}$$

$$2x \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{13} \right) = \frac{220}{39}$$

$$2x = \frac{220}{39} : \frac{10}{39}$$

$$2x = 22$$

$$x = 11.$$

Vậy $x = 11$.

Bài 13:

a) Tìm x biết: $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$.

b) Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ biết: $2^x + 624 = 5^y$.

Trích đề HSG huyện Nam Đàn năm 2018 -2019

Lời giải

a) Từ giả thiết ta có: $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$.

TH1: $x - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ suy ra $x = \frac{5}{6}$.

TH2: $x - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$ suy ra $x = -\frac{1}{6}$.

Vậy $x \in \left\{ \frac{-1}{6}; \frac{5}{6} \right\}$.

b)

Nếu $x = 0$ thì $5^y = 2^0 + 624 = 625 = 5^4$ suy ra $y = 4 (y \in \mathbb{N})$

Nếu $x \neq 0$ thì vế trái là số chẵn, vế phải là số lẻ nên vô lý.

Vậy $x = 0, y = 4$.

Bài 14: Tìm các số nguyên x biết:

a) $(19x + 2.5^2) : 14 = (13 - 8)^2 - 4^2$

b) $(7x - 11)^3 = (-3)^2 \cdot 15 + 208$

Trích đề HSG Chu Văn An năm 2018 -2019

Lời giải



$$a) (19x + 2.5^2) : 14 = (13-8)^2 - 4^2$$

$$x = \left\{ 14 \left[(13-8)^2 - 4^2 \right] - 2.5^2 \right\} : 19 = 4.$$

Vậy $x = 4$.

$$b) (7x - 11)^3 - 9.15 = 208$$

$$(7x - 11)^3 = 9.15 + 208 = 343 = 7^3$$

$$7x - 11 = 7$$

$$7x = 18$$

$$x = \frac{18}{7} \text{ (ktm)}$$

Vậy không có giá trị x nguyên thoả mãn.

Bài 15: Tìm số tự nhiên x , biết:

$$a) x + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+2010) = 2029099$$

$$b) 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2x = 210$$

Trích đề HSG huyện Hoà An năm 2018-2019

Lời giải

$$a) x + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+2010) = 2029099$$

$$2011x + 1 + 2 + \dots + 2010 = 2029099$$

$$2011x + \frac{2010 \cdot 2011}{2} = 2029099$$

$$2011x = 2029099 - \frac{2010 \cdot 2011}{2}$$

$$x = \left(2029099 - \frac{2010 \cdot 2011}{2} \right) : 2011 = 4$$

Vậy $x = 4$.

$$b) 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2x = 210$$

$$2 \cdot \frac{x(x+1)}{2} = 210$$

$$x(x+1) = 210 = 14 \cdot 15$$

$$x = 14.$$

Vậy $x = 14$.

Bài 16: Tìm x , biết: $\left(\frac{2}{11.13} + \frac{2}{13.15} + \dots + \frac{2}{19.21} \right) \cdot 462 - [2,04 : (x+1,05)] : 0,12 = 19$.

Trích đề HSG huyện Trục Ninh năm 2018-2019

Lời giải

$$\left(\frac{2}{11.13} + \frac{2}{13.15} + \dots + \frac{2}{19.21} \right) \cdot 462 - [2,04 : (x+1,05)] : 0,12 = 19$$

$$20 - [2,04 : (x+1,05)] : 0,12 = 19$$

$$[2,04 : (x+1,05)] : 0,12 = 1$$

$$x+1,05 = 17$$

$$x = 15,95.$$



Vậy $x = 15,95$.

Bài 17: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn:

a) $(7x - 11)^3 = (-3)^2 \cdot 15 + 208$

b) $(2x - 7)^2 = 29 + 5 \cdot (-4)$

c) $(x - 2)^2 (y - 3) = -4$

Trích đề HSG huyện Sơn Tây năm 2017-2018

Lời giải

a) $(7x - 11)^3 = (-3)^2 \cdot 15 + 208$

$(7x - 11)^3 = 9 \cdot 15 + 208 = 343 = 7^3$

$7x - 11 = 7$

$7x = 18$

$x = \frac{18}{7}$ (ktm)

Vậy không có giá trị x nguyên thỏa mãn.

b) $(2x - 7)^2 = 29 + 5 \cdot (-4)$

$(2x - 7)^2 = 29 - 20 = 9$

TH1: $2x - 7 = 3$ suy ra $2x = 7 + 3 = 10$ suy ra $x = 10 : 2 = 5$.

TH2: $2x - 7 = -3$ suy ra $2x = 7 - 3 = 4$ suy ra $x = 4 : 2 = 2$.

Vậy $x \in \{2; 5\}$.

c) $(x - 2)^2 (y - 3) = -4$

Do $-4 = 1^2 \cdot (-4) = 2^2 \cdot (-1)$ nên có các trường hợp sau:

*) $(x - 2)^2 = 1$ và $y - 3 = -4$. suy ra: $x = 3; y = -1$ hoặc $x = 1; y = -1$.

*) $(x - 2)^2 = 4$ và $y - 3 = -1$. suy ra: $x = 4; y = 2$ hoặc $x = 0; y = 2$.

Vậy: $(x; y) \in \{(3; -1); (1; -1); (4; 2); (0; 2)\}$.

Bài 18: Tìm x biết:

a) $x^2 - 9 = 0$

b) $\frac{3}{4} - (2x - 1)^2 = 50\%$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2019-2020

Lời giải

a) Ta có: $x^2 - 9 = 0$ suy ra $x = 3$ hoặc $x = -3$.

b) $\frac{3}{4} - (2x - 1)^2 = 50\%$

$(2x - 1)^2 = \frac{1}{4}$

TH1: $2x - 1 = \frac{1}{2}$ suy ra $x = \frac{3}{4}$.

TH2: $2x - 1 = \frac{-1}{2}$ suy ra $x = \frac{1}{4}$.



$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right\}.$$

Bài 19:

Tính nhanh: $A = \frac{1.5.6 + 2.10.12 + 4.20.24 + 9.45.54}{1.3.5 + 2.6.10 + 4.12.20 + 9.27.45}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{1.5.6 + 2.10.12 + 4.20.24 + 9.45.54}{1.3.5 + 2.6.10 + 4.12.20 + 9.27.45} \\ &= \frac{1.5.6(1 + 2.2.2 + 4.4.4 + 9.9.9)}{1.3.5(1 + 2.2.2 + 4.4.4 + 9.9.9)} = \frac{1.5.6}{1.3.5} = 2. \end{aligned}$$

Bài 20:

Tính tổng: $\frac{2}{1.4} + \frac{2}{4.7} + \frac{2}{7.10} + \dots + \frac{2}{97.100}$.

Lời giải

Ta có $\frac{1}{1.4} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) \Rightarrow \frac{2}{1.4} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) \Rightarrow \frac{2}{4.7} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right); \frac{2}{7.10} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right); \dots$

$\dots; \frac{2}{97.100} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right)$

$\Rightarrow B = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right)$



CHỦ ĐỀ: ĐỒNG DƯ THỨC
A. PHẦN NỘI DUNG

Dạng 1: Toán chứng minh chia hết

Bài 1: Chứng minh rằng với n là số tự nhiên thì $(2021^{2n+1} + 2020) : 3$.

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta thấy: $2021 \equiv 2 \pmod{3}$

$$2021^{2n+1} \equiv 2^{2n+1} \pmod{3}$$

Mặt khác: $2^{2n+1} = 2 \cdot 4^n$

$$\text{mà: } 4 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$4^n \equiv 1^n \pmod{3}$$

$$2 \cdot 4^n \equiv 2 \pmod{3}$$

$$2^{2n+1} \equiv 2 \pmod{3}$$

nên $2020 \equiv 1 \pmod{3}$; $2021^{2n+1} \equiv 2 \pmod{3}$

Vậy $(2021^{2n+1} + 2020) : 3$.

Bài 2: Chứng tỏ: $S = 16^5 + 2^{15}$ chia hết cho 33.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2010 - 2011

Lời giải

$$\text{Có } S = 16^5 + 2^{15} = (2^4)^5 + 2^{15}$$

$$= 2^{20} + 2^{15} = 2^{15} \cdot 2^5 + 2^{15}$$

$$= 2^{15} (2^5 + 1) = 2^{15} \cdot 33 : 33$$

Vậy S chia hết cho 33.

Bài 3: Chứng minh rằng: $3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{101}$ chia hết cho 120.

Trích đề HSG huyện Hàng Hoá năm 2014 - 2015

Lời giải

Ta có: $3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{101}$

$$= (3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + (3^6 + 3^7 + 3^8 + 3^9) + \dots + (3^{98} + 3^{99} + 3^{100} + 3^{101})$$

$$= 3^1 \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^5 \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{97} \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4)$$

$$= 3^1 \cdot 120 + 3^5 \cdot 120 + \dots + 3^{97} \cdot 120$$

$$= 120 \cdot (3^1 + 3^5 + \dots + 3^{97}) : 120 \text{ (đpcm).}$$

Bài 4: Cho p, q là hai số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng $p^4 + 2019q^4$ chia hết cho 20.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } A = p^4 + 2019q^4 = p^4 - q^4 + 2020q^4 = (p^2 + q^2)(p^2 - q^2) + 2020q^4$$

Vì p, q là hai số nguyên tố lớn hơn 5 nên $(p; 5) = (q; 5) = 1$

$$p^2, q^2 \equiv 1, 4 \pmod{5}$$

Nếu $p^2 \equiv q^2 \pmod{5}$ thì $p^2 - q^2 \equiv 0 \pmod{5}$

$$A = (p^2 + q^2)(p^2 - q^2) + 2020q^4 \equiv 0 \pmod{5} \quad 1$$

Nếu p^2, q^2 không cùng số dư khi chia cho 5 thì

$$p^2 + q^2 \equiv 1 + 4 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\text{Vậy } A \equiv 0 \pmod{5} \quad 2$$

Từ 1 và 2 suy ra $A : 5$ *

Mặt khác: $p, q > 5$ nên p, q lẻ

Suy ra $p^2 \equiv q^2 \equiv 1 \pmod{4}$

$$p^2 - q^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

$$A = (p^2 + q^2)(p^2 - q^2) + 2020q^4 \equiv 0 \pmod{4}$$

Suy ra $A : 4$ **

Từ * và ** Suy ra $A : 20$.

Bài 5: Cho p, q là hai số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng $p^4 + 2019q^4$ chia hết cho 20.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= p^4 + 2019q^4 = p^4 - q^4 + 2020q^4 \\ &= (p^2 + q^2)(p^2 - q^2) + 2020q^4 \end{aligned}$$

Vì p, q là hai số nguyên tố lớn hơn 5 nên $(p, 5) = (q, 5) = 1$

$$\Rightarrow p^2, q^2 \equiv 1, 4 \pmod{5}$$

Nếu $p^2 \equiv q^2 \pmod{5}$ thì $p^2 - q^2 \equiv 0 \pmod{5}$

$$\Rightarrow A = (p^2 + q^2)(p^2 - q^2) + 2020q^4 \equiv 0 \pmod{5} \quad (1)$$

Nếu p^2, q^2 không cùng số dư khi chia cho 5 thì

$$p^2 + q^2 \equiv 1 + 4 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow A \equiv 0 \pmod{5} \quad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra $A \div 5$ (*)

Mặt khác: $p, q > 5$ nên p, q lẻ

$$\Rightarrow p^2 \equiv q^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow p^2 - q^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow A = (p^2 + q^2)(p^2 - q^2) + 2020q^4 \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow A \div 4 \quad (**)$$

Từ (*) (**) $\Rightarrow A \div 20$

Bài 6: Cho biết $a + 4b$ chia hết cho 13 ($a, b \in \mathbb{N}$). Chứng minh rằng $10 + b \div 13$

Trích đề HSG huyện Lâm Thao, năm 2018- 2019

Lời giải

$$a + 4b \div 13 \Rightarrow 10a + 40b \div 13 \Leftrightarrow 10a + b + 39b \div 13$$

$$39b \div 13 \Rightarrow 10a + b \div 13$$

Bài 7: Cho $S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$

a) Chứng minh rằng S là bội của -20

b) Tính S , từ đó suy ra 3^{100} chia cho 4 dư 1

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Lời giải

a) Tổng S có 100 số hạng chia thành 25 nhóm, mỗi nhóm 4 số hạng

$$S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$$

$$= (1 + 3 + 3^2 - 3^3) + (3^4 - 3^5 + 3^6 - 3^7) + \dots + (3^{96} - 3^{97} + 3^{98} - 3^{99})$$

$$= (-20) + 3^4 \cdot (-20) + \dots + 3^{96} \cdot (-20) \Rightarrow S \div -20$$

$$b) S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$$

$$3S = 3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 + \dots + 3^{99} - 3^{100}$$

$$\Rightarrow 3S + S = 4S = \frac{1 - 3^{100}}{4}$$

$$\Rightarrow 3^{100} - 1 \div 4 \Rightarrow 3^{100} \text{ chia cho 4 dư 1.}$$

Bài 8: Chứng tỏ: $A = 10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27 (với n là số tự nhiên)

Trích đề HSG huyện Kim Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

$$A = 10^n + 18n - 1 = 10^n - 1 - 9n + 27n$$

$$= \underbrace{99 \dots 9}_n - 9n + 27n = 9 \cdot \underbrace{(11 \dots 1)}_n - n + 27n$$



Ta biết số n và số có tổng các chữ số bằng n có cùng số dư khi chia cho 9 do đó $\underbrace{11\dots1}_n - n : 9$ nên $9 \cdot (\underbrace{11\dots1}_n - n) : 27$.

Vậy $A : 27$

Dạng 2: Tìm số dư, chữ số tận cùng.

Trắc nghiệm

Bài 1: Chữ số tận cùng của $21^{2018} - 11^{2017}$ là:

- A. 0 . B. 1 . C. 7 . D. 8 .

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: A. 0 .

Tự luận

Bài 1: Cho $A = 0 - 1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \dots + 2019 - 2021 + 2023$. Tìm chữ số tận cùng của A .

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

$$A = 0 - 1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \dots + 2019 - 2021 + 2023$$

Số số hạng của A là $1013 = 2 \cdot 506 + 1$

$$\begin{aligned} A &= 0 - 1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \dots + 2019 - 2021 + 2023 \\ &= 0 + (-1 + 3) + (-5 + 7) + (-9 + 11) + \dots + 2019 + (-2021 + 2023) \\ &= 0 + 2 + 2 + \dots + 2 \\ &= 0 + 2 \cdot 506 = 1012 \end{aligned}$$

Vậy số tận cùng của A là 2 .

Bài 2:

1) Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

- a) 57^{1999} b) 93^{1999}

2) Cho $A = 999993^{1999} - 555557^{1997}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 5

Trích đề HSG cấp trường năm 2019-2020

Lời giải

1) a) Ta có: $7^{1999} = (7^4)^{499} \cdot 7^3 = 2401^{499} \cdot 343$ nên chữ số tận cùng là 3 . Vậy số 57^{1999} có chữ số tận cùng là 3

b) $3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3^3 = 81^{499} \cdot 27$ nên có chữ số tận cùng là 7

2) Để chứng minh A chia hết cho 5, ta xét chữ số tận cùng của A bằng việc xét chữ số tận cùng của từng số hạng

Theo câu 1b, 999993^{1999} có chữ số tận cùng là 7



Tương tự câu 1a, ta có: $(7^4)^{499} \cdot 7 = 2401^{499} \cdot 7$ có chữ số tận cùng là 7

Vậy A có chữ số tận cùng là 0, nên A chia hết cho 5.

Bài 3: Tìm chữ số tận cùng của các số sau :

a) 57^{2011} .

b) 93^{1999} .

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2020 -2021

Lời giải

a) Tìm chữ số tận cùng của số 57^{2011}

Xét 7^{2011} ; ta có: $7^{2011} = (7^4)^{502} \cdot 7^3 = 2401^{502} \cdot 343$

Suy ra chữ số tận cùng bằng 3.

Vậy số 57^{2011} có chữ số tận cùng là 3.

b) Tìm chữ số tận cùng của số 93^{1999}

Xét 3^{1999} ; Ta có: $3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3^3 = 81^{499} \cdot 27$

Suy ra chữ số tận cùng của số 93^{1999} bằng 7.

Vậy số 93^{1999} có chữ số tận cùng là 7.

Bài 4: Cho số $B = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó chữ số tận cùng của B bằng

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2020-2021

Bài 5: Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a) 57^{2011}

b) 93^{1999}

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Lời giải

a) Tìm chữ số tận cùng của số 57^{2011}

Xét 7^{2011} , ta có: $7^{2011} = (7^4)^{502} \cdot 7^3 = 2401^{502} \cdot 343$,

suy ra chữ số tận cùng bằng 3

Vậy số 57^{2011} có chữ số tận cùng là 3

b) Tìm chữ số tận cùng của số 93^{1999}

Xét 3^{1999} , ta có: $3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3^3 = 81^{499} \cdot 27$

Suy ra chữ số tận cùng bằng 7

Vậy số 93^{1999} có chữ số tận cùng là 7.

Bài 6: Tìm số dư trong phép chia khi chia một số tự nhiên cho 91. Biết rằng nếu lấy số tự nhiên đó chia cho 7 thì được dư là 5 và chia cho 13 được dư là 4

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019



Lời giải

Gọi số tự nhiên đó là a

Theo bài ra ta có: $a = 7p + 5; a = 13q + 4 (p, q \in \mathbb{N})$

Suy ra: $a + 9 = 7p + 14 = 7 \cdot (p + 2) : 7$

$a + 9 = 13q + 13 = 13(q + 1) : 13$

Ta có: $a + 9 : 7; a + 9 : 13; (7, 13) = 1$

Do đó $a + 9 : 91 \Rightarrow a + 9 = 91k \Rightarrow a = 91k - 9 = 91k - 91 + 82 = 91 \cdot (k - 1) + 82$

Nên a chia cho 91 có dư là 82.

Bài 7: Một số tự nhiên khi chia cho 15 dư 5, chia cho 18 dư 17. Hỏi số đó khi chia cho 90 dư bao nhiêu ?

Trích đề HSG huyện Quế Sơn 2018-2019

Lời giải

Có $A = 15b + 5$ và $A = 18c + 17$

$\Rightarrow A + 55 = 15b + 60 = 5(3b + 12) \Rightarrow A + 55$ chia hết cho 5

Và $A + 55 = 18c + 72 = 18(c + 4) \Rightarrow A + 55$ chia hết cho 18

Do $(5, 18) = 1$ nên $A + 55$ chia hết cho 90

$\Rightarrow A$ chia 90 dư 35 (dư $90 - 55 = 35$)

Bài 8: Tìm chữ số tận cùng của số $6^{2006}, 7^{2007}$

Trích đề HSG cấp huyện 2016-2017

Lời giải

Ta có: $6^2 = 36 \equiv 6 \pmod{10}$, vậy $6^n \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow 6^{2006} \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow$ chữ số tận cùng của 6^{2006} là 6

$7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{10}$, mà $7^{2007} = 7^{4 \cdot 501} \cdot 7^3$

Mà chữ số tận cùng của 7^3 là 3 nên chữ số tận cùng của 7^{2007} là 3.

Bài 9: Cho $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2022} + 5^{2023}$. Tìm số dư khi chia M cho 31

Trích đề HSG trường THCS Quỳnh Thiện 2021-2022

Ta có $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2022} + 5^{2023}$
 $= 5 + (5^2 + 5^3 + 5^4) + (5^5 + 5^6 + 5^7) + \dots + (5^{2021} + 5^{2022} + 5^{2023})$

$= 5 + 5^2 \cdot (1 + 5 + 5^2) + 5^5 \cdot (1 + 5 + 5^2) + \dots + 5^{2021} \cdot (1 + 5 + 5^2)$

$= 5 + 5^2 \cdot 31 + 5^5 \cdot 31 + \dots + 5^{2021} \cdot 31$

\Rightarrow số M chia cho 31 có dư là 5

Bài 10: Cho $A = 3 \cdot (2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$



Không làm phép tính, hãy rút gọn biểu thức rồi tìm số tận cùng của A .

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2018 - 2019

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= 3(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) \\ &= (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) \\ &= (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) \\ &= (2^8 - 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) \\ &= (2^{16} - 1)(2^{16} + 1) = 2^{32} - 1 \end{aligned}$$

Vì 2^{32} tận cùng là 2 nên $A = 2^{32} - 1$ tận cùng là 1.

Bài 11: Viết số 4321^{4321} dưới dạng tổng của một số nguyên dương. Gọi T là tổng các lập phương của tất cả các số đó. Tìm số dư của T trong phép chia cho 6.

Trích đề HSG huyện Trục Ninh năm 2017 - 2018

Lời giải

Nhận xét: Với a là số nguyên dương thì $(a-1)a(a+1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6. Mà $(a-1)a(a+1) = a^3 - a$, nên suy ra $a^3 - a$ chia hết cho 6 với a là số nguyên dương.

Ta có:

$$4321^{1234} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$T = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_n^3$$

$$\text{Xét hiệu } T - 4321^{1234} = (a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_n^3) - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$$

$$T - 4321^{1234} = (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + (a_3^3 - a_3) + \dots + (a_n^3 - a_n)$$

$$\text{Do } a_1^3 - a_1 : 6, a_2^3 - a_2 : 6, a_3^3 - a_3 : 6, \dots, a_n^3 - a_n : 6, \text{ nên } T - 4321^{1234} : 6$$

Suy ra T và 4321^{1234} đồng dư khi chia cho 6

Mặt khác 4321 chỉ 6 dư 1 nên 4321^{1234} chia cho 6 cũng dư 1. Vậy T chia 6 dư 1

Bài 12: Tìm chữ số tận cùng của số $P = 14^{14^{14}} + 9^{9^9} + 2^{2^3}$

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2018 - 2019

Lời giải

$$P = 14^{14^{14}} + 9^{9^9} + 2^{2^3}$$

Chữ số tận cùng của $14^{14^{14}}$ là 6

Chữ số tận cùng của 9^{9^9} là 9

Chữ số tận cùng của 2^{2^3} là 2

Chữ số tận cùng của P là chữ số tận cùng của tổng $(6+9+2)$ là 7



B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

Dạng 1: Toán chứng minh chia hết

Bài 1: Chứng minh rằng với n là số tự nhiên thì $(2021^{2n+1} + 2020) : 3$.

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Bài 2: Chứng tỏ: $S = 16^5 + 2^{15}$ chia hết cho 33.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2010 - 2011

Bài 3: Chứng minh rằng: $3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{101}$ chia hết cho 120.

Trích đề HSG huyện Hằng Hoá năm 2014 - 2015

Bài 4: Cho p, q là hai số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng $p^4 + 2019q^4$ chia hết cho 20.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2022 - 2023

Bài 5: Cho p, q là hai số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng $p^4 + 2019q^4$ chia hết cho 20.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021 - 2022

Bài 6: Cho biết $a + 4b$ chia hết cho 13 ($a, b \in \mathbb{N}$). Chứng minh rằng $10 + b : 13$

Trích đề HSG huyện Lâm Thao, năm 2018- 2019

Bài 7: Cho $S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$

c) Chứng minh rằng S là bội của -20

d) Tính S , từ đó suy ra 3^{100} chia cho 4 dư 1

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Bài 8: Chứng tỏ: $A = 10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27 (với n là số tự nhiên)

Trích đề HSG huyện Kim Sơn năm 2021 - 2022

Dạng 2: Tìm số dư, chữ số tận cùng.

Trắc nghiệm

Bài 1: Chữ số tận cùng của $21^{2018} - 11^{2017}$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 7.

D. 8.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Tự luận

Bài 1: Cho $A = 0 - 1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \dots + 2019 - 2021 + 2023$. Tìm chữ số tận cùng của A .

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 2:

1) Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a) 57^{1999}

b) 93^{1999}

2) Cho $A = 999993^{1999} - 555557^{1997}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 5

Trích đề HSG cấp trường năm 2019-2020

Bài 3: Tìm chữ số tận cùng của các số sau :



a) 57^{2011} .

b) 93^{1999} .

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2020 -2021

Bài 4: Cho số $B = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó chữ số tận cùng của B bằng

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2020-2021

Bài 5: Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a) 57^{2011}

b) 93^{1999}

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Bài 6: Tìm số dư trong phép chia khi chia một số tự nhiên cho 91. Biết rằng nếu lấy số tự nhiên đó chia cho 7 thì được dư là 5 và chia cho 13 được dư là 4

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Bài 7: Một số tự nhiên khi chia cho 15 dư 5, chia cho 18 dư 17. Hỏi số đó khi chia cho 90 dư bao nhiêu ?

Trích đề HSG huyện Quế Sơn 2018-2019

Bài 8: Tìm chữ số tận cùng của số $6^{2006}, 7^{2007}$

Trích đề HSG cấp huyện 2016-2017

Bài 9: Cho $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2022} + 5^{2023}$. Tìm số dư khi chia M cho 31

Trích đề HSG trường THCS Quỳnh Thiện 2021-2022

Bài 10: Cho $A = 3 \cdot (2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$

Không làm phép tính, hãy rút gọn biểu thức rồi tìm số tận cùng của A .

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2018 - 2019

Bài 11: Viết số 4321^{4321} dưới dạng tổng của một số nguyên dương. Gọi T là tổng các lập phương của tất cả các số đó. Tìm số dư của T trong phép chia cho 6.

Trích đề HSG huyện Trục Ninh năm 2017 - 2018

Bài 12: Tìm chữ số tận cùng của số $P = 14^{14^{14}} + 9^9 + 2^{3^4}$

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2018 - 2019

C. SỬU TÂM CÁC BÀI TRONG CÁC ĐỀ CỦA NHỮNG NĂM TRƯỚC ĐÓ (Phần này lấy các câu từ những năm trước, trước năm 2020-2021, tối thiểu 10 bài)

1. Định nghĩa và các điều kiện:

a. Định nghĩa:

Cho $m \in \mathbb{N}^*$; $a, b \in \mathbb{Z}$. Nếu a và b khi chia cho m có cùng số dư ta nói: a và b đồng dư theo môđun m .

Kí hiệu: $a \equiv b \pmod{m}$

Hệ thức: $a \equiv b \pmod{m}$ gọi là đồng dư thức.

Ví dụ: $19 \equiv 3 \pmod{8}$;

b. Các điều kiện tương đương:



1) $a \equiv b \pmod{m}$

2) $(a - b) : m$ Ví dụ : $19 \equiv 9 \pmod{5} \Rightarrow 19 - 9 : 5$

3) Tồn tại $t \in \mathbb{Z}$ sao cho: $a = b + mt$.

2. Các tính chấta) Quan hệ đồng dư là một quan hệ tương đương trên tập hợp Z có nghĩa là:

1) $a \equiv a \pmod{m}$

2) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$

3) $a \equiv b \pmod{m}; b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$.

3. Các hệ quả

1) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c \pmod{m}$

2) $a + c \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b - c \pmod{m}$

3) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a + k.m \equiv b \pmod{m}$

4) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a.c \equiv b.c \pmod{m}$

5) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$

6) Cho $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Nếu $\alpha \equiv \beta \pmod{m}$ thì ta cũng có $f(\alpha) \equiv f(\beta) \pmod{m}$. Đặc biệt: $f(\alpha) \equiv 0 \pmod{m}$ thì ta cũng có:

$$f(\alpha + k.m) \equiv 0 \pmod{m} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

7) Ta có thể chia cả hai vế của một đồng dư thức cho một ước chung của chúng nguyên tố với môđun. Cụ thể là: $a.c \equiv b.c \pmod{m}; \text{ƯCLN}(c; m) = 1 \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$.8) Ta có thể nhân cả hai vế và môđun của một đồng dư thức với cùng một số nguyên dương. Cụ thể là: $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a.c \equiv b.c \pmod{m.c} \quad \forall c \in \mathbb{N}^*$.

9) Ta có thể chia cả hai vế và môđun của một đồng dư thức với cùng một ước dương của chúng.

Cụ thể là: $a \equiv b \pmod{m}; 0 < c \in \text{ƯC}(a; b; m)$ suy ra $\frac{a}{c} \equiv \frac{b}{c} \pmod{\frac{m}{c}}$.

10) Nếu 2 số a và b đồng dư với nhau theo nhiều môđun thì chúng đồng dư với nhau theo môđun là bội chung nhỏ nhất của môđun ấy. Cụ thể là: $a \equiv b \pmod{m_i}, i = \overline{1, n} \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$.

Trong đó: $m = \text{BCNN}(m_1, m_2, \dots, m_n)$.

11) Nếu a và b đồng dư với nhau theo môđun m thì chúng cũng đồng dư với nhau theo môđun là ước dương của m . Cụ thể là:

$$a \equiv b \pmod{m}; 0 < d \in \text{Ư}(m) \Rightarrow a \equiv b \pmod{d}.$$

12) Nếu: $a \equiv b \pmod{m}$ thì: $\text{ƯCLN}(a; m) = \text{ƯCLN}(b; m)$.**Bài 1:** Chứng minh rằng $12^{2n+1} + 11^{n+2}$ chia hết cho 133 với $n \in \mathbb{N}$.**Lời giải***Cách 1:* Ta có $12^2 = 144 \equiv 11 \pmod{133}; 11^2 = 121 \equiv -12 \pmod{133}$

$$12^{2n+1} = 12 \cdot 12^{2n} \equiv 12 \cdot 11^n \pmod{133}$$

$$11^{n+2} = 11^2 \cdot 11^n \equiv -12 \cdot 11^n \pmod{133}$$

Do đó $12^{2n+1} + 11^{n+2} \equiv 12 \cdot 11^n - 12 \cdot 11^n \equiv 0 \pmod{133}$ *Cách 2:* Ta có $12^2 = 144 \equiv 11 \pmod{133}$ nên $12^{2n} \equiv 11^n \pmod{133}$ (1)



$$\text{Mà } 12 \equiv -121 \pmod{133} \equiv -11^n \pmod{133} \quad (2)$$

Nhân (1) và (2) về theo về, ta được: $12^{2n+1} \equiv -11^{n+2} \pmod{133}$

$$\text{Suy ra } 12^{2n+1} + 11^{n+2} \equiv 0 \pmod{133}$$

Vậy $12^{2n+1} + 11^{n+2}$ chia hết cho 133 với $n \in \mathbb{N}$.

Bài 2: Chứng minh rằng $2^{2002} - 4$ chia hết cho 31.

Lời giải

Ta có $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$ mà $2002 = 5 \cdot 400 + 2$ nên $2^{2002} = (2^5)^{400} \cdot 2^2$

$$\text{Vì } 2^5 \equiv 1 \pmod{31}$$

$$(2^5)^{400} \equiv 1^{400} \pmod{31}$$

$$(2^5)^{400} \cdot 2^2 \equiv 1 \cdot 2^2 \pmod{31}$$

Suy ra $2^{2002} \equiv 4 \pmod{31}$ hay $2^{2002} - 4 \vdots 31$

Bài 3: Tìm số dư trong phép chia số $A = 2020^{2021}$ cho 3.

Lời giải

Ta có: $2020 \equiv 1 \pmod{3}$

$$2020^{2021} \equiv 1^{2021} \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}$$

Vậy số 2020^{2021} khi chia cho 3 thì dư 1.

Bài 4: Tìm số dư của $A = 3^{2005} + 4^{2005}$ khi chia A cho 11 và khi chia cho 13.

Lời giải

Ta có $3^5 \equiv 1 \pmod{11}$ suy ra $(3^5)^{401} \equiv 1 \pmod{11}$

$$4^5 \equiv 1 \pmod{11} \text{ suy ra } (4^5)^{401} \equiv 1 \pmod{11}$$

Khi đó A chia cho 11 dư 2.

Mặt khác: $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$ nên $(3^3)^{668} \cdot 3 \equiv 3 \pmod{13}$

Và $4^3 \equiv -1 \pmod{13}$ nên $(4^3)^{668} \cdot 4 \equiv 4 \pmod{13}$,

Khi đó A chia cho 13 dư 7.

Bài 5: Chứng minh rằng: $A = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n \vdots 19$

Lời giải

$$A = 7 \cdot 25^n + 12 \cdot 6^n.$$

Vì $25^n \equiv 6^n \pmod{19}$ nên $7 \cdot 25^n \equiv 7 \cdot 6^n \pmod{19}$

$$\text{Suy ra } A = 7 \cdot 6^n + 12 \cdot 6^n \pmod{19} = 6^n \cdot 19 \pmod{19} \equiv 0 \pmod{19}$$

Vậy $A \vdots 19$

Bài 6: Tìm số dư khi chia $A = 1944^{2005}$ cho 7.

Lời giải

$$1944 \equiv -2 \pmod{7} \text{ nên } 1944^{2005} \equiv (-2)^{2005} \pmod{7}$$

$$\text{Mà } (-2)^3 \equiv -1 \pmod{7} \text{ nên } 1944^{2004} \equiv (-2^3)^{668} \pmod{7} \equiv (-1)^{668} \pmod{7} \equiv 1 \pmod{7}$$



Vậy $1944^{2005} \equiv 1 \cdot (-2) \pmod{7}$ hay A chia cho 7 dư 5.

Bài 7: Chứng minh rằng các số $A = 6^{1000} - 1$ và $B = 6^{1001} + 1$ đều là bội số của 7.

Lời giải

Ta có:

$$6 \equiv -1 \pmod{7}$$

$$6^{1000} \equiv 1 \pmod{7}$$

$$6^{1000} - 1 \equiv 0 \pmod{7} \text{ hay } 6^{1000} - 1 : 7$$

Vậy A là bội của 7.

Ta có: $6^{1000} \equiv 1 \pmod{7}$

$$6^{1001} \equiv 6 \pmod{7}$$

mà $6 \equiv -1 \pmod{7}$ nên $6^{1001} \equiv -1 \pmod{7}$

$$6^{1001} + 1 \equiv 0 \pmod{7} \text{ hay } 6^{1001} + 1 : 7$$

Vậy B là bội của 7.

Bài 8: Chứng minh rằng: $3012^{93} - 1$ chia hết cho 13.

Lời giải

Ta có: $3012 = 13 \cdot 231 + 9$

Do đó: $3012 \equiv 9 \pmod{13}$

Suy ra: $3012^3 \equiv 9^3 \pmod{13}$

mà $9^3 = 729 \equiv 1 \pmod{13}$

nên $3012^3 \equiv 1 \pmod{13}$

$$(3012^3)^{31} \equiv 1 \pmod{13}$$

hay $3012^{93} \equiv 1 \pmod{13}$

Suy ra $3012^{93} - 1 \equiv 1 - 1 \pmod{13}$

$$3012^{93} - 1 \equiv 0 \pmod{13}$$

Vậy $3012^{93} - 1$ chia hết cho 13.

Bài 9: Chứng minh rằng: $A = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ chia hết cho 19.

Lời giải

Ta có $A = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n = 7 \cdot 25^n + 12 \cdot 6^n$

Vì $25 \equiv 6 \pmod{19}$ nên $25^n \equiv 6^n \pmod{19}$

Suy ra $7 \cdot 25^n \equiv 7 \cdot 6^n \pmod{19}$

Do đó $7 \cdot 25^n + 12 \cdot 6^n \equiv 7 \cdot 6^n + 12 \cdot 6^n \equiv 19 \cdot 6^n \equiv 0 \pmod{19}$

Chứng tỏ A chia hết cho 19.

Bài 10: Chứng minh rằng : $2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7.

Lời giải

Ta có: $2222 + 4 : 7$ nên $2222 \equiv -4 \pmod{7}$ do đó $2222^{5555} \equiv (-4)^{5555} \pmod{7}$

Ta có: $5555 - 4 : 7$ nên $5555 \equiv 4 \pmod{7}$ do đó $5555^{2222} \equiv 4^{2222} \pmod{7}$



$$\text{Suy ra } 2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv (-4)^{5555} + 4^{2222} \pmod{7} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } 4^{2222} &= (-4)^{2222} \text{ nên } (-4)^{5555} + 4^{2222} = -4^{2222} \cdot 4^{3333} + 4^{2222} \\ &= -4^{2222} (4^{3333} - 1) \equiv 4^3 - 1 \pmod{7} \end{aligned}$$

$$\text{Ta lại có: } 4^3 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$4^3 - 1 = 63 : 7$$

$$4^3 - 1 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\text{nên } (-4)^{5555} + 4^{2222} \equiv 0 \pmod{7} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7.

Bài 11:

1) Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a) 57^{1999}

b) 93^{1999}

2) Cho $A = 999993^{1999} - 555557^{1997}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 5

Trích đề HSG cấp trường năm 2017-2018

Lời giải

1) a) Ta có: $7^{1999} = (7^4)^{499} \cdot 7^3 = 2401^{499} \cdot 343 \Rightarrow$ nên chữ số tận cùng là 3

Vậy số 57^{1999} có chữ số tận cùng là 3

b) $3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3^3 = 81^{499} \cdot 27$ nên có chữ số tận cùng là 7

2) Để chứng minh A chia hết cho 5, ta xét chữ số tận cùng của A bằng việc xét chữ số tận cùng của từng số hạng

Theo câu 1b, 999993^{1999} có chữ số tận cùng là 7

Tương tự câu 1a, ta có: $(7^4)^{499} \cdot 7 = 2401^{499} \cdot 7$ có chữ số tận cùng là 7

Vậy A có chữ số tận cùng là 0, nên A chia hết cho 5.

Bài 12: Tìm số tận cùng của các số sau:

$$52^{35}; \quad 204^{402}.$$

Lời giải

$$52^{35} = 52^{4 \cdot 8 + 3} = 52^{4 \cdot 8} \cdot 52^3 = (52^4)^8 \cdot \overline{\dots 8} = \overline{\dots 6} \cdot \overline{\dots 8} = \overline{\dots 8}.$$

Vậy 52^{35} có chữ số tận cùng là 8.

$$204^{402} = 204^{4 \cdot 100 + 2} = 204^{4 \cdot 100} \cdot 204^2 = (204^4)^{100} \cdot \overline{\dots 6} = \overline{\dots 6} \cdot \overline{\dots 6} = \overline{\dots 6}.$$

Vậy 204^{402} có chữ số tận cùng là 6.

Bài 13: Tìm số tận cùng của các số sau:

$$58^{2018}; \quad 213^{3102}; \quad 120^{1040}.$$

Lời giải

$$58^{2018} = 4^{4 \cdot 504 + 2} = 4^{4 \cdot 504} \cdot 58^2 = (58^4)^{504} \cdot \overline{\dots 6} = \overline{\dots 6} \cdot \overline{\dots 6} = \overline{\dots 6}$$



Vậy 58^{2018} có chữ số tận cùng là 6.

$$213^{3102} = 213^{4 \cdot 775 + 2} = 213^{4 \cdot 775} \cdot 213^2 = (213^4)^{775} \cdot \overline{\dots 9} = \overline{\dots 1} \cdot \overline{\dots 9} = \overline{\dots 9}.$$

Vậy 213^{3102} có chữ số tận cùng là 9.

$$120^{1040} = 120^{4 \cdot 260} = (120^4)^{260} = \overline{\dots 0}.$$

Vậy 120^{1040} có chữ số tận cùng là 0.

Bài 14: Tìm số tận cùng của: $A = 17^{25} + 24^4 - 13^{21}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= 17^{4 \cdot 6} \cdot 17 + 24^4 - 13^{4 \cdot 5} \cdot 13 = (17^4)^6 \cdot 17 + 24^4 - (13^4)^5 \cdot 13 = \overline{\dots 1} \cdot 17 + \overline{\dots 6} - \overline{\dots 1} \cdot 13 \\ &= \overline{\dots 7} + \overline{\dots 6} - \overline{\dots 3} = \overline{\dots 0} \end{aligned}$$

Vậy A có chữ số tận cùng là 0.

Bài 15: Tìm số tận cùng của: $A = 17^{2008} - 11^{2008} - 3^{2008}$.

Lời giải

$$A = 17^{4 \cdot 502} - 11^{2008} - 3^{4 \cdot 502} = (17^4)^{502} - 11^{2008} - (3^4)^{502} = \overline{\dots 1} - \overline{\dots 1} - \overline{\dots 1} = \overline{\dots 0} - \overline{\dots 1} = \overline{\dots 9}.$$

Vậy A có chữ số tận cùng là 9.

Bài 16: Cho $A = 8^{102} - 2^{102}$. Chứng minh A chia hết cho 10.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 8^{102} - 2^{102} = 8^{4 \cdot 25} \cdot 8^2 - 2^{4 \cdot 25} \cdot 2^2 = (4^4)^{25} \cdot 64 - (2^4)^{25} \cdot 4 = \overline{\dots 6} \cdot 64 - \overline{\dots 6} \cdot 4 = \overline{\dots 4} - \overline{\dots 4} = \overline{\dots 0}.$$

Suy ra A chia hết cho 10.

Bài 17: Cho $A = 99^5 - 98^4 + 97^3 - 96^2$. Chứng minh A chia hết cho 10.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 99^5 - 98^4 + 97^3 - 96^2 = 99^4 \cdot 99 - 98^4 + 97^3 - 96^2 = \overline{\dots 1} \cdot 99 - \overline{\dots 6} + \overline{\dots 3} - \overline{\dots 6} = \overline{\dots 0}.$$

Suy ra A chia hết cho 10.

Bài 18: Tìm số dư trong phép chia 2004^{2004} khi chia cho 11.

Lời giải

$$\text{Ta có } 2002 : 11 \Rightarrow 2004 \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow 2004^{2004} \equiv 2^{2004} \pmod{11}$$

$$\text{Mà } 2^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 2004^{2004} = 2^4 \cdot 2^{2000} \equiv 2^4 \cdot (2^{10})^{200} \pmod{11} \equiv 2^4 \pmod{11} \equiv 5 \pmod{11}$$

Vậy 2004^{2004} chia cho 11 dư 5.

Bài 19: Tìm số dư khi chia $A = 1944^{2005}$ cho 7.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 1944 \equiv -2 \pmod{7} \Rightarrow 1944^{2005} \equiv (-2)^{2005} \pmod{7}$$

$$\text{Mà } (-2)^3 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 1944^{2004} \equiv (-2^3)^{668} \pmod{7} \equiv (-1)^{668} \pmod{7} \equiv 1 \pmod{7}$$

Vậy $1944^{2005} \equiv 1 \cdot (-2) \pmod{7}$ hay A chia cho 7 dư 5.

Bài 20: Chứng minh rằng: $2^{2002} - 4 : 31$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31}$$

$$\Rightarrow A = 2^{2002} - 4 \equiv 0 \pmod{31}$$



$$\Rightarrow (2^5)^{400} \cdot 2^2 \equiv 4 \pmod{31}$$

Vậy $2^{2002} - 4 \vdots 31$.

Bài 21: Tìm một số tự nhiên có 6 chữ số tận cùng là chữ số 4. Biết rằng khi chuyển chữ số 4 đó lên đầu còn các chữ số khác giữ nguyên thì ta được số mới gấp 4 lần số cũ.

(Đề thi HSG Gia Lai năm 2018 - 2019)

Lời giải:

Gọi số cần tìm là $\overline{abcde4}$, ta có: $\overline{abcde4} \cdot 4 = \overline{4abcde}$

Đặt $\overline{abcde} = x \Rightarrow \overline{abcde4} = \overline{x4}$

Ta có: $\overline{x4} \cdot 4 = 400000 + x$

$$(10x + 4) \cdot 4 = 400000 + x$$

$$40x + 16 = 400000 + x$$

$$39x = 399984$$

$$x = 10256$$

Vậy số cần tìm là 10256.

Bài 22: Cho $A = 2017 + 2017^2 + 2017^3 + \dots + 2017^{18}$. Chứng tỏ rằng $A \vdots 2018$.

Tìm chữ số tận cùng của A.

(Đề HSG Trục Ninh năm 2017 - 2018)

Lời giải:

Ta có $A = 2017 + 2017^2 + 2017^3 + \dots + 2017^{18}$ (tổng A có 2018 số hạng, $2018 \vdots 2$)

$$A = (2017 + 2017^2) + (2017^3 + 2017^4) + \dots + (2017^{2017} + 2017^{2018})$$

$$= 2017 \cdot (1 + 2017) + 2017^3 \cdot (1 + 2017) + \dots + 2017^{2017} (1 + 2017)$$

$$= 2018 \cdot (2017 + 2017^3 + \dots + 2017^{2017}) \vdots 2018$$

$$= 2017 + 2017^2 + (2017^3 + 2017^4 + 2017^5 + 2017^6) + \dots + (2017^{2015} + 2017^{2016} + 2017^{2017} + 2017^{2018})$$

$$= (\overline{\dots 6}) + 2017^3 \cdot (\overline{\dots 0}) + \dots + 2017^{2015} \cdot (\overline{\dots 0})$$

$$= (\overline{\dots 6})$$

Vậy chữ số tận cùng của A là 6.

Bài 23: Tìm chữ số tận cùng của số $P = 14^{14^{14}} + 9^{9^9} + 2^{3^4}$

(Đề HSG Lý Nhân năm 2018 - 2019).

Lời giải:

Chữ số tận cùng của $14^{14^{14}}$ là 6.



Chữ số tận cùng của 9^{9^9} là 9.

Chữ số tận cùng của 2^{3^4} là 2.

Chữ số tận cùng của P là chữ số tận cùng của tổng $(6+9+2)$ là 7.

Bài 24: Cho $M = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$

a) Chứng tỏ rằng $M : 5$.

b) Tìm chữ số tận cùng của M .

(Đề HSG Bắc Ninh năm 2016 - 2017)

Lời giải:

a) Ta có: $M = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$

$$= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + (2^{17} + 2^{18} + 2^{19} + 2^{20})$$

$$= 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3) + \dots + 2^{17}(1 + 2 + 2^2 + 2^3)$$

$$= 15(2 + \dots + 2^{17})$$

$$= 5 \cdot 3 \cdot (2 + \dots + 2^{17}) : 5$$

b) Dễ thấy $M : 2; M : 5 \Rightarrow M : 10$

Do đó: M có chữ số tận cùng bằng 0.

Bài 25: Cho $A = 3(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$. Không làm phép tính, hãy rút gọn biểu thức rồi tìm số tận cùng của A .

(Đề HSG Bắc Ninh năm 2016 - 2017)

Lời giải:

Ta có: $A = 3(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$

$$= (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$$

$$= (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$$

$$= (2^8 - 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$$

$$= (2^{16} - 1)(2^{16} + 1)$$

$$= 2^{32} - 1$$

Vì 2^{32} có chữ số tận cùng là 2 nên $A = 2^{32} - 1$ có chữ số tận cùng là 1.

Bài 26: Cho $A = \frac{1}{2}(7^{2012 \cdot 2015} - 3^{92^{94}})$. Chứng minh A là số tự nhiên chia hết cho 5.

(Đề HSG Hoàng Hoá năm 2018 - 2019)

Lời giải:



Vì $2012; 92$ đều là bội của 4 nên 2012^{2015} và 92^{94} cũng là bội của 4.

$$\text{Suy ra: } 2012^{2015} = 4m \quad (m \in \mathbb{N}^*)$$

$$92^{94} = 4n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{Khi đó: } 7^{2012^{2015}} - 3^{92^{94}} = 7^{4m} - 3^{4n} = (\overline{\dots 1}) - (\overline{\dots 1}) = 0$$

Vậy A có tận cùng là 0 nên chia hết cho 10 nên $A = \frac{1}{2}(7^{2012^{2015}} - 3^{92^{94}}) : 5$.

Bài 27: Cho $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$. Chứng minh rằng A không phải là số chính phương.

(Đề HSG Buôn Mê Thuật năm 2018 - 2019)

Lời giải:

Ta có các số $10^{2012}; 10^{2011}; 10^{2010}; 10^{2009}$ đều có chữ số tận cùng là 0.

Do đó: $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$ có chữ số tận cùng là 8.

Vậy A không phải là số chính phương.

Bài 28: Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a) 57^{2011}

b) 93^{1999}

(Đề HSG Tân Uyên 2018 - 2019)

Lời giải:

a) Xét 7^{2011} , ta có: $7^{2011} = (7^4)^{502} \cdot 7^3 = 2401^{502} \cdot 343$

Suy ra chữ số tận cùng bằng 3

Vậy số 57^{2011} có chữ số tận cùng là 3

b) Xét 3^{1999} ta có: $3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3^3 = 81^{499} \cdot 27$

Suy ra chữ số tận cùng bằng 7

Vậy số 93^{1999} có chữ số tận cùng là 7

Bài 29:

a) Tìm chữ số tận cùng của các số sau: $49^{31}; 32^{2000}$

b) Chứng tỏ rằng: $10^{2011} + 8$ chia hết cho 72

(Đề HSG Yên Lạc 2018 - 2019)

Lời giải:

a) Do 49 có chữ số tận cùng là 9, khi đó nâng lên lũy bậc lẻ có chữ số tận cùng là 9

Vậy 49^{31} có chữ số tận cùng là 9

Ta có $32^{2000} = 32^{4 \cdot 500}$ có chữ số tận cùng là 0 nên khi nâng lên lũy thừa $4n$ có tận cùng là chữ số 6.

Vậy 32^{2000} có chữ số tận cùng là 6

b) Vì $10^{2011} + 8$ có tổng các chữ số chia hết cho 9 nên tổng chia hết cho 9



Lại có $10^{2011} + 8$ có 3 chữ số tận cùng là 008 nên chia hết cho 8

Vậy $10^{2011} + 8$ chia hết cho 72.

Bài 30: Cho $A = 5 + 5^2 + \dots + 5^{96}$. Tìm chữ số tận cùng của A .

(Đề HSG 2017 - 2018)

Lời giải:

Ta có: $A = 5 + 5^2 + \dots + 5^{96}$

$$5A = 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{96} + 5^{97}$$

Do đó: $5A - A = 5^{97} - 5$

$$\text{Suy ra: } A = \frac{5^{97} - 5}{4}$$

Ta có: 5^{97} có chữ số tận cùng là 5

Suy ra $5^{97} - 5$ có chữ số tận cùng là 0

Vậy chữ số tận cùng của A là 0.

Bài 31: Tìm chữ số tận cùng của 187^{324}

Lời giải:

Ta thấy các số có tận cùng bằng 7 nâng lên lũy thừa bậc 4 thì được số có tận cùng bằng 1.

Các số có tận cùng bằng 1 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 1.

Do đó:

$$187^{324} = (187^4)^{81} = (\overline{\dots 1})^{81} = (\overline{\dots 1})$$

Vậy chữ số tận cùng của 187^{324} là 1

Bài 32: Tìm ba chữ số tận cùng của 5^{2008}

Lời giải:

$$5^{2008} = 5^{4 \cdot 502} = (5^4)^{502}$$

5^4 có tận cùng là 625

Suy ra $(5^4)^{502}$ có tận cùng là 625

Vậy 5^{2008} có 3 chữ số tận cùng là 625.

Bài 33: Tìm ba chữ số tận cùng của 2^{100} .

Lời giải

Ta có: $2^{10} = 1024 \equiv 024 \pmod{1000}$

$$2^{50} = (2^{10})^5 \equiv 24^5 \equiv 624 \pmod{1000}$$

$$2^{100} = (2^{50})^2 \equiv 624^2 \equiv 376 \pmod{1000}$$

Vậy ba chữ số tận cùng của 2^{100} là 376.

Bài 34. Tìm ba chữ số tận cùng của 123^{101}

Lời giải:



Ta có: $123^{101} = 123(123^{100} - 1) + 123 = 1000k + 123$ ($k \in \mathbb{N}$). Vậy 123^{101} có ba chữ số tận cùng là 123.

Bài 35. Tìm ba chữ số tận cùng của $2^{9^{2003}}$

Lời giải

- Tìm 2 chữ số tận cùng của 9^{2003}

Ta có $9^{2003} = 9^3 \cdot 9^{2000} = 9^3 \cdot (3^{20})^{50} \equiv 29 \pmod{100}$

- Khi đó ta có $2^{9^{2003}} = 2^{100k+29} = 2^{29} \cdot 2^{100k} \equiv 912.376 \equiv 912 \pmod{1000}$

Vậy 3 chữ số tận cùng là 912.

Bài 36. Tìm ba chữ số tận cùng của $3^{7^{213}}$

Lời giải

Ta có $7^{213} \equiv 7^{26 \cdot 8 + 5} \equiv (7^8)^{26} \cdot 7^5 \equiv 1^{26} \cdot 7^5 \equiv 7^5 \equiv 7 \pmod{1000}$

Khi đó $3^{7^{213}} = 3^{100k+7} = 3^{100k} \cdot 3^7 \equiv 1 \cdot 3^7 \equiv 187 \pmod{1000}$

Vậy ba chữ số tận cùng của $3^{7^{213}}$ là 187.

Bài 37. Tìm ba chữ số tận cùng của 5^{1992}

Lời giải

$5^{1992} = (5^4)^{498} = 625^{498} = 0625^{498} = \overline{\dots 0625}$

Vậy bốn chữ số tận cùng của 5^{1992} là 0625

Bài 38. Tìm ba chữ số tận cùng của số $T = 5^{946}$

Lời giải

Ta có 5^3 có ba chữ số tận cùng là 125

Suy ra $T = 5^{946} = (5^3)^{315} \cdot 5 = (\overline{n125})^{315} \cdot 5 = \overline{m125} \cdot 5 = \overline{t625}$

(Với $n, m, t \in \mathbb{N}$)

Vậy $T = 5^{946}$ có ba chữ số tận cùng là 125.

Bài 39. Tìm ba chữ số tận cùng của số: $P = 5^{1994}$

Lời giải

Ta có:

$5^4 = 0625$ tận cùng là 0625 ;	5^5 tận cùng là 3125 ;	5^6 tận cùng là 5625
5^7 tận cùng là 8125 ;	5^8 tận cùng là 0625 ;	5^9 tận cùng là 3125 ;
5^{10} tận cùng là 5625 ;	5^{11} tận cùng là 8125 ;	5^{12} tận cùng là 0625

Chu kỳ lặp là 4.

Suy ra:



5^{4m} tận cùng là 0625 ;

5^{4m+1} tận cùng là 3125

5^{4m+2} tận cùng là 5625 ;

5^{4m+3} tận cùng là 8125

Mà 1994 có dạng $4m+2$, do đó $M = 5^{1994}$ có 4 chữ số tận cùng là 5625.

Bài 40. Tìm ba chữ số tận cùng của số: $R = 123^{102}$

Lời giải

Do $(123,5) = 1$ suy ra $123^{100} - 1$ chia hết cho 125 (1).

Mặt khác: $123^{100} - 1 = (123^{25} - 1)(123^{25} + 1)(123^{50} + 1)$ suy ra $123^{100} - 1$ chia hết cho 8 (2).

Vì $(8,125) = 1$, từ (1) và (2) suy ra: $123^{100} - 1$ chi hết cho 1000

Suy ra: $123^{102} = 123^2(123^{100} - 1) + 15000 + 129 = 1000k + 129 (k \in \mathbb{N})$.

Vậy 123^{101} có ba chữ số tận cùng là 129.

Bài 41: Chứng minh rằng: $A = (2^{2^n} + 5) : 7 (\forall n \in \mathbb{N})$.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2015 -2016

Lời giải

Ta có: $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$

Ta đi tìm số dư của 2^{2^n} khi chia cho 3 .

Vì $4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 4^n \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2^{2^n} \equiv 1 \pmod{3}$ hay n chia cho 3 dư 1 .

Giả sử: $2^{2^n} = 3k + 1 (k \in \mathbb{N})$

Khi đó ta có: $A = 2^{3k+1} + 5 = 2 \cdot 8^k + 5$

Vì $8^k \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 2 \cdot 8^k \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 2 \cdot 8^k + 5 \equiv 2 + 5 \pmod{7}$

$\Rightarrow A \equiv 0 \pmod{7}$

Vậy $A : 7$.

Bài 42 : Chứng minh rằng: $A = 7 \cdot 5^{2^n} + 12 \cdot 6^n$ chia hết cho 19.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Tường năm 2014 -2015

Lời giải

Ta có: $A = 7 \cdot 5^{2^n} + 12 \cdot 6^n = A = 7 \cdot 25^n + 12 \cdot 6^n$

Vì $25 \equiv 6 \pmod{19} \Rightarrow 25^n \equiv 6^n \pmod{19}$

Suy ra $7 \cdot 25^n \equiv 7 \cdot 6^n \pmod{19}$

Suy ra $7 \cdot 25^n + 12 \cdot 6^n \equiv 7 \cdot 6^n + 12 \cdot 6^n \equiv 19 \cdot 6^n \equiv 0 \pmod{19}$

.Điều này chứng tỏ A chia hết cho 19.

Bài 43 : Chứng minh: $3^{100} - 3$ chia hết cho 13 .

Trích đề HSG huyện Vụ Bản năm 2011 -2012

Lời giải

Ta có: $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}$

$3^{100} = 3 \cdot 3^{99} \equiv 3 \cdot 1 \pmod{13}$

$3^{100} - 3 \equiv 0 \pmod{13}$.



Vậy $3^{100} - 3$ chia hết cho 13.

Bài 44 : Chứng minh rằng số $A = 2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7 ?

Trích đề HSG huyện Vụ Bản năm 2017 -2018

Lời giải

Nhận xét: $2222 \equiv 3 \pmod{7}$ (1)

Từ đó: $2222^4 \equiv 3^4 \pmod{7}$ hay $2222^4 \equiv 81 \pmod{7}$

Mà $81 \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow 2222^4 \equiv 4 \pmod{7}$ (2)

Nhân vế với vế (1) và (2) ta được $2222^5 \equiv 3.4 \pmod{7}$

Hay là: $2222^5 \equiv 5 \pmod{7} \Rightarrow 2222^{5555} \equiv 5^{1111} \pmod{7}$ (3)

Tương tự ta có: $5555^{2222} \equiv 2^{1111} \pmod{7}$ (4)

Cộng vế với vế (3) và (4) ta có: $A \equiv 2^{1111} + 5^{1111} \pmod{7}$ (5)

Mặt khác: $2^{1111} + 5^{1111} = (2+5).M = 7.M \equiv 0 \pmod{7}$ (6)

Từ (5) và (6) ta được: $A \equiv 0 \pmod{7}$

Vậy: $A = 2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7.

Bài 45 : Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì số $B = 4^{2n+1} + 3^{n+2}$ luôn chia hết cho 13 ?

Trích đề HSG huyện Ý Yên năm 2017 -2018

Lời giải

Nhận xét 1:

$$4^2 = 16 \equiv 3 \pmod{13}$$

$$(4^2)^n \equiv 3^n \pmod{13}$$

$$4^{2n} \equiv 3^n \pmod{13}$$

$$\text{Mà } 4 \equiv 4 \pmod{13}$$

$$4^{2n+1} \equiv 4.3^n \pmod{13}$$

$$\text{Hay } 4^{2n+1} \equiv 4.3^n \pmod{13} \quad (1)$$

Nhận xét 2: $3^2 = 9 \equiv -4 \pmod{13}$ mà $3^n \equiv 3^n \pmod{13}$.

Từ đó $\Rightarrow 3^2.3^n \equiv -4.3^n \pmod{13}$, hay là: $3^{n+2} \equiv -4.3^n \pmod{13}$ (2)

Từ (1) và (2), cộng vế với vế, ta được $B \equiv 0 \pmod{13}$.

Nghĩa là $B = 4^{2n+1} + 3^{n+2}$ luôn chia hết cho 13 với mọi $n \in \mathbf{N}$.

Bài 46 : $A = 2015^{2015} + 3.2011^{2011} + 2018^{2015}$ chia hết cho 10.

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2017 -2018

Lời giải

Ta có :

2015 có tận cùng là chữ số 5 nên 2015^{2015} cũng có tận cùng là chữ số 5, tức là:

$$2015^{2015} \equiv 5 \pmod{10} \quad (1)$$

2011 có tận cùng là chữ số 1 nên 2011^{2011} cũng có tận cùng là chữ số 1, tức là:

$$2011^{2011} \equiv 1 \pmod{10}$$

$$3.2011^{2011} \equiv 3 \pmod{10} \quad (2)$$



2018 có tận cùng là chữ số 8 và $2015 = 4n + 3$ ($n \in \mathbb{N}$), nên 2018^{2015} có tận cùng là chữ số 2 (theo tính chất 6), tức là:

$$2018^{2015} \equiv 2 \pmod{10} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$2015^{2015} + 3.2011^{2011} + 2018^{2015} \equiv 5 + 3 + 2 \pmod{10} \equiv 0 \pmod{10}$$

Vậy $A = 2015^{2015} + 3.2011^{2011} + 2018^{2015}$ chia hết cho 10.

Bài 47 : Tìm số dư của phép chia 1234^{30} cho 2014.

Trích đề HSG huyện Trực Ninh năm 2017 -2018

Lời giải

Ta có : 1234^3 chia 2014 dư 778, ta viết:

$$1234^3 \equiv 778 \pmod{2014} \quad (1)$$

$$1234^9 \equiv 778^3 \pmod{2014} \equiv 1500 \pmod{2014}$$

$$1234^{27} \equiv 1500^3 \pmod{2014} \equiv 1234 \pmod{2014} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$1234^3 \cdot 1234^{27} \equiv 778 \cdot 1234 \pmod{2014}$$

$$\text{Hay } 1234^{30} \equiv 1234 \cdot 778 \pmod{2014} \equiv 1388 \pmod{2014}$$

Vì $0 < 1388 < 2014$ nên $r = 1388$ là số dư của phép chia 1234^{30} cho 2014.

Bài 48: Chứng minh rằng tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 2005 không phải là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2005$

$$= (2005 + 1) \cdot 2005 : 2$$

$$= 1003 \cdot 2005 \equiv 1 \cdot 3 \equiv 3 \pmod{4}$$

$\Rightarrow S$ có dạng $4k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$)

Do đó S không là số chính phương.

Bài 49: Chứng minh rằng $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n .

Lời giải

Ta có: $2012^{4n} \equiv 0 \pmod{2}$; $2013^{4n} \equiv 1 \pmod{2}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$2014^{4n} \equiv 0 \pmod{2}; 2015^{4n} \equiv 1 \pmod{2}$$

Do đó: $A \equiv 2 \equiv 0 \pmod{2}$.

Ta lại có: $2012 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow 2012^{4n} \equiv 0 \pmod{4}$

$$2014 \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow 2014^2 \equiv 2^2 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow (2014^2)^{2n} \equiv (2014^2)^{2n} \equiv 0 \pmod{4}$$

Do $2013 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 2013^{4n} \equiv 1 \pmod{4}$

Do $2015 \equiv -1 \pmod{4} \Rightarrow 2015^{4n} \equiv (-1)^{4n} \equiv 1 \pmod{4}$

Do đó $A \equiv 2 \pmod{4}$ nghĩa là A chia cho 4 dư 2.

Ta có A chia hết cho 2; A không chia hết cho 4; 2 là số nguyên tố. Vậy A không là số chính phương.



Bài 50: Cho $A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$. Tìm chữ số tận cùng của A.

Trích đề HSG Trường Võ Thị Sáu, năm 2014- 2015

Lời giải

$$2.A = 2.(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}) = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{21}$$

$$\Rightarrow A = 2^{21} - 2$$

$$\text{Ta có : } 2^{21} = 2^{4.5+1} = (2^4)^5 \cdot 2 = 16^5 \cdot 2$$

Vì 16^5 có tận cùng là 6 nên $16^5 \cdot 2$ có tận cùng là 6. 2 có tận cùng là 2.

Vậy A có tận cùng là 2.

Bài 51: Cho $A = 5 + 5^2 + \dots + 5^{96}$. Tìm chữ số tận cùng của A.

Trích đề HSG huyện Nam Trực, năm 2014- 2015

Lời giải

$$A = 5 + 5^2 + \dots + 5^{96} \Rightarrow 5A = 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{97}$$

$$\Rightarrow 5A - A = 5^{97} - 5 \Rightarrow A = \frac{5^{97} - 5}{4}$$

Ta có: 5^{97} có chữ số tận cùng là 5 $\Rightarrow 5^{97} - 5$ có chữ số tận cùng là 0.

Vậy chữ số tận cùng của A là 0.

Bài 52: Chứng tỏ rằng $10^{2003} + 8$ chia hết cho 2.

Lời giải:

Ta có: 10^{2003} có chữ số tận cùng là 0.

Do đó: $10^{2003} + 8$ có chữ số tận cùng là 8.

Vậy $10^{2003} + 8$ chia hết cho 2

Bài 53: Chứng minh $2113^{2000} - 2011^{2000}$ chia hết cho cả 2 và 5.

Lời giải:

Để $2113^{2000} - 2011^{2000}$ vừa chia hết cho cả 2 và 5 thì số phải có chữ số tận cùng là 0.

Suy ra: Cần chứng minh số bị trừ và số trừ đều có chữ số tận cùng là 1.

Chú ý: Số tự nhiên a có chữ số tận cùng là 1 thì a^n cũng có chữ số tận cùng là 1.

Ta có: $2113^{2000} = (2113^4)^{500} = \overline{\dots 1}^{500}$. Suy ra: 2113^{2000} có chữ số tận cùng là 1.

2011^{2000} luôn có chữ số tận cùng là 1.

Suy ra: $2113^{2000} - 2011^{2000}$ có chữ số tận cùng là 0.

Vậy: $2113^{2000} - 2011^{2000}$ chia hết cho cả 2 và 5.

Bài 54: Cho $999993^{1999} - 555557^{1997}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 5.

**Lời giải:**

Để chứng minh $A \div 5$, ta xét chữ số tận cùng của A bằng việc xét chữ số tận cùng của từng số hạng.

$$\text{Ta có: } 3^{1999} = (3^4)^{499} = 81^{499} \cdot 27$$

Suy ra: 3^{1999} có chữ số tận cùng là 7.

$$7^{1997} = (7^4)^{499} \cdot 7 = 2041^{499} \cdot 7$$

Suy ra: 7^{1997} có chữ số tận cùng là 7.

Vậy A có chữ số tận cùng bằng 0.

Do đó: $A \div 5$.

Bài 55: Tìm hai chữ số tận cùng của các số:

a) 2^{2003}

b) 7^{99}

Lời giải:

a) Do 2^{2003} là số chẵn, ta tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $2^n - 1 \div 25$.

$$\text{Ta có } 2^{10} = 1024 \Rightarrow 2^{10} + 1 = 1025 \div 25 \Rightarrow 2^{20} - 1 = (2^{10} + 1)(2^{10} - 1) \div 25 \Rightarrow 2^3 (2^{20} - 1) \div 100.$$

Mặt khác:

$$2^{2003} = 2^3 (2^{2000} - 1) + 2^3 = 2^3 \left((2^{20})^{100} - 1 \right) + 2^3 = 100k + 8 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Vậy hai chữ số tận cùng của 2^{2003} là 08.

Bài 56: Tìm chữ số tận cùng của 2^{915}

Lời giải

$$\text{Ta có } 2^4 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$2^{915} = (2^4)^{228} \cdot 2^3 \equiv 8 \pmod{10}$$

Hay chữ số tận cùng của 2^{915} là 8

Bài 57: Chứng minh rằng: $(5^{8^n} + 23) \div 24$

Lời giải

$$\text{Ta có } 5^2 \equiv 1 \pmod{24}$$

$$5^{8^n} = 5^{8 \cdot 8^{n-1}} = (5^2)^{4 \cdot 8^{n-1}} \equiv 1 \pmod{24}$$

$$\text{Vậy } (5^{8^n} + 23) \div 24$$

Bài 58: Tìm số dư khi chia tổng $3^{100} + 3^{105}$ cho 13

Lời giải

* Tìm số dư khi chia 3^{100} cho 13: là tìm số tự nhiên nhỏ hơn 13, đồng dư với 3^{100} theo modun 13

$$\text{Ta có: } 3^{100} = 3^4 \cdot 3^{96} = 3^4 \cdot (3^3)^{32}$$

$$+) 3^4 = 81 = 13 \cdot 6 + 3 \Rightarrow 3^4 \equiv 3 \pmod{13} \quad (1)$$

$$+) 3^3 = 27 = 13 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 3^3 \equiv 1 \pmod{13}$$



$$\Rightarrow (3^3)^{32} \equiv 1^{32} \pmod{13} \Rightarrow (3^3)^{32} \equiv 1 \pmod{13} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 3^4 \cdot (3^3)^{32} \equiv 3 \cdot 1 \pmod{13} \Rightarrow 3^{100} \equiv 3 \pmod{13} \quad (3)$$

$$\text{Mặt khác: } 3^{105} = (3^3)^{35}$$

$$\text{Mà } 3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow (3^3)^{35} \equiv 1^{35} \pmod{13}. \text{ Hay } 3^{105} \equiv 1 \pmod{13} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow 3^{100} + 3^{105} \equiv 3 + 1 \pmod{13} \Rightarrow 3^{100} + 3^{105} \equiv 4 \pmod{13}$$

Vậy tổng $3^{100} + 3^{105}$ chia cho 13 dư 4

Bài 59: Chứng minh rằng: $3012^{93} - 1$ chia hết cho 13

Lời giải

$$\text{Ta có: } 3012 = 13 \cdot 231 + 9$$

$$\text{Do đó: } 3012 \equiv 9 \pmod{13} \Rightarrow 3012^3 \equiv 9^3 \pmod{13} \text{ mà } 9^3 = 729 \equiv 1 \pmod{13}$$

$$\text{Nên } 3012^3 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow (3012^3)^{31} \equiv 1 \pmod{13}. \text{ Hay } 3012^{93} \equiv 1 \pmod{13}$$

$$\text{Vậy } 3012^3 - 1 \equiv 1 - 1 \pmod{13} \Rightarrow 3012^3 - 1 \equiv 0 \pmod{13}$$

Hay $3012^{93} - 1$ chia hết cho 13

Bài 60: Chứng minh rằng: $A = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ chia hết cho 19

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 7 \cdot 25^n + 12 \cdot 6^n$$

$$\text{Vì } 25^n \equiv 6^n \pmod{19}$$

$$A \equiv 7 \cdot 6^n + 12 \cdot 6^n \pmod{19}$$

$$A \equiv 19 \cdot 6^n \pmod{19}$$

$$A \equiv 0 \pmod{19}$$

$$A : 19$$

$$\text{Vậy } A : 19$$

Bài 61: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $A = 5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$ chia hết cho 23

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 25^n \cdot 5 + 2^n \cdot 16 + 2^n \cdot 2$$

$$\text{Vì } 25^n \cdot 5 \equiv 5 \cdot 2^n \pmod{23}$$

$$A = 2^n \cdot 5 + 2^n \cdot 16 + 2^n \cdot 2 \pmod{23}$$

$$A \equiv 2^n \cdot 23 \pmod{23}$$

$$A \equiv 0 \pmod{23}$$

$$\text{Vậy } A = 5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1} \text{ chia hết cho } 23.$$

Bài 62: Chứng minh rằng: Với mọi số tự nhiên n thì số $B = 4^{2n+1} + 3^{n+2}$ luôn chia hết cho 13.

Lời giải

Ta xét số dư của 4^{2n+1} khi chia cho 13

$$\text{Ta có: } 4^2 = 16 \equiv 3 \pmod{13}$$



$$4^{2n} \equiv 3^n \pmod{13}$$

$$4^{2n+1} \equiv 4 \cdot 3^n \pmod{13} \quad (1)$$

+ Ta xét số dư của 3^{n+2} khi chia cho 13

$$\text{Ta có: } 3^2 = 9 \equiv -4 \pmod{13}$$

$$\text{Mà } 3^n \equiv 3^n \pmod{13}$$

$$\text{Nên } 3^n \cdot 3^2 \equiv -4 \cdot 3^n \pmod{13}$$

$$3^{n+2} \equiv -4 \cdot 3^n \pmod{13} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), cộng vế với vế, ta được $B \equiv 0 \pmod{13}$.

Vậy $A = 5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$ chia hết cho 23 với mọi $n \in \mathbb{N}$

Bài 63: Chứng minh rằng: $A = 2^{2^{2n}} + 5 : 7 \ (n \in \mathbb{N})$

Lời giải

Vì $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$. Nên ta đi tìm số dư của 2^{2^n} cho 3.

Thật vậy: $2^{2^n} = 4^n \equiv 1 \pmod{3}$ suy ra $2^{2^n} = 3k + 1$

$$A = 2^{3k+1} + 5 = 2 \cdot 8^k + 5 \equiv (2+5) \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7}.$$

$$A = 2^{2^{2n}} + 5 : 7 \ (n \geq 0)$$

Bài 64: Chứng minh rằng: $B = 1924^{2003^{2004^n}} + 1920 : 124 \ (n \in \mathbb{N}^*)$

Lời giải

Ta có $124 = 4 \cdot 31$

Để thấy $B : 4$. Ta chứng minh $B : 31$

$$\text{Vì } \begin{cases} 1924 \equiv 2 \pmod{31} \\ 1920 \equiv -2 \pmod{31} \end{cases} \text{ nên } B \equiv 2^{2003^{2004^n}} - 2 \pmod{31}$$

$$\text{Vì } 2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31}$$

Từ đây ta xét $M = 2003^{2004^n}$ chia cho 5 có số dư là bao nhiêu

Vì $2004 : 4$ nên ta đặt $2004^n = 4k$ và $M = 2003^{2004^n} = 2003^{4k}$

Mà $2003 \equiv 3 \pmod{5}$ nên $2003^{4k} \equiv 3^{4k} \pmod{5} \equiv 81^k \pmod{5} \equiv 1 \pmod{5}$

nên $M = 5m + 1$

$$B \equiv 2^{5m+1} - 2 \pmod{31} \equiv 2 \cdot 32^m - 2 \pmod{31} \equiv 2 - 2 \pmod{31} \equiv 0 \pmod{31}$$

Vậy $B : 124$

Bài 65: Cho số $A = 1994^{2005}$

a. Tìm số dư trong phép chia A chia cho 7.

b. Tìm chữ số tận cùng của A

Lời giải

a. Ta có: $1994 \equiv -2 \pmod{7}$

$$\begin{aligned} A = 1994^{2005} &\equiv (-2)^{2005} \pmod{7} \equiv \left[(-2)^3 \right]^{668} (-2) \pmod{7} \\ &\equiv (-1)^{668} (-2) \pmod{7} \\ &\equiv (-2) \pmod{7} \equiv 5 \pmod{7} \end{aligned}$$

Vậy A chia cho 7 dư 5.

b. Xét số dư khi chia A cho 10.

Ta có: $1994 \equiv 4 \pmod{10}$.

Ta xét số dư khi chia A cho 2 và cho 5.

Ta có: $1994 \equiv 0 \pmod{2}$



$$1994 \equiv 4 \pmod{5} \equiv (-1) \pmod{5}$$

$$1994^{2005} \equiv (-1)^{2005} \pmod{5} \equiv (-1) \pmod{5} \equiv 4 \pmod{5}$$

$$A \equiv 4 \pmod{10}$$

Vậy chữ số tận cùng của A là 4.

Bài 66: Tìm số dư trong phép chia số $A = 1993^{2014}$ cho 3.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 1993 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$1993^{2014} \equiv 1^{2014} \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}$$

Vậy số $A = 1993^{2014}$ khi chia cho 3 thì dư 1.

Bài 67: Tìm số dư của $A = 776^{776} + 777^{777} + 778^{778}$ khi chia cho 3

Lời giải

$$\text{Ta có: } 776 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$776^{776} \equiv 2^{776} \pmod{3} \equiv 4^{338} \pmod{3} \equiv 1^{338} \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\text{Tương tự: } 777^{777} \equiv 0 \pmod{3}$$

$$778^{778} \equiv 1 \pmod{3}$$

$$A = 776^{776} + 777^{777} + 778^{778} \equiv 1 + 0 + 1 \pmod{3} \equiv 2 \pmod{3}$$

Vậy $A = 776^{776} + 777^{777} + 778^{778}$ chia cho 3 dư 2.

Bài 68: Tìm 2 chữ số tận cùng của số: 2^{2004}

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2^{2004} = (2^{10})^{200} \cdot 2^4 \equiv (-1)^{200} \cdot 2^4 \pmod{25}$$

$$\equiv 16 \pmod{25}$$

$$2^{2004} = 25k + 16 \quad (k \in \mathbb{N})$$

Mặt khác: $2^{2004} : 4$ suy ra $2^{2004} : 100$.

Do $\text{Ư CLN}(4; 25) = 1$

$$2^{2004} = 100m + 16 \quad (m \in \mathbb{N})$$

Vậy 2 chữ số tận cùng của 2^{2004} là 16.

Bài 69: Tìm 2 chữ số tận cùng của số: $B = 7^{9^{99}}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 7^n \equiv 3 \pmod{4}$$

$$7^4 \equiv 1 \pmod{25}$$

$$9^{99} \equiv 1 \pmod{4} \equiv 1 \pmod{4}$$

$$B = 7^{k+1} \equiv 7 \pmod{25} \text{ suy ra } B = 25k + 7 \equiv 3 \pmod{4}$$

Do đó $k \equiv 0 \pmod{4}$ nên $k = 4n$

Suy ra $B = 100n + 7$

Vậy 2 chữ số tận cùng của B là 07.

PHIẾU BÀI TẬP SỐ 2

Bài 1: Chứng minh rằng $12^{2n+1} + 11^{n+2}$ chia hết cho 133 với $n \in \mathbb{N}$.

Bài 2: Chứng minh rằng $2^{2002} - 4$ chia hết cho 31.

Bài 3: Tìm số dư trong phép chia số $A = 2020^{2021}$ cho 3.

Bài 4: Tìm số dư của $A = 3^{2005} + 4^{2005}$ khi chia A cho 11 và khi chia cho 13.

Bài 5: Chứng minh rằng: $A = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n : 19$

Bài 6: Tìm số dư khi chia $A = 1944^{2005}$ cho 7.



Bài 7: Chứng minh rằng các số $A = 6^{1000} - 1$ và $B = 6^{1001} + 1$ đều là bội số của 7.

Bài 8: Chứng minh rằng: $3012^{93} - 1$ chia hết cho 13.

Bài 9: Chứng minh rằng: $A = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ chia hết cho 19.

Bài 10: Chứng minh rằng : $2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7.

Bài 11:

1) Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a) 57^{1999}

b) 93^{1999}

2) Cho $A = 999993^{1999} - 555557^{1997}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 5

Trích đề HSG cấp trường năm 2017-2018

Bài 12: Tìm số tận cùng của các số sau:

52^{35} ; 204^{402} .

Bài 13: Tìm số tận cùng của các số sau:

58^{2018} ; 213^{3102} ; 120^{1040} .

Bài 14: Tìm số tận cùng của: $A = 17^{25} + 24^4 - 13^{21}$.

Bài 15: Tìm số tận cùng của: $A = 17^{2008} - 11^{2008} - 3^{2008}$.

Bài 16: Cho $A = 8^{102} - 2^{102}$. Chứng minh A chia hết cho 10.

Bài 17: Cho $A = 99^5 - 98^4 + 97^3 - 96^2$. Chứng minh A chia hết cho 10.

Bài 18: Tìm số dư trong phép chia 2004^{2004} khi chia cho 11.

Bài 19: Tìm số dư khi chia $A = 1944^{2005}$ cho 7.

Bài 20: Chứng minh rằng: $2^{2002} - 4 : 31$.

Bài 21: Tìm một số tự nhiên có 6 chữ số tận cùng là chữ số 4. Biết rằng khi chuyển chữ số 4 đó lên đầu còn các chữ số khác giữ nguyên thì ta được số mới gấp 4 lần số cũ.

(Đề thi HSG Gia Lai năm 2018 - 2019)

Bài 22: Cho $A = 2017 + 2017^2 + 2017^3 + \dots + 2017^{18}$. Chứng tỏ rằng $A : 2018$.

Tìm chữ số tận cùng của A .

(Đề HSG Trực Ninh năm 2017 - 2018)

Bài 23: Tìm chữ số tận cùng của số $P = 14^{14^{14}} + 9^{9^9} + 2^{3^4}$

(Đề HSG Lý Nhân năm 2018 - 2019).

Bài 24: Cho $M = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$

a) Chứng tỏ rằng $M : 5$.

b) Tìm chữ số tận cùng của M .

(Đề HSG Bắc Ninh năm 2016 - 2017)

Bài 25: Cho $A = 3(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$. Không làm phép tính, hãy rút gọn biểu thức rồi tìm số tận cùng của A .

(Đề HSG Bắc Ninh năm 2016 - 2017)

Bài 26: Cho $A = \frac{1}{2}(7^{2012 \cdot 2015} - 3^{9294})$. Chứng minh A là số tự nhiên chia hết cho 5.



(Đề HSG Hoàng Hoá năm 2018 - 2019)

Bài 27: Cho $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$. Chứng minh rằng A không phải là số chính phương.

(Đề HSG Buôn Mê Thuật năm 2018 - 2019)

Bài 28: Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a) 57^{2011}

b) 93^{1999}

(Đề HSG Tân Uyên 2018 - 2019)

Bài 29:

a) Tìm chữ số tận cùng của các số sau: $49^{31}; 32^{2000}$

b) Chứng tỏ rằng: $10^{2011} + 8$ chia hết cho 72

(Đề HSG Yên Lạc 2018 - 2019)

Bài 30: Cho $A = 5 + 5^2 + \dots + 5^{96}$. Tìm chữ số tận cùng của A .

(Đề HSG 2017 - 2018)

Bài 31: Tìm chữ số tận cùng của 187^{324}

Bài 32: Tìm ba chữ số tận cùng của 5^{2008}

Bài 33: Tìm ba chữ số tận cùng của 2^{100} .

Bài 34: Tìm ba chữ số tận cùng của 123^{101}

Bài 35: Tìm ba chữ số tận cùng của $2^{9^{2003}}$

Bài 36: Tìm ba chữ số tận cùng của $3^{7^{213}}$

Bài 37: Tìm ba chữ số tận cùng của 5^{1992}

Bài 38: Tìm ba chữ số tận cùng của số $T = 5^{946}$

Bài 39: Tìm ba chữ số tận cùng của số: $P = 5^{1994}$

Bài 40: Tìm ba chữ số tận cùng của số: $R = 123^{102}$

Bài 41: Chứng minh rằng: $A = (2^{2^{2^n}} + 5); 7 (\forall n \in \mathbb{N})$.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2015 -2016

Bài 42 : Chứng minh rằng: $A = 7.5^{2^n} + 12.6^n$ chia hết cho 19.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Tường năm 2014 -2015

Bài 43 : Chứng minh: $3^{100} - 3$ chia hết cho 13 .

Trích đề HSG huyện Vụ Bản năm 2011 -2012

Bài 44 : Chứng minh rằng số $A = 2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7 ?

Trích đề HSG huyện Vụ Bản năm 2017 -2018

Bài 45 : Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì số $B = 4^{2n+1} + 3^{n+2}$ luôn chia hết cho 13 ?

Trích đề HSG huyện Ý Yên năm 2017 -2018



Bài 46 : $A = 2015^{2015} + 3.2011^{2011} + 2018^{2015}$ chia hết cho 10.

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2017 -2018

Bài 47 : Tìm số dư của phép chia 1234^{30} cho 2014.

Trích đề HSG huyện Trực Ninh năm 2017 -2018

Bài 48: Chứng minh rằng tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 2005 không phải là số chính phương.

Bài 49: Chứng minh rằng $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n .

Bài 50: Cho $A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$. Tìm chữ số tận cùng của A.

Trích đề HSG Trường Võ Thị Sáu, năm 2014- 2015

Bài 51: Cho $A = 5 + 5^2 + \dots + 5^{96}$. Tìm chữ số tận cùng của A.

Trích đề HSG huyện Nam Trực, năm 2014- 2015

Bài 52: Chứng tỏ rằng $10^{2003} + 8$ chia hết cho 2.

Bài 53: Chứng minh $2113^{2000} - 2011^{2000}$ chia hết cho cả 2 và 5.

Bài 54: Cho $999993^{1999} - 555557^{1997}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 5.

Bài 55: Tìm hai chữ số tận cùng của các số:

a) 2^{2003}

b) 7^{99}

Bài 56: Tìm chữ số tận cùng của 2^{915}

Bài 57: Chứng minh rằng: $(5^{8^n} + 23) : 24$

Bài 58: Tìm số dư khi chia tổng $3^{100} + 3^{105}$ cho 13

Bài 59: Chứng minh rằng: $3012^{93} - 1$ chia hết cho 13

Bài 60: Chứng minh rằng: $A = 7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19

Bài 61: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $A = 5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$ chia hết cho 23

Bài 62: Chứng minh rằng: Với mọi số tự nhiên n thì số $B = 4^{2n+1} + 3^{n+2}$ luôn chia hết cho 13.

Bài 63: Chứng minh rằng: $A = 2^{2^{2n}} + 5 : 7 (n \in \mathbb{N})$

Bài 64: Chứng minh rằng: $B = 1924^{2003^{2004^n}} + 1920 : 124 (n \in \mathbb{N}^*)$

Bài 65: Cho số $A = 1994^{2005}$

a. Tìm số dư trong phép chia A chia cho 7.

b. Tìm chữ số tận cùng của A

Bài 66: Tìm số dư trong phép chia số $A = 1993^{2014}$ cho 3.

Bài 67: Tìm số dư của $A = 776^{776} + 777^{777} + 778^{778}$ khi chia cho 3

Bài 68: Tìm 2 chữ số tận cùng của số: 2^{2004}

Bài 69: Tìm 2 chữ số tận cùng của số: $B = 7^{9^{99}}$.



CHỦ ĐỀ: ĐỒNG DƯ THỨC
A. PHẦN NỘI DUNG

Dạng 1: Toán chứng minh chia hết

Bài 1: Cho p, q là hai số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng $p^4 + 2019q^4$ chia hết cho 20.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= p^4 + 2019q^4 = p^4 - q^4 + 2020q^4 \\ &= (p^2 + q^2)(p^2 - q^2) + 2020q^4 \end{aligned}$$

Vì p, q là hai số nguyên tố lớn hơn 5 nên $(p, 5) = (q, 5) = 1$

$$\Rightarrow p^2, q^2 \equiv 1, 4 \pmod{5}$$

Nếu $p^2 \equiv q^2 \pmod{5}$ thì $p^2 - q^2 \equiv 0 \pmod{5}$

$$\Rightarrow A = (p^2 + q^2)(p^2 - q^2) + 2020q^4 \equiv 0 \pmod{5} \quad (1)$$

Nếu p^2, q^2 không cùng số dư khi chia cho 5 thì

$$p^2 + q^2 \equiv 1 + 4 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow A \equiv 0 \pmod{5} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A \vdots 5$ (*)

Mặt khác: $p, q > 5$ nên p, q lẻ

$$\Rightarrow p^2 \equiv q^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow p^2 - q^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow A = (p^2 + q^2)(p^2 - q^2) + 2020q^4 \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow A \vdots 4 \quad (**)$$

Từ (*) (**) $\Rightarrow A \vdots 20$

Bài 2: Cho biết $a + 4b$ chia hết cho 13 ($a, b \in \mathbb{N}$). Chứng minh rằng $10 + b \vdots 13$

Trích đề HSG huyện Lâm Thao, năm 2018- 2019

Lời giải

$$a + 4b \vdots 13 \Rightarrow 10a + 40b \vdots 13 \Leftrightarrow 10a + b + 39b \vdots 13$$

$$39b \vdots 13 \Rightarrow 10a + b \vdots 13$$

Bài 3: Cho $S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$

a) Chứng minh rằng S là bội của -20

b) Tính S , từ đó suy ra 3^{100} chia cho 4 dư 1

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Lời giải

a) Tổng S có 100 số hạng chia thành 25 nhóm, mỗi nhóm 4 số hạng



$$\begin{aligned}
 S &= 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99} \\
 &= (1 + 3 + 3^2 - 3^3) + (3^4 - 3^5 + 3^6 - 3^7) + \dots + (3^{96} - 3^{97} + 3^{98} - 3^{99}) \\
 &= (-20) + 3^4 \cdot (-20) + \dots + 3^{96} \cdot (-20) \Rightarrow S \vdots -20
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) S &= 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99} \\
 3S &= 3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 + \dots + 3^{99} - 3^{100} \\
 \Rightarrow 3S + S &= 4S = \frac{1 - 3^{100}}{4}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3^{100} - 1 \vdots 4 \Rightarrow 3^{100} \text{ chia cho } 4 \text{ dư } 1.$$

Bài 4: Chứng tỏ: $S = 16^5 + 2^{15}$ chia hết cho 33.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2010 - 2011
Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Có } S &= 16^5 + 2^{15} = (2^4)^5 + 2^{15} \\
 &= 2^{20} + 2^{15} = 2^{15} \cdot 2^5 + 2^{15} \\
 &= 2^{15} (2^5 + 1) = 2^{15} \cdot 33 \vdots 33
 \end{aligned}$$

Vậy S chia hết cho 33.

Bài 5: Chứng minh rằng: $3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{101}$ chia hết cho 120.

Trích đề HSG huyện Hằng Hoá năm 2014 - 2015
Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } & 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{101} \\
 &= (3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + (3^6 + 3^7 + 3^8 + 3^9) + \dots + (3^{98} + 3^{99} + 3^{100} + 3^{101}) \\
 &= 3^1 \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^5 \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{97} \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) \\
 &= 3^1 \cdot 120 + 3^5 \cdot 120 + \dots + 3^{97} \cdot 120 \\
 &= 120 \cdot (3^1 + 3^5 + \dots + 3^{97}) \vdots 120 \text{ (đpcm)}.
 \end{aligned}$$

Bài 6: Cho p, q là hai số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng $p^4 + 2019q^4$ chia hết cho 20.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2022 - 2023

Lời giải

$$\text{Ta có } A = p^4 + 2019q^4 = p^4 - q^4 + 2020q^4 = (p^2 + q^2)(p^2 - q^2) + 2020q^4$$

Vì p, q là hai số nguyên tố lớn hơn 5 nên $(p; 5) = (q; 5) = 1$

$$p^2, q^2 \equiv 1; 4 \pmod{5}$$

Nếu $p^2 \equiv q^2 \pmod{5}$ thì $p^2 - q^2 \equiv 0 \pmod{5}$

$$A = (p^2 + q^2)(p^2 - q^2) + 2020q^4 \equiv 0 \pmod{5} \quad 1$$



Nếu p^2, q^2 không cùng số dư khi chia cho 5 thì

$$p^2 + q^2 \equiv 1 + 4 \equiv 0 \pmod{5}$$

Vậy $A \equiv 0 \pmod{5}$ 2

Từ 1 và 2 suy ra $A:5$ *

Mặt khác: $p, q > 5$ nên p, q lẻ

Suy ra $p^2 \equiv q^2 \equiv 1 \pmod{4}$

$$p^2 - q^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

$$A = (p^2 + q^2)(p^2 - q^2) + 2020q^4 \equiv 0 \pmod{4}$$

Suy ra $A:4$ **

Từ * và ** Suy ra $A:20$.

Bài 7: Chứng minh rằng với n là số tự nhiên thì $(2021^{2n+1} + 2020):3$.

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta thấy: $2021 \equiv 2 \pmod{3}$

$$2021^{2n+1} \equiv 2^{2n+1} \pmod{3}$$

Mặt khác: $2^{2n+1} = 2 \cdot 4^n$

mà: $4 \equiv 1 \pmod{3}$

$$4^n \equiv 1^n \pmod{3}$$

$$2 \cdot 4^n \equiv 2 \pmod{3}$$

$$2^{2n+1} \equiv 2 \pmod{3}$$

nên $2020 \equiv 1 \pmod{3}$; $2021^{2n+1} \equiv 2 \pmod{3}$

Vậy $(2021^{2n+1} + 2020):3$.

Bài 8: Chứng tỏ: $A = 10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27 (với n là số tự nhiên)

Trích đề HSG huyện Kim Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= 10^n + 18n - 1 = 10^n - 1 - 9n + 27n \\ &= \underbrace{99\dots9}_n - 9n + 27n = 9 \cdot \underbrace{(11\dots1)}_n - n + 27n \end{aligned}$$

Ta biết số n và số có tổng các chữ số bằng n có cùng số dư khi chia cho 9 do đó $\underbrace{11\dots1}_n - n:9$

nên $9 \cdot \underbrace{(11\dots1)}_n - n:27$.



Vậy $A \equiv 27$

Dạng 2: Tìm số dư, chữ số tận cùng.

Bài 1: Cho số $B = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó chữ số tận cùng của B bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2020-2021

Bài 2: Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

- a) 57^{2011} b) 93^{1999}

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Lời giải

a) Tìm chữ số tận cùng của số 57^{2011}

Xét 7^{2011} , ta có: $7^{2011} = (7^4)^{502} \cdot 7^3 = 2401^{502} \cdot 343$,

suy ra chữ số tận cùng bằng 3

Vậy số 57^{2011} có chữ số tận cùng là 3

b) Tìm chữ số tận cùng của số 93^{1999}

Xét 3^{1999} , ta có: $3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3^3 = 81^{499} \cdot 27$

Suy ra chữ số tận cùng bằng 7

Vậy số 93^{1999} có chữ số tận cùng là 7.

Bài 3: Tìm số dư trong phép chia khi chia một số tự nhiên cho 91. Biết rằng nếu lấy số tự nhiên đó chia cho 7 thì được dư là 5 và chia cho 13 được dư là 4

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Lời giải

Gọi số tự nhiên đó là a

Theo bài ra ta có: $a = 7p + 5; a = 13q + 4 (p, q \in \mathbb{N})$

Suy ra: $a + 9 = 7p + 14 = 7 \cdot (p + 2) : 7$

$a + 9 = 13q + 13 = 13(q + 1) : 13$

Ta có: $a + 9 : 7; a + 9 : 13; (7, 13) = 1$

Do đó $a + 9 : 91 \Rightarrow a + 9 = 91k \Rightarrow a = 91k - 9 = 91k - 91 + 82 = 91 \cdot (k - 1) + 82$

Nên a chia cho 91 có dư là 82.

Bài 4: Một số tự nhiên khi chia cho 15 dư 5, chia cho 18 dư 17. Hỏi số đó khi chia cho 90 dư bao nhiêu ?

Trích đề HSG huyện Quế Sơn 2018-2019

Lời giải

Có $A = 15b + 5$ và $A = 18c + 17$

$\Rightarrow A + 55 = 15b + 60 = 5(3b + 12) \Rightarrow A + 55$ chia hết cho 5

Và $A + 55 = 18c + 72 = 18(c + 4) \Rightarrow A + 55$ chia hết cho 18



Do $(5, 18) = 1$ nên $A + 55$ chia hết cho 90

$\Rightarrow A$ chia 90 dư 35 (dư $90 - 55 = 35$)

Bài 5: Tìm chữ số tận cùng của số $6^{2006}, 7^{2007}$

Trích đề HSG cấp huyện 2016-2017

Lời giải

Ta có: $6^2 = 36 \equiv 6 \pmod{10}$, vậy $6^n \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow 6^{2006} \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow$ chữ số tận cùng của 6^{2006} là 6
 $7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{10}$, mà $7^{2007} = 7^{4 \cdot 501} \cdot 7^3$

Mà chữ số tận cùng của 7^3 là 3 nên chữ số tận cùng của 7^{2007} là 3.

Bài 6: Cho $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2022} + 5^{2023}$. Tìm số dư khi chia M cho 31

Trích đề HSG trường THCS Quỳnh Thiện 2021-2022

Ta có $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2022} + 5^{2023}$
 $= 5 + (5^2 + 5^3 + 5^4) + (5^5 + 5^6 + 5^7) + \dots + (5^{2021} + 5^{2022} + 5^{2023})$
 $= 5 + 5^2 \cdot (1 + 5 + 5^2) + 5^5 \cdot (1 + 5 + 5^2) + \dots + 5^{2021} \cdot (1 + 5 + 5^2)$
 $= 5 + 5^2 \cdot 31 + 5^5 \cdot 31 + \dots + 5^{2021} \cdot 31$
 \Rightarrow số M chia cho 31 có dư là 5

Bài 7: Cho $A = 3 \cdot (2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$

Không làm phép tính, hãy rút gọn biểu thức rồi tìm số tận cùng của A .

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2018 - 2019

Lời giải

$A = 3(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$
 $= (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$
 $= (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$
 $= (2^8 - 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$
 $= (2^{16} - 1)(2^{16} + 1) = 2^{32} - 1$

Vì 2^{32} tận cùng là 2 nên $A = 2^{32} - 1$ tận cùng là 1.

Bài 8: Tìm chữ số tận cùng của các số sau :

a) 57^{2011} .

b) 93^{1999} .

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2020 -2021

Lời giải

a) Tìm chữ số tận cùng của số 57^{2011}

Xét 7^{2011} ; ta có: $7^{2011} = (7^4)^{502} \cdot 7^3 = 2401^{502} \cdot 343$



Suy ra chữ số tận cùng bằng 3.

Vậy số 57^{2011} có chữ số tận cùng là 3.

b) Tìm chữ số tận cùng của số 93^{1999}

Xét 3^{1999} ; Ta có: $3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3^3 = 81^{499} \cdot 27$

Suy ra chữ số tận cùng của số 93^{1999} bằng 7.

Vậy số 93^{1999} có chữ số tận cùng là 7.

Trắc nghiệm

Bài 9: Chữ số tận cùng của $21^{2018} - 11^{2017}$ là:

- A. 0. B. 1. C. 7. D. 8.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: A. 0.

Tự luận

Bài 10: Cho $A = 0 - 1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \dots + 2019 - 2021 + 2023$. Tìm chữ số tận cùng của A.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

$$A = 0 - 1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \dots + 2019 - 2021 + 2023$$

Số số hạng của A là $1013 = 2 \cdot 506 + 1$

$$\begin{aligned} A &= 0 - 1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \dots + 2019 - 2021 + 2023 \\ &= 0 + (-1 + 3) + (-5 + 7) + (-9 + 11) + \dots + 2019 + (-2021 + 2023) \end{aligned}$$

$$= 0 + 2 + 2 + \dots + 2$$

$$= 0 + 2 \cdot 506 = 1012$$

Vậy số tận cùng của A là 2.

Bài 11:

1) Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

- a) 57^{1999} b) 93^{1999}

2) Cho $A = 999993^{1999} - 555557^{1997}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 5

Trích đề HSG cấp trường năm 2019-2020

Lời giải



1) a) Ta có: $7^{1999} = (7^4)^{499} \cdot 7^3 = 2401^{499} \cdot 343$ nên chữ số tận cùng là 3. Vậy số 57^{1999} có chữ số tận cùng là 3

b) $3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3^3 = 81^{499} \cdot 27$ nên có chữ số tận cùng là 7

2) Để chứng minh A chia hết cho 5, ta xét chữ số tận cùng của A bằng việc xét chữ số tận cùng của từng số hạng

Theo câu 1b, 999993^{1999} có chữ số tận cùng là 7

Tương tự câu 1a, ta có: $(7^4)^{499} \cdot 7 = 2401^{499} \cdot 7$ có chữ số tận cùng là 7

Vậy A có chữ số tận cùng là 0, nên A chia hết cho 5.

Bài 12: Viết số 4321^{4321} dưới dạng tổng của một số nguyên dương. Gọi T là tổng các lập phương của tất cả các số đó. Tìm số dư của T trong phép chia cho 6.

Trích đề HSG huyện Trục Ninh năm 2017 - 2018

Lời giải

Nhận xét: Với a là số nguyên dương thì $(a-1)a(a+1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6. Mà $(a-1)a(a+1) = a^3 - a$, nên suy ra $a^3 - a$ chia hết cho 6 với a là số nguyên dương.

Ta có:

$$4321^{1234} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$T = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_n^3$$

$$\text{Xét hiệu } T - 4321^{1234} = (a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_n^3) - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$$

$$T - 4321^{1234} = (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + (a_3^3 - a_3) + \dots + (a_n^3 - a_n)$$

$$\text{Do } a_1^3 - a_1 : 6, a_2^3 - a_2 : 6, a_3^3 - a_3 : 6, \dots, a_n^3 - a_n : 6, \text{ nên } T - 4321^{1234} : 6$$

Suy ra T và 4321^{1234} đồng dư khi chia cho 6

Mặt khác 4321 chỉ 6 dư 1 nên 4321^{1234} chia cho 6 cũng dư 1. Vậy T chia 6 dư 1

Bài 13: Tìm chữ số tận cùng của số $P = 14^{14^{14}} + 9^9 + 2^{3^4}$

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2018 - 2019

Lời giải

$$P = 14^{14^{14}} + 9^9 + 2^{3^4}$$

Chữ số tận cùng của $14^{14^{14}}$ là 6

Chữ số tận cùng của 9^9 là 9

Chữ số tận cùng của 2^{3^4} là 2

Chữ số tận cùng của P là chữ số tận cùng của tổng $(6+9+2)$ là 7

Bài 14: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 5, 7, 9 có số dư theo thứ tự là 3, 4, 5

Trích đề HSG huyện Chương Mỹ năm 2021 - 2022

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là a :

Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} a = 5m + 3 \\ a = 7n + 4 \\ a = 9p + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 10m + 6 \\ 2a = 14n + 8 \\ 2a = 18p + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2a-1):5 \\ (2a-1):7 \\ (2a-1):9 \end{cases} \Rightarrow (2a-1) \in BC(9;5;7)$$



Vì a nhỏ nhất nên $2a-1$ nhỏ nhất khác 0
hay $2a-1 = BCNN(9; 5; 7) = 315 \Rightarrow 2a = 316 \Rightarrow a = 158$

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm là 158



B. PHẢN PHIẾU BÀI TẬP

Dạng 1: Toán chứng minh chia hết

Bài 1: Cho p, q là hai số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng $p^4 + 2019q^4$ chia hết cho 20.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021 - 2022

Bài 2: Cho biết $a + 4b$ chia hết cho 13 ($a, b \in \mathbb{N}$). Chứng minh rằng $10 + b \vdots 13$

Trích đề HSG huyện Lâm Thao, năm 2018- 2019

Bài 3: Cho $S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$

- a) Chứng minh rằng S là bội của -20
- b) Tính S , từ đó suy ra 3^{100} chia cho 4 dư 1

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Bài 4: Chứng tỏ: $S = 16^5 + 2^{15}$ chia hết cho 33.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2010 - 2011

Bài 5: Chứng minh rằng: $3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{101}$ chia hết cho 120.

Trích đề HSG huyện Hằng Hoá năm 2014 - 2015

Bài 6: Cho p, q là hai số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng $p^4 + 2019q^4$ chia hết cho 20.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2022 - 2023

Bài 7: Chứng minh rằng với n là số tự nhiên thì $(2021^{2n+1} + 2020) \vdots 3$.

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Bài 8: Chứng tỏ: $A = 10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27 (với n là số tự nhiên)

Trích đề HSG huyện Kim Sơn năm 2021 - 2022

Dạng 2: Tìm số dư, chữ số tận cùng.

Bài 1: Cho số $B = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó chữ số tận cùng của B bằng

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2020-2021

Bài 2: Tìm chữ số tận cùng của các số sau: a) 57^{2011} b) 93^{1999}

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Bài 3: Tìm số dư trong phép chia khi chia một số tự nhiên cho 91. Biết rằng nếu lấy số tự nhiên đó chia cho 7 thì được dư là 5 và chia cho 13 được dư là 4

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Bài 4: Một số tự nhiên khi chia cho 15 dư 5, chia cho 18 dư 17. Hỏi số đó khi chia cho 90 dư bao nhiêu?

Trích đề HSG huyện Quế Sơn 2018-2019

Bài 5: Tìm chữ số tận cùng của số $6^{2006}, 7^{2007}$

Trích đề HSG cấp huyện 2016-2017

Bài 6: Cho $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2022} + 5^{2023}$. Tìm số dư khi chia M cho 31

Trích đề HSG trường THCS Quỳnh Thiện 2021-2022



Bài 7: Cho $A = 3 \cdot (2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$

Không làm phép tính, hãy rút gọn biểu thức rồi tìm số tận cùng của A .

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2018 – 2019

Bài 8: Tìm chữ số tận cùng của các số sau :

a) 57^{2011} .

b) 93^{1999} .

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2020 -2021

Trắc nghiệm

Bài 9: Chữ số tận cùng của $21^{2018} - 11^{2017}$ là:

A. 0.

B.1.

C.7.

D.8.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 – 2022

Bài 10: Cho $A = 0 - 1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \dots + 2019 - 2021 + 2023$. Tìm chữ số tận cùng của A .

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 11: Viết số 4321^{1234} dưới dạng tổng của một số số nguyên dương. Gọi T là tổng các lập phương của tất cả các số đó. Tìm số dư của T trong phép chia cho 6

Trích đề HSG huyện Trực Ninh năm 2017 – 2018

Bài 12: Tìm chữ số tận cùng của số $P = 14^{14^{14}} + 9^{9^9} + 2^{3^4}$

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2018 - 2019

Bài 13: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 5, 7, 9 có số dư theo thứ tự là 3, 4, 5

Trích đề HSG huyện Chương Mỹ năm 2021 – 2022



C. SỬU TÀM CÁC BÀI TRONG CÁC ĐỀ CỦA NHỮNG NĂM TRƯỚC ĐÓ

Bài 1: Chứng minh rằng tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 2005 không phải là số chính phương.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S &= 1+2+3+4+\dots+2005 \\ &= (2005+1) \cdot 2005 : 2 \\ &= 1003 \cdot 2005 \equiv 1 \cdot 3 \equiv 3 \pmod{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S \text{ có dạng } 4k+3 (k \in \mathbb{N})$$

Do đó S không là số chính phương.

Bài 2: Chứng minh rằng $A=2012^{4n}+2013^{4n}+2014^{4n}+2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n .

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2012^{4n} \equiv 0 \pmod{2}; 2013^{4n} \equiv 1 \pmod{2}; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$2014^{4n} \equiv 0 \pmod{2}; 2015^{4n} \equiv 1 \pmod{2}$$

$$\text{Do đó: } A \equiv 2 \equiv 0 \pmod{2}.$$

$$\text{Ta lại có: } 2012 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow 2012^{4n} \equiv 0 \pmod{4}$$

$$2014 \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow 2014^2 \equiv 2^2 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow (2014^2)^{2n} \equiv (2014^2)^{2n} \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\text{Do } 2013 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 2013^{4n} \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\text{Do } 2015 \equiv -1 \pmod{4} \Rightarrow 2015^{4n} \equiv (-1)^{4n} \equiv 1 \pmod{4}$$

Do đó $A \equiv 2 \pmod{4}$ nghĩa là A chia cho 4 dư 2.

Ta có A chia hết cho 2; A không chia hết cho 4; 2 là số nguyên tố. Vậy A không là số chính phương.

Bài 3: Cho $A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$. Tìm chữ số tận cùng của A .

Trích đề HSG Trường Võ Thị Sáu, năm 2014- 2015

Lời giải

$$2.A = 2.(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}) = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{21}$$

$$\Rightarrow A = 2^{21} - 2$$

$$\text{Ta có: } 2^{21} = 2^{4 \cdot 5 + 1} = (2^4)^5 \cdot 2 = 16^5 \cdot 2$$

Vì 16^5 có tận cùng là 6 nên $16^5 \cdot 2$ có tận cùng là 6. 2 có tận cùng là 2.

Vậy A có tận cùng là 2.

Bài 4: Cho $A = 5 + 5^2 + \dots + 5^{96}$. Tìm chữ số tận cùng của A .

Trích đề HSG huyện Nam Trực, năm 2014- 2015

Lời giải

$$A = 5 + 5^2 + \dots + 5^{96} \Rightarrow 5A = 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{97}$$



$$\Rightarrow 5A - A = 5^{97} - 5 \Rightarrow A = \frac{5^{97} - 5}{4}$$

Ta có: 5^{97} có chữ số tận cùng là 5 $\Rightarrow 5^{97} - 5$ có chữ số tận cùng là 0.

Vậy chữ số tận cùng của A là 0.

Bài 5: Chứng tỏ rằng $10^{2003} + 8$ chia hết cho 2.

Lời giải:

Ta có: 10^{2003} có chữ số tận cùng là 0.

Do đó: $10^{2003} + 8$ có chữ số tận cùng là 8.

Vậy $10^{2003} + 8$ chia hết cho 2

Bài 6: Chứng minh $2113^{2000} - 2011^{2000}$ chia hết cho cả 2 và 5.

Lời giải:

Để $2113^{2000} - 2011^{2000}$ vừa chia hết cho cả 2 và 5 thì số phải có chữ số tận cùng là 0.

Suy ra: Cần chứng minh số bị trừ và số trừ đều có chữ số tận cùng là 1.

Chú ý: Số tự nhiên a có chữ số tận cùng là 1 thì a^n cũng có chữ số tận cùng là 1.

Ta có: $2113^{2000} = (2113^4)^{500} = \overline{\dots 1}^{500}$. Suy ra: 2113^{2000} có chữ số tận cùng là 1.

2011^{2000} luôn có chữ số tận cùng là 1.

Suy ra: $2113^{2000} - 2011^{2000}$ có chữ số tận cùng là 0.

Vậy: $2113^{2000} - 2011^{2000}$ chia hết cho cả 2 và 5.

Bài 7: Cho $999993^{1999} - 555557^{1997}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 5.

Lời giải:

Để chứng minh $A:5$, ta xét chữ số tận cùng của A bằng việc xét chữ số tận cùng của từng số hạng.

Ta có: $3^{1999} = (3^4)^{499} = 81^{499} . 27$

Suy ra: 3^{1999} có chữ số tận cùng là 7.

$7^{1997} = (7^4)^{499} . 7 = 2041^{499} . 7$

Suy ra: 7^{1997} có chữ số tận cùng là 7.

Vậy A có chữ số tận cùng bằng 0.

Do đó: $A:5$.

Bài 8: Tìm hai chữ số tận cùng của các số:

a) 2^{2003}

b) 7^{99}

Lời giải:

a) Do 2^{2003} là số chẵn, ta tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $2^n - 1:25$.

Ta có $2^{10} = 1024 \Rightarrow 2^{10} + 1 = 1025:25 \Rightarrow 2^{20} - 1 = (2^{10} + 1)(2^{10} - 1):25 \Rightarrow 2^3(2^{20} - 1):100$.

Mặt khác:

$$2^{2003} = 2^3(2^{2000} - 1) + 2^3 = 2^3\left(\left(2^{20}\right)^{100} - 1\right) + 2^3 = 100k + 8 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Vậy hai chữ số tận cùng của 2^{2003} là 08.

Bài 9: Tìm chữ số tận cùng của 2^{915}

**Lời giải**

Ta có $2^4 \equiv 6 \pmod{10}$

$$2^{915} = (2^4)^{228} \cdot 2^3 \equiv 8 \pmod{10}$$

Hay chữ số tận cùng của 2^{915} là 8

Bài 10: Chứng minh rằng: $(5^{8^n} + 23) : 24$

Lời giải

Ta có $5^2 \equiv 1 \pmod{24}$

$$5^{8^n} = 5^{8 \cdot 8^{n-1}} = (5^2)^{4 \cdot 8^{n-1}} \equiv 1 \pmod{24}$$

Vậy $(5^{8^n} + 23) : 24$

Bài 11: Tìm số dư khi chia tổng $3^{100} + 3^{105}$ cho 13

Lời giải

* Tìm số dư khi chia 3^{100} cho 13: là tìm số tự nhiên nhỏ hơn 13, đồng dư với 3^{100} theo modun 13

$$\text{Ta có: } 3^{100} = 3^4 \cdot 3^{96} = 3^4 \cdot (3^3)^{32}$$

$$+) 3^4 = 81 = 13 \cdot 6 + 3 \Rightarrow 3^4 \equiv 3 \pmod{13} \quad (1)$$

$$+) 3^3 = 27 = 13 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 3^3 \equiv 1 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow (3^3)^{32} \equiv 1^{32} \pmod{13} \Rightarrow (3^3)^{32} \equiv 1 \pmod{13} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 3^4 \cdot (3^3)^{32} \equiv 3 \cdot 1 \pmod{13} \Rightarrow 3^{100} \equiv 3 \pmod{13} \quad (3)$$

$$\text{Mặt khác: } 3^{105} = (3^3)^{35}$$

$$\text{Mà } 3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow (3^3)^{35} \equiv 1^{35} \pmod{13}. \text{ Hay } 3^{105} \equiv 1 \pmod{13} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow 3^{100} + 3^{105} \equiv 3 + 1 \pmod{13} \Rightarrow 3^{100} + 3^{105} \equiv 4 \pmod{13}$$

Vậy tổng $3^{100} + 3^{105}$ chia cho 13 dư 4

Bài 12: Chứng minh rằng: $3012^{93} - 1$ chia hết cho 13

Lời giải

Ta có: $3012 = 13 \cdot 231 + 9$

$$\text{Do đó: } 3012 \equiv 9 \pmod{13} \Rightarrow 3012^3 \equiv 9^3 \pmod{13} \text{ mà } 9^3 \equiv 729 \equiv 1 \pmod{13}$$

$$\text{Nên } 3012^3 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow (3012^3)^{31} \equiv 1 \pmod{13}. \text{ Hay } 3012^{93} \equiv 1 \pmod{13}$$

$$\text{Vậy } 3012^3 - 1 \equiv 1 - 1 \pmod{13} \Rightarrow 3012^3 - 1 \equiv 0 \pmod{13}$$

Hay $3012^{93} - 1$ chia hết cho 13



Bài 13: Chứng minh rằng: $A = (2^{2^{2n}} + 5); 7 (\forall n \in \mathbb{N})$.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2015 -2016

Lời giải

Ta có: $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$

Ta đi tìm số dư của 2^{2^n} khi chia cho 3 .

Vì $4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 4^n \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2^{2^n} \equiv 1 \pmod{3}$ hay n chia cho 3 dư 1 .

Giả sử: $2^{2^n} = 3k + 1 (k \in \mathbb{N})$

Khi đó ta có: $A = 2^{3k+1} + 5 = 2.8^k + 5$

Vì $8^k \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 2.8^k \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 2.8^k + 5 \equiv 2 + 5 \pmod{7}$

$\Rightarrow A \equiv 0 \pmod{7}$

Vậy $A:7$.

Bài 14 : Chứng minh rằng: $A = 7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Tường năm 2014 -2015

Lời giải

Ta có: $A = 7.5^{2n} + 12.6^n = A = 7.25^n + 12.6^n$

Vì $25 \equiv 6 \pmod{19} \Rightarrow 25^n \equiv 6^n \pmod{19}$

Suy ra $7.25^n \equiv 7.6^n \pmod{19}$

Suy ra $7.25^n + 12.6^n \equiv 7.6^n + 12.6^n \equiv 19.6^n \equiv 0 \pmod{19}$

.Điều này chứng tỏ A chia hết cho 19.

Bài 15 : Chứng minh: $3^{100} - 3$ chia hết cho 13 .

Trích đề HSG huyện Vụ Bản năm 2011 -2012

Lời giải

Ta có: $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}$

$3^{100} = 3.3^{99} \equiv 3.1 \pmod{13}$

$3^{100} - 3 \equiv 0 \pmod{13}$.

Vậy $3^{100} - 3$ chia hết cho 13.

Bài 16 : Chứng minh rằng số $A = 2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7 ?

Trích đề HSG huyện Vụ Bản năm 2017 -2018

Lời giải

Nhận xét: $2222 \equiv 3 \pmod{7}$ (1)

Từ đó: $2222^4 \equiv 3^4 \pmod{7}$ hay $2222^4 \equiv 81 \pmod{7}$

Mà $81 \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow 2222^4 \equiv 4 \pmod{7}$ (2)

Nhân vế với vế (1) và (2) ta được $2222^5 \equiv 3.4 \pmod{7}$

Hay là: $2222^5 \equiv 5 \pmod{7} \Rightarrow 2222^{5555} \equiv 5^{1111} \pmod{7}$ (3)

Tương tự ta có: $5555^{2222} \equiv 2^{1111} \pmod{7}$ (4)

Cộng vế với vế (3) và (4) ta có: $A \equiv 2^{1111} + 5^{1111} \pmod{7}$ (5)

Mặt khác: $2^{1111} + 5^{1111} = (2+5).M = 7.M \equiv 0 \pmod{7}$ (6)

Từ (5) và (6) ta được: $A \equiv 0 \pmod{7}$



Vậy: $A = 2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7.

Bài 17: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì số $B = 4^{2n+1} + 3^{n+2}$ luôn chia hết cho 13 ?

Trích đề HSG huyện Ý Yên năm 2017 -2018

Lời giải

Nhận xét 1:

$$4^2 = 16 \equiv 3 \pmod{13}$$

$$(4^2)^n \equiv 3^n \pmod{13}$$

$$4^{2n} \equiv 3^n \pmod{13}$$

$$\text{Mà } 4 \equiv 4 \pmod{13}$$

$$4^{2n+1} \equiv 4 \cdot 3^n \pmod{13}$$

$$\text{Hay } 4^{2n+1} \equiv 4 \cdot 3^n \pmod{13} \quad (1)$$

Nhận xét 2: $3^2 = 9 \equiv -4 \pmod{13}$ mà $3^n \equiv 3^n \pmod{13}$.

$$\text{Từ đó } \Rightarrow 3^2 \cdot 3^n \equiv -4 \cdot 3^n \pmod{13}, \text{ hay là: } 3^{n+2} \equiv -4 \cdot 3^n \pmod{13} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), cộng vế với vế, ta được $B \equiv 0 \pmod{13}$.

Nghĩa là $B = 4^{2n+1} + 3^{n+2}$ luôn chia hết cho 13 với mọi $n \in \mathbf{N}$.

Bài 18 : $A = 2015^{2015} + 3 \cdot 2011^{2011} + 2018^{2015}$ chia hết cho 10.

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2017 -2018

Lời giải

Ta có :

2015 có tận cùng là chữ số 5 nên 2015^{2015} cũng có tận cùng là chữ số 5, tức là:

$$2015^{2015} \equiv 5 \pmod{10} \quad (1)$$

2011 có tận cùng là chữ số 1 nên 2011^{2011} cũng có tận cùng là chữ số 1, tức là:

$$2011^{2011} \equiv 1 \pmod{10}$$

$$3 \cdot 2011^{2011} \equiv 3 \pmod{10} \quad (2)$$

2018 có tận cùng là chữ số 8 và $2015 = 4n + 3$ ($n \in \mathbf{N}$), nên 2018^{2015} có tận cùng là chữ số 2 (theo tính chất 6), tức là:

$$2018^{2015} \equiv 2 \pmod{10} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$2015^{2015} + 3 \cdot 2011^{2011} + 2018^{2015} \equiv 5 + 3 + 2 \pmod{10} \equiv 0 \pmod{10}$$

Vậy $A = 2015^{2015} + 3 \cdot 2011^{2011} + 2018^{2015}$ chia hết cho 10.

Bài 19 : Tìm số dư của phép chia 1234^{30} cho 2014.

Trích đề HSG huyện Trực Ninh năm 2017 -2018

Lời giải

Ta có : 1234^3 chia 2014 dư 778, ta viết:

$$1234^3 \equiv 778 \pmod{2014} \quad (1)$$

$$1234^9 \equiv 778^3 \pmod{2014} \equiv 1500 \pmod{2014}$$



$$1234^{27} \equiv 1500^3 \pmod{2014} \equiv 1234 \pmod{2014} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$1234^3 \cdot 1234^{27} \equiv 778 \cdot 1234 \pmod{2014}$$

$$\text{Hay } 1234^{30} \equiv 1234 \cdot 778 \pmod{2014} \equiv 1388 \pmod{2014}$$

Vì $0 < 1388 < 2014$ nên $r = 1388$ là số dư của phép chia 1234^{30} cho 2014.

Bài 20: Chứng minh rằng $12^{2n+1} + 11^{n+2}$ chia hết cho 133 với $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải

Cách 1: Ta có $12^2 = 144 \equiv 11 \pmod{133}$; $11^2 = 121 \equiv -12 \pmod{133}$

$$12^{2n+1} = 12 \cdot 12^{2n} \equiv 12 \cdot 11^n \pmod{133}$$

$$11^{n+2} = 11^2 \cdot 11^n \equiv -12 \cdot 11^n \pmod{133}$$

$$\text{Do đó } 12^{2n+1} + 11^{n+2} \equiv 12 \cdot 11^n - 12 \cdot 11^n \equiv 0 \pmod{133}$$

Cách 2: Ta có $12^2 = 144 \equiv 11 \pmod{133}$ nên $12^{2n} \equiv 11^n \pmod{133}$ (1)

$$\text{Mà } 12 \equiv -121 \pmod{133} \equiv -11^n \pmod{133} \quad (2)$$

Nhân (1) và (2) về theo về, ta được: $12^{2n+1} \equiv -11^{n+2} \pmod{133}$

$$\text{Suy ra } 12^{2n+1} + 11^{n+2} \equiv 0 \pmod{133}$$

Vậy $12^{2n+1} + 11^{n+2}$ chia hết cho 133 với $n \in \mathbb{N}$.

Bài 21: Chứng minh rằng $2^{2002} - 4$ chia hết cho 31.

Lời giải

Ta có $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$ mà $2002 = 5 \cdot 400 + 2$ nên $2^{2002} = (2^5)^{400} \cdot 2^2$

$$\text{Vì } 2^5 \equiv 1 \pmod{31}$$

$$(2^5)^{400} \equiv 1^{400} \pmod{31}$$

$$(2^5)^{400} \cdot 2^2 \equiv 1 \cdot 2^2 \pmod{31}$$

$$\text{Suy ra } 2^{2002} \equiv 4 \pmod{31} \text{ hay } 2^{2002} - 4 \vdots 31$$

Bài 22: Tìm số dư trong phép chia số $A = 2020^{2021}$ cho 3.

Lời giải

Ta có: $2020 \equiv 1 \pmod{3}$

$$2020^{2021} \equiv 1^{2021} \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}$$

Vậy số 2020^{2021} khi chia cho 3 thì dư 1.

Bài 23: Tìm số dư của $A = 3^{2005} + 4^{2005}$ khi chia A cho 11 và khi chia cho 13.

Lời giải

Ta có $3^5 \equiv 1 \pmod{11}$ suy ra $(3^5)^{401} \equiv 1 \pmod{11}$

$$4^5 \equiv 1 \pmod{11} \text{ suy ra } (4^5)^{401} \equiv 1 \pmod{11}$$

Khi đó A chia cho 11 dư 2.



Mặt khác: $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$ nên $(3^3)^{668} \cdot 3 \equiv 3 \pmod{13}$

Và $4^3 \equiv -1 \pmod{13}$ nên $(4^3)^{668} \cdot 4 \equiv 4 \pmod{13}$,

Khi đó A chia cho 13 dư 7.

Bài 24: Chứng minh rằng: $A = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n : 19$

Lời giải

$$A = 7 \cdot 25^n + 12 \cdot 6^n.$$

Vì $25^n \equiv 6^n \pmod{19}$ nên $7 \cdot 25^n \equiv 7 \cdot 6^n \pmod{19}$

Suy ra $A = 7 \cdot 6^n + 12 \cdot 6^n \pmod{19} = 6^n \cdot 19 \pmod{19} \equiv 0 \pmod{19}$

Vậy $A : 19$

Bài 25: Tìm số dư khi chia $A = 1944^{2005}$ cho 7.

Lời giải

$1944 \equiv -2 \pmod{7}$ nên $1944^{2005} \equiv (-2)^{2005} \pmod{7}$

Mà $(-2)^3 \equiv -1 \pmod{7}$ nên $1944^{2005} \equiv (-2^3)^{668} \pmod{7} \equiv (-1)^{668} \pmod{7} \equiv 1 \pmod{7}$

Vậy $1944^{2005} \equiv 1 \cdot (-2) \pmod{7}$ hay A chia cho 7 dư 5.

Bài 26: Chứng minh rằng các số $A = 6^{1000} - 1$ và $B = 6^{1001} + 1$ đều là bội số của 7.

Lời giải

Ta có:

$$6 \equiv -1 \pmod{7}$$

$$6^{1000} \equiv 1 \pmod{7}$$

$$6^{1000} - 1 \equiv 0 \pmod{7} \text{ hay } 6^{1000} - 1 : 7$$

Vậy A là bội của 7.

Ta có: $6^{1000} \equiv 1 \pmod{7}$

$$6^{1001} \equiv 6 \pmod{7}$$

mà $6 \equiv -1 \pmod{7}$ nên $6^{1001} \equiv -1 \pmod{7}$

$$6^{1001} + 1 \equiv 0 \pmod{7} \text{ hay } 6^{1001} + 1 : 7$$

Vậy B là bội của 7.

Bài 27: Chứng minh rằng: $3012^{93} - 1$ chia hết cho 13.

Lời giải

Ta có: $3012 = 13 \cdot 231 + 9$

Do đó: $3012 \equiv 9 \pmod{13}$

Suy ra: $3012^3 \equiv 9^3 \pmod{13}$

mà $9^3 = 729 \equiv 1 \pmod{13}$

nên $3012^3 \equiv 1 \pmod{13}$

$$(3012^3)^{31} \equiv 1 \pmod{13}$$

hay $3012^{93} \equiv 1 \pmod{13}$



Suy ra $3012^{93} - 1 \equiv 1 - 1 \pmod{13}$

$$3012^{93} - 1 \equiv 0 \pmod{13}$$

Vậy $3012^{93} - 1$ chia hết cho 13.

Bài 28: Chứng minh rằng: $A = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ chia hết cho 19.

Lời giải

Ta có $A = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n = 7 \cdot 25^n + 12 \cdot 6^n$

Vì $25 \equiv 6 \pmod{19}$ nên $25^n \equiv 6^n \pmod{19}$

Suy ra $7 \cdot 25^n \equiv 7 \cdot 6^n \pmod{19}$

Do đó $7 \cdot 25^n + 12 \cdot 6^n \equiv 7 \cdot 6^n + 12 \cdot 6^n \equiv 19 \cdot 6^n \equiv 0 \pmod{19}$

Chứng tỏ A chia hết cho 19.

Bài 29: Chứng minh rằng : $2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7 .

Lời giải

Ta có: $2222 + 4 : 7$ nên $2222 \equiv -4 \pmod{7}$ do đó $2222^{5555} \equiv (-4)^{5555} \pmod{7}$

Ta có: $5555 - 4 : 7$ nên $5555 \equiv 4 \pmod{7}$ do đó $5555^{2222} \equiv 4^{2222} \pmod{7}$

Suy ra $2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv (-4)^{5555} + 4^{2222} \pmod{7}$ (1)

Mà $4^{2222} = (-4)^{2222}$ nên $(-4)^{5555} + 4^{2222} = -4^{2222} \cdot 4^{3333} + 4^{2222}$

$$= -4^{2222} (4^{3333} - 1) \equiv 4^3 - 1 \pmod{7}$$

Ta lại có: $4^3 \equiv 1 \pmod{7}$

$$4^3 - 1 = 63 : 7$$

$$4^3 - 1 \equiv 0 \pmod{7}$$

nên $(-4)^{5555} + 4^{2222} \equiv 0 \pmod{7}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7 .

Bài 30:

1) Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a) 57^{1999}

b) 93^{1999}

2) Cho $A = 999993^{1999} - 555557^{1997}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 5

Trích đề HSG cấp trường năm 2017-2018

Lời giải

1) a) Ta có: $7^{1999} = (7^4)^{499} \cdot 7^3 = 2401^{499} \cdot 343 \Rightarrow$ nên chữ số tận cùng là 3

Vậy số 57^{1999} có chữ số tận cùng là 3

b) $3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3^3 = 81^{499} \cdot 27$ nên có chữ số tận cùng là 7

2) Để chứng minh A chia hết cho 5, ta xét chữ số tận cùng của A bằng việc xét chữ số tận cùng của từng số hạng

Theo câu 1b, 999993^{1999} có chữ số tận cùng là 7



Tương tự câu 1a, ta có: $(7^4)^{499} \cdot 7 = 2401^{499} \cdot 7$ có chữ số tận cùng là 7

Vậy A có chữ số tận cùng là 0, nên A chia hết cho 5.

Bài 31: Tìm số tận cùng của các số sau:

$$52^{35}; \quad 204^{402}.$$

Lời giải

$$52^{35} = 52^{4 \cdot 8 + 3} = 52^{4 \cdot 8} \cdot 52^3 = (52^4)^8 \cdot \overline{\dots 8} = \overline{\dots 6} \cdot \overline{\dots 8} = \overline{\dots 8}.$$

Vậy 52^{35} có chữ số tận cùng là 8.

$$204^{402} = 204^{4 \cdot 100 + 2} = 204^{4 \cdot 100} \cdot 204^2 = (204^4)^{100} \cdot \overline{\dots 6} = \overline{\dots 6} \cdot \overline{\dots 6} = \overline{\dots 6}.$$

Vậy 204^{402} có chữ số tận cùng là 6.

Bài 32: Tìm số tận cùng của các số sau:

$$58^{2018}; \quad 213^{3102}; \quad 120^{1040}.$$

Lời giải

$$58^{2018} = 4^{4 \cdot 504 + 2} = 58^{4 \cdot 504} \cdot 58^2 = (58^4)^{504} \cdot \overline{\dots 6} = \overline{\dots 6} \cdot \overline{\dots 6} = \overline{\dots 6}$$

Vậy 58^{2018} có chữ số tận cùng là 6.

$$213^{3102} = 213^{4 \cdot 775 + 2} = 213^{4 \cdot 775} \cdot 213^2 = (213^4)^{775} \cdot \overline{\dots 9} = \overline{\dots 1} \cdot \overline{\dots 9} = \overline{\dots 9}.$$

Vậy 213^{3102} có chữ số tận cùng là 9.

$$120^{1040} = 120^{4 \cdot 260} = (120^4)^{260} = \overline{\dots 0}.$$

Vậy 120^{1040} có chữ số tận cùng là 0.

Bài 33: Tìm số tận cùng của: $A = 17^{25} + 24^4 - 13^{21}$.

Lời giải

$$A = 17^{4 \cdot 6} \cdot 17 + 24^4 - 13^{4 \cdot 5} \cdot 13 = (17^4)^6 \cdot 17 + 24^4 - (13^4)^5 \cdot 13 = \overline{\dots 1} \cdot 17 + \overline{\dots 6} - \overline{\dots 1} \cdot 13 \\ = \overline{\dots 7} + \overline{\dots 6} - \overline{\dots 3} = \overline{\dots 0}$$

Vậy A có chữ số tận cùng là 0.

Bài 34: Tìm số tận cùng của: $A = 17^{2008} - 11^{2008} - 3^{2008}$.

Lời giải

$$A = 17^{4 \cdot 502} - 11^{2008} - 3^{4 \cdot 502} = (17^4)^{502} - 11^{2008} - (3^4)^{502} = \overline{\dots 1} - \overline{\dots 1} - \overline{\dots 1} = \overline{\dots 0} - \overline{\dots 1} = \overline{\dots 9}.$$

Vậy A có chữ số tận cùng là 9.

Bài 35: Cho $A = 8^{102} - 2^{102}$. Chứng minh A chia hết cho 10.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 8^{102} - 2^{102} = 8^{4 \cdot 25} \cdot 8^2 - 2^{4 \cdot 25} \cdot 2^2 = (4^4)^{25} \cdot 64 - (2^4)^{25} \cdot 4 = \overline{\dots 6} \cdot 64 - \overline{\dots 6} \cdot 4 = \overline{\dots 4} - \overline{\dots 4} = \overline{\dots 0}.$$

Suy ra A chia hết cho 10.

Bài 36: Cho $A = 99^5 - 98^4 + 97^3 - 96^2$. Chứng minh A chia hết cho 10.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 99^5 - 98^4 + 97^3 - 96^2 = 99^4 \cdot 99 - 98^4 + 97^3 - 96^2 = \overline{\dots 1} \cdot 99 - \overline{\dots 6} + \overline{\dots 3} - \overline{\dots 6} = \overline{\dots 0}.$$

Suy ra A chia hết cho 10.

Bài 37: Tìm số dư trong phép chia 2004^{2004} khi chia cho 11.



Lời giải

Ta có $2002:11 \Rightarrow 2004 \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow 2004^{2004} \equiv 2^{2004} \pmod{11}$

Mà $2^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 2004^{2004} = 2^4 \cdot 2^{2000} \equiv 2^4 \cdot (2^{10})^{200} \pmod{11} \equiv 2^4 \pmod{11} \equiv 5 \pmod{11}$

Vậy 2004^{2004} chia cho 11 dư 5.

Bài 38: Tìm số dư khi chia $A = 1944^{2005}$ cho 7.

Lời giải

Ta có: $1944 \equiv -2 \pmod{7} \Rightarrow 1944^{2005} \equiv (-2)^{2005} \pmod{7}$

Mà $(-2)^3 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 1944^{2004} \equiv (-2^3)^{668} \pmod{7} \equiv (-1)^{668} \pmod{7} \equiv 1 \pmod{7}$

Vậy $1944^{2005} \equiv 1 \cdot (-2) \pmod{7}$ hay A chia cho 7 dư 5.

Bài 39: Chứng minh rằng: $2^{2002} - 4 : 31$.

Lời giải

Ta có: $2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31}$

$\Rightarrow A = 2^{2002} - 4 \equiv 0 \pmod{31}$

$\Rightarrow (2^5)^{400} \cdot 2^2 \equiv 4 \pmod{31}$

Vậy $2^{2002} - 4 : 31$.

Bài 40: Tìm một số tự nhiên có 6 chữ số tận cùng là chữ số 4. Biết rằng khi chuyển chữ số 4 đó lên đầu còn các chữ số khác giữ nguyên thì ta được số mới gấp 4 lần số cũ.

(Đề thi HSG Gia Lai năm 2018 - 2019)

Lời giải:

Gọi số cần tìm là $\overline{abcde4}$, ta có: $\overline{abcde4} \cdot 4 = \overline{4abcde}$

Đặt $\overline{abcde} = x \Rightarrow \overline{abcde4} = \overline{x4}$

Ta có: $\overline{x4} \cdot 4 = 400000 + x$

$(10x + 4) \cdot 4 = 400000 + x$

$40x + 16 = 400000 + x$

$39x = 399984$

$x = 10256$

Vậy số cần tìm là 10256.

Bài 41: Cho $A = 2017 + 2017^2 + 2017^3 + \dots + 2017^{18}$. Chứng tỏ rằng $A : 2018$.

Tìm chữ số tận cùng của A .

(Đề HSG Trục Ninh năm 2017 - 2018)

Lời giải:

Ta có $A = 2017 + 2017^2 + 2017^3 + \dots + 2017^{18}$ (tổng A có 2018 số hạng, $2018 : 2$)

$A = (2017 + 2017^2) + (2017^3 + 2017^4) + \dots + (2017^{2017} + 2017^{2018})$



$$\begin{aligned}
 &= 2017 \cdot (1+2017) + 2017^3 \cdot (1+2017) + \dots + 2017^{2017} (1+2017) \\
 &= 2018 \cdot (2017 + 2017^3 + \dots + 2017^{2017}) : 2018 \\
 &= 2017 + 2017^2 + (2017^3 + 2017^4 + 2017^5 + 2017^6) + \dots + (2017^{2015} + 2017^{2016} + 2017^{2017} + 2017^{2018}) \\
 &= (\overline{\dots 6}) + 2017^3 \cdot (\overline{\dots 0}) + \dots + 2017^{2015} \cdot (\overline{\dots 0}) \\
 &= (\overline{\dots 6})
 \end{aligned}$$

Vậy chữ số tận cùng của A là 6.

Bài 42: Tìm chữ số tận cùng của số $P = 14^{14^{14}} + 9^{9^9} + 2^{3^4}$

(Đề HSG Lý Nhân năm 2018 - 2019).

Lời giải:

Chữ số tận cùng của $14^{14^{14}}$ là 6.

Chữ số tận cùng của 9^{9^9} là 9.

Chữ số tận cùng của 2^{3^4} là 2.

Chữ số tận cùng của P là chữ số tận cùng của tổng $(6+9+2)$ là 7.

Bài 43: Cho $M = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$

a) Chứng tỏ rằng $M : 5$.

b) Tìm chữ số tận cùng của M .

(Đề HSG Bắc Ninh năm 2016 - 2017)

Lời giải:

a) Ta có: $M = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$

$$= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + (2^{17} + 2^{18} + 2^{19} + 2^{20})$$

$$= 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3) + \dots + 2^{17}(1 + 2 + 2^2 + 2^3)$$

$$= 15(2 + \dots + 2^{17})$$

$$= 5 \cdot 3 \cdot (2 + \dots + 2^{17}) : 5$$

b) Dễ thấy $M : 2; M : 5 \Rightarrow M : 10$

Do đó: M có chữ số tận cùng bằng 0.

Bài 44: Cho $A = 3(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$. Không làm phép tính, hãy rút gọn biểu thức rồi tìm số tận cùng của A .

(Đề HSG Bắc Ninh năm 2016 - 2017)

Lời giải:



$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } A &= 3(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) \\
 &= (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) \\
 &= (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) \\
 &= (2^8 - 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) \\
 &= (2^{16} - 1)(2^{16} + 1) \\
 &= 2^{32} - 1
 \end{aligned}$$

Vì 2^{32} có chữ số tận cùng là 2 nên $A = 2^{32} - 1$ có chữ số tận cùng là 1.

Bài 45: Cho $A = \frac{1}{2}(7^{2012 \cdot 2015} - 3^{92 \cdot 94})$. Chứng minh A là số tự nhiên chia hết cho 5.

(Đề HSG Hoàng Hoá năm 2018 - 2019)

Lời giải:

Vì $2012; 92$ đều là bội của 4 nên 2012^{2015} và 92^{94} cũng là bội của 4.

$$\text{Suy ra: } 2012^{2015} = 4m \quad (m \in \mathbb{N}^*)$$

$$92^{94} = 4n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{Khi đó: } 7^{2012 \cdot 2015} - 3^{92 \cdot 94} = 7^{4m} - 3^{4n} = (\overline{\dots 1}) - (\overline{\dots 1}) = 0$$

Vậy A có tận cùng là 0 nên chia hết cho 10 nên $A = \frac{1}{2}(7^{2012 \cdot 2015} - 3^{92 \cdot 94}) : 5$.

Bài 46: Cho $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$. Chứng minh rằng A không phải là số chính phương.

(Đề HSG Buôn Mê Thuật năm 2018 - 2019)

Lời giải:

Ta có các số $10^{2012}; 10^{2011}; 10^{2010}; 10^{2009}$ đều có chữ số tận cùng là 0.

Do đó: $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$ có chữ số tận cùng là 8.

Vậy A không phải là số chính phương.

Bài 47: Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a) 57^{2011}

b) 93^{1999}

(Đề HSG Tân Uyên 2018 - 2019)

Lời giải:

a) Xét 7^{2011} , ta có: $7^{2011} = (7^4)^{502} \cdot 7^3 = 2401^{502} \cdot 343$

Suy ra chữ số tận cùng bằng 3

Vậy số 57^{2011} có chữ số tận cùng là 3



b) Xét 3^{1999} ta có: $3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3 = 81^{499} \cdot 27$

Suy ra chữ số tận cùng bằng 7

Vậy số 93^{1999} có chữ số tận cùng là 7

Bài 48:

a) Tìm chữ số tận cùng của các số sau: $49^{31}; 32^{2000}$

b) Chứng tỏ rằng: $10^{2011} + 8$ chia hết cho 72

(Đề HSG Yên Lạc 2018 - 2019)

Lời giải:

a) Do 49 có chữ số tận cùng là 9, khi đó nâng lên lũy bậc lẻ có chữ số tận cùng là 9

Vậy 49^{31} có chữ số tận cùng là 9

Ta có $32^{2000} = 32^{4 \cdot 500}$ có chữ số tận cùng là 0 nên khi nâng lên lũy thừa $4n$ có tận cùng là chữ số 0.

Vậy 32^{2000} có chữ số tận cùng là 0

b) Vì $10^{2011} + 8$ có tổng các chữ số chia hết cho 9 nên tổng chia hết cho 9

Lại có $10^{2011} + 8$ có 3 chữ số tận cùng là 008 nên chia hết cho 8

Vậy $10^{2011} + 8$ chia hết cho 72.

Bài 49: Cho $A = 5 + 5^2 + \dots + 5^{96}$. Tìm chữ số tận cùng của A.

(Đề HSG 2017 - 2018)

Lời giải:

Ta có: $A = 5 + 5^2 + \dots + 5^{96}$

$$5A = 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{96} + 5^{97}$$

Do đó: $5A - A = 5^{97} - 5$

$$\text{Suy ra: } A = \frac{5^{97} - 5}{4}$$

Ta có: 5^{97} có chữ số tận cùng là 5

Suy ra $5^{97} - 5$ có chữ số tận cùng là 0

Vậy chữ số tận cùng của A là 0.

Bài 50: Tìm chữ số tận cùng của 187^{324}

Lời giải:

Ta thấy các số có tận cùng bằng 7 nâng lên lũy thừa bậc 4 thì được số có tận cùng bằng 1. Các số có tận cùng bằng 1 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 1.

Do đó:

$$187^{324} = (187^4)^{81} = (\overline{\dots 1})^{81} = (\overline{\dots 1})$$

Vậy chữ số tận cùng của 187^{324} là 1

Bài 51: Tìm ba chữ số tận cùng của 5^{2008}

Lời giải:



$$5^{2008} = 5^{4 \cdot 502} = (5^4)^{502}$$

5^4 có tận cùng là 625

Suy ra $(5^4)^{502}$ có tận cùng là 625

Vậy 5^{2008} có 3 chữ số tận cùng là 625.

Bài 52: Tìm ba chữ số tận cùng của 2^{100} .

Lời giải

Ta có: $2^{10} = 1024 \equiv 024 \pmod{1000}$

$$2^{50} = (2^{10})^5 \equiv 24^5 \equiv 624 \pmod{1000}$$

$$2^{100} = (2^{50})^2 \equiv 624^2 \equiv 376 \pmod{1000}$$

Vậy ba chữ số tận cùng của 2^{100} là 376.

Bài 53. Tìm ba chữ số tận cùng của 123^{101}

Lời giải:

Ta có: $123^{101} = 123(123^{100} - 1) + 123 = 1000k + 123 \ (k \in \mathbb{N})$. Vậy 123^{101} có ba chữ số tận cùng là 123.

Bài 54. Tìm ba chữ số tận cùng của $2^{9^{2003}}$

Lời giải

- Tìm 2 chữ số tận cùng của 9^{2003}

Ta có $9^{2003} = 9^3 \cdot 9^{2000} = 9^3 \cdot (3^{20})^{50} \equiv 29 \pmod{100}$

- Khi đó ta có $2^{9^{2003}} = 2^{100k+29} = 2^{29} \cdot 2^{100k} \equiv 912 \cdot 376 \equiv 912 \pmod{1000}$

Vậy 3 chữ số tận cùng là 912.

Bài 55. Tìm ba chữ số tận cùng của $3^{7^{213}}$

Lời giải

Ta có $7^{213} \equiv 7^{26 \cdot 8 + 5} \equiv (7^8)^{26} \cdot 7^5 \equiv 1^{26} \cdot 7^5 \equiv 7^5 \equiv 7 \pmod{1000}$

Khi đó $3^{7^{213}} = 3^{100k+7} = 3^{100k} \cdot 3^7 \equiv 1 \cdot 3^7 \equiv 187 \pmod{1000}$

Vậy ba chữ số tận cùng của $3^{7^{213}}$ là 187.

Bài 56. Tìm ba chữ số tận cùng của 5^{1992}

Lời giải

$$5^{1992} = (5^4)^{498} = 625^{498} = 0625^{498} = \overline{\dots 0625}$$

Vậy bốn chữ số tận cùng của 5^{1992} là 0625

Bài 57. Tìm ba chữ số tận cùng của số $T = 5^{946}$

Lời giải



Ta có 5^3 có ba chữ số tận cùng là 125

$$\text{Suy ra } T = 5^{946} = (5^3)^{315} \cdot 5 = (\overline{n125})^{315} \cdot 5 = \overline{m125} \cdot 5 = \overline{t625}$$

(Với $n, m, t \in \mathbb{N}$)

Vậy $T = 5^{946}$ có ba chữ số tận cùng là 125.

Bài 58. Tìm ba chữ số tận cùng của số: $P = 5^{1994}$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{array}{lll} 5^4 = 0625 \text{ tận cùng là } 0625; & 5^5 \text{ tận cùng là } 3125; & 5^6 \text{ tận cùng là } 5625 \\ 5^7 \text{ tận cùng là } 8125; & 5^8 \text{ tận cùng là } 0625; & 5^9 \text{ tận cùng là } 3125; \\ 5^{10} \text{ tận cùng là } 5625; & 5^{11} \text{ tận cùng là } 8125; & 5^{12} \text{ tận cùng là } 0625 \end{array}$$

Chu kỳ lặp là 4.

Suy ra:

$$\begin{array}{ll} 5^{4m} \text{ tận cùng là } 0625; & 5^{4m+1} \text{ tận cùng là } 3125 \\ 5^{4m+2} \text{ tận cùng là } 5625; & 5^{4m+3} \text{ tận cùng là } 8125 \end{array}$$

Mà 1994 có dạng $4m+2$, do đó $M = 5^{1994}$ có 4 chữ số tận cùng là 5625.

Bài 59. Tìm ba chữ số tận cùng của số: $R = 123^{102}$

Lời giải

Do $(123, 5) = 1$ suy ra $123^{100} - 1$ chia hết cho 125 (1).

Mặt khác: $123^{100} - 1 = (123^{25} - 1)(123^{25} + 1)(123^{50} + 1)$ suy ra $123^{100} - 1$ chia hết cho 8 (2).

Vì $(8, 125) = 1$, từ (1) và (2) suy ra: $123^{100} - 1$ chia hết cho 1000

$$\text{Suy ra: } 123^{102} = 123^2 (123^{100} - 1) + 15000 + 129 = 1000k + 129 (k \in \mathbb{N}).$$

Vậy 123^{101} có ba chữ số tận cùng là 129.

Bài 60: Chứng minh rằng: $A = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ chia hết cho 19

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 7 \cdot 25^n + 12 \cdot 6^n$$

$$\text{Vì } 25^n \equiv 6^n \pmod{19}$$

$$A \equiv 7 \cdot 6^n + 12 \cdot 6^n \pmod{19}$$

$$A \equiv 19 \cdot 6^n \pmod{19}$$

$$A \equiv 0 \pmod{19}$$

$$A : 19$$

$$\text{Vậy } A : 19$$

Bài 61: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $A = 5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$ chia hết cho 23

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 25^n \cdot 5 + 2^n \cdot 16 + 2^n \cdot 2$$

$$\text{Vì } 25^n \cdot 5 \equiv 5 \cdot 2^n \pmod{23}$$



$$A = 2^n \cdot 5 + 2^n \cdot 16 + 2^n \cdot 2 \pmod{23}$$

$$A \equiv 2^n \cdot 23 \pmod{23}$$

$$A \equiv 0 \pmod{23}$$

Vậy $A = 5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$ chia hết cho 23.

Bài 62: Chứng minh rằng: Với mọi số tự nhiên n thì số $B = 4^{2n+1} + 3^{n+2}$ luôn chia hết cho 13.

Lời giải

Ta xét số dư của 4^{2n+1} khi chia cho 13

$$\text{Ta có: } 4^2 = 16 \equiv 3 \pmod{13}$$

$$4^{2n} \equiv 3^n \pmod{13}$$

$$4^{2n+1} \equiv 4 \cdot 3^n \pmod{13} \quad (1)$$

+ Ta xét số dư của 3^{n+2} khi chia cho 13

$$\text{Ta có: } 3^2 = 9 \equiv -4 \pmod{13}$$

$$\text{Mà } 3^n \equiv 3^n \pmod{13}$$

$$\text{Nên } 3^n \cdot 3^2 \equiv -4 \cdot 3^n \pmod{13}$$

$$3^{n+2} \equiv -4 \cdot 3^n \pmod{13} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), cộng vế với vế, ta được $B \equiv 0 \pmod{13}$.

Vậy $A = 5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$ chia hết cho 23 với mọi $n \in \mathbb{N}$

Bài 63: Chứng minh rằng: $A = 2^{2^{2n}} + 5 : 7 \ (n \in \mathbb{N})$

Lời giải

Vì $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$. Nên ta đi tìm số dư của 2^{2^n} cho 3.

Thật vậy: $2^{2^n} = 4^n \equiv 1 \pmod{3}$ suy ra $2^{2^n} = 3k + 1$

$$A = 2^{3k+1} + 5 = 2 \cdot 8^k + 5 \equiv (2+5) \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7}.$$

$$A = 2^{2^{2n}} + 5 : 7 \ (n \geq 0)$$

Bài 64: Chứng minh rằng: $B = 1924^{2003^{2004^n}} + 1920 : 124 \ (n \in \mathbb{N}^*)$

Lời giải

Ta có $124 = 4 \cdot 31$

Để thấy $B : 4$. Ta chứng minh $B : 31$

$$\text{Vì } \begin{cases} 1924 \equiv 2 \pmod{31} \\ 1920 \equiv -2 \pmod{31} \end{cases} \text{ nên } B \equiv 2^{2003^{2004^n}} - 2 \pmod{31}$$

$$\text{Vì } 2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31}$$

Từ đây ta xét $M = 2003^{2004^n}$ chia cho 5 có số dư là bao nhiêu

Vì $2004 : 4$ nên ta đặt $2004^n = 4k$ và $M = 2003^{2004^n} = 2003^{4k}$

Mà $2003 \equiv 3 \pmod{5}$ nên $2003^{4k} \equiv 3^{4k} \pmod{5} \equiv 81^k \pmod{5} \equiv 1 \pmod{5}$

nên $M = 5m + 1$

$$B \equiv 2^{5m+1} - 2 \pmod{31} \equiv 2 \cdot 32^m - 2 \pmod{31} \equiv 2 - 2 \pmod{31} \equiv 0 \pmod{31}$$

Vậy $B : 124$

Bài 65: Một số chia cho 7 dư 3, chia cho 17 dư 12, chia cho 23 dư 7. Hỏi số đó chia cho 2737 dư bao nhiêu ?

Lời giải

Gọi số đã cho là A . Theo bài ra ta có:

$$A = 7.a + 3 = 17.b + 12 = 32.c + 7$$

$$\text{Mặt khác } A + 39 = 7.a + 3 + 39 = 17.b + 12 + 39 = 32.c + 7 + 39$$



$$= 7(a+6) = 17(b+3) = 23(c+2)$$

Như vậy $A + 39$ đồng thời chia hết cho 7, 17 và 23.

Nhưng 7, 17 và 23 đôi một nguyên tố cùng nhau nên $(A + 39) : 7 \cdot 17 \cdot 23$ nên $(A + 39) : 2737$

$$\text{Suy ra } A + 39 = 2737k \Rightarrow A = 2737k - 39 = 2737(k - 1) + 2698$$

Do $2698 < 2737$ nên 2698 là số dư của phép chia A cho 2737

Bài 66: Cho số $A = 1994^{2005}$

- Tìm số dư trong phép chia A chia cho 7.
- Tìm chữ số tận cùng của A

Lời giải

a. Ta có: $1994 \equiv -2 \pmod{7}$

$$\begin{aligned} A = 1994^{2005} &\equiv (-2)^{2005} \pmod{7} \equiv \left[(-2)^3 \right]^{668} (-2) \pmod{7} \\ &\equiv (-1)^{668} (-2) \pmod{7} \\ &\equiv (-2) \pmod{7} \equiv 5 \pmod{7} \end{aligned}$$

Vậy A chia cho 7 dư 5.

b. Xét số dư khi chia A cho 10.

Ta có: $1994 \equiv 4 \pmod{10}$.

Ta xét số dư khi chia A cho 2 và cho 5.

Ta có: $1994 \equiv 0 \pmod{2}$

$$1994 \equiv 4 \pmod{5} \equiv (-1) \pmod{5}$$

$$1994^{2005} \equiv (-1)^{2005} \pmod{5} \equiv (-1) \pmod{5} \equiv 4 \pmod{5}$$

$$A \equiv 4 \pmod{10}$$

Vậy chữ số tận cùng của A là 4.

Bài 65: Tìm số dư trong phép chia số $A = 1993^{2014}$ cho 3.

Lời giải

Ta có: $1993 \equiv 1 \pmod{3}$

$$1993^{2014} \equiv 1^{2014} \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}$$

Vậy số $A = 1993^{2014}$ khi chia cho 3 thì dư 1.

Bài 68: Tìm số dư của $A = 776^{776} + 777^{777} + 778^{778}$ khi chia cho 3

Lời giải

Ta có: $776 \equiv 2 \pmod{3}$

$$776^{776} \equiv 2^{776} \pmod{3} \equiv 4^{338} \pmod{3} \equiv 1^{338} \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}$$

Tương tự: $777^{777} \equiv 0 \pmod{3}$

$$778^{778} \equiv 1 \pmod{3}$$

$$A = 776^{776} + 777^{777} + 778^{778} \equiv 1 + 0 + 1 \pmod{3} \equiv 2 \pmod{3}$$

Vậy $A = 776^{776} + 777^{777} + 778^{778}$ chia cho 3 dư 2.

Bài 69: Tìm 2 chữ số tận cùng của số: 2^{2004}

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 2^{2004} &= (2^{10})^{200} \cdot 2^4 \equiv (-1)^{200} \cdot 2^4 \pmod{25} \\ &\equiv 16 \pmod{25} \end{aligned}$$

$$2^{2004} = 25k + 16 \quad (k \in \mathbb{N})$$

Mặt khác: $2^{2004} : 4$ suy ra $2^{2004} : 100$.

Do $\text{Ư CLN}(4; 25) = 1$

$$2^{2004} = 100m + 16 \quad (m \in \mathbb{N})$$



Vậy 2 chữ số tận cùng của 2^{2004} là 16.

Bài 70: Tìm 2 chữ số tận cùng của số: $B = 7^{9^{99}}$

Lời giải

Ta có: $7^n \equiv 3 \pmod{4}$

$$7^4 \equiv 1 \pmod{25}$$

$$9^{99} \equiv 1 \pmod{4} \equiv 1 \pmod{4}$$

$$B = 7^{k+1} \equiv 7 \pmod{25} \text{ suy ra } B = 25k + 7 \equiv 3 \pmod{4}$$

Do đó $k \equiv 0 \pmod{4}$ nên $k = 4n$

Suy ra $B = 100n + 7$

Vậy 2 chữ số tận cùng của B là 07.

Bài 71: Tìm chữ số tận cùng của số $6^{2006}, 7^{2007}$

Lời giải

Ta có: $6^2 = 36 \equiv 6 \pmod{10}$, vậy $6^n \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow 6^{2006} \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow$ chữ số tận cùng của 6^{2006} là 6

$7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{10}$, mà $7^{2007} = 7^{4 \cdot 501} \cdot 7^3$

Mà chữ số tận cùng của 7^3 là 3 nên chữ số tận cùng của 7^{2007} là 3.

CHỦ ĐỀ 3: TÍNH CHẤT CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ TỰ NHIÊN**A. PHẦN NỘI DUNG****I. Quan hệ chia hết và tính chất.****Dạng 1: Chứng minh chia hết.****Bài 1:** Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng: $p^2 - 1 \vdots 24$ *Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022***Lời giải**Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ và p không chia hết cho 3.

Ta có $p^2 - p + p - 1 = (p-1)(p+1)$

do p là số lẻ nên $p = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

$$p^2 - 1 = (p-1)(p+1) = 2k(2k+2) = 4k(k+1) \vdots 8 \quad (1)$$

Mặt khác $p-1$; p ; $p+1$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên có một số chia hết cho 3, mà p không chia hết cho 3 nên $p-1$ hoặc $p+1$ chia hết cho 3. Từ đó suy ra $p^2 - 1 = (p-1)(p+1) \vdots 3 \quad (2)$ Vì $(3, 8) = 1$ và từ (1) và (2) nên suy ra $p^2 - 1 \vdots 24$.**Bài 2:** Chứng minh rằng: Nếu $7x + 4y \vdots 37$ thì $13x + 18y \vdots 37$.*Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022***Lời giải**

Ta có:
$$\begin{aligned} 5(13x + 18y) - 4(7x + 4y) &= 65x + 90y - 28x - 16y \\ &= 37x + 74y = 37(x + 2y) \vdots 37 \end{aligned}$$

Hay $5(13x + 18y) - 4(7x + 4y) \vdots 37 \quad (*)$

Vì $7x + 4y \vdots 37$, mà $(4; 37) = 1$ nên $4(7x + 4y) \vdots 37$ Do đó, từ (*) suy ra: $5(13x + 18y) \vdots 37$, mà $(5; 37) = 1$ nên $13x + 18y \vdots 37$.**Bài 3:** Cho $A = 2.3.4.5 \dots 98 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{98}\right)$. Chứng tỏ rằng M chia hết cho 99.*Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021-2022***Lời giải**

$$\begin{aligned} A &= 2.3.4.5 \dots 98 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{98}\right) \\ &= 2.3.4.5 \dots 98 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{98}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{97}\right) + \dots + \left(\frac{1}{44} + \frac{1}{45}\right)\right] \\ &= 2.3.4.5 \dots 98 \cdot \left(\frac{99}{98} + \frac{99}{2.97} + \dots + \frac{99}{44.45}\right) \end{aligned}$$

$$= 2.3.4.5 \dots 98.99. \left(\frac{1}{98} + \frac{1}{2.97} + \dots + \frac{1}{44.45} \right) : 99$$

Vậy $A : 99$.

Bài 4:

a) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 và $10p+1$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng $5p+1$ chia hết cho 6.

b) Chứng tỏ rằng nếu $6x+11y : 31 (x, y \in \mathbb{N})$ thì $x+7y : 31$.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021-2022

Lời giải

a) p và $10p+1$ là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $3k+1; 3k+2$

Nếu $p = 3k+2$ thì $10p+1 = 10(3k+2)+1 = 30k+21 : 3$ (loại vì $10p+1$ là số nguyên tố)

nên $p = 3k+1$

Có: $p = 3k+1$ suy ra $5p+1 = 5(3k+1)+1 = 15k+6 : 3$

Mà p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ nên $5p+1$ chẵn, suy ra $5p+1 : 2$

Mà $(2; 3) = 1$ nên $5p+1 : (2.3)$ hay $5p+1 : 6$.

Vậy $5p+1$ chia hết cho 6.

b) Vì $6x+11y : 31 (x, y \in \mathbb{N})$ nên $6x+11y+31y : 31$

hay $6x+42y : 31$

$6(x+7y) : 31$

nên $x+7y : 31$

Vậy nếu $6x+11y : 31 (x, y \in \mathbb{N})$ thì $x+7y : 31$.

Bài 5: Chứng minh rằng: Nếu $7x+4y : 37$ thì $13x+18y : 37$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có: $5(13x+18y) - 4(7x+4y) = 65x+90y - 28x - 16y$

$= 37x+74y = 37(x+2y) : 37$ Hay $5(13x+18y) - 4(7x+4y) : 37$ (*)

Vì $7x+4y : 37$, mà $(4; 37) = 1$ nên $4(7x+4y) : 37$

Do đó, từ (*) suy ra: $5(13x+18y) : 37$, mà $(5; 37) = 1$ nên $13x+18y : 37$.

Bài 6: Cho số tự nhiên có 4 chữ số \overline{abcd} . Chứng tỏ rằng \overline{abcd} chia hết cho 7 khi: $2b+3c+d-a$ chia hết cho 7

Lời giải

$$\begin{aligned} & \overline{abcd} - (2b + 3c + d - a) \\ &= 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d - (2b + 3c + d - a) \\ &= 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d - 2b - 3c - d + a \\ &= (1000 \cdot a + a) + (100 \cdot b - 2b) + (10 \cdot c - 3c) + (d - d) \\ &= 1001 \cdot a + 98 \cdot b + 7 \cdot c \end{aligned}$$

$$\text{Vi: } +) 1001:7 \Rightarrow 1001 \cdot a:7$$

$$+) 98:7 \Rightarrow 98 \cdot b:7$$

$$+) 7 \cdot c:7$$

$$\text{Nên: } 1001 \cdot a + 98 \cdot b + 7 \cdot c:7, \text{ Hay } \overline{abcd} - (2b + 3c + d - a):7$$

$$\text{Vi } \overline{abcd} - (2b + 3c + d - a):7 \text{ nên } \overline{abcd}:7 \text{ khi } 2b + 3c + d - a:7$$

Bài 7: Chứng minh rằng: $\overline{ab} + \overline{ba}$ chia hết cho 11 .

Trích đề HSG Liên trường năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b):11$$

$$\text{Vậy } \overline{ab} + \overline{ba} :11$$

Bài 8: Cho $M = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2017} + 2^{2018}$

a) Tính M

b) Chứng tỏ rằng M chia hết cho 3

Trích đề HSG THCS Trần Phú Gia Lai năm 2018-2019

Lời giải

$$\text{Ta có } 2M = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2018} + 2^{2019}$$

$$\text{Lấy } 2M - M = 2^{2019} - 2. \text{ Vậy } M = 2^{2019} - 2$$

$$M = (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6) + \dots + (2^{2017} + 2^{2018})$$

$$M = 2(1 + 2) + 2^3 \cdot (1 + 2) + 2^5 \cdot (1 + 2) + \dots + 2^{2017} \cdot (1 + 2)$$

$$M = 3 \cdot (2 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{2017})$$

$$\text{Vậy } M:3$$

Bài 9: Cho biết $a + 4b$ chia hết cho 13 ($a, b \in \mathbb{N}$). Chứng minh rằng $10 + b:13$

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018-2019

Lời giải

$$\text{Ta có: } 4b:13 \text{ suy ra } 10a + 40b:13 \text{ suy ra } 10a + b + 39b:13$$

$$\text{Mà } 39b:13 \text{ suy ra } 10a + b:13$$

Bài 10. Cho số $155*710*4*16$ có 12 chữ số. Chứng minh rằng nếu thay các dấu * bởi các chữ số khác nhau trong ba chữ số 1, 2, 3 một cách tùy ý thì số đó luôn chia hết cho 396 .

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Ta nhận thấy, vị trí của các chữ số thay thế ba dấu sao trong số trên đều ở hàng chẵn và vì ba chữ số đôi một khác nhau, nên tổng của chúng bằng $1+2+3=6$

Mặt khác: $396=4.9.11$ trong đó 4;9;11 đôi một nguyên tố cùng nhau nên cần chứng minh

$A = \overline{155*710*4*16}$ chia hết cho 4, 9, 11 Thật vậy:

Vì A tận cùng là 16 chia hết cho 4 nên $A:4$

$A:9$ vì tổng các chữ số chia hết cho 9

$A:11$ vì hiệu số giữa tổng các chữ số hàng chẵn và tổng các chữ số hàng lẻ là 0, chia hết cho 11

Vậy $A:396$

Bài 11: Cho biết $a+4b$ chia hết cho 13 ($a, b \in \mathbb{N}$). Chứng minh rằng $10a+b : 13$

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018 - 2019

Lời giải

Ta có:

$$a+4b : 13$$

$$10a+40b : 13$$

$$10a+b+39b : 13$$

Do $39b : 13$ nên $10a+b : 13$

Bài 12: Chứng minh $A = 3^{n+3} - 2.3^n + 2^{n+5} - 7.2^n : 25$ với $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= 3^{n+3} - 2.3^n + 2^{n+5} - 7.2^n \\ &= 3^n.27 - 2.3^n + 2^n.32 - 7.2^n \\ &= 3^n.(27-2) + 2^n.(32-7) \\ &= 3^n.25 + 2^n.25 : 25. \end{aligned}$$

Bài 13: Cho $A = 2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{1999}+2^{2000}$. Chứng minh A chia hết cho 6.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= 2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{1999}+2^{2000} \\ &= (2+2^2)+(2^3+2^4)+\dots+(2^{1999}+2^{2000}) \\ &= 6+2^3.(1+2)+\dots+2^{1999}.(1+2) \\ &= 6+2^3.3+\dots+2^{1999}.3:6. \end{aligned}$$

Bài 14: Cho số $\overline{155*710*4*16}$ có 12 chữ số. Chứng minh rằng nếu thay các dấu * bởi các chữ số khác nhau trong ba chữ số 1,2,3 một cách tùy ý thì số đó luôn chia hết cho 396.

Trích đề HSG cấp trường năm 2017-2018

Lời giải

Ta nhận thấy, vị trí của các chữ số thay thế ba dấu sao trong số trên đều ở hàng chẵn và vì ba chữ số đôi một khác nhau, nên tổng của chúng bằng $1+2+3=6$.

Mặt khác: $396=4.9.11$ trong đó 4;9;11 đôi một nguyên tố cùng nhau nên cần chứng minh

$A = \overline{155*710*4*16}$ chia hết cho 4;9;11.

Thật vậy:

Vì A tận cùng là 16 chia hết cho 4 nên $A:4$

$A:9$ vì tổng các chữ số chia hết cho 9

$A:11$ vì hiệu số giữa tổng các chữ số hàng chẵn và tổng các chữ số hàng lẻ là 0, chia hết cho 11.

Vậy $A:396$.

Bài 15: Cho biết $a+4b$ chia hết cho 13 ($a, b \in \mathbb{N}$). Chứng minh rằng $10+b \vdots 13$.

Trích đề HSG huyện Tam Nông năm 2018-2019

Lời giải

Ta có: $a+4b \vdots 13 \Rightarrow 10a+40b \vdots 13 \Rightarrow 10a+b+39b \vdots 13$

Do $39b \vdots 13 \Rightarrow 10a+b \vdots 13$.

Vậy $10+b \vdots 13$.

Bài 16: Thay (*) bằng các số thích hợp:

a) $\overline{510^*}$; $\overline{61^*16}$ chia hết cho 3

b) $\overline{261^*}$ chia hết cho 2 và chia 3 dư 1.

Trích đề HSG cấp trường năm 2019-2020

Lời giải

a) Để $\overline{510^*}$; $\overline{61^*16}$ chia hết cho 3 thì $(5+1+*)$ chia hết cho 3, từ đó tìm được $* = \{0; 3; 6; 9\}$.

b) Để $\overline{261^*}$ chia hết cho 2 và chia cho 3 dư 1 thì * chẵn và $(2+6+1+*)$ chia 3 dư 1, từ đó tìm được $* = 4$.

Bài 17: Cho $A = 999993^{1999} - 555557^{1997}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 5.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Để chứng minh $A \vdots 5$ ta xét chữ số tận cùng của A bằng việc xét chữ số tận cùng của từng số hạng.

Ta có: $3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3^3 = 81^{499} \cdot 27$ nên 3^{1999} có tận cùng là 7

$7^{1997} = (7^4)^{499} \cdot 7 = 2401^{499} \cdot 7 \Rightarrow 7^{1997}$ tận cùng là 7

Vậy A có tận cùng là 0 nên $A \vdots 5$.

Bài 18: Cho $a-b \vdots 6$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Chứng minh $a-13b \vdots 6$.

Lời giải

Ta có $a-b \vdots 6$

$\Rightarrow a-b-12b \vdots 6$ vì $12b \vdots 6$

$\Rightarrow a-13b \vdots 6$

Vậy $a-13b \vdots 6$.

Bài 19: Cho $x-y=7$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Chứng minh: $22x-y \vdots 7$.

Lời giải

Ta có $x-y=7$

$\Rightarrow x-y+21x \vdots 7$ vì $21x \vdots 7$

$\Rightarrow 22x-y \vdots 7$.

Vậy $22x-y \vdots 7$.

Bài 20: Chứng minh $A = 3^{n+2} - 2^{n+3} + 3^n - 2^{n+2} \vdots 6$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= 3^{n+2} - 2^{n+3} + 3^n - 2^{n+2} \\ &= 3^n \cdot 9 - 2^n \cdot 8 + 3^n - 2^n \cdot 4 \\ &= 3^n \cdot (9+1) - 2^n \cdot (8+4) \end{aligned}$$

$$= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 12 : 6.$$

Bài 21: Cho $a - 11b + 3c : 17$. Chứng minh $2a - 5b + 6c : 17$.

Lời giải

Ta có $a - 11b + 3c : 17$

$$\Rightarrow 2(a - 11b + 3c) : 17$$

$$\Rightarrow 2a - 22b + 6c : 17$$

$$\Rightarrow 2a - 22b + 6c + 17b : 17 \text{ vì } 17b : 17$$

$$\Rightarrow 2a - 5b + 6c : 17.$$

Vậy $2a - 5b + 6c : 17$.

Bài 22: Cho $A = (4a + 7b)(5a + 4b) : 19$ với mọi $a, b \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh $A : 361$.

Lời giải

Vì $A = (4a + 7b)(5a + 4b) : 19$

Mà 19 là số nguyên tố nên $4a + 7b : 19$ hoặc $5a + 4b : 19$.

+ Nếu $4a + 7b : 19$

$$\Rightarrow 5(4a + 7b) : 19$$

$$\Rightarrow 20a + 35b : 19$$

$$\Rightarrow 20a + 35b - 19b : 19$$

$$\Rightarrow 20a + 16b : 19$$

$$\Rightarrow 4(5a + 4b) : 19$$

Mà $4 \not\vdots 19$ nên $5a + 4b : 19$.

Vậy $A : 19 \cdot 19 \Rightarrow A : 361$.

+ Nếu $5a + 4b : 19$

$$\Rightarrow 4(5a + 4b) : 19$$

$$\Rightarrow 20a + 16b : 19$$

$$\Rightarrow 20a + 16b + 19b : 19$$

$$\Rightarrow 20a + 35b : 19$$

$$\Rightarrow 5(4a + 7b) : 19$$

Mà $5 \not\vdots 19$ nên $4a + 7b : 19$.

Vậy $A : 19 \cdot 19 \Rightarrow A : 361$.

Bài 23: Chứng minh rằng

$$a. A = 10^{28} + 8 : 72 \quad b. B = 81^7 - 27^9 - 9^{13} : 45$$

Lời giải

a) **Cách 1:**

Ta có: $10^{28} = 2^{28} \cdot 5^{28} = 2^3 \cdot 2^{25} \cdot 5^{28} : 8$ và $8 : 8 \Rightarrow A : 8$

Lại có $10^{28} + 8$ có tổng các chữ số là 9 nên chia hết cho 9. Vậy A chia hết cho 72

Cách 2:

$10^{28} + 8$ có ba chữ số tận cùng là 008 nên chia hết cho 8

$$10^{28} + 8 = \underbrace{10^{28} - 1}_{:9} + 9 \Rightarrow A : 9 \Rightarrow A : 72$$

b) Ta có $81^7 ; 27^9 ; 9^{13}$ chia hết cho 9 nên B chia hết cho 9

Lại có 81^7 có tận cùng là 1

$27^9 = 27^8 \cdot 27 = \overline{\dots}1.27$ có tận cùng là 7

$9^{13} = 9^{12} \cdot 9 = \overline{\dots}1.9$ có tận cùng là 9

nên B có tận cùng là 5 nên B chia hết cho 5.

Mà $(5;9) = 1 \Rightarrow B : 5 \cdot 9 \Rightarrow B : 45$

Bài 24: Chứng minh : $A = 2^{20} \cdot 2^4 + 2^{20}$ chia hết cho 17.

Lời giải

$$A = 2^{20} \cdot (16 + 1) = 2^{20} \cdot 17$$

$$\Rightarrow A : 17$$

Bài 25: Chứng minh rằng: $A = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ chia hết cho 19

Lời giải

Thêm bớt $7 \cdot 6^n$, ta được: $A = 7 \cdot 25^n - 7 \cdot 6^n + 19 \cdot 6^n = 7 \cdot (25^n - 6^n) + 19 \cdot 6^n$

Ta có: $25^n \equiv 6^n \pmod{19}$

$$\Rightarrow (25^n - 6^n) \equiv 0 \pmod{19}$$

$$\Rightarrow 7 \cdot (25^n - 6^n) + 19 \cdot 6^n \equiv 19 \cdot 6^n \pmod{19}$$

$$\Rightarrow A \equiv 0 \pmod{19}$$

Vậy $A : 19$

Ghi chú: Đối với một số bài toán lớp 8 nếu ta sử dụng đến hằng đẳng thức: $a^n - b^n : a - b$ với ($n \in \mathbb{N}$)
 $a^n + b^n : a + b$ với ($n \in \mathbb{N}; n$ lẻ). Thì ta có thể giải được một cách dễ dàng, tuy nhiên với học sinh lớp 6 thì chưa thể sử dụng những hằng đẳng thức đó. Vì vậy, ta có thể sử dụng Đồng dư thức để có được lời giải phù hợp với trình độ của học sinh lớp 6.

Bài 26: Chứng minh rằng: a) $A = 2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7.

b) $B = 1961^{1962} + 1963^{1964} + 1965^{1966} + 2$ chia hết cho 7.

Lời giải

a) Ta có $A = (5555^{2222} - 4^{2222}) + (2222^{5555} + 4^{5555}) - (4^{5555} - 4^{2222})$

Mà $(5555^{2222} - 4^{2222}) : (5555 - 4) \Rightarrow (5555^{2222} - 4^{2222}) : 7$

Tương tự: $(2222^{5555} + 4^{5555}) : 7$

$$4^{5555} - 4^{2222} = (4^5)^{1111} - (4^2)^{1111} : (4^5 - 4^2) \Rightarrow 4^{5555} - 4^{2222} : 7$$

Vậy $A = 2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7.

b) $B = 1961^{1962} + 1963^{1964} + 1965^{1966} + 2 : 7$

Sử dụng tính chất: $(a + b)^n$ khi chia cho a có số dư là b

$$\text{Ta có } B = (1960+1)^{1962} + (1960+3)^{1964} + (1965-2)^{1966} + 2$$

$$B = (7m+1)^{1962} + (7n+3)^{1964} + (7p-2)^{1966} + 2$$

$$B = 7q+1+3^{1964} + 2^{1966} + 2$$

$$B = 7q+9.27^{654} + 2.2^{3.655} + 3$$

$$B = 7r+9+2+3$$

$$B = 7r+14 \div 7$$

Bài 27: Chứng minh rằng: $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{200}$ chia hết cho 6

Lời giải

Ta có: Tổng của hai số hạng : $2 + 2^2 = 2 + 4 = 6$

Tổng A có 200 số hạng ta chia thành 100 nhóm chứa hai số hạng có tổng 6.

$$\text{Nên: } A = (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + \dots + (2^{199} + 2^{200})$$

$$A = 6 + 2^2(2 + 2^2) + \dots + 2^{198}(2 + 2^2)$$

$$A = 6 + 2^2(6) + \dots + 2^{198}(6)$$

$$A = 6(1 + 2^2 + \dots + 2^{198})$$

Vậy A chia hết cho 6.

Bài 28 : Chứng minh rằng: $A = 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{20}$ chia hết cho 4 và 5.

Lời giải

$$A = (2^2 + 2^4) + (2^6 + 2^8) + \dots + (2^{18} + 2^{20})$$

$$\Rightarrow A = 20 + 2^4(2^2 + 2^4) + \dots + 2^{16}(2^2 + 2^4)$$

$$\Rightarrow A = 20 + 2^4(20) + \dots + 2^{16}(20)$$

$$\Rightarrow A = 20.(1 + 2^4 + \dots + 2^{16})$$

$$\Rightarrow A = 5.4.(1 + 2^4 + \dots + 2^{16})$$

Vậy A chia hết cho 5 và 4.

Bài 29 : Chứng minh rằng:

a, $(n+10)(n+15) \div 2$

b, $n(n+1)(n+2) \div 2; 3$

c, $n^2 + n + 1 \nmid 4; 2; 5$

Lời giải

a, Ta có:

Nếu n là số lẻ thì $n+15 \div 2$

Nếu n là số chẵn thì $n+10 \div 2$

Như vậy với mọi n là số tự nhiên thì : $(n+10)(n+15) \div 2$

b, Ta có: $n(n+1)(n+2)$ là tích ba số tự nhiên liên tiếp nên sẽ có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3.

c, Ta có: $n(n+1)+1$ là 1 số lẻ nên $n(n+1)+1 \not\equiv 4; 2$ và có chữ số tận cùng khác 0 và 5

Bài 30: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì:

$$a. A = n(2n+1)(7n+1) : 6$$

$$b. B = n^3 - 13n : 6$$

Lời giải

a) Ta có: $n+7n+1=8n+1$ là số lẻ nên n chẵn hoặc $7n$ chẵn,

$$\Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 2 \quad (1)$$

Xét các trường hợp :

$$n = 3k \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 3$$

$$n = 3k + 1 \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 3 \quad (\text{do } 2n+1 : 3)$$

$$n = 3k + 2 \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 3 \quad (\text{do } 7n+1 : 3)$$

$$\Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 3 \quad \text{với mọi số tự nhiên } n \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 2.3$ (Do 2; 3 là hai số nguyên tố cùng nhau)

$$\Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 6$$

$$b) B = n^3 - 13n = n^3 - n - 12n = \underbrace{n(n-1)(n+1)}_{:6} - \underbrace{12n}_{:6}$$

$$\text{Vậy } B = n^3 - 13n : 6$$

Bài 31: Chứng minh rằng tổng của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3.

Lời giải

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là: $a, a+1, a+2$

Tổng của ba số tự nhiên liên tiếp là

$$a + a + 1 + a + 2 = (a + a + a) + (1 + 2) = (3a + 3) : 3 \quad (\text{Tính chất chia hết của một tổng}).$$

Nâng cao: Có phải tổng của n số tự nhiên liên tiếp luôn luôn chia hết cho n hay không?

Bài 32: Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp có chia hết cho 4 hay không ?

Lời giải

Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là $a, a+1, a+2, a+3$.

Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp là:

$$a + a + 1 + a + 2 + a + 3 = (a + a + a + a) + (1 + 2 + 3) = (4a + 6).$$

Do 4 chia hết cho 4 nên $4a$ chia hết cho 4 mà 6 không chia hết cho 4 nên $(4a + 6)$ không chia hết cho 4 \Rightarrow Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp không chia hết cho 4.

Kết luận nâng cao: Vậy không phải lúc nào tổng n số tự nhiên liên tiếp cũng chia hết cho n

Bài 33.

- a. Cho $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60}$. Chứng minh $A \vdots 3, 7, 15$
 b. Chứng minh rằng: $C = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31.

Lời giải

a) Biến đổi:

$$\begin{aligned} A &= (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + \dots + (2^{59} + 2^{60}) \\ &= 2(1+2) + 2^3 \cdot (1+2) + \dots + 2^{59} \cdot (1+2) \\ &= 3 \cdot (2 + 2^3 + \dots + 2^{59}) \vdots 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= (2 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6) + \dots + (2^{58} + 2^{59} + 2^{60}) \\ &= 2 \cdot (1 + 2 + 2^2) + 2^4 \cdot (1 + 2 + 2^2) + \dots + 2^{58} \cdot (1 + 2 + 2^2) \\ &= 7 \cdot (2 + 2^4 + \dots + 2^{58}) \vdots 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8) + \dots + (2^{57} + 2^{58} + 2^{59} + 2^{60}) \\ &= 2 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3) + 2^5 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3) + \dots + 2^{57} \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3) \\ &= 15 \cdot (2 + 2^5 + \dots + 2^{57}) \vdots 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } C &= 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99} + 2^{100} \\ &= 2 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^6 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + 2^{96} \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) \\ &= 31 \cdot (2 + 2^6 + \dots + 2^{96}) \vdots 31 \end{aligned}$$

Bài 35: Tìm số tự nhiên n để $5n+14$ chia hết cho $n+2$.**Lời giải**

$$\text{Ta có: } 5n+14 = 5 \cdot (n+2) + 4$$

Mà $5 \cdot (n+2)$ chia hết cho $(n+2)$ Do đó $(5n+14)$ chia hết cho $(n+2)$ nên 4 chia hết cho $(n+2)$ hay $(n+2)$ là ước của 4.

$$(n+2) \in \{1; 2; 4\}$$

$$\text{Do đó } n \in \{0; 2\}$$

Vậy với $n \in \{0; 2\}$ thì $(5n+14)$ chia hết cho $(n+2)$.**Bài 36:** Tìm số tự nhiên n để $\frac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên.**Lời giải**Để $\frac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên thì $(n+15)$ chia hết cho $(n+3)$.

$$[(n+15) - (n+3)] \text{ chia hết cho } (n+3).$$

12 chia hết cho $(n+3)$.

$$(n+3) \text{ là } U(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}.$$

$$n \in \{0; 1; 3; 9\}.$$

Vậy với $n \in \{0; 1; 3; 9\}$ thì $\frac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên.

Bài 37: Tìm số tự nhiên n để $(n^2 + 3n + 6) : (n + 3)$.

Lời giải

Ta có: $(n^2 + 3n + 6) : (n + 3)$

Suy ra:

$$[n(n+3)+6] : (n+3)$$

$$\text{Suy ra } 6 : (n + 3)$$

$$\text{Do đó } n+3 \in U(6) = \{1; 2; 3; 6\}$$

$$\text{Vậy } n=0; n=3 \text{ thì } (n^2 + 3n + 6) : (n + 3).$$

Bài 38: Tìm số nguyên n để phân số $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{4n+5}{2n-1} = \frac{4n-2+7}{2n-1} = \frac{2(2n-1)+7}{2n-1} = 2 + \frac{7}{2n-1}$$

Vì 2 là số nguyên nên để $\frac{4n+5}{2n-1}$ là số nguyên thì $\frac{7}{2n-1}$ là số nguyên

$$\text{Suy ra } 2n-1 \in U(7) = \{-7; -1; 1; 7\}$$

$$2n \in \{-6; 0; 2; 8\}$$

$$n \in \{-3; 0; 1; 4\}$$

Vậy với $n \in \{-3; 0; 1; 4\}$ thì $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên.

Bài 39: Cho biểu thức $A = 2010 + 2010^2 + 2010^3 + \dots + 2010^{2009} + 2010^{2010}$

Chứng minh rằng A chia hết cho 2011

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2018 - 2019

Lời giải

$$A = 2010 + 2010^2 + 2010^3 + 2010^4 + \dots + 2010^{2009} + 2010^{2010}$$

$$A = 2010 \cdot (1 + 2010) + 2010^3 \cdot (1 + 2010) + \dots + 2010^{2009} \cdot (1 + 2010)$$

$$A = 2011 \cdot (2010 + 2010^3 + \dots + 2010^{2009}) : 2011 \Rightarrow A : 2011$$

Bài 40: Chứng minh rằng $B = 3 \cdot 10^{100} + 10^{99} + 8$ chia hết cho 24.

Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có:

$$B = 3 \cdot 10^{100} + 10^{99} + 8 = 10^{99} \cdot (3 \cdot 10 + 1) + 8 = 10^{99} \cdot 31 + 8 = \underbrace{310 \dots 0}_{99 \text{ chuso}} + 8 = \underbrace{310 \dots 008}_{98 \text{ chuso}} : 8$$

Mặt khác:

$$B = 3 \cdot 10^{100} + 10^{99} + 8 = 3 \cdot 10^{100} + (10^{99} + 8) = \underbrace{30 \dots 0}_{100 \text{ chuso}} + \underbrace{10 \dots 8}_{98 \text{ chuso}}$$

$$\text{Vi } \underbrace{30 \dots 0}_{100 \text{ chuso}} : 3; \underbrace{10 \dots 8}_{98 \text{ chuso}} : 3 \text{ nen } B : 3$$

$$\text{Do } (3, 8) = 1 \text{ nen } (3 \cdot 10^{100} + 10^{99} + 8) : (3 \cdot 8)$$

$$\text{Suy ra } B : 24$$

Bài 41: Cho $M = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$

- Chứng tỏ rằng $M : 5$
- Tìm chữ số tận cùng của M

Trích đề HSG tỉnh Bắc Ninh năm 2016 - 2017

Lời giải

$$\begin{aligned} a) M &= 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20} \\ &= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + (2^{17} + 2^{18} + 2^{19} + 2^{20}) \\ &= 2 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3) + \dots + 2^{17} \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3) \\ &= 15 \cdot (2 + \dots + 2^{17}) = 5 \cdot 3 \cdot (2 + \dots + 2^{17}) : 5 \end{aligned}$$

b) Dễ thấy $M : 2; M : 5 \Rightarrow M : 10 \Rightarrow M$ tận cùng bằng chữ số 0

Bài 42: Chứng tỏ rằng $M = 75 \cdot (4^{2021} + 4^{2020} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 100.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\text{Đặt } S = 4^{2021} + 4^{2020} + \dots + 4^2 + 4 + 1 \Rightarrow M = 75 \cdot S + 25$$

$$\text{Ta có } S = 4^{2021} + 4^{2020} + \dots + 4^2 + 4 + 1 \Rightarrow 4S = 4^{2022} + 4^{2021} + \dots + 4^3 + 4^2 + 4$$

$$\text{Do đó } 4S - S = 4^{2022} - 1 \Leftrightarrow S = \frac{4^{2022} - 1}{3}$$

$$\text{Suy ra } M = 75 \cdot S + 25 = 75 \cdot \frac{4^{2022} - 1}{3} + 25 = 25 \cdot (4^{2022} - 1) + 25 = 25 \cdot 4^{2022} = 100 \cdot 4^{2021}$$

Suy ra $M : 100$

Bài 43: Chứng minh rằng: $10^{28} + 8$ chia hết cho 72

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Lời giải

Vì $10^{28} + 8$ có tổng các chữ số chia hết cho 9 nên tổng đó chia hết cho 9

Lại có $10^{28} + 8$ có ba chữ số tận cùng là 008 chia hết cho 8 nên tổng đó chia hết cho 8, mà $(8, 9) = 1$ nên $10^{28} + 8$ chia hết cho 72.

Bài 44: Cho biết $a + 4b$ chia hết cho 13 ($a, b \in \mathbb{N}$).

Chứng minh rằng $10 + b$ chia hết cho 13

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Lời giải

$$a + 4b : 13 \Rightarrow 10a + 40b : 13 \Leftrightarrow 10a + b + 39b : 13$$

$$39b : 13 \Rightarrow 10a + b : 13$$

Bài 45: Chứng tỏ: $S = 16^5 + 2^{15}$ chia hết cho 33

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018 - 2019

Lời giải

$$\text{Có } S = 16^5 + 2^{15} = (2^4)^5 + 2^{15} = 2^{20} + 2^{15} = 2^{15} \cdot (2^5 + 1) = 2^{15} \cdot 33$$

Nên S chia hết cho 33

Bài 46: Chứng tỏ rằng: $A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{11} + 2^{12}$ chia hết cho 7

Trích đề HSG huyện Đoan Hùng năm 2018-2019

Lời giải

$$A = (2 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6) + (2^7 + 2^8 + 2^9) + (2^{10} + 2^{11} + 2^{12})$$

$$A = 2 \cdot (1 + 2 + 2^2) + 2^4 (1 + 2 + 2^2) + 2^7 \cdot (1 + 2 + 2^2) + 2^{10} \cdot (1 + 2 + 2^2)$$

$$A = 7 \cdot (2 + 2^4 + 2^7 + 2^{10})$$

Suy ra A chia hết cho 7.

Bài 47: Cho $S = 3^1 + 3^3 + 3^5 + \dots + 3^{2011} + 3^{2013} + 3^{2015}$. Chứng tỏ:

a) S không chia hết cho 9

b) S chia hết cho 70

Trích đề HSG huyện Quế Sơn 2018-2019

Lời giải

a) $3^2 + 3^5 + \dots + 3^{2011} + 3^{2013} + 3^{2015}$ chia hết cho 9; 3 không chia hết cho 9 $\Rightarrow S$ không chia hết cho 9

b) $S = 3(1 + 3^2 + 3^4) + \dots + 3^{2011}(1 + 3^2 + 3^4)$ (do S có 1008 số hạng)

$$S = 3 \cdot 91 + \dots + 3^{2011} \cdot 91$$

Ta thấy S chia hết cho 91 nên S chia hết cho 7 ($91 = 7 \cdot 13$)

$$S = 3 \cdot (1 + 3^2) + \dots + 3^{2013} (1 + 3^2) \text{ (Do } S \text{ có 1008 số hạng)}$$

$$S = 3 \cdot 10 + \dots + 3^{2011} \cdot 10$$

S chia hết cho 10. Do $(7, 10) = 1$ nên S chia hết cho $7 \cdot 10 = 70$

Bài 48: Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{90}$. Chứng minh A chia hết cho 11 và 13

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Lời giải

A có 90 số hạng mà $90 : 5$ nên $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{90}$

$$A = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + (3^6 + 3^7 + 3^8 + 3^9 + 3^{10}) + \dots + (3^{86} + 3^{87} + 3^{88} + 3^{89} + 3^{90})$$

$$= 3 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^6 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{86} \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4)$$

$$\begin{aligned}
 &= 121.(3+3^6 + \dots + 3^{86}):11 \Rightarrow A:11 \\
 &\text{A có 90 số hạng mà } 90:3 \text{ nên:} \\
 &A = (3+3^2+3^3) + (3^4+3^5+3^6) + \dots + (3^{88}+3^{89}+3^{90}) \\
 &= 3.(1+3+3^2) + 3^4.(1+3+3^2) + \dots + 3^{88}.(1+3+3^2) \\
 &= 13.(3+3^4 + \dots + 3^{88}):13 \Rightarrow A:13
 \end{aligned}$$

Bài 49: Cho $C = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{2014} + 4^{2015} + 4^{2016}$
 Chứng minh rằng C chia hết cho 21 và 105

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
 C &= 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^{2014} + 4^{2015} + 4^{2016} \\
 &= (4 + 4^2 + 4^3) + (4^4 + 4^5 + 4^6) + \dots + (4^{2014} + 4^{2015} + 4^{2016}) \\
 &= 4.(1 + 4 + 4^2) + 4^4.(1 + 4 + 4^2) + \dots + 4^{2014}.(1 + 4 + 4^2) \\
 &= 21.(4 + 4^4 + \dots + 4^{2014}):21
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &= 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^{2014} + 4^{2015} + 4^{2016} \\
 &= (4 + 4^2) + (4^3 + 4^4) + \dots + (4^{2015} + 4^{2016}) \\
 &= 4.(1 + 4) + 4^3.(1 + 4) + \dots + 4^{2015}.(1 + 4) \\
 &= 5.(4 + 4^3 + \dots + 4^{2015}):5
 \end{aligned}$$

Ta có $C:5, C:21$ mà $(5;21) = 1 \Rightarrow C:105$

Bài 50: Chứng minh rằng: Nếu $7x + 4y:37$ thì $13x + 18y:37$

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Lời giải

Ta có: $5(13x + 18y) - 4(7x + 4y) = 65x + 90y - 28x - 16y = 37x + 74 = 37(x + 2y):37$

Hay $5(13x + 18y) - 4(7x + 4y):37(*)$

Vì $7x + 4y:37$ mà $(4;37) = 1$ nên $4(7x + 4y):37$

Do đó, từ (*) suy ra : $5(13x + 18y):37$, mà $(5,37) = 1$ nên $13x + 18y:37$.

Bài 51: Chứng minh rằng : $(3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}):120$ ($x \in N$).

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021 – 2022

Lời giải

Ta có :

$$\begin{aligned}
 &(3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}) \\
 &= (3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4}) + (3^{x+5} + 3^{x+6} + 3^{x+7} + \dots + 3^{x+8}) + \dots + (3^{x+97} + 3^{x+98} + 3^{x+99} + \dots + 3^{x+100}) \\
 &= 3^x.(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^{x+4}.(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{x+96}.(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) \\
 &= 3^x.120 + 3^{x+4}.120 + \dots + 3^{x+96}.120 \\
 &= 120.(3^x + 3^4 + \dots + 3^{x+96}):120
 \end{aligned}$$

Bài 52: Cho $S = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + 5^6 + \dots + 5^{2016}$. Chứng tỏ rằng S chia hết cho 65.

Trích đề KS HSG thị xã Sơn Tây năm 2021-2022

Lời giải

Ta có: $5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 = (5 + 5^3) + 5(5 + 5^3) = 130 + 5.130 = 130.6 = 12.65$

Suy ra $5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 : 65$.

$S = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + 5^6 + \dots + 5^{2016}$

$S = (5 + 5^2 + 5^3 + 5^4) + 5^4(5 + 5^2 + 5^3 + 5^4) + \dots + 5^{2012}(5 + 5^2 + 5^3 + 5^4)$

Tổng trên có 504 số hạng chia hết cho 65 nên S chia hết cho 65.

Vậy S chia hết cho 65.

Bài 53: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng: $p^2 - 1 : 24$

Trích đề kiểm định chất lượng HSG huyện Nghĩa Đồng năm 2021-2022.

Lời giải

vì p nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ và p không chia hết cho 3.

Ta có $p^2 - 1 = p^2 - p + p - 1 = (p-1)(p+1)$

do p là số lẻ nên $p = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

$p^2 - 1 = (p-1)(p+1) = 2k(2k+2) = 4k(k+1) : 8$ (1)

Mặt khác $p-1, p, p+1$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên có một số chia hết cho 3, mà p không chia hết cho 3 nên $p-1$ hoặc $p+1$ chia hết cho 3.

Từ đó suy ra $p^2 - 1 = (p-1)(p+1) : 3$ (2)

Vì $(3;8) = 1$ và từ (1) và (2) nên suy ra $p^2 - 1 : 24$

Bài 54: Chứng tỏ: $A = 10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27 (với n là số tự nhiên)

Trích đề thi chọn HSG huyện Kim Sơn năm 2021-2022

Lời giải

$A = 10^n + 18n - 1 = 10^n - 1 - 9n + 27n$

$= 9 \cdot \underbrace{(11\dots1 - n)}_n + 27n$

Ta biết số n và số có tổng các chữ số bằng n có cùng số dư khi chia cho 9 do đó $\underbrace{11\dots1 - n}_n : 9$

nên $9 \cdot \underbrace{(11\dots1 - n)}_n : 27$. Vậy $A : 27$

Bài 55: Chứng minh rằng: Nếu $(\overline{ab + cd + eg}) : 11$ thì $\overline{abc \text{ deg}} : 11$.

Trích đề thi chọn HSG huyện Tiên Du năm 2021-2022

Lời giải

Ta có: $\overline{abc \text{ deg}} = 10000 \cdot \overline{ab} + 100 \cdot \overline{cd} + \overline{eg}$

$= (9999 \cdot \overline{ab} + 99 \cdot \overline{cd}) + (\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg})$

$= 99 \cdot (101 \cdot \overline{ab} + \overline{cd}) + (\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg})$

$= 11 \cdot 9 \cdot (101 \cdot \overline{ab} + \overline{cd}) + (\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg})$

Do $11 \cdot 9 \cdot (101 \cdot \overline{ab} + \overline{cd}) : 11$ và theo bài ra $(\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}) : 11$

Suy ra: $\overline{abc \text{ deg}} : 11$

Vậy nếu $(\overline{ab + cd + eg}) : 11$ thì $\overline{abc \text{ deg}} : 11$.

Bài 56: Cho $A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2022}\right) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2022$. Hỏi A có chia hết cho 2023 không?

Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned}
 & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2022} \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1010}\right) + \left(\frac{1}{1011} + \frac{1}{1012} + \frac{1}{1013} + \dots + \frac{1}{2022}\right) \text{ (mỗi ngoặc có 1010 số hạng)} \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2022}\right) + \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2021}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2020}\right) + \dots + \left(\frac{1}{1010} + \frac{1}{1011}\right) \\
 &= \frac{2023}{1 \cdot 2022} + \frac{2023}{2 \cdot 2021} + \frac{2023}{3 \cdot 2020} + \dots + \frac{2023}{1010 \cdot 1011} \\
 &= 2023 \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2022} + \frac{1}{2 \cdot 2021} + \frac{1}{3 \cdot 2020} + \dots + \frac{1}{1010 \cdot 1011}\right) \\
 &= \frac{2023}{1 \cdot 2022} + \frac{2023}{2 \cdot 2021} + \frac{2023}{3 \cdot 2020} + \dots + \frac{2023}{1010 \cdot 1011} \\
 &= \frac{2023}{1 \cdot 2022} + \frac{2023}{2 \cdot 2021} + \frac{2023}{3 \cdot 2020} + \dots + \frac{2023}{1010 \cdot 1011}
 \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } A = 2023 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2022 \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2022} + \frac{1}{2 \cdot 2021} + \frac{1}{3 \cdot 2020} + \dots + \frac{1}{1010 \cdot 1011}\right)$$

Đặt $m = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2022$

$$\text{Khi đó } A = 2023 \cdot m \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2022} + \frac{1}{2 \cdot 2021} + \frac{1}{3 \cdot 2020} + \dots + \frac{1}{1010 \cdot 1011}\right)$$

$$A = 2023 \cdot \left(\frac{m}{1 \cdot 2022} + \frac{m}{2 \cdot 2021} + \frac{m}{3 \cdot 2020} + \dots + \frac{m}{1010 \cdot 1011}\right) \quad (1)$$

$$\text{Vì } m = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2022 \Rightarrow \frac{m}{1 \cdot 2022}; \frac{m}{2 \cdot 2021}; \frac{m}{3 \cdot 2020}; \dots; \frac{m}{1010 \cdot 1011} \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m}{1 \cdot 2022} + \frac{m}{2 \cdot 2021} + \frac{m}{3 \cdot 2020} + \dots + \frac{m}{1010 \cdot 1011}\right) \in \mathbb{N}^* \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A : 2023$.

Vậy A chia hết cho 2023

Bài 57: Cho $a; b; c; d$ là các số nguyên ($a \neq c$) với thỏa mãn $ab + cd$ chia hết cho $a - c$. Chứng tỏ rằng $ad + bc$ chia hết cho $a - c$.

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu: } (ab+cd)-(ad+bc) &= (ab-bc)+(cd-ad) \\ &= b(a-c)-d(a-c) = (a-c)(b-d) : (a-c) \end{aligned}$$

$$\text{Mà } (ab+cd) : (a-c)$$

$$\Rightarrow (ad+bc) : (a-c) \text{ (điều phải chứng minh)}$$

Bài 58: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng: $p^2 - 1 : 4$.

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ và p không chia hết cho 3.

$$\text{Ta có } p^2 - 1 = p^2 - p + p - 1 = p(p-1) + (p-1) = (p-1)(p+1)$$

$$\text{Do } p \text{ là số lẻ nên } p = 2k + 1. \text{ Khi đó } p^2 + 1 = (2k+1-1)(2k+1+1) = 4k.(k+1) : 8 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Mặt khác, ta thấy rằng $p-1, p, p+1$ là ba số nguyên liên tiếp, trong ba số nguyên liên tiếp có 1 số chia hết cho 3 mà p không chia hết cho 3 nên $p-1$ hoặc $p+1$ chia hết cho 3.

$$\text{Do đó } p^2 - 1 = (p-1)(p+1) \text{ chia hết cho } 3.$$

$$\text{Mà } 3 : 8 = 1 \text{ nên } p^2 + 1 \text{ chia hết cho } 24 \text{ (đpcm).}$$

Bài 59:

a) Tìm hai số tự nhiên x, y sao cho $(2x+1).(y-5) = 12$.

b) Tìm tất cả các số $B = \overline{62xy427}$ biết rằng số B chia hết cho 99.

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015-2016

Lời giải

a) Tìm hai số tự nhiên x, y sao cho $(2x+1).(y-5) = 12$.

$$\text{Ta có : } (2x+1).(y-5) = 12$$

Nên $2x+1$ và $y-5$ là ước của 12.

$$\text{Mà } 12 = 1.12 = 2.6 = 3.4$$

$$\text{Vì } 2x+1 \text{ là số lẻ } 2x+1 = 1 \text{ hoặc } 2x+1 = 3$$

Ta có:

$2x+1$	1	3
$y-5$	12	4
x	0	1
y	17	9

$$\text{Vậy: } (x; y) = \{(0; 17); (1; 9)\}.$$

b) Tìm tất cả các số $B = \overline{62xy427}$ biết rằng số B chia hết cho 99.

Vì số B chia hết cho 99 nên sẽ chia hết cho 9 và 11

Số B đó có tổng chữ số là: $6+2+x+y+4+2+7=21+x+y$ sẽ chia hết cho 9 .

Mà $x+y < 19$

Có 21 chia 9 dư 3 suy ra $x+y=6$ hoặc $x+y=15$

Để B chia hết cho 11 thì $(7+4+x+6)-(2+y+2)=11k$ hay $13+x-y=11k$ (2) ($k \in N$)

(Một số chia hết cho 11 thì tổng các chữ số ở vị trí lẻ trừ tổng các chữ số ở vị trí chẵn là bội của 11) .

Để B chia hết cho 11 thì $y-x=2$ hay $y=x+2$

Có 2 trường hợp xảy ra

Trường hợp 1: $x+y=6$ và $y=x+2$

Thay $y=x+2$ vào $x+y=6$ ta được

$$x+x+2=6$$

$$2x=4$$

$$x=2$$

$$y=x+2=2+2=4$$

Vậy $x=2$; $y=4$ (Thỏa mãn)

Trường hợp 2: $x+y=15$ và $y-x=2$

Thay $y=x+2$ vào $x+y=15$ ta được

$$x+x+2=15$$

$$2x=13$$

$$x=\frac{13}{2}$$

$$y=x+2=\frac{13}{2}+2=\frac{17}{2}$$

Vậy $x=\frac{13}{2}$; $y=\frac{17}{2}$ (không thỏa mãn)

Mà x, y phải là số nguyên dương nên $x=2$ và $y=4$.

Vậy số cần tìm là 6224427 .

Bài 60: Chứng tỏ rằng $2x+3y$ chia hết cho 17 thì $9x+5y$ chia hết cho 17 và ngược lại.

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015-2016

Lời giải

Ta có: $2x+3y$ chia hết cho 17

$$4(2x+3y) \text{ chia hết cho } 17$$

$$8x+12y \text{ chia hết cho } 17$$

$$(8x+12y)+(9x+5y)=8x+12y+9x+5y=17x+17y=17(x+y) \text{ chia hết cho } 17$$

Mà $2x+3y$ chia hết với 17 suy ra $9x+5y$ chia hết cho 17

Vậy $9x+5y$ chia hết cho 17 .

Ngược lại . Ta có : $9x+5y$ chia hết cho 17

$4(9x+5y)$ chia hết cho 17

$6x+20y$ chia hết cho 17

$(36x+20y)-(2x+3y)=36x+20y-2x-3y=34x+17y=17(2x+y)$ chia hết cho 17

Mà $9x+5y$ chia hết với 17 suy ra $2x+3y$ chia hết cho 17

Vậy $2x+3y$ chia hết cho 17 .

Bài 61: Chứng minh: $S = 16^5 + 2^{15}$ chia hết cho 33 .

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2010-2011

Lời giải

Có $S = 16^5 + 2^{15} = (2^4)^5 + 2^{15} = 2^{20} + 2^{15} = 2^{15} \cdot 2^5 + 2^{15} = 2^{15} \cdot (2^5 + 1) = 2^{15} \cdot 33$

Vậy S chia hết cho 33 .

Bài 62: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , ta có $n^2 + n + 2$ không chia hết cho 5 .

Trích đề HSG huyện Anh Sơn năm 2018-2019

Lời giải

Ta có: $n^2 + n + 2 = n(n+1) + 2$

Do $n(n+1)$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 .

$n(n+1)$ có tận cùng là 0 ; 2 ; 6 .

$n(n+1) + 2$ có tận cùng là 2 ; 4 ; 8 không chia hết cho 5 .

Bài 63: Chứng minh rằng $3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{101}$ chia hết cho 120 .

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2017-2018

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{101} \\ &= (3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + (3^6 + 3^7 + 3^8 + 3^9) + \dots + (3^{98} + 3^{99} + 3^{100} + 3^{101}) \\ &= 3(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^5(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{97}(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) \\ &= 120 \cdot (3 + 3^5 + \dots + 3^{97}) : 120 \text{ (đpcm)}. \end{aligned}$$

Bài 64: Tìm số tự nhiên $x; y$ biết $\overline{32x1y}$ chia hết cho 45 .

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2019-2020

Lời giải

Vì $\overline{32x1y}$ chia hết cho $45 = 5 \cdot 9$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow \overline{32x10} : 9 \Leftrightarrow (3 + 2 + x + 1 + 0) : 9 \Rightarrow x = 3 \\ y = 5 \Rightarrow \overline{32x15} : 9 \Leftrightarrow (3 + 2 + x + 1 + 5) : 9 \Rightarrow x = 7 \end{cases}$$

Vậy hai số cần tìm là 32310 ; 32715 .

Bài 65: Chứng minh rằng số viết bởi 27 chữ số giống nhau thì chia hết cho 27 .

Trích đề HSG huyện Tiền Hải năm 2016 -2017**Lời giải**

Trước hết ta chứng minh số gồm 27 chữ số 1 thì chia hết cho 27 .

$$\text{Thật vậy: } \underbrace{111\dots11}_{27\text{...chữ...số..1}} = \underbrace{11\dots1}_{9\text{..c/số..1}} \times \underbrace{1000\dots01}_{8\text{..c/số..0}} \underbrace{1000\dots01}_{8\text{..c/số..0}}$$

$$\text{Mà } \underbrace{11\dots1}_{9\text{..c/số..1}} : 9 \text{ và } \underbrace{1000\dots01}_{8\text{..c/số..0}} \underbrace{1000\dots01}_{8\text{..c/số..0}} : 3 \Rightarrow \underbrace{111\dots1}_{27\text{..c/số..1}} : 27$$

Từ đó suy ra nếu một số viết bởi 27 chữ số giống nhau thì chia hết cho 27 .

Bài 66: Chứng tỏ rằng;

a) $(3^{100} + 19^{990}) : 2$

b) Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp không chia hết cho 4 .

Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015 -2016**Lời giải**

a) Ta có : 3 lẻ nên 3^{100} lẻ, 19 lẻ nên 19^{990} lẻ nên $(3^{100} + 19^{990}) : 2$.

b) Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là $a; (a+1); (a+2); (a+3) (a \in \mathbb{N})$

$$\text{Ta có : } a + (a+1) + (a+2) + (a+3) = 4a + 6$$

Vì $4a : 4, 6$ không chia hết cho 4 nên $4a + 6$ không chia hết cho 4 .

Bài 67: Cho a, b là các số nguyên. Chứng tỏ rằng nếu $(2a+3b) : 7$ thì $(8a+5b) : 7$.

Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-22**Lời giải**

Với các số nguyên a, b ta có:

$$(2a+3b) : 7$$

$$4(2a+3b) : 7$$

$$(8a+12b) : 7;$$

$$(8a+5b+7b) : 7$$

$$\text{Mà } 7b : 7 \text{ nên } (8a+5b) : 7 .$$

Bài 68: Cho $B = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{30}$ Chứng minh rằng: B chia hết cho 21.

Trích đề HSG Trường THCS Lý Tự Trọng năm 2015-2016**Lời giải**

$$\text{Ta có: } B = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{30}$$

$$= 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{29} + 2^{30}$$

$$= 2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1 + 2^3 \cdot 1 + \dots + 2^{29} \cdot 1 + 2^{30}$$

$$= 3 \cdot 2 + 2^3 + \dots + 2^{29}$$

suy ra $B:3 \quad 1$

Lại có: $B = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{30}$

$$= 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{28} + 2^{29} + 2^{30}$$

$$= 2 \cdot 1 + 2 + 2^2 + 2^4 \cdot 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{28} \cdot 1 + 2 + 2^2$$

$$= 7 \cdot 2 + 2^4 + \dots + 2^{28}$$

suy ra $B:7 \quad 2$

Mà $3; 7 \quad 1$

Do đó từ 1 và 2 suy ra $B: 3 \cdot 7$ hay $B:21$

Bài 69: Chứng tỏ rằng

a) $(3^{100} + 19^{990}):2$

b) Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp không chia hết cho 4.

Trích đề HSG Huyện Lương Tài năm 2021-2022

Lời giải

a) Ta có 3 là lẻ nên 3^{100} là lẻ, 19 lẻ nên 19^{990} lẻ nên $(3^{100} + 19^{990}):2$

b) Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là $a; (a+1); (a+2); (a+3) (a \in \mathbb{N})$

Ta có : $a + (a+1) + (a+2) + (a+3) = 4a + 6$

Vì $4a:4; 6$ không chia hết cho 4 nên $4a+6$ không chia hết cho 4.

Bài 70: Cho $D = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{19} + 5^{20}$. Tìm số dư khi chia D cho 31.

Trích đề HSG Hoài Nhơn năm 2015-2016

Lời giải

$$D = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{19} + 5^{20}$$

$$D+1 = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{18} + 1 + 5 + 5^2$$

Do $1 + 5 + 5^2 = 31$ nên $D+1$ chia hết cho 31

D chia 31 dư 30.

Bài 71: Chứng tỏ rằng số có dạng \overline{abcabc} bao giờ cũng chia hết cho 11.

Trích đề HSG Trường Hưng Mỹ năm 2018 - 2019

Lời giải

Ta có: $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1001 = \overline{abc} \cdot 11 \cdot 91 : 11$

Vậy \overline{abcabc} bao giờ cũng chia hết cho 11 (đpcm).

Bài 72: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta có $n^3 - n : 6$.

Trích đề chọn HSG Trục Ninh năm 2017-2018

Lời giải

Ta có $(n^3 - n) = n(n^2 - 1) = n(n^2 - n + n - 1) = n[n(n-1) + (n-1)] = n(n-1)(n+1)$

Với mọi số nguyên dương n thì $(n-1)n(n+1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp sẽ chia hết cho 2 và 3 mà $(2; 3) = 1$ nên $n(n-1)(n+1) : 6$.

Dạng 2: Tìm số thỏa mãn điều kiện chia hết.

Trắc nghiệm

Bài 1: Tập hợp các số nguyên n để $(n+3) : (n+1)$ là:

- A. $\{0; 1; -2; -3\}$. B. $\{0; 1\}$. C. $\{-2; -3\}$. D. $\{1; 2; -1; -2\}$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: A. $\{0; 1; -2; -3\}$.

Tự luận

Bài 1: Tìm các số có ba chữ số chia hết cho 8 và tổng các chữ số của nó cũng chia hết cho 8.

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

Lời giải

Gọi số cần tìm là \overline{abc} với a, b, c là các chữ số, $a \neq 0$.

Theo đề ta có $\overline{abc} : 8$ và $(a+b+c) : 8$

Với $\overline{abc} : 8$

$(100a+10b+c) : 8$

$(96a+4a+8b+2b+c) : 8$

$(4a+2b+c) : 8$

$(3a+b+a+b+c) : 8$ mà $(a+b+c) : 8$

$(3a+b) : 8$ mà $0 < 3a+b \leq 36$ nên $3a+b \in \{8; 16; 24; 32\}$

Lại có $(a+b+c) : 8$ mà $0 < a+b+c \leq 27$ nên $a+b+c \in \{8; 16; 24\}$

+ Với $3a+b=8$ suy ra $a=1, b=5, c=2$ hoặc $a=2, b=2, c=4$

+ Với $3a+b=16$ suy ra $a=3, b=7, c=6$ hoặc $a=4, b=4, c \in (0;8)$

+ Với $3a+b=24$ suy ra $a=5, b=9, c=2$ hoặc $a=6, b=6, c=4$

Vậy các số cần tìm là 224; 440; 448; 592; 664

Bài 2: Tìm số nguyên n để $A = 2n^2 + n - 6$ chia hết cho $2n+1$.

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có $A = 2n^2 + n - 6 = n.(2n+1) - 6$

Vì A chia hết cho $2n+1$ nên $6:2n+1$ hay $2n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$

Do $2n+1$ là số lẻ nên ta có bảng sau

$2n+1$	1	-1	3	-3
$2n$	0	-2	2	-4
n	0	-1	1	-2

Vậy với $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$ thì A chia hết cho $2n+1$.

Bài 3: Thay a, b bằng các chữ số thích hợp sao cho $\overline{24a68b} : 45$.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có $45 = 9 \cdot 5$

Vậy $\overline{24a68b} : 45$ thì $\overline{24a68b} : 5, 9$

$\overline{24a68b} : 5$ suy ra $b \in \{0; 5\}$

$\overline{24a68b} : 9$ suy ra $(20+a+b) : 9$

TH1: $b=0$ tìm được $a=7$

TH2: $b=5$ tìm được $a=2$

Vậy $a=7, b=0$ hoặc $a=2, b=5$.

Bài 4: Tìm số tự nhiên n biết: $(3n-2):(2n+1)$.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021-2022

Lời giải

Vì $(3n-2):(2n+1)$ nên $2(3n-2):(2n+1)$ hay $(6n-4):(2n+1)$

và $(2n+1):(2n+1)$ nên $3(2n+1):(2n+1)$ hay $(6n+3):(2n+1)$

Suy ra $(6n+3)-(6n-4):(2n+1)$ hay $7:(2n+1)$.

Vậy $2n+1 \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$.

Ta có bảng sau:

$2n+1$	1	-1	7	-7
n	0	-1	3	-4
$n \in \mathbb{N}$	TM	KTM	TM	KTM

Vậy $n \in \{0; 3\}$.

Bài 5: Cho $A = \frac{12n+1}{2n+3}$. Tìm giá trị của n để A là một số nguyên.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải

$$A = \frac{12n+1}{2n+3} = \frac{6(2n+3)-17}{2n+3} = 6 - \frac{17}{2n+3}$$

A là số nguyên khi $2n+3 \in U(17)$; $2n+3 \in \{\pm 1; \pm 17\}$

Vậy $n \in \{-10; -2; -1; 7\}$.

Bài 6: Số $N = \overline{14a5b}$ trong a, b là các chữ số. Biết rằng N chia hết cho cả 2, 5 và 9. Tính giá trị $a + b$.

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018-2019

Lời giải

Vì $N:2, 5$ nên $b=0$ khi đó tổng các chữ số của N là $1+4+a+5+0=10+a$, mà $N:9$ suy ra $a=8$ suy ra $a+b=8+0=8$

Bài 7: Tìm tất cả các số tự nhiên có 3 chữ số \overline{abc} sao cho $\overline{abc} = n^2 - 1$ và $\overline{cba} = (n-2)^2$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Ta có: $\overline{abc} = 100a + 10b + c = n^2 - 1$ (1)

$\overline{cba} = 100c + 10b + a = n^2 - 4n + 4$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $99(a-c) = 4n-5$ suy ra $44n-5:99$, mặt khác:

$$100 \leq (n^2 - 1) \leq 999 \text{ suy ra } 101 \leq n^2 \leq 10000 \Rightarrow 11 \leq n \leq 100$$

$$\text{suy ra } 39 \leq 4n - 5 \leq 100$$

$$4n - 5 = 99$$

$$n = 26$$

Vậy $\overline{abc} = 675$

Bài 8: Một số tự nhiên chia 7 dư 3, chia 17 dư 12, chia 23 dư 7. Hỏi số đó chia cho 2737 dư bao nhiêu?

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021-2022

Lời giải

Gọi số đã cho là A . Theo bài ra ta có:

$$A \text{ chia } 7 \text{ dư } 3, \text{ chia } 17 \text{ dư } 12, \text{ chia } 23 \text{ dư } 7 \text{ nên } A = 7a + 3 = 17b + 12 = 23c + 7 \text{ (} a, b, c \in \mathbb{N} \text{)}$$

$$\begin{aligned} \text{Có: } A+39 &= 7a+42 = 17b+51 = 23c+46 \\ &= 7(a+6) = 17(b+3) = 23(c+2) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} A+39:7 \\ A+39:17 \\ A+39:23 \end{cases}$$

$$\text{Mà } (7;17;23)=1$$

$$\text{nên } A+39:(7.17.23) \text{ hay } A+39:2737.$$

$$\text{Khi đó } A+39 = 2737k, (k \in \mathbb{N})$$

$$A = 2737k - 39 = 2737(k-1) + 2698$$

Do $2698 < 2737$ nên 2698 là số dư của phép chia A cho 2737.

Bài 9: Trong một đợt trồng cây, một tổ học sinh lớp 6 đã trồng được một số cây. Số đó là nhỏ nhất đem chia cho 3 dư 2, chia cho 4 dư 3, chia cho 5 dư 4, chia cho 10 dư 9. Hỏi số cây trồng được là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi số cây trồng được của một tổ học sinh lớp 6 là a với $a \in \mathbb{N}$.

Vì a chia cho 3 dư 2 nên $a-2$ chia hết cho 3.

Vì a chia cho 4 dư 3 nên $a-3$ chia hết cho 4.

Vì a chia cho 5 dư 4 nên $a-4$ chia hết cho 5.

Vì a chia cho 10 dư 9 nên $a-9$ chia hết cho 10.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a-2:3 \\ a-3:4 \\ a-4:5 \\ a-9:10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-2+3:3 \\ a-3+4:4 \\ a-4+5:5 \\ a-9+10:10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+1:3 \\ a+1:4 \\ a+1:5 \\ a+1:10 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } a+1 \in BC(3;4;5;10) = B(60) = \{0;60;120;180;.....\}$$

$$\text{Do đó } a \in \{59;119;179;.....\}.$$

Vì a là số nhỏ nhất nên $a = 59$.

Vậy một tổ của lớp 6 đã trồng được 59 cây.

Bài 10: Một cửa hàng mới nhập về một số cuốn sách. Chủ cửa hàng yêu cầu nhân viên đóng sách vào các túi. Họ tính rằng nếu đóng vào mỗi túi 8 cuốn thì vừa hết, nếu đóng vào mỗi túi 12 cuốn thì thừa

ra 4 cuốn còn nếu đóng vào mỗi túi 14 cuốn thì thừa 6 cuốn. Hỏi cửa hàng mới nhập về bao nhiêu cuốn sách? Biết rằng số sách nhập về trong khoảng từ 230 đến 300 cuốn.

Lời giải

Gọi số sách nhập về là a với $a \in \mathbb{N}$ và $230 \leq a \leq 300$.

Vì đóng mỗi túi 12 cuốn thì thừa 4 cuốn nên $a-4$ chia hết cho 12

Vì đóng mỗi túi 14 cuốn thì thừa 6 cuốn nên $a-6$ chia hết cho 14

$$\text{Ta có } \begin{cases} a-4:12 \\ a-6:14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-4+12:12 \\ a-6+14:14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+8:12 \\ a+8:14 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } a+8 \in BC(12;14) = B(84) = \{0; 84; 168; 252; 336; \dots\}$$

$$\text{Do đó } a \in \{76; 160; 244; 328; \dots\}.$$

Vì $230 \leq a \leq 300$ nên $a = 244$.

Vậy số sách nhập về là 244 cuốn.

Bài 11: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho số đó chia cho 17; 25 được dư lần lượt là 8; 16.

Lời giải

Vì a chia cho 17 dư 8 nên $a-8$ chia hết cho 17.

Và a chia cho 25 dư 16 nên $a-16$ chia hết cho 25.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a-8:17 \\ a-16:25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-8+17:17 \\ a-16+25:25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+9:17 \\ a+9:25 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } a+9 \in BC(17;25) = B(425) = \{0; 425; 850; \dots\}$$

$$\text{Do đó } a \in \{416; 841; \dots\}.$$

Vì a nhỏ nhất nên $a = 416$

Bài 12: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có ba chữ số, biết rằng khi chia số đó cho 11, 13 thì được số dư lần lượt là 5 và 10.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là a .

Vì a chia cho 11 dư 5 nên $a-5$ chia hết cho 11.

Vì a chia cho 13 dư 10 nên $a-10$ chia hết cho 13.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a-5:11 \\ a-10:13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-5-44:11 \\ a-10-39:13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-49:11 \\ a-49:13 \end{cases}$$

Suy ra $a - 49 \in BC(11; 13) = B(143) = \{0; 143; 286; \dots\}$

Do đó $a \in \{49; 192; 335; \dots\}$.

Vì a là số tự nhiên nhỏ nhất có ba chữ số nên $a = 192$.

Bài 13: Khi chia một số tự nhiên a cho 4 ta được số dư là 3 còn khi chia a cho 9 ta được số dư là 5. Tìm số dư trong phép chia a cho 36.

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022

Lời giải

Theo đề bài ta có: $a = 4p + 3 = 9q + 3 (p, q \in \mathbb{Z})$

Suy ra $a + 13 = 4p + 3 + 13 = 4(p + 4)$ (1)

$a + 13 = 9q + 5 + 13 = 9(q + 2)$ (2)

Từ (1) và (2) ta nhận thấy $a + 13$ là bội của 4 và 9 mà $(4, 9) = 1$ suy ra $a + 13$ là bội của $4 \cdot 9 = 36$

Ta có $a + 13 = 36k (k \in \mathbb{Z})$ suy ra $a = 36k - 13 = 36(k - 1) + 23$

Vậy a chia cho 36 dư 23

Bài 14: Tìm số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số, sao cho chia nó cho 8 thì dư 7 và chia nó cho 31 thì dư 28.

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022

Lời giải

Gọi số cần tìm là $a (a \in \mathbb{N}, 100 \leq a \leq 999)$

Vì a chia cho 8 dư 7 và chia cho 31 dư 28 nên ta có:

$a - 7 : 8$ và $a - 28 : 31$ suy ra $a - 7 + 72 : 8$ và $a - 28 + 93 : 31$ suy ra $a + 65 : 31, 8$

Vì $(8, 31) = 1$ nên $a + 65 : (8 \cdot 31)$ hay $a + 65 : 248$ suy ra $a = 248k - 65 (k \in \mathbb{N}^*)$

Vì a là số có ba chữ số lớn nhất nên $k = 4$ suy ra $a = 927$

Bài 15: Một số tự nhiên chia cho 7 dư 5, chia cho 13 dư 4. Nếu đem số đó chia cho 91 thì dư bao nhiêu?

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Lời giải

Gọi số đó là a

Vì a chia cho 7 dư 5, chia cho 13 dư 4 suy ra $a + 9 : 7; a + 9 : 13$

mà $(7, 13) = 1$ nên $a + 9$ chia hết cho $7 \cdot 13$

suy ra $a + 9 = 91k$ suy ra $a = 91k - 9 = 91k - 91 + 82 = 91(k - 1) + 82 (k \in \mathbb{N})$

Vậy a chia cho 91 dư 82

Bài 16: Tìm các số nguyên x , biết:

a) $x^2 + 2x + 7 : x + 2$

b) $2x^2 + x + 4 : 2x + 1$.

Lời giải

a) $x^2 + 2x + 7 : x + 2 \Rightarrow x(x + 2) + 7 : x + 2$

Vì $x(x + 2) : x + 2$ với mọi x khác -2 .

Nên $7 : x + 2 \Rightarrow x + 2 \in U(7) = \{1; 7; -1; -7\}$

$\Rightarrow x \in \{-1; 5; -3; -9\}$.

b) $2x^2 + x + 4 : 2x + 1$

$\Rightarrow x(2x + 1) + 4 : 2x + 1$

Vì $x(2x + 1) : 2x + 1$ với mọi x nguyên

Nên $4 : 2x + 1 \Rightarrow 2x + 1 \in U(4) = \{1; 2; 4; -1; -2; -4\}$

$$\Rightarrow 2x \in \{0; 1; 3; -2; -3; -5\} \Rightarrow x \in \left\{0; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -1; \frac{-3}{2}; \frac{-5}{2}\right\}.$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{0; -1\}$.

Bài 17.

b) Tính tổng C . Tìm x để $2^{2x-1} - 2 = C$

Lời giải

$$b) C = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99} + 2^{100} \Rightarrow 2C = 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99} + 2^{100} + 2^{101}$$

$$C = 2C - C = 2^{101} - 2$$

$$2^{101} = 2^{2x-1}$$

$$2x - 1 = 101$$

$$x = 51$$

Bài 18. Một số chia cho 4 dư 3, chia cho 17 dư 9, chia cho 19 dư 13. Hỏi số đó chia cho 1292 dư bao nhiêu?

Lời giải

Gọi số cần tìm A ta có:

$$A + 25 = 4(q_1 + 7) = 17(q_2 + 2) = 19(q_3 + 2)$$

$$A = 4q_1 + 3 = 17q_2 + 9 = 19q_3 + 13$$

$$A + 25: 4, 17, 19 \text{ suy ra } A + 25 = 1292k$$

$$A = 1292k - 25 = 1292(k + 1) + 1267$$

Nên khi chia A cho 1292 ta được dư 1267

Bài 19. Số học sinh của một trường học xếp hàng, mỗi hàng có 20 người hoặc 25 người hoặc 30 người đều thừa 15 người. Nếu xếp mỗi hàng 41 người đều vừa đủ. Tính số học sinh của trường đó, biết số học sinh của trường chưa đến 1000.

Lời giải

Gọi số học sinh của trường là x

Theo đề ta suy ra $x - 15$ chia hết cho 20; 25; 30 suy ra $x - 15 \in BC(20, 25, 30)$

$$BCNN(20, 25, 30) = 300 \text{ và } x < 1000 \text{ do đó } x \in \{315; 615; 915\}$$

Vì $x:41$ nên $x = 615$. Vậy số học sinh của trường là 615 em

Bài 20: Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (x, y) sao cho $\overline{34x5y}$ chia hết cho 36

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Ta có: $36 = 9 \cdot 4$ mà $ƯC(4, 9) = 1$

Vậy để $\overline{34x5y}$ chia hết cho 36 thì $\overline{34x5y}$ chia hết cho 4 và 9

$$\overline{34x5y} \text{ chia hết cho 9 khi } 3 + 4 + x + 5 + y:9 \Rightarrow 12 + x + y:9(1)$$

$$\overline{34x5y} \text{ chia hết cho 4 khi } \overline{5y}:4 \Rightarrow y = 2, y = 6$$

$$\text{Với } y = 2 \text{ thay vào (1)} \Rightarrow 14 + x:9 \Rightarrow x = 4$$

$$\text{Với } y = 6 \text{ thay vào (1)} \Rightarrow 18 + x:9 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 9 \end{cases}$$

Vậy các cặp (x, y) cần tìm là : $(4, 2); (0, 6); (9, 6)$

Bài 21: Tìm tất cả các số nguyên n để $(n+4):(n+1)$

A. $n \in \{-3; -1; 1; 3\}$

B. $n \in \{-4; -2; 0; 2\}$

C. $n \in \{1; 3\}$

D. $n \in \{0; 2\}$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 22: Bạn Lan tính tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến n và nhận thấy tổng đó chia hết cho 29. Bạn Loan tính tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến m và cũng nhận thấy tổng đó chia hết cho 29. Tìm các số tự nhiên m và n biết rằng $m < n < 50$.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Lời giải

Xét $1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ với $k \in N$ và $0 < k < 50$.

Vì $\frac{k(k+1)}{2}$ chia hết cho 29 nên $k(k+1):29$ mà 29 là số nguyên tố

$\Rightarrow k:29$ hoặc $k+1:29$.

Do $k \in N$ và $0 < k < 50$ nên $k = 29$ hoặc $k+1 = 29 \Rightarrow k \in \{29; 28\}$

$\Rightarrow m = 28, n = 29$ (vì $m < n < 50$)

Vậy $m = 28, n = 29$.

Bài 23: Tìm chữ số x để:

a) $137 + \overline{3x}$ chia hết cho 13

b) $\overline{137x137x}$ chia hết cho 13

Trích đề HSG cấp huyện năm học 2016-2017

Lời giải

a) $137 + \overline{3x}$ chia hết cho 13

$A = 137 + \overline{3x} = 137 + 30 + x = 12 \cdot 13 + (11 + x) \Rightarrow A:13$ khi $11 + x:13 \Rightarrow x = 2$

b) $B = \overline{137x137x} = 13 \cdot 10^6 + \overline{7x} \cdot 10^4 + 13 \cdot 10^2 + \overline{7x} = 13 \cdot (10^6 + 10^2) + \overline{7x} \cdot 10001$

10001 không chia hết cho 13 $\Rightarrow B:13$ khi $\overline{7x}:13 \Rightarrow x = 8$

Bài 24: Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn: $(100a + 3b + 1)(2^a + 10a + b) = 225$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Lời giải

Ta có: $(100a + 3b + 1)(2^a + 10a + b) = 225$ (1)

Vì 225 lẻ nên $\begin{cases} 100a + 3b + 1 \\ 2^a + 10a + b \end{cases}$ cùng lẻ (2)

*) Với $a = 0$:

$(1) \Leftrightarrow (100 \cdot 0 + 3b + 1)(2^0 + 10 \cdot 0 + b) = 225 \Rightarrow (3b + 1)(1 + b) = 225 = 3^2 \cdot 5^2$

Vì $3b + 1$ chia cho 3 dư 1 và $3b + 1 > 1 + b$ nên $(3b + 1)(1 + b) = 25 \cdot 9 \Rightarrow \begin{cases} 3b + 1 = 25 \\ 1 + b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow b = 8$

*) Với a là số tự nhiên khác 0: Khi đó $100a$ chẵn, từ (2) $\Rightarrow 3b + 1$ lẻ $\Rightarrow b$ chẵn

$\Rightarrow 2^a + 10a + b$ chẵn, trái với (2) nên $b \in \emptyset$. Vậy $a = 0; b = 8$

Bài 25: Tìm số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số, sao cho chia nó cho 8 thì dư 7 và chia nó cho 31 thì dư 28

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019**Lời giải**

Gọi số cần tìm là a ($a \in \mathbb{N}, 100 \leq a \leq 999$)

Vì a chia cho 8 dư 7 và chia cho 31 dư 28 nên ta có:

$$\begin{cases} a-7:8 \\ a-28:31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-7+8:8 \\ a-28+31:8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+1:8 \\ a+3:8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+1+64:8 \\ a+3+62:31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+65:8 \\ a+65:31 \end{cases}$$

Vì $(8, 31) = 1$ nên $a + 65 : (8 \cdot 31)$ hay $a + 65 : 248 \Leftrightarrow a = 248k - 65$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

Vì a là số có 3 chữ số lớn nhất nên $k = 4 \Rightarrow a = 927$

Bài 26: Tìm số tự nhiên có 3 chữ số, biết rằng khi chia số đó cho các số 25; 28; 35 thì được các số dư lần lượt là 5; 8; 15

Trích đề HSG trường Nguyễn Khuyến năm 20...-20...**Lời giải**

Gọi số tự nhiên phải tìm là x

Từ giả thiết suy ra $(x+20):25, (x+20):28, (x+20):35 \Rightarrow x+20 \in BC(25, 28, 35)$

$BCNN(25; 28; 35) = 700 \Rightarrow x+20 = k \cdot 700$ ($k \in \mathbb{N}$)

Vì x là số tự nhiên có ba chữ số $\Rightarrow x \leq 999 \Rightarrow x+20 \leq 1019 \Rightarrow k = 1$

$\Rightarrow x+20 = 700 \Rightarrow x = 680$

Bài 27: a) Tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng bằng 504 và ƯCLN của chúng bằng 42

b) Tìm $a \in \mathbb{N}$ để $a+1$ là bội của $a-1$

c) Cho $K = 10^{28} + 8$. Chứng minh rằng K chia hết cho 72.

Trích đề 59 HSG năm 2018- 2019**Lời giải**

a) Gọi a, b là hai số cần tìm, $a, b \in \mathbb{N}^*, a > b, a = 42a', b = 42b', (a', b') = 1$

Vì $a > b \Rightarrow a' > b'$

$a+b = 504 \Rightarrow a'+b' = 12$ có các cặp thỏa mãn là $(11; 1); (7; 5)$

$\Rightarrow (a, b) \in \{(462; 42); (294; 210)\}$

b) Để $a+1$ là bội của $a-1$ nên thì $\frac{a+1}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1}$ là số nguyên khi

$a-1 \in U(2) = \{-1; 1; -2; 2\} \Rightarrow a \in \{0; 2; -1; 3\}$

c) Lập luận được K chia hết cho 9 vì tổng các chữ số là 9 và chia hết cho 8 vì $10^{28} : 8$ và ba chữ số tận cùng là 008. Vậy K chia hết cho 72.

Bài 28: Cho $S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$

a) Chứng minh rằng S là bội của -20

b) Tính S , từ đó suy ra 3^{100} chia cho 4 dư 1

Trích đề 59 HSG năm 2018- 2019**Lời giải**

a) Tổng S có 100 số hạng chia thành 25 nhóm, mỗi nhóm 4 số hạng

$S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$

$= (1 + 3 + 3^2 - 3^3) + (3^4 - 3^5 + 3^6 - 3^7) + \dots + (3^{96} - 3^{97} + 3^{98} - 3^{99})$

$$= (-20) + 3^4 \cdot (-20) + \dots + 3^{96} \cdot (-20) \Rightarrow S : -20$$

$$b) S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$$

$$3S = 3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 + \dots + 3^{99} - 3^{100}$$

$$\Rightarrow 3S + S = 4S = \frac{1 - 3^{100}}{4}$$

$$\Rightarrow 3^{100} - 1 : 4 \Rightarrow 3^{100} \text{ chia cho } 4 \text{ dư } 1.$$

Bài 29: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia số đó cho 3 dư 1, chia cho 4 dư 2, chia cho 5 dư 3 chia cho 6 dư 4 và chia hết cho 11.

Trích đề đề xuất năm 2021-2022

Lời giải

Gọi số phải tìm là x ($x \in N$)

Theo bài ra ta có:

$$x - 1 : 3 \text{ suy ra } x + 2 : 3$$

$$x - 2 : 4 \text{ suy ra } x + 2 : 4$$

$$x - 3 : 5 \text{ suy ra } x + 2 : 5$$

$$x - 4 : 6 \text{ suy ra } x + 2 : 6$$

Do đó $x + 2 \in BC(3, 4, 5, 6)$

Mà: $BCNN(3, 4, 5, 6) = 60$ nên $x + 2 = 60n$

Do đó $x = 60n - 2$ ($n = 1; 2; 3; \dots$)

Mặt khác x là số tự nhiên nhỏ nhất $x : 11$ nên lần lượt cho $n = 1; 2; 3; \dots$

Ta thấy $n = 7$ thì ta được số 418 thỏa mãn.

Vậy số nhỏ nhất phải tìm là 418.

Bài 30: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng số đó chia cho 9 dư 5, chia cho 7 dư 4 và chia cho 5 thì dư 3.

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021-2022.

Lời giải

Gọi số cần tìm là a (a là số tự nhiên khác 0).

Vì a chia cho 9 dư 5 nên ta có $a = 9k + 5$ ($k \in N$) thì $2a = 9k_1 + 1$ ($k_1 \in N$) suy ra $(2a - 1) : 9$

Vì a chia cho 7 dư 4 nên ta có $a = 7m + 4$ ($m \in N$) thì $2a = 7m_1 + 1$ ($m_1 \in N$) suy ra

$$(2a - 1) : 7$$

Vì a chia cho 5 dư 3 nên ta có $a = 5t + 3$ ($t \in N$) suy ra $2a = 5t_1 + 1$ ($t_1 \in N$) suy ra $(2a - 1) : 5$

Suy ra $(2a - 1)$ chia hết cho cả 9; 7 và 5. Mà 9; 7; 5 nguyên tố cùng nhau và a là số tự nhiên nhỏ nhất nên $2a - 1 = BCNN(9; 7; 5) = 315$.

Vậy $a = 158$.

Bài 31: Tìm các số tự nhiên a, b sao cho: $(2008a + 3b + 1)(2008^a + 2008a + b) = 225$

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021-2022.

Lời giải

Theo đề bài $2008a + 3b + 1$ và $2008^a + 2008a + b$ là 2 số lẻ.

Nếu $a \neq 0$ suy ra $2008^a + 2008a$ là số chẵn

để $2008^a + 2008a + b$ lẻ suy ra b lẻ

Nếu b lẻ suy ra $3b+1$ chẵn do đó $2008a + 3b + 1$ chẵn (không thỏa mãn)

Vậy $a = 0$

Với $a = 0$ suy ra $(3b+1)(b+1) = 225$

Vì $b \in \mathbb{N}$ suy ra $(3b+1)(b+1) = 225 = 3.75 = 5.45 = 9.25$

$3b+1$ không chia hết cho 3 và $3b+1 > b+1$

Nên $\begin{cases} 3b+1=25 \\ b+1=9 \end{cases}$ suy ra $b=8$

Vậy $a=0; b=8$.

Bài 32: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có 3 chữ số sao cho số đó chia 7 dư 3 và chia 11 dư 5.

Trích đề KS HSG thị xã Sơn Tây năm 2021-2022

Lời giải

Gọi số tự nhiên nhỏ nhất có 3 chữ số là a .

Vì a chia 7 dư 3 nên $a = 7n + 3$ ($n \in \mathbb{N}$) suy ra $a + 4 = 7(n+1)$

Do đó $a + 4 + 35 : 7$ hay $a + 39 : 7$

Vì a chia 11 dư 5 nên $a = 11m + 5$ ($m \in \mathbb{N}$) suy ra $a + 6 = 11(m+1)$

Do đó $a + 6 + 33 : 11$ hay $a + 39 : 11$

Vậy $a + 39 \in BC(7, 11)$ suy ra $a + 39 = 154$ nên $a = 115$

Vậy số cần tìm là 115.

Bài 33: Tìm số tự nhiên $n > 1$ sao cho $2n+1$ chia hết cho $n-1$.

Trích đề Olympic năm 2021-2022

Lời giải

Ta có $(2n+1):(n-1)$ hay $(2n-2+3):(n-1)$ hay $2(n-1)+3:n-1$

Mà $2(n-1):(n-1)$ nên $3:(n-1)$ hay $n-1$ là ước của 3

$U(3) = \{-3; -1; 1; 3\}$

Mà: $n > 1$ nên $(n-1) \in \{1; 3\}$

Suy ra $n \in \{1; 4\}$.

Vậy $n \in \{1; 4\}$.

Bài 34: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng khi chia số này cho 9 thì dư 5 và chia cho 11 thì dư 9.

Trích đề Olympic năm 2021-2022

Lời giải

Gọi số cần tìm là a ($a \in \mathbb{N}$).

Ta có $(a-5):9$ suy ra $(a-5+18):9$ mà $18:9$ nên $(a+13):9$

Lại có $(a-9):11$ suy ra $(a-9+22):11$ suy ra $(a+13):11$

Từ đó ta có $a+13 \in BC(9; 11)$ mà a nhỏ nhất nên $a+13 = BCNN(9; 11) = 99$ nên $a = 86$.

Vậy số cần tìm là 86.

Bài 35: Tìm các chữ số x, y sao cho: $B = \overline{62x427y}$ chia hết cho 18.

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2021-2022.

Lời giải

Ta có: $18 = 2 \cdot 9$ mà $U_{CLN}(2;9) = 1$.

$B = \overline{62x427y}$ chia hết cho 18 thì $B:2$ và $B:9$

$B:2$ suy ra $y \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$ (vì y là chữ số)

$B:9$ suy ra $6+2+x+4+2+7+y = 21+x+y:9$

+) $y=0$ suy ra $21+x:9$ suy ra $x=6$ (vì x là chữ số).

+) $y=2$ suy ra $23+x:9$ suy ra $x=4$ (vì x là chữ số).

+) $y=4$ suy ra $25+x:9$ suy ra $x=2$ (vì x là chữ số).

+) $y=6$ suy ra $27+x:9$ suy ra $x=0$ hoặc $x=9$ (vì x là chữ số).

+) $y=8$ suy ra $29+x:9$ suy ra $x=7$ (vì x là chữ số).

Vậy $(x; y) \in \{(6; 0); (4; 2); (2; 4); (0; 6); (9; 6); (7; 8)\}$

Bài 36: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho số đó chia cho 3 dư 1; chia cho 4 dư 2; chia cho 5 dư 3; chia cho 6 dư 4 và chia hết cho 11.

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2021-2022.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là a

Ta có: a chia cho 3 dư 1 suy ra $a-1:3$ suy ra $a-1+3:3$ suy ra $a+2:3$

a chia cho 4 dư 2 suy ra $a-2:4$ suy ra $a-2+4:4$ suy ra $a+2:4$

a chia cho 5 dư 3 suy ra $a-3:5$ suy ra $a-3+5:5$ suy ra $a+2:5$

a chia cho 6 dư 4 suy ra $a-4:6$ suy ra $a-4+6:6$ suy ra $a+2:6$

Do đó: $a+2 \in \{0; 60; 120; 180; 240; 300; 360; 420; 560; \dots\}$

Suy ra $a \in \{-2; 58; 118; 178; 238; 298; 358; 418; 558; \dots\}$

Mà a nhỏ nhất và chia hết cho 11

Vậy $a = 418$

Bài 37: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho a chia cho 3 dư 2; a chia cho 5 dư 4; a chia cho 7 dư 6.

Trích đề HSG huyện Sóc Sơn năm 2021-2022.

Lời giải

Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} a = 3k + 2 \\ a = 5p + 4 \\ a = 7q + 6 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} a + 1 : 3 \\ a + 1 : 5 \\ a + 1 : 7 \end{cases}$$

Suy ra $a+1 \in BC(3;5;7)$

Mà a là số tự nhiên nhỏ nhất nên $a+1 = BCNN(3;5;7)$

$BCNN(3;5;7) = 105$

Suy ra $a+1 = 105$

Suy ra $a = 104$. Vậy $a = 104$

Bài 38: Tìm các số tự nhiên có 3 chữ số chia hết cho 7 và tổng các chữ số của nó cũng chia hết cho 7.

Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021-2022.

Lời giải

Gọi số đó là \overline{abc} ($0 \leq a; b; c \leq 9$) $a \neq 0$

Ta có $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 98a + 7b + 2a + 3b + c = 7(14a + b) + (2a + 3b + c)$

Vì $\overline{abc} : 7$ nên $(2a + 3b + c) : 7$. Mà $(a + b + c) : 7$ nên $2(a + b + c) : 7$

Suy ra $(b - c) : 7$

Mà $b; c$ là chữ số nên $b - c \in \{-7; 0; 7\}$.

Nếu $b - c = 7$ thì $c = b + 7$

$a + b + c = (a + 2b + 7) : 7$

$(a + 2b) : 7$

$\overline{abc} \in \{707; 518; 329\}$

Nếu $b - c = 0$ nên $b = c$ khi đó $a + b + c = (a + 2b) : 7$

Nên $\overline{abc} \in \{133; 322; 511; 700; 266; 455; 644; 833; 399; 588; 777; 966\}$.

Vậy các số cần tìm là:

707; 518; 329; 770; 581; 392; 133; 322; 511; 700; 266; 455; 644; 833; 399; 588; 777; 966

Bài 39: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia cho 11 dư 6, chia cho 4 dư 1 và chia cho 19 dư 11.

Trích đề thi chọn HSG huyện Kim Sơn năm 2021-2022
Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là a

Ta có: a chia cho 11 dư 6 suy ra $a - 6 : 11$ suy ra $a - 6 + 33 : 11$ suy ra $a + 27 : 11$

a chia cho 4 dư 1 suy ra $a - 1 : 4$ suy ra $a - 1 + 28 : 4$ suy ra $a + 27 : 4$

a chia cho 19 dư 11 suy ra $a - 11 : 19$ suy ra $a - 11 + 38 : 19$ suy ra $a + 27 : 19$

mà a là số tự nhiên nhỏ nhất nên $a + 27$ nhỏ nhất

Suy ra: $a + 27 = BCNN(4; 11; 19)$.

Từ đó tìm được $a = 809$

Bài 40: Tìm 1 số tự nhiên có 2 chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 9 vào bên trái số đó ta được 1 số lớn gấp 13 lần số đã cho.

Trích đề thi chọn HSG huyện Tiên Du năm 2021-2022.
Lời giải

Gọi số phải tìm là \overline{ab} . Với a, b là các chữ số a khác 0

Viết thêm chữ số 9 vào bên trái ta được số $9\overline{ab}$.

Theo bài ra ta có :

$$9\overline{ab} = 13.\overline{ab}$$

$$900 + \overline{ab} = \overline{ab}.13$$

$$\overline{ab} = 75. \text{Thử lại đúng.}$$

Vậy số phải tìm là 75.

Bài 41: Tìm tất cả các số tự nhiên n , biết rằng $n + S(n) = 2014$, trong đó $S(n)$ là tổng các chữ số của n .

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019

Nếu n là số có ít hơn 4 chữ số thì $n \leq 999$ và $S(n) \leq 27$

Suy ra $n + S(n) \leq 999 + 27 = 1026 < 2014$ (ktr)

Mặt khác $n \leq n + S(n) = 2014$ nên n là số có ít hơn 5 chữ số.

Vậy n là số có 4 chữ số, suy ra $S(n) \leq 9.4 = 36$.

Do vậy $n \geq 2014 - 36 = 1978$

Vì $1978 \leq n \leq 2014$ suy ra $\begin{cases} n = \overline{19ab} \\ n = \overline{20cd} \end{cases}$

*Nếu $n = \overline{19ab}$. Ta có: $\overline{19ab} + (1+9+a+b) = 2014$

$1910 + 11a + 2b = 2014$ suy ra $11a + 2b = 104$ suy ra $a \div 2$

và $11a = 104 - 2b \geq 104 - 2 \cdot 9 = 86$ suy ra $8 \leq 10 < a, a \div 2$ nên $a = 8$ khi đó $b = 8$

suy ra $n = 1988(tm)$

*Nếu $n = \overline{20cd}$ thì $\overline{20cd} + (2+0+c+d) = 2014$

$2002 + 11c + 2d = 2014$ nên $11c + 2d = 12$ suy ra $c \div 2$

Và $11c \leq 12$

+TH1 $c = 0$ thì $d = 6, n = 2006(tm)$

+TH2 $c = 1$ thì $2d = 1(ktm)$

Vậy $n \in \{1988; 2006\}$

Bài 42: Tìm các số nguyên a, b biết rằng: $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+1}$

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019

Bài giải

$\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+1}$ suy ra $\frac{2a-7}{14} = \frac{1}{b+1}$ suy ra $(2a-7)(b+1) = 14$

Do $a, b \in \mathbb{Z}$ suy ra $2a-7 \in U(14) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 7; \pm 14\}$

Vì $2a-7$ lẻ nên $2a-7 \in \{-7; -1; 1; 7\}$ suy ra $a \in \{0; 3; 4; 7\}$

Từ đó tính được $(a, b) = \{(0; -3); (3; -15); (4; 13); (7; 1)\}$

Bài 43: Cho $n = \overline{7a5} + \overline{8b4}$. Biết $a-b=6$ và n chia hết cho 9. Tìm a, b

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019

Bài giải

Ta có: $n = \overline{7a5} + \overline{8b4} \div 9$ thì $7+a+5+8+b+4 \div 9$

$24+a+b \div 9$ suy ra $a+b \in \{3; 12\}$ (vì $a+b < 19$)

Mà $a-b=6$ suy ra $a+b > 3$ suy ra $a+b=12$

Kết hợp với $a-b=6$ suy ra $a=9, b=3$

Bài 44 : Tìm các chữ số x, y sao cho $\overline{2014xy} \div 42$.

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019.

Bài giải

$\overline{2014xy} = 201400 + \overline{xy} = 42 \cdot 4795 + 10 + \overline{xy} \div 42$ suy ra $10 + \overline{xy} \div 42$

Do $0 \leq \overline{xy} < 100$ suy ra $\overline{xy} \in \{32; 74\}$.

Vậy $(x, y) = (3; 2); (7; 4)$

Bài 45: Tìm các số nguyên tố x, y sao cho $x^2 + 117 = y^2$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2018-2019

Bài giải

Với $x = 2$ thì $2^2 + 117 = 121$ khi đó $y^2 = 121$ nên $y = 11$ (là số nguyên tố)

Với $x > 2$, x là số nguyên tố nên x lẻ nên $y^2 = x^2 + 117$ là số chẵn

Nên y chẵn, kết hợp với y nguyên tố nên $y = 2(ktm)$

Vậy $x = 2; y = 11$

Bài 46: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, biết rằng số đó khi chia cho 3, cho 4, cho 5, cho 6 đều dư là 2, còn chia cho 7 thì dư 3.

Trích đề HSG huyện Vĩnh lộc năm 2017-2018

Bài giải

Gọi a là số tự nhiên cần tìm

Vì a chia cho 3, 4, 5, 6 đều dư 2 nên $a - 2$ chia hết cho 3, 4, 5, 6

$(a - 2) \in BC(3; 4; 5; 6)$, $BCNN(3, 4, 5, 6) = 60$

$a - 2 \in \{0; 60; 120; 180; \dots\}$ suy ra $a \in \{2; 62; 122; 182; \dots\}$

Mà a là số nhỏ nhất và chia cho 7 dư 3 suy ra $a = 122$

Bài 47: Tìm số tự nhiên b biết 326 chia b dư 11 và 557 chia b dư 17.

Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Lời giải

Theo bài cho ta có $b \in \mathbb{N}^*$

Ta có 326 chia b dư 11 $\Rightarrow (326 - 11) : b; b > 11 \Rightarrow 315 : b; b > 11$ (1)

Ta có: 557 chia b dư 17 $\Rightarrow (557 - 17) : b; b > 17 \Rightarrow 540 : b; b > 17$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow b \in UC(315, 540); b > 17$ (3)

Phân tích các số 315, 540 ra thừa số nguyên tố, ta có

$$315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$$

$$\Rightarrow UCLN(315; 540) = 3^2 \cdot 5 = 45$$

$$\Rightarrow UC(315; 540) = U(45) = \{1; 3; 5; 9; 15; 45\} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow b = 45$.

Vậy $b = 45$.

Bài 48: Tìm các chữ số $x; y$ biết $\overline{75x1y}$ chia hết cho 45.

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021 - 2022

Lời giải

Vì $45 = 9 \cdot 5$ mà $UCLN(5; 9) = 1$ nên

$$\overline{75x1y} : 45 \Rightarrow \begin{cases} \overline{75x1y} : 5 \\ \overline{75x1y} : 9 \end{cases}$$

$$\text{Vì } \overline{75x1y}:5 \Rightarrow y \in \{0;5\}$$

$$\text{Vì } \overline{75x1y}:9 \Rightarrow (13+x+y):9$$

Với $y=0 \Rightarrow x=5$ suy ra số cần tìm là 75510

Với $y=5 \Rightarrow x=0$ hoặc $x=9$ suy ra số cần tìm là 75015 hoặc 75915

Bài 49: Tìm các chữ số x, y để $B = \overline{x183y}$ chia cho 2;5;9 đều dư 1

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Lời giải

$B = \overline{x183y}$ chia cho 2;5 đều dư 1 thì $y=1$

$$\Rightarrow B = \overline{x1831}$$

Để $B = \overline{x1831}$ chia cho 9 dư 1 thì $x + 1 + 8 + 3 + 1$ chia cho 9 dư 1

$\Rightarrow x + 13$ chia cho 9 dư 1, mà x là chữ số $\Rightarrow x=6$

Bài 50: Tìm các chữ số x, y biết $\overline{75x1y}$ chia hết cho 45.

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Lời giải

Vì $45 = 5.9$ và $(5;9) = 1$ nên

$$\overline{75x1y}:45 \Rightarrow \begin{cases} \overline{75x1y}:5 \\ \overline{75x1y}:9 \end{cases}$$

$$\text{Vì } \overline{75x1y}:5 \Rightarrow y \in \{0;5\}$$

$$\text{Vì } \overline{75x1y}:9 \Rightarrow (13+x+y):9$$

Với $y=0 \Rightarrow x=5$ suy ra số cần tìm là 75510

Với $y=5 \Rightarrow x=0$ hoặc $x=9$ suy ra số cần tìm là 75015 hoặc 75915

Bài 51: Tìm số tự nhiên n có 4 chữ số biết n là số chính phương và n là bội của 147.

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Lời giải

Vì n là số tự nhiên có 4 chữ số nên $1000 \leq n \leq 9999$

Theo bài ra n là bội của 147 nên $n = 147.k = 7^2.3k$

Do n là số chính phương nên khi phân tích n ra thừa số nguyên tố thì lũy thừa của các thừa số nguyên tố phải có số mũ chẵn suy ra $k:3$

$$\Rightarrow k = 3m \Rightarrow n = 7^2.3^2.m = 441m$$

$$\Rightarrow 1000 \leq 441m \leq 9999$$

$$\Rightarrow 2 < m \leq 22$$

Để n là số chính phương thì m phải là số chính phương nên $m \in \{4; 9; 16\}$

Suy ra các số tự nhiên cần tìm là: 1764; 3969; 7056

Bài 52: Số nhà của hai bạn An và Bình đều là số tự nhiên có bốn chữ số dạng $\overline{a53b}$ và chia hết cho cả 5 và 9. Tìm số nhà của hai bạn biết số nhà của bạn An lớn hơn số nhà của bạn Bình.

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2021-2022

Lời giải

Vì $\overline{a53b}$ chia hết cho 5 nên $b=0$ hoặc $b=5$

+ Với $b=0$ ta có số dạng $\overline{a530}$

$\overline{a530}$ chia hết cho 9 khi $a+8$ chia hết cho 9

Vì a là chữ số khác 0 nên $a=1$. Ta được số 1530

+ Với $b=5$ ta có số dạng $\overline{a535}$

$\overline{a535}$ chia hết cho 9 khi $a+13$ chia hết cho 9

Vì a là chữ số khác 0 nên $a=5$. Ta được số 5535

Vì số nhà của bạn An lớn hơn số nhà của bạn Bình nên số nhà của bạn An là 5535, số nhà của bạn Bình là 1530.

Bài 53: Một số tự nhiên khi chia cho 11 dư 4, chia cho 13 dư 8. Tìm số dư trong phép chia số đó cho 143.

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2021-2022

Lời giải

Gọi số đó là a .

Vì a chia cho 11 dư 4, chia cho 13 dư 8 nên $a+18 \equiv 4 \pmod{11}, a+18 \equiv 8 \pmod{13}$

Mà $\text{ƯCLN}(11,13)=1$ nên $a+18 \equiv 11.13 \pmod{143} \Rightarrow a+18 \equiv 143$

$$\Rightarrow a+18 = 143k \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Rightarrow a+143 - 125 = 143k$$

$$\Rightarrow a = 143(k-1) + 125$$

Suy ra a chia cho 143 dư 125

Bài 54: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất chia cho 5 dư 1, chia cho 7 dư 3.

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2021-2022

Lời giải

Gọi a là số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm ($a \in \mathbb{N}^*$)

Vì a chia cho 5 dư 1 nên $a+4 \vdots 5$ (1)

Vì a chia cho 7 dư 3 nên $a+4 \vdots 7$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a+4 \in BC(7;5)$

$$BC(7;5) = 35$$

suy ra $BC(5;7) = \{0; 35; 70; 105 \dots\}$

Suy ra $(a+4) \in \{0; 35; 70; 105 \dots\}$

a là số tự nhiên nhỏ nhất suy ra $a+4 = 35$ suy ra $a = 31$.

Bài 55: Tìm chữ số a, b để $\overline{62ab427}$ chia hết cho 99.

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Lời giải

Ta có $\overline{62ab427} = 62.100000 + \overline{ab} \cdot 1000 + 427 = 6200000 + \overline{ab} \cdot 990 + \overline{ab} \cdot 10 + 370 + 57$
 $= 62630.99 + \overline{ab} \cdot 990 + \overline{ab} \cdot 10 + 57$

Mà $\overline{62ab427} \vdots 99$ suy ra $\overline{ab} \cdot 10 + 57 \vdots 99 \Rightarrow \overline{ab} \cdot 10 + 57 = 99k$ ($k \in \mathbb{N}$)

Ta thấy $\overline{ab} \cdot 10 + 57$ có chữ số tận cùng là 7 suy ra $99k$ phải có chữ số tận cùng là 7

Suy ra $k = 3$. Do đó

$$\overline{ab} \cdot 10 + 57 = 99 \cdot 3$$

$$\overline{ab} \cdot 10 = 240$$

$$\overline{ab} = 24$$

Vậy $a = 2; b = 4$.

Bài 56: Cho số $\overline{155*710*4*16}$ có 12 chữ số. Chứng minh rằng nếu thay các dấu $*$ bởi các chữ số khác nhau trong ba chữ số 1; 2; 3 một cách tùy ý thì số đó luôn chia hết cho 396.

Trích đề HSG Trường THCS Ái Thượng năm 2021-2022

Lời giải

Ta thấy, vị trí của các chữ số thay thế ba dấu sao trong số trên đều ở hàng chẵn và vì ba chữ số đó đôi một khác nhau, lấy từ tập hợp $\{1; 2; 3\}$ nên tổng của chúng luôn bằng $1+2+3 = 6$.

Mặt khác $396 = 4.9.11$ trong đó 4; 9; 11 đôi một nguyên tố cùng nhau nên ta cần chứng minh

$A = \overline{155*710*4*16}$ chia hết cho 4; 9 và 11.

Thật vậy :

*) $A \vdots 4$ vì số tạo bởi hai chữ số tận cùng của $A \vdots 9$ là 16 chia hết cho 4

*) $A \vdots 9$ vì tổng các chữ số chia hết cho 9 :

$$1+5+5+7+1+4+1+6+*+*+* = 30+6 = 36 \text{ chia hết cho } 9$$

*) $A \vdots 11$ vì hiệu số giữa tổng các chữ số hàng chẵn và tổng các chữ số hàng lẻ là 0, chia hết cho 11.

$$1+5+7+4+1)-(5+1+6+ *+*+* = 18-12-6=0$$

Vậy A:396.

Bài 57: Số tự nhiên a chia 36 dư bao nhiêu, biết a chia 4 dư 3 và chia 9 dư 4.

Trích đề HSG Huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Lời giải

Với $a \in \mathbb{N}$, ta có:

a chia 4 dư 3 nên $a-3 \vdots 4$; suy ra $a-3-7 \cdot 4 \vdots 4$ hay $a-31 \vdots 4$

a chia 9 dư 4 nên $a-4 \vdots 9$ suy ra $a-4-3 \cdot 9 \vdots 9$ hay $a-31 \vdots 9$

mà $(4; 9) = 1$ suy ra $a-31 \vdots 4 \cdot 9$ hay $a-31 \vdots 36$ Do đó a chia 36 dư 31.

Bài 58: Tìm số tự nhiên có ba chữ số sao cho khi lấy số đó chia cho 11 thì được thương bằng tổng các chữ số của số phải tìm.

Trích đề HSG Cấp Trường năm 2019-2020

Lời giải

Gọi số đó là \overline{xyz} , trong đó $1 \leq x \leq 9, 0 \leq y, z \leq 9, x, y, z \in \mathbb{N}$

Theo đề ra ta có: $\overline{xyz} : 11 = (x + y + z)$

$$\overline{xyz} = 11(x + y + z)$$

$$100x + 10y + z = 11x + 11y + 11z$$

$$89x = 10z + y$$

$$\overline{zy} = 89x \quad (*)$$

Do $\overline{zy} < 100 \Rightarrow 89x < 100 \Rightarrow x \leq 1$ mà $x \neq 0 \Rightarrow x = 1$

Thay $x = 1$ vào (*) ta có: $89 \cdot 1 = \overline{zy} \Rightarrow \overline{zy} = 89$

Vậy số cần tìm là 198.

Bài 59: Thay (*) bằng các số thích hợp:

a) $\overline{510*}; \overline{61*16}$ chia hết cho 3.

b) $\overline{261*}$ chia hết cho 2 và chia 3 dư 1.

Trích đề HSG Cấp Trường năm 2019-2020

Lời giải

a) Để $\overline{510*}$ chia hết cho 3 thì $5+1+0+*=6 \vdots 3$ từ đó tìm được $* \in \{0; 3; 6; 9\}$.

$\overline{61*16}$ chia hết cho 3 thì $6+1+*+6+1=14+*$ từ đó tìm được $* \in \{1; 4; 7\}$.

b) Để $\overline{261*}$ chia hết cho 2 và chia cho 3 dư 1 thì $*$ chẵn và $2+6+1+*$ chia 3 dư 1, từ đó tìm được $*=4$.

Bài 60: Cho $n = \overline{7a5} + \overline{8b4}$. Biết $a-b=6$ và n chia hết cho 9. Tìm a và b .

Trích đề HSG Hoài Nhơn năm 2015-2016

Lời giải

Ta có: $n = \overline{7a5} + \overline{8b4} : 9$

Có $7+a+5+8+b+4 : 9$

$24+a+b : 9$

Do đó $a+b \in \{3; 12\}$ (vì $a+b < 19$).

Mà $a-b=6$ nên $a+b > 3$. Do đó $a+b=12$.

Kết hợp với $a-b=6$ suy ra $a=9, b=3$.

Bài 61: Tìm x, y biết $\overline{124xy} : 45$.

Trích đề HSG huyện Ba vì năm 2018-2019

Lời giải

Đặt $A = \overline{124xy}$

Để $A : 45$ thì $A : 5$ và 9

Để $A : 5$ thì $y=0$ hoặc $y=5$

Nếu $y=0$, để $A : 9$ thì $1+2+4+x+0 : 9$ suy ra $x=2$.

Nếu $y=5$, để $A : 9$ thì $1+2+4+x+5 : 9$ suy ra $x=6$.

Vậy $x; y \in \{2; 0; 6; 5\}$.

Bài 62: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất lớn hơn 10, biết rằng số đó chia cho 5 ; 6 ; 7 có số dư lần lượt là 3 ; 2 ; 1

Trích đề HSG huyện Ba vì năm 2018-2019

Lời giải

Gọi số phải tìm là a ($a \in \mathbb{N}, a > 10$)

Theo đề bài ta có:

a chia cho 5 dư 3 nên $a-3 : 5$ suy ra $(a-3)-5 : 5$ hay $a-8 : 5$

a chia cho 6 dư 2 nên $a-2 : 6$ suy ra $(a-2)-6 : 6$ hay $a-8 : 6$

a chia cho 7 dư 1 nên $a-1 : 7$ suy ra $(a-1)-7 : 7$ hay $a-8 : 7$

Do đó $a-8 \in BC(5; 6; 7)$

Để a nhỏ nhất lớn hơn 10 thì $a-8 = BCNN(5; 6; 7) = 210$

$a-8 = 210$

$$a = 218$$

Vậy số tự nhiên phải tìm là 218.

Bài 63: Tìm số nguyên n để phân số $M = \frac{2n-7}{n-5}$ có giá trị là số nguyên.

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Lời giải

$$\text{Ta có } M = \frac{2n-7}{n-5} = \frac{2n-10+3}{n-5} = 2 + \frac{3}{n-5} \in \mathbb{Z}$$

để phân số $M = \frac{2n-7}{n-5}$ có giá trị là số nguyên thì $n-5 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$

$n-5$	-3	-1	1	3
n	2	4	6	8

Vậy $n \in \{2; 4; 6; 8\}$.

Bài 64: Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ biết: $2x(3y-2) + (3y-2) = -55$

Trích đề HSG cấp trường Hà Huy Tập năm 2018-2019

Lời giải

$$\text{Ta có } 2x(3y-2) + (3y-2) = -55$$

$$(3y-2)(2x+1) \in U(55) = \{\pm 1; \pm 5; \pm 11; \pm 55\}$$

$2x+1$	-5	5	1	-1	-55	55	11	-11
$3y-2$	11	-11	-55	55	1	-1	-5	5
x	-3	2	0	-1	-28	28	5	-6
y	$\frac{13}{3}$ (loại)	-3 TM	$\frac{-53}{3}$ (loại)	$\frac{57}{3}$ (loại)	1 TM	$\frac{1}{3}$ (loại)	-1 TM	$\frac{7}{3}$ (loại)

Sau khi thử các trường hợp ta có $(x; y) \in \{(5; -1); (2; -3); (-28; 1)\}$

Bài 65: Cho a là một số nguyên có dạng $a = 3b + 7 (b \in \mathbb{Z})$. Hỏi a có thể nhận những giá trị nào trong các giá trị sau: $a = 11; a = 2002; a = 2003; a = 11570; a = 22789; a = 29563; a = 299537$

Trích đề HSG cấp trường Bá Thước năm 2018-2019

Lời giải

Số nguyên có dạng $a = 3b + 7 (b \in \mathbb{Z})$ hay a là số chia 3 dư 1

Vậy a có thể nhận những giá trị là $a = 2002; a = 22789; a = 29563$

Dạng 3: Dùng phương pháp phản chứng; nguyên lí Dirichlet để cm chia hết hoặc không chia hết.

Bài 1: Cho 2023 số tự nhiên bất kì: $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2023}$. Chứng minh rằng tồn tại một số hoặc tổng một số các số liên tiếp nhau trong dãy trên chia hết cho 2023.

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2022 - 2023

Lời giải

$$\text{Đặt } B_1 = a_1$$

$$B_2 = a_1 + a_2$$

.....

$$B_{2023} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2023}$$

Nếu tồn tại B_i ($i = 1; 2; 3; \dots; 2023$) nào đó chia hết cho 2023 thì bài toán được chứng minh

Nếu không tồn tại B_i chia hết cho 2023 ta làm như sau

Ta đem B_i chia cho 2023 sẽ được 2022 số dư (các số dư thuộc $\{1; 2; 3; \dots; 2022\}$). Theo nguyên lý

Dirichlet phải có ít nhất hai số có số dư bằng nhau, giả sử hai số đó là B_m ; và B_n suy ra

$B_n - B_m$ ($n > m$) chia hết cho 2023, mà $B_n - B_m$ là một số hoặc là tổng số các số liên tiếp ta được điều phải chứng minh.

Bài 2: Cho 2016 số tự nhiên $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2015}; a_{2016}$. Chứng minh rằng trong 2016 số ấy, tồn tại một số chia hết cho 2016 hoặc tồn tại một vài số chia hết cho 2016.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Tường năm 2015 - 2016

Lời giải

Nếu một trong 2016 số tự nhiên đó có số 2016. Thì 2016 chia hết cho 2016. Bài toán được chứng minh.

Nếu tất cả 2016 số từ $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2015}; a_{2016}$ không có số nào chia hết cho 2016. Thì mỗi số đó khi chia cho 2016 sẽ nhận được 2015 số dư $1; 2; 3; \dots; 2014; 2015$.

Có 2016 số mà có 2015 số dư nên tồn tại 2 số có cùng số dư khi chia cho 2016.

Suy ra hiệu của hai số chia hết cho 2016 (đpcm).

Bài 3: Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên chỉ được viết bởi chữ số 2 và chữ số 0 mà số đó chia hết cho 2015.

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015 - 2016

Lời giải

Xét 2016 số : $2; 22; 222; \dots; 222\dots2$ số cuối cùng có 2016 chữ số 2.

Các số này khi chia cho 2015 ta được 2016 số dư. Mà một số tự nhiên bất kỳ khi chia cho 2015 chỉ có thể có số dư là $0; 1; 2; \dots; 2014$ có 2015 khả năng dư.

Do đó theo nguyên tắc Dirichlet tồn tại hai số trong các số trên có cùng số dư khi chia cho 2015. Hiệu của chúng có dạng $222\dots2000\dots0$ chia hết cho 2015.

ĐỀ 3: TÍNH CHẤT CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ TỰ NHIÊN

A. PHẦN NỘI DUNG

II. Số nguyên tố, hợp số.

Dạng 1: Tìm số để biểu thức là số nguyên tố, hợp số.

Bài 1: Tìm số tự nhiên x sao cho $2x+1, 2x+3$ và $2x+11$ đều là các số nguyên tố.

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Lời giải

- Với $x=0$ thì $2x+1=2.0+1=1$ không là số nguyên tố. Do đó $x=0$ không thỏa mãn đề bài.
 - Với $x=1$ thì $2x+1=2.1+1=3, 2x+3=2.1+3=5, 2x+11=2.1+11=13$ đều là các số nguyên tố. Do đó $x=1$ thỏa mãn đề bài.
 - Với $x=2$ thì $2x+11=2.2+11=15$ là hợp số. Do đó $x=2$ không thỏa mãn đề bài.
 - Với $x=3$ thì $2x+3=2.3+3=9$ là hợp số. Do đó $x=3$ không thỏa mãn đề bài.
 - Với $x=4$ thì $2x+1=2.4+1=9$ là hợp số. Do đó $x=4$ không thỏa mãn đề bài.
 - Với $x>4$ thì n có dạng $x=4k+1, x=4k+2, x=4k+3, (k \in \mathbb{N}^*)$.
 - + Với $x=4k+1$ thì $2x+11=2(4k+1)+11=8k+13$ là hợp số. Do đó $x=4k+1$ không thỏa mãn.
 - + Với $x=4k+3$ thì $2x+3=2(4k+3)+3=8k+9$ là hợp số. Do đó $x=4k+3$ không thỏa mãn.
 - + Với $x=4k+2$ thì $2x+11=2(4k+2)+11=8k+15$ là hợp số. Do đó $x=4k+2$ không thỏa mãn.
- Do đó $x=1$ thỏa mãn đề bài.

Bài 2: Cho n là số nguyên tố lớn hơn 3. Hỏi n^2+2006 là số nguyên tố hay hợp số.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

n là số nguyên tố nên $n > 3$ và không chia hết cho 3. Vậy n^2 chia cho 3 dư 1 do đó $n^2+2006=3m+1+2006=3m+2007=3.(m+669):3$

Vậy n^2+2006 là hợp số.

Bài 3: Cho $a, b, c, d, n \in \mathbb{N}^*$, biết $ab=cd$. Chứng minh rằng $a^n+b^n+c^n+d^n$ là hợp số.

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Lời giải

Giả sử $t=(a, c)$. Đặt $a=a_1t; c=c_1t$ với $(a_1, c_1)=1$

$$ab=cd, \text{ suy ra } a_1bt=c_1dt, \text{ suy ra } a_1b=c_1d$$

Mà $(a_1, c_1)=1$, suy ra $b:c_1$, đặt $b=c_1k$ do đó: $d=a_1k$

Ta có:

$$A=a_1^n.t^n+c_1^n.k^n+c_1^n.t^n+a_1^n.k^n$$

$$A=(a_1^n+c_1^n)(k^n+t^n)$$

Vì a_1, c_1, t, k nguyên dương nên A là hợp số.

Bài 4: Chứng minh rằng: nếu p và p^2+2 là các số nguyên tố thì p^3+2 cũng là số nguyên tố

Lời giải

Ta nhận xét rằng với mọi số nguyên tố lớn hơn 3 thì chia cho 3 đều có dạng $p = 3k + 1$ hoặc

$$p = 3k + 2 (k \in \mathbb{N}^*)$$

Với $p = 3k + 1$ thì $p^2 + 2 = 9k^2 + 6k + 3$ chia hết cho 3

Với $p = 3k + 2$ thì $p^2 + 2 = 9k^2 - 6k + 6$ chia hết cho 3

Vì p nguyên tố nên $p \geq 2$, khi đó trong cả 2 trường hợp trên thì $p^2 + 2$ đều lớn hơn 3 và chia hết cho 3.

Tức là $p^2 + 2$ là hợp số

Suy ra $p^2 + 2$ chỉ là số nguyên tố khi $p = 3$ (khi đó $p^2 + 2 = 11$ là số nguyên tố)

Suy ra $p^3 + 2 = 27 + 2 = 29$ là số nguyên tố.

Vậy nếu p và $p^2 + 2$ là các số nguyên tố thì $p^3 + 2$ cũng là số nguyên tố

Bài 5: Với giá trị nào của k thì dãy $k + 1, k + 2, k + 3, \dots, k + 10$ chứa nhiều số nguyên tố nhất?

A. $k = 5$

B. $k = 10$

C. $k = 0$

D. $k = 1$

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021 - 2022

Bài 6: Có bao nhiêu số nguyên dương n để $3n - 16; 4n - 21, 5n - 23$ là các số nguyên tố?

A. 3

B. 2

C. 1

D. 4

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021 - 2022

Bài 7: Cho tập hợp $A = \{6; 12; 18; 24\}$. Tìm số nguyên tố p sao cho p cộng với mỗi phần tử của A đều được kết quả là một số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021-2022.

Lời giải

Ta thấy $p = 2; p = 3$ không thoả mãn.

$$\text{Với } p = 5 \text{ suy ra } \begin{cases} p + 6 = 11 \\ p + 12 = 17 \\ p + 18 = 23 \\ p + 24 = 29 \end{cases} (TM)$$

Nếu $p > 5, p \in P$ thì p không chia hết cho 5, suy ra p chia cho 5 dư có thể là 1; 2; 3; 4.

Nếu p chia 5 dư 1 thì $(p + 24): 5, p + 24 > 5$ nên $p + 24 \notin P$ (loại)

Nếu p chia 5 dư 2 thì $(p + 18): 5$ (loại)

Nếu p chia 5 dư 3 thì $(p + 12): 5$ (loại)

p chia 5 dư 4 thì $(p + 6): 5$ (loại)

Vậy $p = 5$

Bài 8: Tìm số tự nhiên n để $(n + 3)(n + 1)$ là số nguyên tố

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019.

Lời giải

Để $(n + 3)(n + 1)$ là số nguyên tố thì một trong hai thừa số $n + 3; n + 1$ phải bằng 1

Mà $n + 3 > n + 1 \geq 1$ nên $n + 1 = 1$ do đó $n = 0$ Khi đó $n + 3 = 3$ là số nguyên tố.

Vậy $n = 0$ thì $(n + 3)(n + 1)$ là số nguyên tố.

Bài 9: Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p + 11$ cũng là số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Bạch Thông năm 2018-2019.

Lời giải

Nếu p lẻ suy ra $p + 11$ là số chẵn lớn hơn 11 nên không là số nguyên tố

Suy ra p chẵn suy ra $p = 2$

Bài 10: Tìm số nguyên tố p sao cho $p+10$ và $p+14$ đều là số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015-2016

Lời giải

Xét các trường hợp sau :

Với $p = 2$ thì $p+10 = 2+10 = 12$; (loại)

$p+14 = 2+14 = 16$ (loại)

Nên $p = 2$ là nguyên tố (loại)

Với $p = 3$ thì $p+10 = 3+10 = 13$ (Thỏa mãn)

$p+14 = 3+14 = 17$ (Thỏa mãn)

Nên $p = 3$ là nguyên tố (nhận)

Với $p > 3$ thì $p = 3k+1$ hoặc $p = 3k+2$

Nếu $p = 3k+1$ thì $p+14 = 3k+1+14 = 3k+15 : 3$ nên $p+14$ là hợp số (loại)

Nếu $p = 3k+2$ thì $p+10 = 3k+2+10 = 3k+12 : 3$ nên $p+10$ là hợp số. (loại)

Vậy với $p = 3$ thì $p+10$ và $p+14$ là nguyên tố.

Bài 11: Tìm các số nguyên tố p sao cho $p^2 + 44$ cũng là số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Tường năm 2015 -2016

Lời giải

*Với $p = 2$ thì $p^2 + 44 = 2^2 + 44 = 48 : 2$ không là số nguyên tố.

*Với $p = 3$ thì $p^2 + 44 = 3^2 + 44 = 53$ cũng là số nguyên tố.

Vậy $p = 3$ thỏa mãn.

* Với $p > 3$, vì p là số nguyên tố nên p không chia hết cho 3 nên $p = 3k+1$ hoặc $p = 3k+2$

Trường hợp 1: $p = 3k+1$ ($k \in \mathbb{N}$)

Ta có $p^2 + 44 = (3k+1)^2 + 44 = (3k+1) \cdot (3k+1) + 44$

$= 3k \cdot (3k+1) + 1 \cdot (3k+1) + 44 = 9k^2 + 3k + 3k + 1 + 44$

$= 9k^2 + 6k + 45 = 3 \cdot (3k^2 + 2k + 15) : 3$.

Vậy trường hợp này loại.

Trường hợp 2: $p = 3k+2$ ($k \in \mathbb{N}$)

Ta có: $p^2 + 44 = (3k+2)^2 + 44 = (3k+2) \cdot (3k+2) + 44$

$= 3k \cdot (3k+2) + 2 \cdot (3k+2) + 44$

$= 9k^2 + 6k + 6k + 4 + 44$

$= 9k^2 + 12k + 48 = 3 \cdot (3k^2 + 4k + 16) : 3$

Vậy trường hợp này loại.

Vậy với $p = 3$ thì $p^2 + 44$ cũng là số nguyên tố.

Bài 12: Tìm p nguyên tố để $p+10$ và $p+26$ cũng là số nguyên tố

Trích đề HSG huyện Ba vì năm 2018-2019

Lời giải

- * Với $p = 2$ thì $p + 10 = 2 + 10 = 12$ và $p + 26 = 2 + 26 = 28$ không là số nguyên tố.
- * Với $p = 3$ thì $p + 10 = 13$ và $p + 26 = 29$ đều là số nguyên tố nên $p = 3$ thỏa mãn.
- * Với $p > 3$, vì p là số nguyên tố nên p không chia hết cho 3 nên $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2$

Nếu $p = 3k + 1$ thì $p + 26 = 3k + 1 + 26 = 3k + 27 = 3.(k + 9):3$ không thỏa mãn

Nếu $p = 3k + 2$ thì $p + 10 = 3k + 2 + 10 = 3k + 12 = 3.(k + 4):3$ không thỏa mãn

Vậy $p = 3$.

Bài 13: Cho p và $p + 4$ là các số nguyên tố ($p > 3$). Chứng minh rằng $p + 8$ là hợp số.

Trích đề HSG cấp trường vòng 2 THCS Tân Lập năm 2018-2019

Lời giải

Vì $p > 3$ nên p có dạng $3k + 1$; $3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$)

Với $p = 3k + 2$ thì $p + 4$ là hợp số (trái với đề bài)

Với $p = 3k + 1$ thì $p + 8 = 3k + 9:3$ hay $p + 8$ là hợp số

Dạng 2: Chứng minh là số nguyên tố, hợp số.

Bài 1: Chứng tỏ rằng $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Lời giải

Gọi d là ước chung của $12n + 1$ và $30n + 2$ ta có:

$$5(12n + 1) - 2(30n + 2) = 1 \text{ chia hết cho } d$$

Vậy $d = 1$ nên $12n + 1$ và $30n + 2$ nguyên tố cùng nhau

Do đó: $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản

Bài 2: Chứng minh rằng: Nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 và $2p + 1$ cũng là số nguyên tố thì $4p + 1$ là hợp số.

Trích đề HSG huyện Tiền Hải năm 2016 -2017

Lời giải

Vì p là số nguyên tố, $p > 3$ nên $4p$ không chia hết cho 3.

$$\text{Ta có: } 4p + 2 = 2(2p + 1)$$

Theo bài ra $p > 3 \Rightarrow 2p + 1 > 7$ và là số nguyên tố.

Sy ra $2p + 1$ không chia hết cho 3. Hay $4p + 2$ không chia hết cho 3.

Mà $4p$; $4p + 1$; $4p + 2$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên tồn tại một số chia hết cho 3, do đó $4p + 1$ chia hết cho 3.

Vì $4p + 1 > 13$ nên $4p + 1$ là số tự nhiên lớn hơn 1 và có nhiều hơn 2 ước.

Suy ra $4p + 1$ là hợp số.

Bài 3: Cho p và $10p + 1$ là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh $17p + 1$ là hợp số.

Lời giải

Ta có $10p+1=9p+(p+1)$.

Ta có $10p+1$ nguyên tố lớn hơn 3 nên $10p+1$ không chia hết cho 3

Mà $9p$ chia hết cho 3

Nên $p+1$ không chia hết cho 3

Ta có p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3

Trong ba số: $p-1$; p ; $p+1$ có một số chia hết cho 3

Mà p và $p+1$ không chia hết cho 3

Suy ra $p-1 \div 3$ suy ra $18p-(p-1) \div 3$ hay $17p+1 \div 3$.

Mà $17p+1 > 3$ suy ra $17p+1$ là hợp số

Vậy với p và $10p+1$ là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì $17p+1$ là hợp số.

Bài 4: Chứng tỏ rằng $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Lời giải

Chứng tỏ rằng $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản

Gọi d là ước chung lớn nhất của $12n+1$ và $30n+2$ ta có:

$12n+1 \div d$ suy ra $5(12n+1) \div d$

$30n+2 \div d$ suy ra $2(30n+2) \div d$

$(5(12n+1)-2(30n+2)) \div d$

$1 \div d$ hay $d=1$

Do đó $12n+1$ và $30n+2$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Vậy $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản.

Dạng 3: Tìm số nguyên tố thỏa mãn điều kiện cho trước.

Trắc nghiệm

Bài 1: Cho các số 312; 213; 435; 417; 3311; 67. Số các số nguyên tố trong các số đã cho là:

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: B. 1.

Tự luận

Bài 1: Tìm các số nguyên tố x và y biết $x^2 - 6y^2 = 1$.

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có $x^2 - 6y^2 = 1$

$$x^2 - 1 = 6y^2$$

$$x^2 - x + x - 1 = 6y^2$$

$$(x-1)(x+1) = 6y^2$$

Vì $6y^2 : 2$ nên $(x-1)(x+1) : 2$ mà $(x+1) + (x-1) = 2x : 2$ nên $x-1$ và $x+1$ là hai số chẵn liên tiếp suy ra $(x+1)(x-1) : 8$

Do đó $6y^2 : 8$ suy ra $3y^2 : 4$ nên $y : 2$ mà y là số nguyên tố nên $y = 2$.

Với $y = 2$, suy ra $x^2 - 6 \cdot 2^2 = 1$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5$$

Vậy $(x; y) = (5; 2)$.

Bài 2: Tìm số nguyên tố p sao cho $p+10, p+14$ cũng là các số nguyên tố.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Lời giải

Giả sử với $p = 2$ là số nguyên tố thì $p+10 = 12 : 2$ là hợp số nên $p = 2$ (loại).

Với $p = 3$ là số nguyên tố thì $p+10 = 13, p+14 = 17$ đều là số nguyên tố nên $p = 3$ (thỏa mãn điều kiện)

Với $p > 3$ thì $p = 3k+1, p = 3k+2, (k \in \mathbb{N}^*)$

Nếu $p = 3k+1$ giả sử là số nguyên tố thì $p+14 = 3k+1+14 = 3k+15 : 3$ là hợp số nên $p = 3k+1$ (loại)

Nếu $p = 3k+2$ giả sử là số nguyên tố thì $p+10 = 3k+2+10 = 3k+12 : 3$ là hợp số nên $p = 3k+2$ (loại)

Vậy $p = 3$ là số nguyên tố cần tìm.

Bài 3: Tìm số nguyên tố p sao cho $p+20$ và $p+10$ là các số nguyên tố.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Nếu $p = 2$ thì $p+20 = 22$ là hợp số (không thỏa mãn).

Nếu $p = 3$ thì $p+20 = 23, p+10 = 13$ đều là các số nguyên tố.

Nếu $p > 3$ thì p có các dạng $p = 3k+1; p = 3k+2 (k \in \mathbb{N}^*)$.

+ Với $p = 3k+1$ thì $p+20 = 3k+21$ chia hết cho 3 và lớn hơn 3 nên là hợp số (loại).

+ Với $p = 3k+2$ thì $p+10 = 3k+12$ chia hết cho 3 và lớn hơn 3 nên là hợp số (loại).

Vậy $p = 3$

Bài 4: Tìm các số nguyên tố a, b, c thỏa mãn $a^b + 1 = c$

Lời giải

Vì a, b là các số nguyên tố nên $a \geq 2, b \geq 2$ suy ra $c \geq 5$ suy ra a^b là số chẵn suy ra a chẵn mà a là số nguyên tố nên $a = 2$ thay vào ta có $c = 2^b + 1$

Nếu b lẻ suy ra $2^b + 1 \vdots 3$ (vì $x^n + y^n \vdots x + y$ nếu n lẻ) suy ra $c \vdots 3$ mà $c \geq 5$ suy ra c là hợp số (loại)

Do đó b là số chẵn nên $b = 2$

Thay $a = 2, b = 2$ suy ra $c = 5$

Vậy $a = 2; b = 2$ suy ra $c = 5$

Bài 5: Tìm số nguyên tố p sao cho $p + 6, p + 12, p + 18, p + 24$ cũng là các số nguyên tố.

Lời giải

Với $p = 2; p = 3$ thấy không thỏa mãn

Với $p = 5$, ta có:

$$p + 6 = 5 + 6 = 11; p + 12 = 5 + 12 = 17; p + 18 = 5 + 18 = 23; p + 24 = 5 + 24 = 29$$

đều là số nguyên tố (thỏa mãn)

Với $p > 5$, ta xét các khả năng:

$$p = 5k + 1; p = 5k + 2; p = 5k + 3; p = 5k + 4 \text{ (với } k \in \mathbb{N}^*) \text{ đều không thỏa mãn}$$

Vậy $p = 5$

Bài 6: Tìm các số nguyên tố x, y sao cho: $x^2 + 45 = y^2$

Lời giải

$$x^2 + 45 = y^2 \Rightarrow y^2 > 45, \text{ do đó } y \text{ là số nguyên tố lẻ}$$

Suy ra x là số nguyên tố chẵn nên $x = 2$. từ đó ta có:

$$y^2 = 4 + 45 = 49 \Rightarrow y = 7$$

Bài 7: Tìm số nguyên tố p để $p + 6; p + 8; p + 12; p + 14$ đều là các số nguyên tố.

Lời giải

Xét phép chia của p cho 5 ta thấy p có 1 trong 5 dạng sau

$$p = 5k, p = 5k + 1, p = 5k + 2, p = 5k + 3, p = 5k + 4$$

+Nếu $p = 5k$ thì p nguyên tố nên $k = 1 \Rightarrow p = 5$

+Nếu $p = 5k + 1 \Rightarrow p + 14 = 5(k + 3) \vdots 5$ và $p > 5$ nên là hợp số (loại)

+Nếu $p = 5k + 2 \Rightarrow p + 8 = 5(k + 2) \vdots 5, p > 5$ nên là hợp số (loại)

+Nếu $p = 5k + 3 \Rightarrow p + 12 = 5(k + 3) \vdots 5, p > 5$ nên là hợp số (loại)

+nếu $p = 5k + 4 \Rightarrow p + 6 = 5(k + 2) \vdots 5, p > 5$ nên là hợp số (loại)

Thử lại với $p = 5$ thỏa mãn.

Bài 8:

Tìm số nguyên tố P sao cho: $P + 10$ và $P + 14$ đều là những số nguyên tố

Lời giải

$$P = 2 \Rightarrow P + 10; P + 14 \text{ không là nguyên tố}$$

$$P = 3 \Rightarrow P + 10 = 13; P + 14 = 17 \text{ là số nguyên tố (thỏa mãn)}$$

$$P > 3 \Rightarrow P = 3k + 1 \text{ hoặc } P = 3k + 2 \text{ (do } P \text{ nguyên tố)}$$

Khi đó ta thấy $P + 10$, hoặc $P + 14$ không nguyên tố

Vậy chỉ có $P = 3$ thỏa mãn

Bài 9: Hiệu của hai số nguyên tố có thể bằng 2013 được không ? Vì sao ?

Trích đề HSG huyện Quế Sơn năm 2018-2019

Lời giải

Xét tính chẵn, lẻ của hai số nguyên tố:

- Nếu là số lẻ (nếu cả hai đều lớn hơn 2): Lúc đó hiệu là số chẵn nên không thể bằng 2013
- Có 1 số chẵn (là số 2) và một số lẻ. Lúc đó hai số có hiệu bằng 2013 là 2015 và 2. Số 2015 không là số nguyên tố.

Vậy hiệu hai số nguyên tố không thể bằng 2013.

Bài 10: Tìm số nguyên tố \overline{ab} ($a > b > 0$) sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Lời giải

$$\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 9(a - b) = 3^2(a - b)$$

Vì $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương nên $a - b$ là số chính phương

Vì $1 \leq a - b \leq 8$ nên $a - b \in \{1; 4\}$

Với $a - b = 1$ thì $\overline{ab} \in \{21; 32; 43; 54; 76; 87; 98\}$

Loại các hợp số là 21; 32; 54; 76; 87; 98; còn lại 43 là số nguyên tố.

Với $a - b = 4$ thì $\overline{ab} \in \{51; 62; 73; 84; 95\}$

Loại các hợp số là 51; 62; 84; 95, còn lại 73 là số nguyên tố

Vậy \overline{ab} là 43 hoặc 73. Khi đó $\overline{ab} - \overline{ba} = 43 - 34 = 9 = 3^2$

$$\text{Hoặc } \overline{ab} - \overline{ba} = 73 - 37 = 36 = 6^2$$

Bài 11: Tìm số nguyên tố p sao cho $p + 2, p + 4$ là số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 - 2022

Lời giải

- Nếu $p = 2$, thì $p + 2 = 2 + 2 = 4$ và $p + 4 = 2 + 4 = 6$ đều không phải là số nguyên tố.

- Nếu $p = 3$, thì $p + 2 = 3 + 2 = 5$ và $p + 4 = 3 + 4 = 7$ đều là số nguyên tố.

- Nếu $p > 3$ thì số nguyên tố p có một trong 3 dạng: $3k + 1; 3k + 2$ với $k \in \mathbb{N}^*$

+ Nếu $p = 3k + 1 \Rightarrow p + 2 = 3k + 3$ chia hết cho 3, không là số nguyên tố.

+ Nếu $p = 3k + 2 \Rightarrow p + 4 = 3k + 6$ chia hết cho 3, không là số nguyên tố.

Vậy $p = 3$.

Bài 12: Cho $140 = a^2 \cdot b \cdot 7$, với a, b là các số nguyên tố. Giá trị của a, b là?

Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 - 2022

Lời giải

$$140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow a = 2; b = 5$$

Bài 13: Cho p và $2p + 1$ là các số nguyên tố (với $p > 3$). Hỏi $4p + 1$ là số nguyên tố hay hợp số?

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3. Do đó, p có dạng $p = 3k + 1$ hoặc

$$p = 3k + 2 \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

Nếu $p = 3k + 1$ thì $2p + 1 = 2(3k + 1) + 1 = 3(2k + 1)$ chia hết cho 3

Mà $p > 3$ suy ra $2p+1 > 3$ nên $2p+1$ là hợp số (trái với đề bài vì $2p+1$ là số nguyên tố)

Do đó, p phải có dạng $p = 3k + 2$

khi đó $4p+1 = 4(3k+2)+1 = 3(4k+3)$ chia hết cho 3

Mà $p > 3$ nên $4p+1 > 3$ nên $4p+1$ là hợp số

Vậy $4p+1$ là hợp số.

Bài 14: Tìm các số nguyên tố x và y biết $x^2 - 6y^2 = 1$

Trích đề HSG huyện Nghĩa Đồng năm 2021-2022.

Lời giải

Ta có $x^2 - 6y^2 = 1$ nên $x^2 - 1 = 6y^2$ suy ra $x^2 - x + x - 1 = 6y^2$ suy ra $(x-1)(x+1) = 6y^2$

Vì $6y^2 : 2$ suy ra $(x-1)(x+1) : 2$ mà $(x-1) + (x+1) = 2x : 2$ nên $(x-1) : (x+1)$ là hai số chẵn liên tiếp nên $(x+1)(x-1) : 8$.

$6y^2 : 8$ suy ra $3y^2 : 4$ suy ra $y : 2$ mà y là số nguyên tố nên $y = 2$.

Với $y = 2$ suy ra $x^2 = 25$ nên $x = 5$

Vậy $(x; y) = (5; 2)$.

Bài 15: Tìm số nguyên tố p sao cho $p+2$ và $p+4$ cũng là các số nguyên tố.

Trích đề thi chọn HSG huyện Tiên Du năm 2021-2022

Lời giải

Vì p là số nguyên tố nên ta xét các trường hợp

Với $p = 2$ thì $p+2 = 4$ không là số nguyên tố (không thỏa mãn)

Với $p = 3$ thì $p+2 = 5$; $p+4 = 7$ đều là các số nguyên tố (thỏa mãn)

Với $p > 3$, vì p là số nguyên tố nên p không chia hết cho 3, do đó p có dạng $3k+1$

hoặc $3k+2$ ($k \in \mathbb{N}$)

+) nếu $p = 3k+1$ thì $p+2 = 3k+3$ chia hết cho 3 nên là hợp số (không thỏa mãn)

+) nếu $p = 3k+2$ thì $p+4 = 3k+6$ chia hết cho 3 nên là hợp số (không thỏa mãn)

Vậy $p+2$ và $p+4$ cũng là các số nguyên tố

Bài 16: Tìm các số nguyên tố x, y sao cho $x^2 + 117 = y^2$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2018-2019

Lời giải

Với $x = 2$ thì $2^2 + 117 = 121$ nên $y^2 = 121$ suy ra $y = 11$ (là số nguyên tố)

Với $x > 2$, x là số nguyên tố nên x lẻ nên $y^2 = x^2 + 117$ là số chẵn

Nên y chẵn, kết hợp với y nguyên tố nên $y = 2(ktm)$

Vậy $x = 2; y = 11$

Bài 17: Tìm các số nguyên tố x, y, z thỏa mãn $x^y + 1 = z$.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Lời giải

Vì x, y là các số nguyên tố $\Rightarrow x \geq 2, y \geq 2$

$\Rightarrow z \geq 5 \Rightarrow z$ là số nguyên tố lẻ

$\Rightarrow x^y$ là số chẵn $\Rightarrow x$ chẵn

$$\Rightarrow x = 2 \text{ thay vào ta có } z = 2^y + 1$$

Nếu y lẻ $\Rightarrow 2^y + 1 \vdots 3$ ($a^n + b^n \vdots a + b$ với n lẻ) $\Rightarrow z \vdots 3$ vô lí

Do đó y là số chẵn $\Rightarrow y = 2$

$$\text{Thay } x = 2; y = 2 \Rightarrow z = 5$$

$$\text{Vậy } x = 2; y = 2; z = 5$$

Bài 18: Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn điều kiện:

$$20abc < 30(ab + bc + ca) < 21abc.$$

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $\frac{2}{3} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{7}{10}$. Để không giảm tính tổng quát giả sử $a > b > c > 1$.

$$\text{Suy ra } \frac{2}{3} < \frac{3}{c} \Rightarrow 2c < 9, \text{ do đó } c \in \{2; 3\}.$$

$$\text{Với } c = 2 \text{ suy ra } \frac{2}{3} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{2} < \frac{7}{10} \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{2}{b}; \frac{1}{b} < \frac{1}{5}.$$

$$\text{Do đó } b \in \{7; 11\}.$$

$$+ \text{ Với } b = 7, \text{ khi đó từ } \frac{1}{6} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{5} \text{ suy ra } \frac{1}{42} < \frac{1}{a} < \frac{2}{35} \Rightarrow a \in \{19; 23; 29; 31; 37; 41\}.$$

$$+ \text{ Với } b = 11 \text{ từ } \frac{1}{6} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{5} \text{ suy ra } \frac{5}{66} < \frac{1}{a} < \frac{6}{55} \Rightarrow a = 13 \text{ (do } a > b).$$

$$\text{Với } c = 3 \text{ từ giả thiết suy ra } \frac{1}{3} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{11}{30} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{2}{b} \Rightarrow b < 6 \Rightarrow b = 5 \text{ (do } b > c).$$

$$\text{Thay } b = 5 \text{ vào } \frac{1}{3} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{11}{30} \text{ ta được } 6 < a < \frac{15}{2} \Rightarrow a = 7.$$

Vậy các bộ ba số nguyên tố khác nhau $(a; b; c)$ thỏa mãn là: $(19; 7; 2)$, $(23; 7; 2)$, $(29; 7; 2)$, $(31; 7; 2)$, $(37; 7; 2)$, $(41; 7; 2)$, $(13; 11; 2)$, $(7; 5; 3)$ và các hoán vị của nó.

Bài 19: Tìm số nguyên tố p để $p + 2$; $p + 4$ đều là số nguyên tố.

Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Lời giải

Vì p là số nguyên tố nên ta có các trường hợp sau:

$$\text{Với } p = 2 \Rightarrow p + 2 = 4 \text{ không là số nguyên tố (trái đề bài)} \Rightarrow p = 2 \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } p = 3 \Rightarrow p + 2 = 5; p + 4 = 7 \text{ là các số nguyên tố} \Rightarrow p = 3 \text{ (chọn)}$$

Với $p > 3$ mà p là số nguyên tố nên p không chia hết cho 3

$$\Rightarrow p = 3k + 1 \text{ hoặc } p = 3k + 2 \text{ (} k \in \mathbb{N}^* \text{)}$$

$$\text{Với } p = 3k + 1 \text{ (} k \in \mathbb{N}^* \text{)} \Rightarrow p + 2 = 3k + 1 + 2 = 3(k + 1)$$

$\Rightarrow p+2:3$ mà $p+2 > 3$ (vì $p > 3$) $\Rightarrow p+2$ là hợp số (trái đề bài)

$\Rightarrow p = 3k+1$ (loại)

Với $p = 3k+2$ ($k \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow p+1 = 3k+2+1 = 3(k+1)$

$\Rightarrow p+1:3$ mà $p+1 > 3$ (vì $p > 3$) $\Rightarrow p+1$ là hợp số (trái đề bài)

$\Rightarrow p = 3k+2$ (loại)

Từ ba trường hợp trên suy ra $p = 3$.

Vậy $p = 3$.

Bài 20: Cho hai số nguyên tố x và y sao cho: $x^2 - 2x + 1 = 6y^2 - 2x + 2$. Tính

$$P = (x - 2y)^{2022} + 2021$$

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có: $x^2 - 2x + 1 = 6y^2 - 2x + 2$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 6y^2 \Rightarrow 6y^2 = (x-1)(x+1):2 \text{ do } 6y^2:2$$

Mặt khác $x-1+x+1=2x:2 \Rightarrow x-1$ và $x+1$ cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Vậy $x-1$ và $x+1$ cùng chẵn $\Rightarrow x-1$ và $x+1$ là hai số chẵn liên tiếp

$$\Rightarrow (x-1)(x+1):8 \Rightarrow 6y^2:8 \Rightarrow 3y^2:4 \Rightarrow y^2:2 \Rightarrow y:2$$

$\Rightarrow y = 2$ (do y là số nguyên tố), tìm được $x = 5$

$$\text{Vậy } P = (x - 2y)^{2022} + 2021 = 2022$$

Bài 21: Tìm số nguyên tố p sao cho $p^2 + 4$ và $p^2 - 4$ đều là số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Tiền Hải năm 2021-2022

Lời giải

Với $p = 2 \Rightarrow p^2 + 4 = 8; p^2 - 4 = 0 \Rightarrow p^2 + 4$ và $p^2 - 4$ là hợp số.

Vậy $p = 2$ không thỏa mãn.

Với $p = 3 \Rightarrow p^2 + 4 = 13; p^2 - 4 = 5 \Rightarrow p^2 + 4$ và $p^2 - 4$ là số nguyên tố.

Vậy $p = 3$ thỏa mãn.

Với p là số nguyên tố và $p > 3 \Rightarrow p:3$ dư 1 hoặc 2 $\Rightarrow p^2:3$ dư 1 $\Rightarrow p^2 - 4:3$, Là hợp số không thỏa mãn.

Vậy $p = 3$ thì $p^2 + 4$ và $p^2 - 4$ đều là số nguyên tố

Bài 22: Tìm các số nguyên tố p , sao cho các số sau cũng là số nguyên tố:

$$p+2, p+6, p+8, p+12, p+14.$$

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021-2022

Lời giải

TH1: Nếu $p = 2$ thì $p + 2 = 2 + 2 = 4$ là hợp số suy ra $p = 2$ (loại)

TH2: Nếu $p = 3$ thì $p + 6 = 3 + 6 = 9$ là hợp số suy ra $p = 3$ (loại)

TH3: Nếu $p = 5$ thì

$p + 6 = 11$ là số nguyên tố.

$p + 8 = 13$ là số nguyên tố.

$p + 12 = 17$ là số nguyên tố.

$p + 14 = 19$ là số nguyên tố.

Vậy $p = 5$ thỏa mãn.

TH4: Nếu $p > 5$ thì p không chia hết cho 5 thì $p \in \{5k + 1; 5k + 2; 5k + 3; 5k + 4\}$ với $k \in \mathbb{N}^*$

Nếu $p = 5k + 1$ thì $p + 14 = 5k + 1 + 14 = 5k + 15 = 5(k + 3)$ suy ra $(p + 14) : 5$ mà $p + 14 > 5$ với $p > 5$ nên $p + 14$ là hợp số.

Nếu $p = 5k + 2$ thì $p + 8 = 5k + 2 + 8 = 5k + 10 = 5(k + 2)$ suy ra $(p + 8) : 5$ mà $p + 8 > 5$ với $p > 5$ nên $p + 8$ là hợp số.

Nếu $p = 5k + 3$ thì $p + 12 = 5k + 3 + 12 = 5k + 15 = 5(k + 3)$ suy ra $(p + 12) : 5$ mà $p + 12 > 5$ với $p > 5$ nên $p + 12$ là hợp số.

Nếu $p = 5k + 4$ thì $p + 6 = 5k + 4 + 6 = 5k + 10 = 5(k + 2)$ suy ra $(p + 6) : 5$ mà $p + 6 > 5$ với $p > 5$ nên $p + 6$ là hợp số.

Từ các trường hợp trên thì $p > 5$ loại.

Vậy $p = 5$.

Bài 23: Tìm các số nguyên tố x và y biết $x^2 - 6y^2 = 1$.

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Lời giải

Ta có : $x^2 - 1 = 6y^2$.

Do $6y^2 : 2 \Rightarrow x^2 - 1 : 2$ mà $x^2 - 1 = x^2 - x + x - 1 = x(x - 1) + (x - 1) = (x + 1)(x - 1) : 2$

Ta thấy $(x + 1)(x - 1) = 2x : 2$, do đó $x + 1$ và $x - 1$ là hai số chẵn liên tiếp

$\Rightarrow (x + 1)(x - 1) : 8 \Rightarrow 6y^2 : 8 \Rightarrow 3y^2 : 4$,

Do $(3; 4) = 1$, nên $y^2 : 4$,

Theo đề bài cho y là số nguyên tố nên chỉ có giá trị $y = 2$ là thỏa mãn.

$$x^2 - 1 = 24$$

$$x^2 = 25$$

$x = 5$ (do x là số nguyên tố)

Vậy $(x; y) = (5; 2)$.

III. Bội và ước.

Dạng 1: Chứng minh hai số nguyên tố cùng nhau.

Trắc nghiệm

Bài 1: ƯCLN($n+1; 2n+5$) là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: C. 3.

Tự luận

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $\frac{5n+3}{3n+2}$ là phân số tối giản.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Lời giải

Gọi $d = \text{UCLN}(5n+3, 3n+2)$ thì $5n+3 : d$; $3n+2 : d$

Do đó: $3 \cdot (5n+3) : d$ và $5 \cdot (3n+2) : d$.

Suy ra $[15n+10 - (15n+9)] : d$

hay $1 : d$. Vậy $d = 1$

Do vậy: $\frac{5n+3}{3n+2}$ là phân số tối giản.

Bài 2: Cho $a+b = p$ (p nguyên tố). Chứng minh a và b nguyên tố cùng nhau.

Trích đề HSG Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020

Lời giải

Giả sử a và b không nguyên tố cùng nhau. Suy ra a và b có ít nhất một ước chung $d > 1$

$\Rightarrow a : d, b : d \Rightarrow (a+b) : d \Rightarrow p : d, d > 1$ điều này vô lý vì p nguyên tố $\Rightarrow (a, b) = 1$

Bài 3: Chứng tỏ rằng: $\frac{2n+5}{n+3}$ ($n \in \mathbb{N}$) là phân số tối giản

Trích đề đề xuất thi HSG huyện năm 2021-2022

Lời giải

Gọi $d = \text{UCLN}(n+3; 2n+5)$

Suy ra $n+3 : d$ và $2n+5 : d$

Suy ra $2(n+3) - (2n+5) : d$ nên $1 : d$ nên $d = 1$

Do đó $\frac{2n+5}{n+3}$ ($n \in \mathbb{N}$) là phân số tối giản

Bài 4: Chứng tỏ rằng $\frac{12n+1}{30n+2}$ ($n \in \mathbb{N}$) là phân số tối giản

Trích đề thi HSG huyện Lý Nhân năm 2021-2022

Lời giải

Gọi $d = \text{UCLN}(12n+1; 30n+2)$

Thì $12n+1 : d$ và $30n+2 : d$

Suy ra $5(12n+1) - 2(30n+2) : d$ nên $1 : d$ suy ra $d = 1$

Vậy $\frac{12n+1}{30n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}$) là phân số tối giản.

Bài 5: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $UCLN(21n+4;14n+3)=1$.

Trích đề HSG huyện Tiền Hải năm 2016 -2017

Lời giải

Gọi d là $UCLN(21n+4;14n+3)$ thì $21n+4 \vdots d$ và $14n+3 \vdots d$

Suy ra $2 \cdot (21n+4) \vdots d$ và $14n+3 \vdots d$

$2 \cdot (21n+4) \vdots d$ và $3 \cdot (14n+3) \vdots d$

$3 \cdot (14n+3) - 2 \cdot (21n+4) \vdots d$

$1 \vdots d$ suy ra $d=1$

Vậy $UCLN(21n+4;14n+3)=1$.

Bài 6: Chứng minh với mọi số nguyên dương n thì $2n+1$ và $6n+5$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Lời giải

Gọi $d = UCLN(2n+1, 6n+5)$ thì $2n+1 \vdots d$ và $6n+5 \vdots d$

Suy ra $6n+5 - 3(2n+1) \vdots d$

$2 \vdots d$ suy ra $d \in \{1, 2\}$.

Vì n nguyên dương nên $2n+1$ không chia hết cho 2 do đó $d=1$.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì $2n+1$ và $6n+5$ nguyên tố cùng nhau

Dạng 2: Toán quan hệ giữa ƯCLN và BCNN.

Bài 1: Tìm 2 số tự nhiên biết rằng ước chung lớn nhất và bội chung nhỏ nhất của chúng lần lượt là 648 và 11340

Trích đề HSG huyện Kỳ Anh năm 2021-2022

Lời giải

Gọi 2 số cần tìm là a, b . Vì $UCLN(a, b) = 648$ nên sẽ có 2 số tự nhiên m, n sao cho:

$a = 648 \cdot m; b = 648 \cdot n$ với $UCLN(m, n) = 1$

Khi đó: $BCNN(a, b) = 648 \cdot m \cdot n$

Theo bài ra: $BCNN(a, b) = 113400 = 648 \cdot 175$

Suy ra: $m \cdot n = 175$ và $UCLN(m, n) = 1$

hay $m \cdot n = 5^2 \cdot 7$ và $UCLN(m, n) = 1$

m	1	5^2
n	$5^2 \cdot 7$	7

a	648	$5^2 \cdot 648 = 16200$
b	113400	$7 \cdot 648 = 4536$

Vậy có 2 cặp số thỏa mãn điều kiện bài ra gồm 648 và 11340 hoặc 16200 và 4536

Bài 2. Tìm hai số tự nhiên a, b có hai chữ số $a.b = 448$ và $UCLN(a, b) = 4$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Vì $UCLN(a, b) = 4$ suy ra $a = 4k; b = 4l$ ($k, l = 1$)

Do $a.b = 448$ nên $(4k).(4l) = 448$ suy ra $16kl = 448$ suy ra $kl = 28$

Mà $28 = 1.28 = 4.7$ Ta có các trường hợp sau:

Nếu $k = 1$ thì $l = 28$ suy ra $\begin{cases} a = 4 \\ b = 112 \end{cases}$ (loại)

Nếu $k = 4$ thì $l = 7$ suy ra $\begin{cases} a = 6 \\ b = 28 \end{cases}$ (loại)

Nếu $k = 7$ thì $l = 4$ suy ra $\begin{cases} a = 16 \\ b = 28 \end{cases}$ (tm)

Vậy $a = 16, b = 28$

Bài 3: Tìm hai số tự nhiên a, b biết tổng BCNN với UCLN của chúng là 15.

Trích đề HSG huyện Tĩnh Gia năm 2018 - 2019

Lời giải

Gọi $UCLN(a, b) = d$, suy ra $\begin{cases} a = dm \\ b = dn \end{cases}$, khi đó $(m, n) = 1$

Mặt khác ta có tích của hai số bằng tích của BCNN với UCLN của hai số đó nên:

$$BCNN(a, b) = \frac{d^2 mn}{d} = dmn$$

$$\text{Vậy } BCNN(a, b) + UCLN(a, b) = dmn + d = d(mn + 1) = 15$$

Giả sử $a \leq b$ khi đó $m \leq n$ và $mn + 1 \geq 2$

Lập bảng ta thu được

$$(a, b) = \{(1; 14); (2; 7); (3; 12); (5; 10)\}.$$

Bài 4. Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn $\frac{5a+7b}{6a+5b} = \frac{29}{28}$ và $(a, b) = 1$

Lời giải

$$140a + 196b = 174a + 145b \text{ suy ra } 2a = 3b (*)$$

Vì $(a, b) = 1; (2, 3) = 1$ nên (*) xảy ra khi $a:3$

Và b chia hết cho 2 suy ra $a = 3p, b = 2q$ ($p, q \in \mathbb{N}$)

Thay vào (*) ta có: $6p = 6q$ hay $p = q$

Vì $(a, b) = 1$ suy ra $(3p, 2q) = 1$ do đó $p = q = 1$

Vậy $a = 3; b = 2$

Bài 5: Tìm hai số tự nhiên a và b biết: $BCNN(a, b) = 420$, $UCLN(a, b) = 21$ và $a + 21 = b$

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Lời giải

Từ dữ liệu đề bài cho, ta có:

Vì $ƯCLN(a, b) = 21$ nên tồn tại các số tự nhiên m và n khác 0, sao cho:

$$a = 21m; b = 21n \quad (1) \quad \text{và} \quad ƯCLN(m, n) = 21 \quad (2)$$

Vì $BCNN(a, b) = 420$ nên theo trên ta suy ra:

$$\Rightarrow BCNN(21m; 21n) = 420 = 21 \cdot 20 \Rightarrow BCNN(m, n) = 20 \quad (3)$$

$$\text{Vì } a + 21 = b \text{ nên theo trên ta suy ra: } 21m + 21 = 21n \Rightarrow 21(m+1) = 21n \Rightarrow m+1 = n \quad (4)$$

Trong các trường hợp thỏa mãn các điều kiện (2) và (3), thì chỉ có trường hợp: $m = 4, n = 5$ hoặc $m = 2, n = 3$ là thỏa mãn điều kiện (4).

Vậy với $m = 4, n = 5$ hoặc $m = 2, n = 3$ ta được các số phải tìm là:

$$a = 21 \cdot 4 = 84; \quad b = 21 \cdot 5 = 105$$

Bài 6: Tìm hai số tự nhiên a và b , biết: $BCNN(a, b) = 300; ƯCLN(a, b) = 15$ và $a + 15 = b$

Trích đề HSG huyện Nông Cống năm học 2019-2020

Lời giải

Từ dữ liệu đề bài cho, ta có :

Vì $ƯCLN(a, b) = 15$ nên tồn tại các số tự nhiên m và n khác 0, sao cho:

$$a = 15m; b = 15n \quad (1) \quad \text{và} \quad ƯCLN(m, n) = 1 \quad (2)$$

Vì $BCNN(a, b) = 300$; nên theo trên, ta suy ra

$$\Rightarrow BCNN(15m, 15n) = 300 = 15 \cdot 20$$

$$\Rightarrow BCNN(m, n) = 20 \quad (3)$$

Vì $a + 15 = b$, nên theo trên ta suy ra:

$$\Rightarrow 15m + 15 = 15n \Rightarrow 15 \cdot (m+1) = 15n \Rightarrow m+1 = n \quad (4)$$

Trong các trường hợp thỏa mãn các điều kiện (2) và (3), thì chỉ có trường hợp $m = 4; n = 5$ là thỏa mãn điều kiện (4)

Vậy với $m = 4, n = 5$ ta được các số phải tìm là: $a = 15 \cdot 4 = 60; b = 15 \cdot 5 = 75$

Bài 7: Tìm các số tự nhiên x, y, z nhỏ nhất khác không sao cho $18 \cdot x = 24 \cdot y = 36 \cdot z$.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Lời giải

$$\text{Đặt } 18x = 24y = 36z = m \text{ (với } m \in \mathbb{N}^* \text{)} \Rightarrow m : 18; m : 24; m : 36$$

Do x, y, z nhỏ nhất khác không thỏa mãn $18x = 24y = 36z = m$ nên m cũng nhỏ nhất mà

$$m : 18; m : 24; m : 36 \Rightarrow m = BCNN(18, 24, 36)$$

$$\text{Ta tìm được } BCNN(18, 24, 36) = 72 \Rightarrow m = 72$$

$$\text{Với } m = 72 \text{ ta tìm được } x = 4; y = 3; z = 2$$

$$\text{Vậy } x = 4; y = 3; z = 2$$

Bài 8: Khi chia một số tự nhiên a cho 4 ta được số dư là 3. Còn khi chia a cho 9 ta được số dư là 5. Hãy tìm số dư trong phép chia a cho 36

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Lời giải

$$\text{Đặt } a = 4q + 3 = 9p + 5 \text{ (} p, q \text{ là thương trong hai phép chia)}$$

$$\Rightarrow a + 13 = 4(q + 4) = 9(p + 2)$$

$$\Rightarrow a + 13 \text{ là bội của 4 và 9, mà } (4, 9) = 1 \Rightarrow a + 13 \in BC(36) \Rightarrow a + 13 = 36k \text{ (} k \in \mathbb{N}^* \text{)}$$

$$\Rightarrow a = 36k - 13 = 36(k - 1) + 23$$

Vậy a chia 36 dư 23.

Bài 9: Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số $\frac{18n+3}{21n+7}$ có thể rút gọn được

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Lời giải

Giả sử $18n+3$ và $21n+7$ cùng chia hết cho số nguyên tố d

$$\Rightarrow 18n+3:d, 21n+7:d \Rightarrow 6(21n+7)-7(18n+3):d$$

$$\Rightarrow 21:d \Rightarrow d \in U(21) = \{3; 7\}$$

Mà $21n+7$ không chia hết cho 3 nên $d \neq 3$

$$\text{Ta lại có } 21n+7:7 \Rightarrow 18n+3:7 \Rightarrow 18n+3-21:7$$

$$\Rightarrow 18(n-1):7 \text{ mà } (18,7)=1 \Rightarrow n-1:7 \Rightarrow n=7k+1(k \in \mathbb{Z})$$

Vậy để phân số $\frac{18n+3}{21n+7}$ có thể rút gọn được thì $n=7k+1(k \in \mathbb{Z})$

Bài 10:

a) Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 3 dư 2, chia cho 4 dư 3, chia cho 5 dư 4 và chia cho 6 dư 5

b) Một số chia cho 3 dư 2, chia cho 4 dư 3, chia cho 167 dư 130. Hỏi số đó khi chia cho 2004 thì số dư là bao nhiêu ?

Trích đề Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020

Lời giải

a) Gọi số tự nhiên đó là a ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (a+1):3 \\ (a+1):4 \\ (a+1):5 \\ (a+1):6 \end{array} \right\} \Rightarrow (a+1) \text{ chia hết cho } 3,4,5,6.$$

$$\text{Mà } a \text{ nhỏ nhất} \Rightarrow a+1 = BCNN(3,4,5,6) = 60 \Rightarrow a = 59$$

b) Gọi số đó là A ta có:

$$A = 3k + 2 \Rightarrow A + 37 = 3k + 2 + 37 = 3(k + 13):3$$

$$A = 4q + 3 \Rightarrow A + 37 = 4q + 4 = 4(q + 10):4$$

$$A = 167r + 130 \Rightarrow A + 37 = 167r + 167 = 167(r + 1):167$$

$$\Rightarrow A + 37:3.4.167 = 2004 \Rightarrow A + 37 = 2004n$$

$$\Rightarrow A = 2004n - 37 = 2004(n-1) + 2004 - 37 = 2004(n-1) + 1967$$

Vậy A chia cho 2004 có số dư là 1967

Bài 11:

Tìm hai số tự nhiên a và b , biết $a > b$; $a+b=16$ và $UCLN(a,b)=4$

Trích đề Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020

Lời giải

$$UCLN(a,b)=4 \Rightarrow a=4k, b=4m, k, m \in \mathbb{Z}^*$$

$$\Rightarrow a+b=4(k+m)=16 \Rightarrow k+m=4$$

Và $a > b$ nên $k > m$ và $k, m \in \mathbb{Z}^*$, do đó $k=3, m=1$

$$\text{Vậy } a=12, b=4$$

Bài 12: Cho hai số tự nhiên $6n+1$ và $7n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) không nguyên tố cùng nhau. Hỏi $UCLN$ của

$6n+1$ và $7n-1$ là bao nhiêu ?

Bài giải

Gọi $d = (6n+1; 7n-1) \left(d \in \mathbb{N}^* \right)$

Suy ra $\begin{cases} 6n+1:d \\ 7n-1:d \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} 42n+7:d \\ 42n-6:d \end{cases}$

Suy ra $(42n+7) - (42n-6) : d$

Hay $13 : d$ nên $d \in \{1; 13\}$

Mà $(6n+1; 7n-1) \neq 1$ nên $d = 13$

Vậy $(6n+1; 7n-1) = 13$

Bài 13: Tìm 2 số tự nhiên có tổng bằng 432 và ƯCLN của chúng là 36

Trích đề thi chọn HSG huyện Kim Sơn năm 2021-2022.

Lời giải

Gọi 2 số là a, b . Ta có: $a+b=432$

Giả sử $a \leq b$. Vì $\mid \text{CLN}(a,b) = 36$ nên $a = 36m; b = 36n$ với $(m;n) = 1$ và $m \leq n$

nên $36m+36n=432$ suy ra $n+m=12$

Ta có bảng sau:

m	n	a	b
1	11	36	396
5	7	180	252

Vậy $a=36; b=396$ hoặc $a=180; b=252$

Bài 14: Tìm 2 số tự nhiên a, b ($a > b$) sao cho $a+b=45$ và $\mid \text{CLN}(a,b) = 9$

Trích đề chọn HSG huyện Tiên Du năm 2021-2022.

Lời giải

Theo bài ra ta có $a+b=45$ và $\mid \text{CLN}(a,b) = 9$ với $a > b$

Vì $\mid \text{CLN}(a,b) = 9$ nên $\begin{cases} a=9.x \\ b=9.y \end{cases} \left(x, y \in \mathbb{N}^*; \mid \text{CLN}(x,y) = 1, x > y \right)$

Theo bài ra $a+b=45$ nên ta có $9x+9y=45$ nên $x+y=5$

Ta có bảng sau:

x	4	3
$a=9x$	36	27
y	1	2
$b=9y$	9	18

Vậy hai số tự nhiên cần tìm là: $a=36$ và $b=9$ hoặc $a=27$ và $b=18$

Bài 15: Tìm hai số tự nhiên a và b biết tổng BCNN và ƯCLN của chúng là 15.

HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014 -2015

Lời giải

Giả sử $a > b$

Gọi $d = \text{ƯCLN}(a,b) \left(d \in \mathbb{N}^* \right)$

Suy ra $a = d.m ; b = d.n [(m;n)=1; m > n]$

$$BCNN(a;b) = d.m.n$$

Ta có: $BCNN(a;b) + UCLN(a,b) = 15$

$$d.m.n + d = 15$$

$$d.(m.n+1) = 15$$

15 : d

Mà $d \in \square^*$

Vậy $d \in \{1; 3; 5; 15\}$

Với $d = 1$ thì $m.n+1 = 15 \Rightarrow m.n = 14$

$$\text{Mà } (m;n) = 1; m > n \Rightarrow \begin{cases} m = 14; n = 1 \\ m = 7; n = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 14; b = 1 \\ a = 7; b = 2 \end{cases}$$

Với $d = 3$ thì $m.n+1 = 5 \Rightarrow m.n = 4$

$$\text{Mà } (m;n) = 1; m > n \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ n = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = 3 \end{cases}$$

Với $d = 5$ thì $m.n+1 = 3 \Rightarrow m.n = 2$

$$\text{Mà } (m;n) = 1; m > n \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 5 \end{cases}$$

Với $d = 15$ thì $m.n+1 = 1 \Rightarrow m.n = 0$, vô lý

Vậy các cặp giá trị $(a; b)$ thỏa mãn đầu bài là: $(14;1); (1;14); (7;2); (2;7); (10;5); (5;10)$.

Bài 16: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia cho 11 dư 6, chia cho 4 dư 1 và chia cho 19 dư 11.

HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014 -2015

Lời giải

Gọi số cần tìm là a ($a \in \mathbb{N}$)

Vì khi chia a cho 11 dư 6 suy ra $(a-6):11$ nên $(a-6+33):11$ hay $(a+27):11$

Vì khi chia cho 4 dư 1 suy ra $(a-1):4$ nên $(a-1+28):4$ hay $(a+27):4$

Vì khi chia cho 19 dư 11 suy ra $(a-11):19$ nên $(a-11+38):19$ hay $(a+27):19$

Do a là số tự nhiên nhỏ nhất nên $a+27$ nhỏ nhất.

$$\text{Suy ra: } a+27 = BCNN(4; 11; 19).$$

Ta có: $4 = 2^2; 11; 19$

$$BCNN(4; 11; 19) = 2^2.11.19 = 836$$

$$a+27 = 836$$

$$a = 836 - 27 = 809$$

Vậy $a = 809$.

Bài 17: Viết dạng tổng quát của số tự nhiên chia cho 5 thì dư 1, chia cho 7 thì dư 5. Tìm số nhỏ nhất?

HSG huyện Vĩnh Tường năm 2015 -2016

Lời giải

Gọi số tự nhiên chia cho 5 thì dư 1, chia cho 7 thì dư 5 là $x (x \in \mathbb{N}, x > 5)$.

Vì x chia cho 5 thì dư 1 nên $x = 5n + 1$ với $n \in \mathbb{N}$

Suy ra $x + 9 = 5n + 1 + 9$

$$x + 9 = 5n + 10 = 5(n + 2)$$

$$x + 9 : 5 \quad (1)$$

Vì x chia cho 7 thì dư 5 nên $x = 7m + 5$ với $m \in \mathbb{N}$.

Suy ra $x + 9 = 7m + 5 + 9$

$$x + 9 = 7m + 14 = 7(m + 2)$$

$$x + 9 : 7 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $x + 9 \in BC(5; 7)$

Mà $BCNN(5; 7) = 35$

Suy ra $x + 9 = 35k$ hay $x = 35k - 9 (k \in \mathbb{N}^*)$

Vậy dạng của số tự nhiên chia cho 5 thì dư 1, chia cho 7 thì dư 5 là $x = 35k - 9$.

Và số nhỏ nhất ứng với $k = 1$ là $35 \cdot 1 - 9 = 36$.

Bài 18: Cho \overline{ababab} là số có sáu chữ số, chứng tỏ số \overline{ababab} là bội của 3.

HSG huyện Tân Uyên năm 2010 -2011

Lời giải

$$\overline{ababab} = \overline{ab} \cdot 100000 + \overline{ab} \cdot 100 + \overline{ab} \cdot 1 = 10101 \cdot \overline{ab}$$

Do 10101 chia hết cho 3 nên \overline{ababab} chia hết cho 3 hay \overline{ababab} là bội của 3.

Bài 19: Số học sinh khối 6 của một trường chưa đến 400 bạn, biết khi xếp hàng 10;12;15 đều dư 3 nhưng nếu xếp hàng 11 thì không dư. Tính số học sinh khối 6 của trường đó.

HSG huyện Tân Uyên năm 2010 -2011

Lời giải

Gọi số học sinh là $a (0 < a < 400)$ (học sinh).

Vì học sinh khối 6 khi xếp hàng 10;12;15 đều dư 3.

Ta có $a - 3 \in BC(10; 12; 15)$

$$BCNN(10; 12; 15) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

$$a - 3 \in BC(10; 12; 15) = B(60) = \{0; 60; 120; 180; 240; 300; 360; 420; \dots\}$$

$$a \in \{3; 63; 123; 183; 243; 303; 363; 423; \dots\}.$$

Vì xếp hàng 11 thì không dư nên $a : 11$.

Trong các giá trị trên, chỉ có $a = 363 < 400$ và $a : 11$.

Vậy số học sinh cần tìm là 363 học sinh.

Bài 20: Tìm 2 số tự nhiên A và B biết rằng A có n ước số tự nhiên là a_1, a_2, \dots, a_n và B có m ước số tự nhiên là b_1, b_2, \dots, b_m thỏa mãn $a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot \dots \cdot a_n^2 = 729$ và $b_1^2 \cdot b_2^2 \cdot \dots \cdot b_m^2 = 1296$.

HSG huyện Sông Lô năm 2015 -2016

Lời giải

$$\text{Từ } a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot \dots \cdot a_n^2 = 729$$

$$(a_1 a_2 \dots a_n)^2 = 27^2$$

$$a_1 a_2 \dots a_n = 27.$$

Giả sử $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Khi đó $a_n = A$ và $a_n : a_1, a_n : a_2, \dots, a_n : a_{n-1}$

Mặt khác $a_1 a_2 \dots a_n = 27 = 1.3.9$ nên $a_n = 9$. Từ đó $A = 9$

$$\text{Lại có } b_1^2 b_2^2 \dots b_m^2 = 1296$$

$$\text{suy ra } (b_1 b_2 \dots b_m)^2 = 36^2$$

$$b_1 b_2 \dots b_m = 36.$$

Giả sử $b_1 < b_2 < \dots < b_m$. Khi đó $b_m = B$ và $b_m : b_1, b_m : b_2, \dots, b_m : b_{m-1}$

Vì $b_1 b_2 \dots b_m = 36 = 1.2.3.6$ nên $b_m = 6$ hay $B = 6$.

Vậy $A = 9$; $B = 6$.

Bài 21: Có 68 người đi tham quan bằng hai loại xe: loại 12 chỗ ngồi và loại 7 chỗ ngồi. Biết số người đi vừa đủ với số ghế ngồi. Hỏi mỗi loại có mấy xe.

HSG huyện Anh Sơn năm 2018 -2019

Lời giải

Gọi x là số xe 12 chỗ ngồi, y là số xe 7 chỗ ngồi ($x, y \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ra ta có: $12x + 7y = 68$

Vì $12x : 4, 68 : 4 \Rightarrow 7y : 4, do(7,4) = 1 \Rightarrow y : 4$

Hơn nữa $x \in \mathbb{N}^*$ nên $y \leq 8 \Rightarrow y = 4, y = 8$

Với $y = 4$ suy ra $12x + 7.4 = 68$

$$x = \frac{10}{3} (ktm)$$

Với $y = 8$; suy ra $x = 1 (tm)$

Vậy có 1 xe loại 12 chỗ ngồi, 8 xe loại 7 chỗ ngồi.

Bài 22: a) Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, biết rằng số đó khi chia cho 3, cho 4, cho 5, cho 6 đều dư 2, còn chia cho 7 thì dư 3.

b) Tìm hai số tự nhiên biết tổng ƯCLN và BCNN là 23.

HSG huyện Thanh Chương năm 2019 -2020

Lời giải

a) Gọi số tự nhiên đó là a ($a \in \mathbb{N}^*$)

Vì khi chia a cho 3, cho 4, cho 5, cho 6 đều dư 2 nên $a - 2 : 3 ; a - 2 : 4 ; a - 2 : 5 ; a - 2 : 6$

Hay $a - 2 \in BC(3;4;5;6)$

$$BCNN(3;4;5;6) = 2^2.3.5 = 60$$

$$a - 2 \in B(60) = \{0; 60; 120; 180; 240; \dots\}$$

$$a \in \{2; 62; 122; 182; 242; \dots\}$$

Mặt khác a là số tự nhiên nhỏ nhất chia 7 dư 3 nên $a = 122$.

b) Gọi hai số tự nhiên đó là $a, b (a, b \in \mathbb{N})$.

Gọi $d = UCLN(a, b)$

Ta có:

$$a = a'.d, b = b'.d, (a', b') = 1$$

$$\text{Khi đó } BCNN(a; b) = \frac{ab}{UCLN(a; b)} = \frac{a'.b'.d^2}{d} = a'.b'.d$$

Theo bài ra ta có:

$$UCLN(a; b) + BCNN(a; b) = 23 \text{ nên } d + a.b'.d' = 23 = d(1 + a'.b') = 23$$

$$\text{Suy ra } d = 1, 1 + a'.b' = 23 \Rightarrow a'.b' = 22$$

$$\text{Mà } (a', b') = 1 \Rightarrow \begin{cases} a' = 1; b' = 22 \\ a' = 11; b' = 2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (a'; b') = \{(1; 22), (11; 2)\}.$$

B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

(copy đề bài ở các dạng trên để làm phiếu phô tô cho HS)

I. Quan hệ chia hết và tính chất.

Dạng 1: Chứng minh chia hết.

Bài 1: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng: $p^2 - 1 \vdots 24$

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Bài 2: Chứng minh rằng: Nếu $7x+4y \vdots 37$ thì $13x+18y \vdots 37$.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 3: Cho $A = 2.3.4.5 \dots 98 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{98}\right)$. Chứng tỏ rằng M chia hết cho 99.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021-2022

Bài 4:

a) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 và $10p+1$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng $5p+1$ chia hết cho 6.

b) Chứng tỏ rằng nếu $6x+11y \vdots 31 (x, y \in \mathbb{Z})$ thì $x+7y \vdots 31$.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021-2022

Bài 5: Chứng minh rằng: Nếu $7x+4y \vdots 37$ thì $13x+18y \vdots 37$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Bài 6: Cho số tự nhiên có 4 chữ số \overline{abcd} . Chứng tỏ rằng \overline{abcd} chia hết cho 7 khi: $2b+3c+d-a$ chia hết cho 7

Trích đề HSG huyện Kỳ Anh năm 2021 – 2022

Bài 7: Chứng minh rằng: $\overline{ab} + \overline{ba}$ chia hết cho 11.

Trích đề HSG Liên trường năm 2021 - 2022

Bài 8: Cho $M = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2017} + 2^{2018}$

a) Tính M

b) Chứng tỏ rằng M chia hết cho 3

Trích đề HSG THCS Trần Phú Gia Lai năm 2018-2019

Bài 9: Cho biết $a+4b$ chia hết cho 13 ($a, b \in \mathbb{Z}$). Chứng minh rằng $10+a \vdots 13$

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018-2019

Bài 10. Cho số $\overline{155*710*4*16}$ có 12 chữ số. Chứng minh rằng nếu thay các dấu * bởi các chữ số khác nhau trong ba chữ số 1, 2, 3 một cách tùy ý thì số đó luôn chia hết cho 396.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 11: Cho biết $a+4b$ chia hết cho 13 ($a, b \in \mathbb{Z}$). Chứng minh rằng $10a+b \vdots 13$

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018 - 2019

Bài 12: Chứng minh $A = 3^{n+3} - 2.3^n + 2^{n+5} - 7.2^n \vdots 25$ với $n \in \mathbb{Z}$.

Bài 13: Cho $A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{1999} + 2^{2000}$. Chứng minh A chia hết cho 6.

Bài 14: Cho số $\overline{155*710*4*16}$ có 12 chữ số. Chứng minh rằng nếu thay các dấu * bởi các chữ số khác nhau trong ba chữ số 1, 2, 3 một cách tùy ý thì số đó luôn chia hết cho 396.

Trích đề HSG cấp trường năm 2017-2018

Bài 15: Cho biết $a+4b$ chia hết cho 13 ($a, b \in \mathbb{Z}$). Chứng minh rằng $10+b \vdots 13$.

Trích đề HSG huyện Tam Nông năm 2018-2019

Bài 16: Thay (*) bằng các số thích hợp:

- a) $\overline{510^*}$; $\overline{61^*16}$ chia hết cho 3
b) $\overline{261^*}$ chia hết cho 2 và chia 3 dư 1.

Trích đề HSG cấp trường năm 2019-2020

Bài 17: Cho $A = 999993^{1999} - 555557^{1997}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 5.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 18: Cho $a-b \vdots 6$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Chứng minh $a-13b \vdots 6$.

Bài 19: Cho $x-y=7$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Chứng minh: $22x-y \vdots 7$.

Bài 20: Chứng minh $A = 3^{n+2} - 2^{n+3} + 3^n - 2^{n+2} \vdots 6$ với $n \in \mathbb{Z}^*$.

Bài 21: Cho $a-11b+3c \vdots 17$. Chứng minh $2a-5b+6c \vdots 17$.

Bài 22: Cho $A = (4a+7b)(5a+4b) \vdots 19$ với mọi $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Chứng minh $A \vdots 361$.

Bài 23: Chứng minh rằng

a. $A = 10^{28} + 8 \vdots 72$ b. $B = 81^7 - 27^9 - 9^{13} \vdots 45$

Bài 24: Chứng minh: $A = 2^{20} \cdot 2^4 + 2^{20}$ chia hết cho 17.

Bài 25: Chứng minh rằng: $A = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ chia hết cho 19

Bài 26: Chứng minh rằng: a) $A = 2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7.

b) $B = 1961^{1962} + 1963^{1964} + 1965^{1966} + 2$ chia hết cho 7.

Bài 27: Chứng minh rằng: $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{200}$ chia hết cho 6

Bài 28: Chứng minh rằng: $A = 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{20}$ chia hết cho 4 và 5.

Bài 29: Chứng minh rằng:

a, $(n+10)(n+15) \vdots 2$ b, $n(n+1)(n+2) \vdots 2; 3$ c, $n^2 + n + 1 \not\vdots 4; 2; 5$

Bài 30: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì:

a. $A = n(2n+1)(7n+1) \vdots 6$ b. $B = n^3 - 13n \vdots 6$

Bài 31: Chứng minh rằng tổng của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3.

?

Bài 32: Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp có chia hết cho 4 hay không?

Bài 33.

a. Cho $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60}$. Chứng minh $A \vdots 3, 7, 15$

b. Chứng minh rằng: $C = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31.

Bài 35: Tìm số tự nhiên n để $5n+14$ chia hết cho $n+2$.

Bài 36: Tìm số tự nhiên n để $\frac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên.

Bài 37: Tìm số tự nhiên n để $(n^2 + 3n + 6) \vdots (n+3)$.

Bài 38: Tìm số nguyên n để phân số $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên.

Bài 39: Cho biểu thức $A = 2010 + 2010^2 + 2010^3 + \dots + 2010^{2009} + 2010^{2010}$

Chứng minh rằng A chia hết cho 2011

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2018 - 2019

Bài 40: Chứng minh rằng $B = 3 \cdot 10^{100} + 10^{99} + 8$ chia hết cho 24 .

Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 - 2022

Bài 41: Cho $M = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$

a) Chứng tỏ rằng $M : 5$

b) Tìm chữ số tận cùng của M

Trích đề HSG tỉnh Bắc Ninh năm 2016 - 2017

Bài 42: Chứng tỏ rằng $M = 75 \cdot (4^{2021} + 4^{2020} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 100.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 43: Chứng minh rằng: $10^{28} + 8$ chia hết cho 72

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Bài 44: Cho biết $a + 4b$ chia hết cho 13 ($a, b \in \mathbb{Z}$).

Chứng minh rằng $10 + b$ chia hết cho 13

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 45: Chứng tỏ: $S = 16^5 + 2^{15}$ chia hết cho 33

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018 - 2019

Bài 46: Chứng tỏ rằng: $A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{11} + 2^{12}$ chia hết cho 7

Trích đề HSG huyện Đoan Hùng năm 2018-2019

Bài 47: Cho $S = 3^1 + 3^3 + 3^5 + \dots + 3^{2011} + 3^{2013} + 3^{2015}$. Chứng tỏ:

a) S không chia hết cho 9

b) S chia hết cho 70

Trích đề HSG huyện Quế Sơn 2018-2019

Bài 48: Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{90}$. Chứng minh A chia hết cho 11 và 13

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Bài 49: Cho $C = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{2014} + 4^{2015} + 4^{2016}$

Chứng minh rằng C chia hết cho 21 và 105

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Bài 50: Chứng minh rằng: Nếu $7x + 4y : 37$ thì $13x + 18y : 37$

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Bài 51: Chứng minh rằng : $(3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}) : 120$ ($x \in \mathbb{N}$).

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021 – 2022

Bài 52: Cho $S = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + 5^6 + \dots + 5^{2016}$. Chứng tỏ rằng S chia hết cho 65.

Trích đề KS HSG thị xã Sơn Tây năm 2021-2022

Bài 53: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng : $p^2 - 1 : 24$

Trích đề kiểm định chất lượng HSG huyện Nghĩa Đông năm 2021-2022.

Bài 54: Chứng tỏ: $A = 10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27 (với n là số tự nhiên)

Trích đề thi chọn HSG huyện Kim Sơn năm 2021-2022

Bài 55: Chứng minh rằng: Nếu $(\overline{ab+cd+eg}):11$ thì $\overline{abc deg}:11$.

Trích đề thi chọn HSG huyện Tiên Du năm 2021-2022

Bài 56: Cho $A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2022}\right) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2022$. Hỏi A có chia hết cho 2023 không?

Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Bài 57: Cho $a; b; c; d$ là các số nguyên ($a \neq c$) với thỏa mãn $ab+cd$ chia hết cho $a-c$. Chứng tỏ rằng $ad + bc$ chia hết cho $a-c$.

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Bài 58: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng: $p^2 - 1:4$.

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Bài 59:

a) Tìm hai số tự nhiên x, y sao cho $(2x+1) \cdot (y-5) = 12$.

b) Tìm tất cả các số $B = \overline{62xy427}$ biết rằng số B chia hết cho 99.

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015-2016

Bài 60: Chứng tỏ rằng $2x+3y$ chia hết cho 17 thì $9x+5y$ chia hết cho 17 và ngược lại.

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015-2016

Bài 61: Chứng minh: $S = 16^5 + 2^{15}$ chia hết cho 33.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2010-2011

Lời giải

Có $S = 16^5 + 2^{15} = (2^4)^5 + 2^{15} = 2^{20} + 2^{15} = 2^{15} \cdot 2^5 + 2^{15} = 2^{15} \cdot (2^5 + 1) = 2^{15} \cdot 33$

Vậy S chia hết cho 33.

Bài 62: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , ta có $n^2 + n + 2$ không chia hết cho 5.

Trích đề HSG huyện Anh Sơn năm 2018-2019

Bài 63: Chứng minh rằng $3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{101}$ chia hết cho 120.

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2017-2018

Bài 64: Tìm số tự nhiên $x; y$ biết $\overline{32x1y}$ chia hết cho 45.

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2019-2020

Bài 65: Chứng minh rằng số viết bởi 27 chữ số giống nhau thì chia hết cho 27.

Trích đề HSG huyện Tiền Hải năm 2016 -2017

Bài 66: Chứng tỏ rằng;

a) $(3^{100} + 19^{990}):2$

b) Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp không chia hết cho 4.

Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015 -2016

Bài 67: Cho a, b là các số nguyên. Chứng tỏ rằng nếu $(2a+3b):7$ thì $(8a+5b):7$.

Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-22

Bài 68: Cho $B = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{30}$ Chứng minh rằng: B chia hết cho 21.

Trích đề HSG Trường THCS Lý Tự Trọng năm 2015-2016

Bài 69: Chứng tỏ rằng

a) $(3^{100} + 19^{990}) : 2$

b) Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp không chia hết cho 4.

Trích đề HSG Huyện Lương Tài năm 2021-2022

Lời giải

a) Ta có 3 là lẻ nên 3^{100} là lẻ, 19 lẻ nên 19^{990} lẻ nên $(3^{100} + 19^{990}) : 2$

b) Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là $a; (a+1); (a+2); (a+3) (a \in \mathbb{N})$

Ta có : $a + (a+1) + (a+2) + (a+3) = 4a + 6$

Vì $4a : 4 ; 6$ không chia hết cho 4 nên $4a + 6$ không chia hết cho 4.

Bài 70: Cho $D = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{19} + 5^{20}$. Tìm số dư khi chia D cho 31.

Trích đề HSG Hoài Nhơn năm 2015-2016

Bài 71: Chứng tỏ rằng số có dạng \overline{abcabc} bao giờ cũng chia hết cho 11.

Trích đề HSG Trường Hưng Mỹ năm 2018 - 2019

Bài 72: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta có $n^3 - n : 6$.

Trích đề chọn HSG Trục Ninh năm 2017-2018

Dạng 2: Tìm số thỏa mãn điều kiện chia hết.

Trắc nghiệm

Bài 1: Tập hợp các số nguyên n để $(n+3) : (n+1)$ là:

A. $\{0; 1; -2; -3\}$.

B. $\{0; 1\}$.

C. $\{-2; -3\}$.

D. $\{1; 2; -1; -2\}$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Tự luận

Bài 1: Tìm các số có ba chữ số chia hết cho 8 và tổng các chữ số của nó cũng chia hết cho 8.

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

Bài 2: Tìm số nguyên n để $A = 2n^2 + n - 6$ chia hết cho $2n + 1$.

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Bài 3: Thay a, b bằng các chữ số thích hợp sao cho $\overline{24a68b} : 45$.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 4: Tìm số tự nhiên n biết: $(3n - 2) : (2n + 1)$.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021-2022

Bài 5: Cho $A = \frac{12n+1}{2n+3}$. Tìm giá trị của n để A là một số nguyên.

Bài 6: Số $N = \overline{14a5b}$ trong a, b là các chữ số. Biết rằng N chia hết cho cả 2, 5 và 9. Tính giá trị $a + b$.

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018-2019

Bài 7: Tìm tất cả các số tự nhiên có 3 chữ số \overline{abc} sao cho $\overline{abc} = n^2 - 1$ và $\overline{cba} = (n - 2)^2$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 8: Một số tự nhiên chia 7 dư 3, chia 17 dư 12, chia 23 dư 7. Hỏi số đó chia cho 2737 dư bao nhiêu?

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021-2022

Bài 9: Trong một đợt trồng cây, một tổ học sinh lớp 6 đã trồng được một số cây. Số đó là nhỏ nhất đem chia cho 3 dư 2, chia cho 4 dư 3, chia cho 5 dư 4, chia cho 10 dư 9. Hỏi số cây trồng được là bao nhiêu?

Bài 10: Một cửa hàng mới nhập về một số cuốn sách. Chủ cửa hàng yêu cầu nhân viên đóng sách vào các túi. Họ tính rằng nếu đóng vào mỗi túi 8 cuốn thì vừa hết, nếu đóng vào mỗi túi 12 cuốn thì thừa ra 4 cuốn còn nếu đóng vào mỗi túi 14 cuốn thì thừa 6 cuốn. Hỏi cửa hàng mới nhập về bao nhiêu cuốn sách? Biết rằng số sách nhập về trong khoảng từ 230 đến 300 cuốn.

Bài 11: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho số đó chia cho 17; 25 được dư lần lượt là 8; 16.

Bài 12: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có ba chữ số, biết rằng khi chia số đó cho 11, 13 thì được số dư lần lượt là 5 và 10.

Bài 13: Khi chia một số tự nhiên a cho 4 ta được số dư là 3 còn khi chia a cho 9 ta được số dư là 5. Tìm số dư trong phép chia a cho 36.

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022

Bài 14: Tìm số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số, sao cho chia nó cho 8 thì dư 7 và chia nó cho 31 thì dư 28.

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022

Bài 15: Một số tự nhiên chia cho 7 dư 5, chia cho 13 dư 4. Nếu đem số đó chia cho 91 thì dư bao nhiêu?

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Bài 16: Tìm các số nguyên x , biết:

a) $x^2 + 2x + 7 : x + 2$

b) $2x^2 + x + 4 : 2x + 1$.

Bài 17.

b) Tính tổng C . Tìm x để $2^{2x-1} - 2 = C$

Bài 18. Một số chia cho 4 dư 3, chia cho 17 dư 9, chia cho 19 dư 13. Hỏi số đó chia cho 1292 dư bao nhiêu?

Bài 19. Số học sinh của một trường học xếp hàng, mỗi hàng có 20 người hoặc 25 người hoặc 30 người đều thừa 15 người. Nếu xếp mỗi hàng 41 người đều vừa đủ. Tính số học sinh của trường đó, biết số học sinh của trường chưa đến 1000.

Bài 20: Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (x, y) sao cho $\overline{34x5y}$ chia hết cho 36

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 21: Tìm tất cả các số nguyên n để $(n+4):(n+1)$

A. $n \in \{-3; -1; 1; 3\}$

B. $n \in \{-4; -2; 0; 2\}$

C. $n \in \{1; 3\}$

D. $n \in \{0; 2\}$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 22: Bạn Lan tính tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến n và nhận thấy tổng đó chia hết cho 29. Bạn Loan tính tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến m và cũng nhận thấy tổng đó chia hết cho 29. Tìm các số tự nhiên m và n biết rằng $m < n < 50$.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 23: Tìm chữ số x để:

- a) $\overline{137+3x}$ chia hết cho 13
 b) $\overline{137x137x}$ chia hết cho 13

Trích đề HSG cấp huyện năm học 2016-2017

Bài 24: Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn: $(100a + 3b + 1)(2^a + 10a + b) = 225$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Bài 25: Tìm số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số, sao cho chia nó cho 8 thì dư 7 và chia nó cho 31 thì dư 28

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Bài 26: Tìm số tự nhiên có 3 chữ số, biết rằng khi chia số đó cho các số 25; 28; 35 thì được các số dư lần lượt là 5; 8; 15

Trích đề HSG trường Nguyễn Khuyến năm 20...-20...

Bài 27: a) Tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng bằng 504 và ƯCLN của chúng bằng 42

b) Tìm $a \in \mathbb{N}$ để $a+1$ là bội của $a-1$

c) Cho $K = 10^{28} + 8$. Chứng minh rằng K chia hết cho 72.

Trích đề 59 HSG năm 2018- 2019

Bài 28: Cho $S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$

a) Chứng minh rằng S là bội của -20

b) Tính S , từ đó suy ra 3^{100} chia cho 4 dư 1

Trích đề 59 HSG năm 2018- 2019

Bài 29: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia số đó cho 3 dư 1, chia cho 4 dư 2, chia cho 5 dư 3 chia cho 6 dư 4 và chia hết cho 11.

Trích đề đề xuất năm 2021-2022

Bài 30: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng số đó chia cho 9 dư 5, chia cho 7 dư 4 và chia cho 5 thì dư 3.

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021-2022.

Bài 31: Tìm các số tự nhiên a, b sao cho: $(2008a + 3b + 1)(2008^a + 2008a + b) = 225$

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021-2022.

Bài 32: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có 3 chữ số sao cho số đó chia 7 dư 3 và chia 11 dư 5.

Trích đề KS HSG thị xã Sơn Tây năm 2021-2022

Bài 33: Tìm số tự nhiên $n > 1$ sao cho $2n+1$ chia hết cho $n-1$.

Trích đề Olympic năm 2021-2022

Bài 34: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng khi chia số này cho 9 thì dư 5 và chia cho 11 thì dư 9.

Trích đề Olympic năm 2021-2022

Bài 35: Tìm các chữ số x, y sao cho: $B = \overline{62x427y}$ chia hết cho 18.

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2021-2022.

Bài 36: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho số đó chia cho 3 dư 1; chia cho 4 dư 2; chia cho 5 dư 3; chia cho 6 dư 4 và chia hết cho 11.

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2021-2022.

Bài 37: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho a chia cho 3 dư 2; a chia cho 5 dư 4; a chia cho 7 dư 6.

Trích đề HSG huyện Sóc Sơn năm 2021-2022.

Bài 38: Tìm các số tự nhiên có 3 chữ số chia hết cho 7 và tổng các chữ số của nó cũng chia hết cho 7.

Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021-2022.

Bài 39: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia cho 11 dư 6, chia cho 4 dư 1 và chia cho 19 dư 11.

Trích đề thi chọn HSG huyện Kim Sơn năm 2021-2022

Bài 40: Tìm 1 số tự nhiên có 2 chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 9 vào bên trái số đó ta được 1 số lớn gấp 13 lần số đã cho.

Trích đề thi chọn HSG huyện Tiên Du năm 2021-2022.

Bài 41: Tìm tất cả các số tự nhiên n , biết rằng $n + S(n) = 2014$, trong đó $S(n)$ là tổng các chữ số của n .

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019

Bài 42: Tìm các số nguyên a, b biết rằng: $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+1}$

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019

Bài 43: Cho $n = \overline{7a5} + \overline{8a4}$. Biết $a - b = 6$ và n chia hết cho 9. Tìm a, b

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019

Bài 44 : Tìm các chữ số x, y sao cho $\overline{2014xy} : 42$.

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019.

Bài 45: Tìm các số nguyên tố x, y sao cho $x^2 + 117 = y^2$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2018-2019

Bài 46: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, biết rằng số đó khi chia cho 3, cho 4, cho 5, cho 6 đều dư là 2, còn chia cho 7 thì dư 3.

Trích đề HSG huyện Vĩnh lộc năm 2017-2018

Bài 47: Tìm số tự nhiên b biết 326 chia b dư 11 và 557 chia b dư 17.

Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Bài 48: Tìm các chữ số x, y biết $\overline{75x1y}$ chia hết cho 45.

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021 - 2022

Bài 49: Tìm các chữ số x, y để $B = \overline{x183y}$ chia cho 2; 5; 9 đều dư 1

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Bài 50: Tìm các chữ số x, y biết $\overline{75x1y}$ chia hết cho 45.

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Bài 51: Tìm số tự nhiên n có 4 chữ số biết n là số chính phương và n là bội của 147.

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Bài 52: Số nhà của hai bạn An và Bình đều là số tự nhiên có bốn chữ số dạng $\overline{a53b}$ và chia hết cho cả 5 và 9. Tìm số nhà của hai bạn biết số nhà của bạn An lớn hơn số nhà của bạn Bình.

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2021-2022

Bài 53: Một số tự nhiên khi chia cho 11 dư 4, chia cho 13 dư 8. Tìm số dư trong phép chia số đó cho 143.

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2021-2022

Bài 54: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất chia cho 5 dư 1, chia cho 7 dư 3.

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2021-2022

Bài 55: Tìm chữ số a, b để $\overline{62ab427}$ chia hết cho 99.

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Bài 56: Cho số $\overline{155*710*4*16}$ có 12 chữ số. Chứng minh rằng nếu thay các dấu (*) bởi các chữ số khác nhau trong ba chữ số 1; 2; 3 một cách tùy ý thì số đó luôn chia hết cho 396.

Trích đề HSG Trường THCS Ái Thượng năm 2021-2022

Bài 57: Số tự nhiên a chia 36 dư bao nhiêu, biết a chia 4 dư 3 và chia 9 dư 4.

Trích đề HSG Huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Bài 58: Tìm số tự nhiên có ba chữ số sao cho khi lấy số đó chia cho 11 thì được thương bằng tổng các chữ số của số phải tìm.

Trích đề HSG Cấp Trường năm 2019-2020

Bài 59: Thay (*) bằng các số thích hợp:

a) $\overline{510*}; \overline{61*16}$ chia hết cho 3.

b) $\overline{261*}$ chia hết cho 2 và chia 3 dư 1.

Trích đề HSG Cấp Trường năm 2019-2020

Bài 60: Cho $n = \overline{7a5} + \overline{8b4}$. Biết $a - b = 6$ và n chia hết cho 9. Tìm a và b .

Trích đề HSG Hoài Nhơn năm 2015-2016

Bài 61: Tìm x, y biết $\overline{124xy} : 45$.

Trích đề HSG huyện Ba vì năm 2018-2019

Bài 62: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất lớn hơn 10, biết rằng số đó chia cho 5 ; 6 ; 7 có số dư lần lượt là 3 ; 2 ; 1

Trích đề HSG huyện Ba vì năm 2018-2019

Bài 63: Tìm số nguyên n để phân số $M = \frac{2n-7}{n-5}$ có giá trị là số nguyên.

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Bài 64: Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ biết: $2x(3y-2) + (3y-2) = -55$

Trích đề HSG cấp trường Hà Huy Tập năm 2018-2019

Bài 65: Cho a là một số nguyên có dạng $a = 3b + 7 (b \in \mathbb{Z})$. Hỏi a có thể nhận những giá trị nào trong các giá trị sau: $a = 11; a = 2002; a = 2003; a = 11570; a = 22789; a = 29563; a = 299537$

Trích đề HSG cấp trường Bá Thước năm 2018-2019

Dạng 3: Dùng phương pháp phản chứng; nguyên lí Diricle để cm chia hết hoặc không chia hết.

Bài 1: Cho 2023 số tự nhiên bất kì: $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2023}$. Chứng minh rằng tồn tại một số hoặc tổng một số các số liên tiếp nhau trong dãy trên chia hết cho 2023.

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2022 - 2023

Bài 2: Cho 2016 số tự nhiên $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2015}; a_{2016}$. Chứng minh rằng trong 2016 số ấy, tồn tại một số chia hết cho 2016 hoặc tồn tại một vài số chia hết cho 2016.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Tường năm 2015 - 2016

Bài 3: Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên chỉ được viết bởi chữ số 2 và chữ số 0 mà số đó chia hết cho 2015.

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015 - 2016

II. Số nguyên tố, hợp số.

Dạng 1: Tìm số để biểu thức là số nguyên tố, hợp số.

Bài 1: Tìm số tự nhiên x sao cho $2x+1, 2x+3$ và $2x+11$ đều là các số nguyên tố.

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Bài 2: Cho n là số nguyên tố lớn hơn 3. Hỏi $n^2 + 2006$ là số nguyên tố hay hợp số.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 3: Cho $a, b, c, d, n \in \mathbb{N}^*$, biết $ab = cd$. Chứng minh rằng $a^n + b^n + c^n + d^n$ là hợp số.

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Bài 4: Chứng minh rằng: nếu p và $p^2 + 2$ là các số nguyên tố thì $p^3 + 2$ cũng là số nguyên tố

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2019-2020

Bài 5: Với giá trị nào của k thì dãy $k+1, k+2, k+3, \dots, k+10$ chứa nhiều số nguyên tố nhất?

- A. $k = 5$ B. $k = 10$ C. $k = 0$ D. $k = 1$

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021 - 2022

Bài 6: Có bao nhiêu số nguyên dương n để $3n-16; 4n-21, 5n-23$ là các số nguyên tố?

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 4

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021 - 2022

Bài 7: Cho tập hợp $A = \{6; 12; 18; 24\}$. Tìm số nguyên tố p sao cho p cộng với mỗi phần tử của A đều được kết quả là một số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021-2022.

Bài 8: Tìm số tự nhiên n để $(n+3)(n+1)$ là số nguyên tố

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019.

Bài 9: Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p+11$ cũng là số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Bạch Thông năm 2018-2019.

Bài 10: Tìm số nguyên tố p sao cho $p+10$ và $p+14$ đều là số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015-2016

Bài 11: Tìm các số nguyên tố p sao cho $p^2 + 44$ cũng là số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Tường năm 2015 -2016

Bài 12: Tìm p nguyên tố để $p+10$ và $p+26$ cũng là số nguyên tố

Trích đề HSG huyện Ba vì năm 2018-2019

Bài 13: Cho p và $p+4$ là các số nguyên tố ($p > 3$). Chứng minh rằng $p+8$ là hợp số.

Trích đề HSG cấp trường vòng 2 THCS Tân Lập năm 2018-2019

Dạng 2: Chứng minh là số nguyên tố, hợp số.

Bài 1: Chứng tỏ rằng $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Bài 2: Chứng minh rằng: Nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 và $2p+1$ cũng là số nguyên tố thì $4p+1$ là hợp số.

Trích đề HSG huyện Tiền Hải năm 2016 -2017

Bài 3: Cho p và $10p+1$ là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh $17p+1$ là hợp số.

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Bài 4: Chứng tỏ rằng $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Dạng 3: Tìm số nguyên tố thỏa mãn điều kiện cho trước.

Trắc nghiệm

Bài 1: Cho các số 312; 213; 435; 417; 3311; 67. Số các số nguyên tố trong các số đã cho là:

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Tự luận

Bài 1: Tìm các số nguyên tố x và y biết $x^2 - 6y^2 = 1$.

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Bài 2: Tìm số nguyên tố p sao cho $p+10, p+14$ cũng là các số nguyên tố.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Bài 3: Tìm số nguyên tố p sao cho $p+20$ và $p+10$ là các số nguyên tố.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 4: Tìm các số nguyên tố a, b, c thỏa mãn $a^b + 1 = c$

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Bài 5: Tìm số nguyên tố p sao cho $p+6, p+12, p+18, p+24$ cũng là các số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 6: Tìm các số nguyên tố x, y sao cho: $x^2 + 45 = y^2$

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Bài 7: Tìm số nguyên tố p để $p+6; p+8; p+12; p+14$ đều là các số nguyên tố.

Trích đề HSG huyệnnăm 2019-2020

Bài 8:

Tìm số nguyên tố P sao cho: $P+10$ và $P+14$ đều là những số nguyên tố

Trích đề HSG Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020

Bài 9: Hiệu của hai số nguyên tố có thể bằng 2013 được không? Vì sao?

Trích đề HSG huyện Quế Sơn năm 2018-2019

Bài 10: Tìm số nguyên tố \overline{ab} ($a > b > 0$) sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 11: Tìm số nguyên tố p sao cho $p+2, p+4$ là số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 - 2022

Bài 12: Cho $140 = a^2 \cdot b \cdot 7$, với a, b là các số nguyên tố. Giá trị của a, b là?

Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 - 2022

Bài 13: Cho p và $2p+1$ là các số nguyên tố (với $p > 3$). Hỏi $4p+1$ là số nguyên tố hay hợp số?

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Bài 14: Tìm các số nguyên tố x và y biết $x^2 - 6y^2 = 1$

Trích đề HSG huyện Nghĩa Đông năm 2021-2022.

Bài 15: Tìm số nguyên tố p sao cho $p+2$ và $p+4$ cũng là các số nguyên tố.

Trích đề thi chọn HSG huyện Tiên Du năm 2021-2022

Bài 16: Tìm các số nguyên tố x, y sao cho $x^2 + 117 = y^2$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2018-2019

Bài 17: Tìm các số nguyên tố x, y, z thỏa mãn $x^y + 1 = z$.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Bài 18: Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn điều kiện:

$$20abc < 30(ab+bc+ca) < 21abc.$$

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Bài 19: Tìm số nguyên tố p để $p+2$; $p+4$ đều là số nguyên tố.

Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Bài 20: Cho hai số nguyên tố x và y sao cho: $x^2 - 2x + 1 = 6y^2 - 2x + 2$. Tính

$$P = (x - 2y)^{2022} + 2021$$

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Bài 21: Tìm số nguyên tố p sao cho $p^2 + 4$ và $p^2 - 4$ đều là số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Tiền Hải năm 2021-2022

Bài 22: Tìm các số nguyên tố p , sao cho các số sau cũng là số nguyên tố:

$$p+2, p+6, p+8, p+12, p+14.$$

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021-2022

Bài 23: Tìm các số nguyên tố x và y biết $x^2 - 6y^2 = 1$.

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

III. Bội và ước.

Dạng 1: Chứng minh hai số nguyên tố cùng nhau.

Trắc nghiệm

Bài 1: ƯCLN($n+1; 2n+5$) là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Tự luận

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $\frac{5n+3}{3n+2}$ là phân số tối giản.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Bài 2: Cho $a+b=p$ (p nguyên tố). Chứng minh a và b nguyên tố cùng nhau.

Trích đề HSG Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020

Lời giải

Giả sử a và b không nguyên tố cùng nhau. Suy ra a và b có ít nhất một ước chung $d > 1$
 $\Rightarrow a:d, b:d \Rightarrow (a+b):d \Rightarrow P:d, d > 1$ điều này vô lý vì p nguyên tố $\Rightarrow (a,b)=1$

Bài 3: Chứng tỏ rằng: $\frac{2n+5}{n+3}$ ($n \in \mathbb{N}$) là phân số tối giản

Trích đề đề xuất thi HSG huyện năm 2021-2022

Bài 4: Chứng tỏ rằng $\frac{12n+1}{30n+2}$ ($n \in \mathbb{N}$) là phân số tối giản

Trích đề thi HSG huyện Lý Nhân năm 2021-2022

Bài 5: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $UCLN(21n+4; 14n+3)=1$.

Trích đề HSG huyện Tiền Hải năm 2016 -2017

Bài 6: Chứng minh với mọi số nguyên dương n thì $2n+1$ và $6n+5$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Dạng 2: Bài toán thực tế về số nguyên tố.

Không có

Dạng 3: Toán quan hệ giữa ƯCLN và BCNN.

Bài 1: Tìm 2 số tự nhiên biết rằng ước chung lớn nhất và bội chung nhỏ nhất của chúng lần lượt là 648 và 11340

Trích đề HSG huyện Kỳ Anh năm 2021-2022

Bài 2. Tìm hai số tự nhiên a, b có hai chữ số $a.b = 448$ và $UCLN(a, b) = 4$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 3: Tìm hai số tự nhiên a, b biết tổng BCNN với UCLN của chúng là 15.

Trích đề HSG huyện Tĩnh Gia năm 2018 - 2019

Bài 4. Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn $\frac{5a+7b}{6a+5b} = \frac{29}{28}$ và $(a, b) = 1$

Bài 5: Tìm hai số tự nhiên a và b biết: $BCNN(a, b) = 420$, $UCLN(a, b) = 21$ và $a+21=b$

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Bài 6: Tìm hai số tự nhiên a và b , biết: $BCNN(a, b) = 300$; $UCLN(a, b) = 15$ và $a+15=b$

Trích đề HSG huyện Nông Cống năm học 2019-2020

Bài 7: Tìm các số tự nhiên x, y, z nhỏ nhất khác không sao cho $18.x = 24.y = 36.z$.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 8: Khi chia một số tự nhiên a cho 4 ta được số dư là 3. Còn khi chia a cho 9 ta được số dư là 5. Hãy tìm số dư trong phép chia a cho 36

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Bài 9: Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số $\frac{18n+3}{21n+7}$ có thể rút gọn được

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Bài 10:

- a) Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 3 dư 2, chia cho 4 dư 3, chia cho 5 dư 4 và chia cho 6 dư 5
b) Một số chia cho 3 dư 2, chia cho 4 dư 3, chia cho 167 dư 130. Hỏi số đó khi chia cho 2004 thì số dư là bao nhiêu ?

Trích đề Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020

Bài 11:

Tìm hai số tự nhiên a và b , biết $a > b$; $a+b=16$ và $ƯCLN(a,b)=4$

Trích đề Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020

Bài 12: Cho hai số tự nhiên $6n+1$ và $7n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) không nguyên tố cùng nhau. Hỏi $ƯCLN$ của $6n+1$ và $7n-1$ là bao nhiêu ?

Trích đề HSG huyện Sóc Sơn năm 2021-2022.

Bài 13: Tìm 2 số tự nhiên có tổng bằng 432 và $ƯCLN$ của chúng là 36

Trích đề thi chọn HSG huyện Kim Sơn năm 2021-2022.

Bài 14: Tìm 2 số tự nhiên a, b ($a > b$) sao cho $a+b=45$ và $ƯCLN(a,b)=9$

Trích đề chọn HSG huyện Tiên Du năm 2021-2022.

Bài 15: Tìm hai số tự nhiên a và b biết tổng BCNN và $ƯCLN$ của chúng là 15.

HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014 -2015

Bài 16: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia cho 11 dư 6, chia cho 4 dư 1 và chia cho 19 dư 11.

HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014 -2015

Bài 17: Viết dạng tổng quát của số tự nhiên chia cho 5 thì dư 1, chia cho 7 thì dư 5. Tìm số nhỏ nhất?

HSG huyện Vĩnh Tường năm 2015 -2016

Bài 18: Cho \overline{ababab} là số có sáu chữ số, chứng tỏ số \overline{ababab} là bội của 3.

HSG huyện Tân Uyên năm 2010 -2011

Bài 19: Số học sinh khối 6 của một trường chưa đến 400 bạn, biết khi xếp hàng 10;12;15 đều dư 3 nhưng nếu xếp hàng 11 thì không dư. Tính số học sinh khối 6 của trường đó.

HSG huyện Tân Uyên năm 2010 -2011

Bài 20: Tìm 2 số tự nhiên A và B biết rằng A có n ước số tự nhiên là a_1, a_2, \dots, a_n và B có m ước số tự nhiên là b_1, b_2, \dots, b_m thỏa mãn $a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot \dots \cdot a_n^2 = 729$ và $b_1^2 \cdot b_2^2 \cdot \dots \cdot b_m^2 = 1296$.

HSG huyện Sông Lô năm 2015 -2016

Bài 21: Có 68 người đi tham quan bằng hai loại xe: loại 12 chỗ ngồi và loại 7 chỗ ngồi. Biết số người đi vừa đủ với số ghế ngồi. Hỏi mỗi loại có mấy xe.

HSG huyện Anh Sơn năm 2018 -2019

Bài 22: a) Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, biết rằng số đó khi chia cho 3, cho 4, cho 5, cho 6 đều dư 2, còn chia cho 7 thì dư 3.

b) Tìm hai số tự nhiên biết tổng $ƯCLN$ và BCNN là 23.

HSG huyện Thanh Chương năm 2019 -2020

C. SỬU TÂM CÁC BÀI TRONG CÁC ĐỀ CỦA NHỮNG NĂM TRƯỚC ĐÓ

(Phần này lấy các câu từ những năm trước, trước năm 2020-2021, tối thiểu 10 bài)

Bài 1: Cho $S = 9^{23} + 5 \cdot 3^{43}$. Chứng minh rằng: $S : 32$

Lời giải

$$\text{Ta có } S = 9^{23} + 5 \cdot 3^{43} = 3^{46} - 5 \cdot 3^{43} = 3^{43} (3^3 - 5) = 3^{43} \cdot 32 : 32.$$

Vậy $S : 32$

Bài 2: CMR: $\text{UCLN}(12n+1, 30n+1) = 1$ với mọi số tự nhiên n

Lời giải

Gọi $\text{UCLN}(12n+1, 30n+1) = d$, suy ra $d \in N^*$ khi đó ta có :

$$\begin{cases} 12n+1 : d \\ 30n+1 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(12n+1) : d \\ 2(30n+1) : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 60n+5 : d \\ 60n+2 : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (60n+5) - (60n+2) : d \Rightarrow 3 : d \Rightarrow d \in \{1; 3\}$$

Vì $12n+1$ là một số không chia hết cho 3 nên $d = 3$ loại

Vậy $d = 1$, khi đó $\text{UCLN}(12n+1, 30n+1) = 1$

Bài 3: Tìm ba số nguyên tố x, y, z thỏa mãn $(x + y + z) \cdot 5 = xyz$

Trích đề HSG huyện Hải Hậu năm 2011- 2012

Lời giải

Ta có: $5(x + y + z) = xyz \Rightarrow x + y + z = xyz : 5$

$$\Rightarrow xyz : 5$$

\Rightarrow có ít nhất 1 trong ba số x, y, z chia hết cho 5

Vì vai trò của ba số x, y, z như nhau nên giả sử $z : 5$. Mà z nguyên tố nên $z = 5$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow x + y + 5 = xy$$

$$\Rightarrow x - xy + y - 1 = -6$$

$$\Rightarrow (x-1)(y-1) = 6 = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ y-1=3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x-1=1 \\ y-1=6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \text{ (loại vì } x, y \text{ nguyên tố)} \text{ hoặc } \begin{cases} x=2 \\ y=7 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy ba số nguyên tố x, y, z cần tìm là $(2; 7; 5); (2; 5; 7); (5; 7; 2); (5; 2; 7); (7; 2; 5); (7; 5; 2)$

Bài 4: Chứng minh rằng $10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27

Trích đề HSG huyện Xuân Trường, năm 2012- 2013

Lời giải

$$\begin{aligned} & 10^n + 18n - 1 \\ &= 10^n - 1 + 18n \\ &= 99\dots 9 (n \text{ chữ số } 9) + 18n \\ &= 9 \cdot (11\dots 1 (n \text{ chữ số } 1) + 2n) \\ & \text{Tổng các chữ số của } 11\dots 1 (n \text{ chữ số } 1) \text{ là } n \\ & \Rightarrow 11\dots 1 - n : 3 \\ & \Rightarrow 11\dots 1 - n + 3n : 3 \\ & \Rightarrow 9 \cdot (11\dots 1 (n \text{ chữ số } 1) + 2n) : 27 \end{aligned}$$

Bài 5: Chứng minh rằng: $3a + 2b : 17$ khi và chỉ khi $10a + b : 17$ ($a, b \in \square$) và ngược lại có đúng không?

Lời giải

$$\begin{aligned} * & 3a + 2b : 17 \Rightarrow 10a + b : 17 \\ \text{Ta có: } & 3a + 2b : 17 \Rightarrow 9 \cdot (3a + 2b) : 17 \Rightarrow 27a + 18b : 17 \Rightarrow (17a + 17b) + (10a + b) : 17 \Rightarrow 10a + b : 17 \\ * & 10a + b : 17 \Rightarrow 3a + 2b : 17 \\ \text{Ta có: } & 10a + b : 17 \Rightarrow 2(10a + b) : 17 \Rightarrow 20a + 2b : 17 \Rightarrow 17a + 3a + 2b : 17 \Rightarrow 3a + 2b : 17 \end{aligned}$$

Bài 6: Chứng tỏ rằng trong 27 số tự nhiên tùy ý luôn tồn tại hai số sao cho tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 50.

Lời giải

TH1: Nếu 27 số tự nhiên trên có 2 số có cùng số dư khi chia cho 50 thì hiệu của chúng chia hết cho 50.

TH2: Nếu 27 số tự nhiên trên không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho 50

Số dư khi chia cho 50 gồm: 0; 1; 2; ...; 49 chia làm 26 nhóm:

$$(0), (1; 49), (2; 48), \dots, (24; 26), (25)$$

Chia 27 số dư khác nhau vào 26 nhóm trên, tồn tại ít nhất 2 số cùng một nhóm.

Suy ra tổng của chúng chia hết cho 50.

Bài 7: Tìm n là số tự nhiên để: $A = (n+5)(n+6) : 6n$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 12n + n(n-1) + 30, \text{ Để } A : 6n \Rightarrow n(n-1) + 30 : 6n$$

$$\text{Ta có: } n(n-1) : n \Rightarrow 30 : n \Rightarrow n \in U(30) = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$$

$$\text{Và } n(n-1) : 6 \Rightarrow n(n-1) : 3 \Rightarrow n \in \{1; 3; 6; 10; 15; 30\}$$

Thử vào ta thấy $n \in \{1; 3; 10; 30\}$ thỏa mãn yêu cầu đầu bài

Bài 8: Tìm 3 số nguyên tố liên tiếp p, q, r sao cho $p^2 + q^2 + r^2$ cũng là số nguyên tố.

Lời giải

Nếu 3 số nguyên tố p, q, r đều khác 3 thì p, q, r đều có dạng $3k \pm 1$ suy ra p^2, q^2, r^2 chia cho 3 đều dư 1. Khi đó $p^2 + q^2 + r^2 : 3$ và $p^2 + q^2 + r^2 > 3$ nên $p^2 + q^2 + r^2$ là hợp số.

Vậy $p = 3, q = 5, r = 7$, khi đó $p^2 + q^2 + r^2 = 3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$ là số nguyên tố.

Bài 9: Tìm tất cả các số nguyên tố p để $2^p + p^2$ cũng là số nguyên tố.

Lời giải

Với $p = 2$ ta có $2^p + p^2 = 2^2 + 2^2 = 4$ không là số nguyên tố.

Với $p = 3$ ta có $2^p + p^2 = 2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố.

Với $p > 3$ ta có $p^2 + 2^p = (p^2 - 1) + (2^p + 1)$. Vì p lẻ và p không chia hết cho 3 nên $p^2 - 1 \vdots 3$ và $2^p + 1 \vdots 3$, do đó $2^p + p^2$ là hợp số.

Vậy, với $p=3$ thì $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

Bài 10: Chứng minh rằng hai số $n+1$ và $3n+4$ ($n \in \mathbb{N}$) là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

Gọi $d = \text{CLN}(n+1, 3n+4) \Rightarrow d \in \mathbb{N}^*$, nên ta có:

$$\begin{cases} n+1 \vdots d \\ 3n+4 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n+3 \vdots d \\ 3n+4 \vdots d \end{cases} \Rightarrow (3n+4) - (3n+3) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d$$

Vậy hai số $n+1$ và $3n+4$ là hai số nguyên tố cùng nhau với ($n \in \mathbb{N}$).

Bài 11: Chứng minh rằng $2n+1$ và $2n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

Gọi $d = \text{CLN}(2n+1, 2n+3) \Rightarrow d \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Khi đó ta có: } \begin{cases} 2n+1 \vdots d \\ 2n+3 \vdots d \end{cases} \Rightarrow (2n+3) - (2n+1) \vdots d \Rightarrow 2 \vdots d \Rightarrow d \in (2) = \{1, 2\}$$

Mà ta lại có $(2n+1) \vdots d$ mà $2n+1$ là số lẻ nên $d = 2$ (loại), do đó $d = 1$

Vậy hai số $2n+1$ và $2n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 12: Tìm $n \in \mathbb{N}$ để: $7n+10$ và $5n+7$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải :

Gọi $d = \text{CLN}(7n+10, 5n+7) \Rightarrow d \in \mathbb{N}^*$

Khi đó ta có:

$$\begin{cases} 7n+10 \vdots d \\ 5n+7 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(7n+10) \vdots d \\ 7(5n+7) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 35n+50 \vdots d \\ 35n+49 \vdots d \end{cases} \\ \Rightarrow (35n+50) - (35n+49) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d$$

Do đó $d = 1$

Vậy với mọi $n \in \mathbb{N}$ hai số $7n+10$ và $5n+7$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Bài 13: Tìm hai số tự nhiên a và b biết $\text{BCNN}(a, b) = 180$; $\text{ƯCLN}(a, b) = 12$.

Trích đề HSG huyện Hà Trung năm 2021-2022

Lời giải

Ta có $a \cdot b = \text{ƯCLN}(a, b) \cdot \text{BCNN}(a, b) \Rightarrow ab = 180 \cdot 12 = 2160$

Giả sử $a \leq b$.

Vì $\text{ƯCLN}(a, b) = 12$ nên $a = 12m, b = 12n$ với $(m, n) = 1$ và $m \leq n$.

$\Rightarrow 12m \cdot 12n = 2160 \Rightarrow mn = 15$. Ta có bảng sau:

m	n	a	b
1	15	12	180
3	5	36	60

Vậy ta có hai cặp $(a;b)$ là $(12;180), (36;60)$.

Bài 14: Tìm số nguyên tố p sao cho $p+4$ và $p+14$ là các số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện năm 2021-2022

Lời giải

Với $p=2$ thì $p+4=2+4=6$ là hợp số (loại)

Với $p=3$ thì $p+4=3+4=7$ (thỏa mãn)

$$p+14=3+14=17 \text{ (thỏa mãn)}$$

Với $p>3$ thì $p=3k+1$ hoặc $p=3k+2$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

Nếu $p=3k+1$ thì $p+14=3k+1+14=3k+15:3$ (loại)

Nếu $p=3k+2$ thì $p+4=3k+2+4=3k+6:3$ (loại)

Vậy $p=3$ thì $p+4$ và $p+14$ là các số nguyên tố.

Bài 15: Chứng minh rằng: Nếu $7x+4y : 37$ thì $13x+18y : 37$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } 5(13x+18y) - 4(7x+4y) = 65x+90y - 28x - 16y$$

$$= 37x+74y = 37(x+2y):37$$

$$\text{Hay } 5(13x+18y) - 4(7x+4y):37 \quad (*)$$

Vì $7x+4y:37$, mà $(4;37) = 1$ nên $4(7x+4y):37$

Do đó, từ (*) suy ra: $5(13x+18y):37$, mà $(5;37) = 1$ nên $13x+18y:37$

Bài 16: Chứng tỏ rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì p^2-1 chia hết cho 3.

Trích đề thi HSG huyện Hoàng Hóa năm 2018-2019.

Lời giải

Xét số nguyên tố p khi chia cho 3. Ta có: $p=3k+1$ hoặc $p=3k+2$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

$$+) p = 3k + 1$$

$$\text{suy ra } p^2 - 1 = (3k + 1)^2 - 1 = 9k^2 + 6k : 3$$

$$\text{Nếu } p = 3k + 2 \text{ thì } p^2 - 1 = (3k + 2)^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 : 3$$

$$\text{Vậy } p^2 - 1 : 3$$

Bài 17: Tìm tất cả các số tự nhiên n , biết rằng $n+S(n)=2014$, trong đó $S(n)$ là tổng các chữ số của n .

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019

Lời giải

Nếu n là số có ít hơn 4 chữ số thì $n \leq 999$ và $S(n) \leq 27$

$$\text{Suy ra } n + S(n) \leq 999 + 27 = 1026 < 2014 \text{ (ktm)}$$

Mặt khác $n \leq n + S(n) = 2014$ nên n là số có ít hơn 5 chữ số. Vậy n là số có 4 chữ số, suy ra

$$S(n) \leq 9.4 = 36. \text{ Do vậy } n \geq 2014 - 36 = 1978$$

$$\text{Vì } 1978 \leq n \leq 2014 \text{ suy ra } \begin{cases} n = \overline{19ab} \\ n = \overline{20cd} \end{cases}$$

*Nếu $n = \overline{19ab}$. Ta có: $\overline{19ab} + (1+9+a+b) = 2014$
 $1910+11a+2b = 2014$
 $11a+2b = 104$ nên $a \div 2$
và $11a = 104 - 2b \geq 104 - 2 \cdot 9 = 86$
 $8 \leq 10 < a; a \div 2$ suy ra $a = 8$ nên $b = 8$ do đó $n = 1988(tm)$

*Nếu $n = \overline{20cd}$ thì $\overline{20cd} + (2+0+c+d) = 2014$
Suy ra $2002+11c+2d = 2014$
 $11c+2d = 12$ suy ra $c \div 2$
Và $11c \leq 12$ nên $\begin{cases} c = 0 \text{ suy ra } d = 6, n = 2006(tm) \\ c = 1 \text{ suy ra } 2d = 1(ktm) \end{cases}$
Vậy $n \in \{1988; 2006\}$

Bài 18: Cho $n = \overline{7a5} + \overline{8b4}$. Biết $a - b = 6$ và n chia hết cho 9. Tìm a, b

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019.

Lời giải

Ta có: $n = \overline{7a5} + \overline{8b4} \div 9$ suy ra $7+a+5+8+b+4 \div 9$
 $24+a+b \div 9$ suy ra $a+b \in \{3; 12\}$ (vì $a+b < 19$)
Mà $a-b=6$ suy ra $a+b > 3$ nên $a+b=12$
Kết hợp với $a-b=6$ suy ra $a=9, b=3$

Bài 19: Tìm các chữ số x, y sao cho $\overline{2014xy} \div 42$.

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019.

Lời giải

$\overline{2014xy} = 201400 + \overline{xy} = 42 \cdot 4795 + 10 + \overline{xy} \div 42$
Nên $10 + \overline{xy} \div 42$
Do $0 \leq \overline{xy} < 100$ nên $\overline{xy} \in \{32; 74\}$
Vậy $(x; y) = (3; 2); (7; 4)$

Bài 20: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, biết rằng số đó khi chia cho 3, cho 4, cho 5, cho 6 đều dư là 2, còn chia cho 7 thì dư 3.

Trích đề HSG huyện Vĩnh lộc năm 2018-2019

Lời giải

Gọi a là số tự nhiên cần tìm
Vì a chia cho 3; 4; 5; 6 đều dư 2 nên $a-2$ chia hết cho 3; 4; 5; 6
 $(a-2) \in BC(3; 4; 5; 6)$, $BCNN(3, 4, 5, 6) = 60$
 $a-2 \in \{0; 60; 120; 180; \dots\}$ nên $a \in \{2; 62; 122; 182; \dots\}$
Mà a là số nhỏ nhất và cho 7 thì dư 3 nên $a = 122$

Bài 21: Tìm số tự nhiên n để $(n+3)(n+1)$ là số nguyên tố

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019.

Lời giải

Để $(n+3)(n+1)$ là số nguyên tố thì một trong hai thừa số $n+3; n+1$ phải bằng 1
Mà $n+3 > n+1 \geq 1$
Suy ra $n+1 = 1$
 $n = 0$
Khi đó $n+3 = 3$ là số nguyên tố.
Vậy $n = 0$ thì $(n+3)(n+1)$ là số nguyên tố.

Bài 22: Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p+11$ cũng là số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Bạch Thông năm 2018-2019.

Lời giải

Nếu p lẻ thì $p+11$ là số chẵn lớn hơn 11 nên không là số nguyên tố

Suy ra p chẵn suy ra $p=2$

Bài 23: Tìm các số nguyên tố x, y sao cho $x^2 + 117 = y^2$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2018-2019

Lời giải

Với $x=2$ thì $2^2 + 117 = 121$ nên $y^2 = 121$ suy ra $y=11$ (là số nguyên tố)

Với $x > 2$, x là số nguyên tố nên x lẻ nên $y^2 = x^2 + 117$ là số chẵn

Nên y chẵn, kết hợp với y nguyên tố nên $y = 2(km)$

Vậy $x=2; y=11$

Bài 24: Cho n là số tự nhiên bất kỳ. Chứng minh $(n+3)$ và $(2n+5)$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Trích đề KS HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Gọi $d = (n+3, 2n+5)$ suy ra $n+3 : d; 2n+5 : d$

Suy ra $2(n+3) : d, 2n+5 : d$

$(2n+6) - (2n+5) : d$

$1 : d$ suy ra $d=1$

Vậy $(n+3)$ và $2n+5$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Bài 25: Tìm hai số tự nhiên a và b biết $BCNN(a, b) = 180$; $\mid CLN(a, b) = 12$

Trích đề chọn HSG huyện Nga Sơn năm 2017-2018.

Lời giải

Ta có $ab = 180.12 = 2160$

Giả sử $a \leq b$. Vì $\mid CLN(a, b) = 12$ nên $a = 12m, b = 12n$ với $(m, n) = 1$ và $m \leq n$

Suy ra $12m.12n = 2160$ nên $mn = 15$ Ta có bảng sau:

m	n	a	b
1	15	12	180
3	5	36	60

Bài 26: Tìm hai số tự nhiên a, b biết: $BCNN(a, b) = 420$; $\mid CLN(a, b) = 21$ và $a+21=b$

Trích đề KS HSG huyện Đông Tháp năm 2018-2019

Lời giải

Vì $\mid CLN(a, b) = 21$

suy ra $\begin{cases} a = 21m \\ b = 21n \end{cases}, (m, n) = 1$

Vì $BCNN(a, b) = 420$

$BCNN(21m, 21n) = 420 = 21.20$

$BCNN(m, n) = 20$

Vì $a+21=b$ suy ra $21m+21=21n$ suy ra $m+1=n$ (*)

Trong các trường hợp cần xét chỉ có $\begin{cases} m=4, n=5 \\ m=2, n=3 \end{cases}$ là thỏa (*)

$$\text{Vậy với } \begin{cases} m=4, n=5 \\ m=2, n=3 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a=21.4=84 \\ b=21.5=105 \end{cases}$$

Bài 27: Tìm 2 số tự nhiên có tổng bằng 432 và ƯCLN của chúng là 36.

Trích đề KS HSG huyện Kim Sơn năm 2018-2019

Lời giải

Gọi 2 số là $a; b$. Ta có: $a + b = 432$

Giả sử $a \leq b$. Vì $\downarrow \text{CLN}(a, b) = 36$ nên $a = 36m; b = 36n$ với $(m, n) = 1$ và $m \leq n$

$$36m + 36n = 432.$$

$$m + n = 12$$

Ta có bảng sau:

m	n	a	b
1	11	36	396
5	7	180	252

Bài 28: Tìm hai số tự nhiên a và b biết $BCNN(a, b) = 180$; $\downarrow \text{CLN}(a, b) = 12$

Trích đề chọn HSG huyện Nga Sơn năm 2017-2018.

Lời giải

Ta có $ab = 180.12 = 2160$

Giả sử $a \leq b$. Vì $\downarrow \text{CLN}(a, b) = 12$ nên $a = 12m, b = 12n$ với $(m, n) = 1$ và $m \leq n$

Suy ra $12m.12n = 2160$ nên $mn = 15$. Ta có bảng sau:

m	n	a	b
1	15	12	180
3	5	36	60

Bài 29: Tìm hai số tự nhiên a, b biết: $BCNN(a, b) = 420$; $\downarrow \text{CLN}(a, b) = 21$ và $a + 21 = b$

Trích đề KS HSG huyện Đông Tháp năm 2018-2019

Lời giải

$$\text{Vì } \downarrow \text{CLN}(a, b) = 21 \text{ suy ra } \begin{cases} a = 21m \\ b = 21n \end{cases}, (m, n) = 1$$

Vì $BCNN(a, b) = 420$

$$BCNN(21m, 21n) = 420 = 21.20$$

$$BCNN(m, n) = 20$$

Vì $a + 21 = b$

$$21m + 21 = 21n$$

$$m + 1 = n (*)$$

Trong các trường hợp cần xét chỉ có $\begin{cases} m=4, n=5 \\ m=2, n=3 \end{cases}$ là thỏa (*).

$$\text{Vậy với } \begin{cases} m=4, n=5 \\ m=2, n=3 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a=21.4=84 \\ b=21.5=105 \end{cases}$$

Bài 30: Tìm hai số tự nhiên biết: Hiệu của chúng bằng 84 $\downarrow \text{CLN}$ của chúng bằng 28 và các số đó khoảng từ 300 đến 400

Trích đề KS HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Gọi hai số phải tìm là $a, b (a, b \in \mathbb{N}^*, a > b)$

Ta có:

$$\vdots \text{CLN}(a,b) = 28$$

$$\begin{cases} a = 28k \\ b = 28q \end{cases} (k, q \in \mathbb{N}^*, (k, q) = 1)$$

$$\text{Ta có: } a - b = 84$$

$$k - q = 3$$

Theo bài ra : $300 \leq b < a \leq 440$ nên $10 < q < k < 16$

Chỉ có 2 số 11, 14 nguyên tố cùng nhau và có hiệu là 3 nên $q = 11, k = 14$

$$\text{Do đó } \begin{cases} a = 28 \cdot 11 = 308 \\ b = 28 \cdot 14 = 392 \end{cases}$$

Vậy hai số phải tìm là 308, 392.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

CHỦ ĐỀ 3: TÍNH CHẤT CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ TỰ NHIÊN

A. PHẦN NỘI DUNG

I. Quan hệ chia hết và tính chất.

Dạng 1: Chứng minh chia hết.

Bài 1: Cho biểu thức $A = 2010 + 2010^2 + 2010^3 + \dots + 2010^{2009} + 2010^{2010}$

Chứng minh rằng A chia hết cho 2011

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2018 - 2019

Lời giải

$$\begin{aligned}A &= 2010 + 2010^2 + 2010^3 + 2010^4 + \dots + 2010^{2009} + 2010^{2010} \\A &= 2010 \cdot (1 + 2010) + 2010^3 \cdot (1 + 2010) + \dots + 2010^{2009} \cdot (1 + 2010) \\A &= 2011 \cdot (2010 + 2010^3 + \dots + 2010^{2009}) : 2011 \Rightarrow A : 2011\end{aligned}$$

Bài 2: Chứng minh rằng $B = 3 \cdot 10^{100} + 10^{99} + 8$ chia hết cho 24.

Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có:

$$B = 3 \cdot 10^{100} + 10^{99} + 8 = 10^{99} \cdot (3 \cdot 10 + 1) + 8 = 10^{99} \cdot 31 + 8 = \underbrace{310 \dots 0}_{99 \text{ chuso}} + 8 = \underbrace{310 \dots 008}_{98 \text{ chuso}} : 8$$

Mặt khác:

$$B = 3 \cdot 10^{100} + 10^{99} + 8 = 3 \cdot 10^{100} + (10^{99} + 8) = \underbrace{30 \dots 0}_{100 \text{ chuso}} + \underbrace{10 \dots 8}_{98 \text{ chuso}}$$

$$\text{Vi } \underbrace{30 \dots 0}_{100 \text{ chuso}} : 3; \underbrace{10 \dots 8}_{98 \text{ chuso}} : 3 \text{ nen } B : 3$$

Do $(3, 8) = 1$ nên $(3 \cdot 10^{100} + 10^{99} + 8) : (3 \cdot 8)$

Suy ra $B : 24$

Bài 3: Cho $M = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$

a) Chứng tỏ rằng $M : 5$

b) Tìm chữ số tận cùng của M

Trích đề HSG tỉnh Bắc Ninh năm 2016 - 2017

Lời giải

$$\begin{aligned}a) M &= 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20} \\&= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + (2^{17} + 2^{18} + 2^{19} + 2^{20}) \\&= 2 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3) + \dots + 2^{17} \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3) \\&= 15 \cdot (2 + \dots + 2^{17}) = 5 \cdot 3 \cdot (2 + \dots + 2^{17}) : 5\end{aligned}$$

b) Dễ thấy $M : 2; M : 5 \Rightarrow M : 10 \Rightarrow M$ tận cùng bằng chữ số 0

Bài 4: Chứng tỏ rằng $M = 75 \cdot (4^{2021} + 4^{2020} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 100.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\text{Đặt } S = 4^{2021} + 4^{2020} + \dots + 4^2 + 4 + 1 \Rightarrow M = 75 \cdot S + 25$$

$$\text{Ta có } S = 4^{2021} + 4^{2020} + \dots + 4^2 + 4 + 1 \Rightarrow 4S = 4^{2022} + 4^{2021} + \dots + 4^3 + 4^2 + 4$$

$$\text{Do đó } 4S - S = 4^{2022} - 1 \Leftrightarrow S = \frac{4^{2022} - 1}{3}.$$

$$\text{Suy ra } M = 75.S + 25 = 75 \cdot \frac{4^{2022} - 1}{3} + 25 = 25 \cdot (4^{2022} - 1) + 25 = 25 \cdot 4^{2022} = 100 \cdot 4^{2021}$$

Suy ra $M \vdots 100$

Bài 5: Chứng minh rằng: $10^{28} + 8$ chia hết cho 72

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Lời giải

Vì $10^{28} + 8$ có tổng các chữ số chia hết cho 9 nên tổng đó chia hết cho 9

Lại có $10^{28} + 8$ có ba chữ số tận cùng là 008 chia hết cho 8 nên tổng đó chia hết cho 8, mà $(8, 9) = 1$ nên $10^{28} + 8$ chia hết cho 72.

Bài 6: Cho biết $a + 4b$ chia hết cho 13 ($a, b \in \mathbb{Z}$).

Chứng minh rằng $10 + b$ chia hết cho 13

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Lời giải

$$a + 4b \vdots 13 \Rightarrow 10a + 40b \vdots 13 \Leftrightarrow 10a + b + 39b \vdots 13$$

$$39b \vdots 13 \Rightarrow 10a + b \vdots 13$$

Bài 7: Chứng tỏ: $S = 16^5 + 2^{15}$ chia hết cho 33

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018 - 2019

Lời giải

$$\text{Có } S = 16^5 + 2^{15} = (2^4)^5 + 2^{15} = 2^{20} + 2^{15} = 2^{15} \cdot (2^5 + 1) = 2^{15} \cdot 33$$

Nên S chia hết cho 33

Bài 8: Chứng tỏ rằng: $A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{11} + 2^{12}$ chia hết cho 7

Trích đề HSG huyện Đoan Hùng năm 2018-2019

Lời giải

$$A = (2 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6) + (2^7 + 2^8 + 2^9) + (2^{10} + 2^{11} + 2^{12})$$

$$A = 2 \cdot (1 + 2 + 2^2) + 2^4 (1 + 2 + 2^2) + 2^7 \cdot (1 + 2 + 2^2) + 2^{10} \cdot (1 + 2 + 2^2)$$

$$A = 7 \cdot (2 + 2^4 + 2^7 + 2^{10})$$

Suy ra A chia hết cho 7.

Bài 9: Cho $S = 3^1 + 3^3 + 3^5 + \dots + 3^{2011} + 3^{2013} + 3^{2015}$. Chứng tỏ:

a) S không chia hết cho 9

b) S chia hết cho 70

Trích đề HSG huyện Quế Sơn 2018-2019

Lời giải

a) $3^2 + 3^5 + \dots + 3^{2011} + 3^{2013} + 3^{2015}$ chia hết cho 9; 3 không chia hết cho 9 $\Rightarrow S$ không chia hết cho 9

b) $S = 3(1 + 3^2 + 3^4) + \dots + 3^{2011}(1 + 3^2 + 3^4)$ (do S có 1008 số hạng)

$$S = 3 \cdot 91 + \dots + 3^{2011} \cdot 91$$

Ta thấy S chia hết cho 91 nên S chia hết cho 7 ($91 = 7 \cdot 13$)

$$S = 3 \cdot (1 + 3^2) + \dots + 3^{2013} (1 + 3^2) \text{ (Do } S \text{ có 1008 số hạng)}$$

$$S = 3 \cdot 10 + \dots + 3^{2011} \cdot 10$$

S chia hết cho 10. Do $(7,10)=1$ nên S chia hết cho $7 \cdot 10 = 70$

Bài 10: Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{90}$. Chứng minh A chia hết cho 11 và 13

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Lời giải

A có 90 số hạng mà $90:5$ nên $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{90}$

$$\begin{aligned} A &= (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + (3^6 + 3^7 + 3^8 + 3^9 + 3^{10}) + \dots + (3^{86} + 3^{87} + 3^{88} + 3^{89} + 3^{90}) \\ &= 3 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^6 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{86} \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) \\ &= 121 \cdot (3 + 3^6 + \dots + 3^{86}) : 11 \Rightarrow A : 11 \end{aligned}$$

A có 90 số hạng mà $90:3$ nên:

$$\begin{aligned} A &= (3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6) + \dots + (3^{88} + 3^{89} + 3^{90}) \\ &= 3 \cdot (1 + 3 + 3^2) + 3^4 \cdot (1 + 3 + 3^2) + \dots + 3^{88} \cdot (1 + 3 + 3^2) \\ &= 13 \cdot (3 + 3^4 + \dots + 3^{88}) : 13 \Rightarrow A : 13 \end{aligned}$$

Bài 11: Cho $C = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{2014} + 4^{2015} + 4^{2016}$
Chứng minh rằng C chia hết cho 21 và 105

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018-2019

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} C &= 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^{2014} + 4^{2015} + 4^{2016} \\ &= (4 + 4^2 + 4^3) + (4^4 + 4^5 + 4^6) + \dots + (4^{2014} + 4^{2015} + 4^{2016}) \\ &= 4 \cdot (1 + 4 + 4^2) + 4^4 \cdot (1 + 4 + 4^2) + \dots + 4^{2014} \cdot (1 + 4 + 4^2) \\ &= 21 \cdot (4 + 4^4 + \dots + 4^{2014}) : 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^{2014} + 4^{2015} + 4^{2016} \\ &= (4 + 4^2) + (4^3 + 4^4) + \dots + (4^{2015} + 4^{2016}) \\ &= 4 \cdot (1 + 4) + 4^3 \cdot (1 + 4) + \dots + 4^{2015} \cdot (1 + 4) \\ &= 5 \cdot (4 + 4^3 + \dots + 4^{2015}) : 5 \end{aligned}$$

Ta có $C:5, C:21$ mà $(5,21)=1 \Rightarrow C:105$

Bài 12: Chứng minh rằng: Nếu $7x+4y:37$ thì $13x+18y:37$

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Lời giải

$$\text{Ta có: } 5(13x+18y) - 4(7x+4y) = 65x+90y - 28x-16y = 37x+74 = 37(x+2y):37$$

$$\text{Hay } 5(13x+18y) - 4(7x+4y):37(*)$$

$$\text{Vì } 7x+4y:37 \text{ mà } (4;37)=1 \text{ nên } 4(7x+4y):37$$

Do đó, từ (*) suy ra: $5(13x+18y):37$, mà $(5,37)=1$ nên $13x+18y:37$.

Bài 13: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng: $p^2 - 1:4$.

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ và p không chia hết cho 3.

$$\text{Ta có } p^2 - 1 = p^2 - p + p - 1 = p(p-1) + (p-1) = (p-1)(p+1)$$

$$\text{Do } p \text{ là số lẻ nên } p = 2k + 1. \text{ Khi đó } p^2 + 1 = (2k + 1 - 1)(2k + 1 + 1) = 4k \cdot (k + 1) : 8 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Mặt khác, ta thấy rằng $p - 1, p, p + 1$ là ba số nguyên liên tiếp, trong ba số nguyên liên tiếp có 1 số chia hết cho 3 mà p không chia hết cho 3 nên $p - 1$ hoặc $p + 1$ chia hết cho 3.

$$\text{Do đó } p^2 - 1 = (p-1)(p+1) \text{ chia hết cho } 3.$$

$$\text{Mà } (3; 8) = 1 \text{ nên } p^2 + 1 \text{ chia hết cho } 24 \text{ (đpcm).}$$

Bài 14:

a) Tìm hai số tự nhiên x, y sao cho $(2x+1) \cdot (y-5) = 12$.

b) Tìm tất cả các số $B = \overline{62xy427}$ biết rằng số B chia hết cho 99.

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015-2016

Lời giải

a) Tìm hai số tự nhiên x, y sao cho $(2x+1) \cdot (y-5) = 12$.

$$\text{Ta có : } (2x+1) \cdot (y-5) = 12$$

Nên $2x+1$ và $y-5$ là ước của 12.

$$\text{Mà } 12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$$

$$\text{Vì } 2x+1 \text{ là số lẻ } 2x+1 = 1 \text{ hoặc } 2x+1 = 3$$

Ta có:

$2x+1$	1	3
$y-5$	12	4
x	0	1
y	17	9

$$\text{Vậy: } (x; y) = \{(0; 17); (1; 9)\}.$$

b) Tìm tất cả các số $B = \overline{62xy427}$ biết rằng số B chia hết cho 99.

Vì số B chia hết cho 99 nên sẽ chia hết cho 9 và 11

Số B đó có tổng chữ số là: $6 + 2 + x + y + 4 + 2 + 7 = 21 + x + y$ sẽ chia hết cho 9.

$$\text{Mà } x + y < 19$$

$$\text{Có } 21 \text{ chia } 9 \text{ dư } 3 \text{ suy ra } x + y = 6 \text{ hoặc } x + y = 15$$

$$\text{Để } B \text{ chia hết cho } 11 \text{ thì } (7 + 4 + x + 6) - (2 + y + 2) = 11k \text{ hay } 13 + x - y = 11k \quad (2) \quad (k \in \mathbb{N})$$

(Một số chia hết cho 11 thì tổng các chữ số ở vị trí lẻ trừ tổng các chữ số ở vị trí chẵn là bội của 11).

$$\text{Để } B \text{ chia hết cho } 11 \text{ thì } y - x = 2 \text{ hay } y = x + 2$$

Có 2 trường hợp xảy ra

$$\text{Trường hợp 1: } x + y = 6 \text{ và } y = x + 2$$

Thay $y = x + 2$ vào $x + y = 6$ ta được

$$x + x + 2 = 6$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

$$y = x + 2 = 2 + 2 = 4$$

Vậy $x = 2$; $y = 4$ (Thỏa mãn)

Trường hợp 2: $x + y = 15$ và $y - x = 2$

Thay $y = x + 2$ vào $x + y = 15$ ta được

$$x + x + 2 = 15$$

$$2x = 13$$

$$x = \frac{13}{2}$$

$$y = x + 2 = \frac{13}{2} + 2 = \frac{17}{2} :$$

Vậy $x = \frac{13}{2}$; $y = \frac{17}{2}$ (không thỏa mãn)

Mà x, y phải là số nguyên dương nên $x = 2$ và $y = 4$.

Vậy số cần tìm là 6224427.

Bài 15: Chứng tỏ rằng $2x + 3y$ chia hết cho 17 thì $9x + 5y$ chia hết cho 17 và ngược lại.

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015-2016

Lời giải

Ta có: $2x + 3y$ chia hết cho 17

$$4(2x + 3y) \text{ chia hết cho } 17$$

$$8x + 12y \text{ chia hết cho } 17$$

$$(8x + 12y) + (9x + 5y) = 8x + 12y + 9x + 5y = 17x + 17y = 17(x + y) \text{ chia hết cho } 17$$

Mà $2x + 3y$ chia hết với 17 suy ra $9x + 5y$ chia hết cho 17

Vậy $9x + 5y$ chia hết cho 17.

Ngược lại . Ta có : $9x + 5y$ chia hết cho 17

$$4(9x + 5y) \text{ chia hết cho } 17$$

$$36x + 20y \text{ chia hết cho } 17$$

$$(36x + 20y) - (2x + 3y) = 36x + 20y - 2x - 3y = 34x + 17y = 17(2x + y) \text{ chia hết cho } 17$$

Mà $9x + 5y$ chia hết với 17 suy ra $2x + 3y$ chia hết cho 17

Vậy $2x + 3y$ chia hết cho 17.

Bài 16: Chứng minh: $S = 16^5 + 2^{15}$ chia hết cho 33.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2010-2011

Lời giải

$$\text{Có } S = 16^5 + 2^{15} = (2^4)^5 + 2^{15} = 2^{20} + 2^{15} = 2^{15} \cdot 2^5 + 2^{15} = 2^{15} \cdot (2^5 + 1) = 2^{15} \cdot 33$$

Vậy S chia hết cho 33.

Bài 17: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , ta có $n^2 + n + 2$ không chia hết cho 5.

Trích đề HSG huyện Anh Sơn năm 2018-2019

Lời giải

Ta có: $n^2 + n + 2 = n(n+1) + 2$

Do $n(n+1)$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2.

$n(n+1)$ có tận cùng là 0 ; 2 ; 6 .

$n(n+1) + 2$ có tận cùng là 2 ; 4 ; 8 không chia hết cho 5.

Bài 18: Chứng minh rằng $3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{101}$ chia hết cho 120.

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2017-2018

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{101} \\ &= (3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + (3^6 + 3^7 + 3^8 + 3^9) + \dots + (3^{98} + 3^{99} + 3^{100} + 3^{101}) \\ &= 3(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^5(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{97}(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) \\ &= 120(3 + 3^5 + \dots + 3^{97}) : 120 \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

Bài 19: Tìm số tự nhiên $x; y$ biết $\overline{32x1y}$ chia hết cho 45.

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2019-2020

Lời giải

Vì $\overline{32x1y}$ chia hết cho $45 = 5.9$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow \overline{32x10} : 9 \Leftrightarrow (3 + 2 + x + 1 + 0) : 9 \Rightarrow x = 3 \\ y = 5 \Rightarrow \overline{32x15} : 9 \Leftrightarrow (3 + 2 + x + 1 + 5) : 9 \Rightarrow x = 7 \end{cases}$$

Vậy hai số cần tìm là 32310 ; 32715 .

Bài 20: Chứng minh rằng số viết bởi 27 chữ số giống nhau thì chia hết cho 27.

Trích đề HSG huyện Tiên Hải năm 2016 -2017

Lời giải

Trước hết ta chứng minh số gồm 27 chữ số 1 thì chia hết cho 27 .

$$\text{Thật vậy: } \underbrace{111\dots11}_{27 \dots \text{chữ} \dots \text{so} \dots 1} = 11\dots1 \times \underbrace{1000\dots01}_{9 \dots \text{c} / \text{so} \dots 1} \underbrace{1000\dots01}_{8 \dots \text{c} / \text{so} \dots 0} \underbrace{1000\dots01}_{8 \dots \text{c} / \text{s} \dots 0}$$

$$\text{Mà } 11\dots1 : 9 \text{ và } \underbrace{1000\dots01}_{8 \dots \text{c} / \text{so} \dots 0} \underbrace{1000\dots01}_{8 \dots \text{c} / \text{so} \dots 0} : 3 \Rightarrow \underbrace{111\dots1}_{27 \dots \text{c} / \text{so} \dots 1} : 27$$

Từ đó suy ra nếu một số viết bởi 27 chữ số giống nhau thì chia hết cho 27 .

Bài 21: Chứng tỏ rằng;

a) $(3^{100} + 19^{990}) : 2$

b) Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp không chia hết cho 4 .

Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015 -2016

Lời giải

a) Ta có : 3 là lẻ nên 3^{100} là lẻ, 19 là lẻ nên 19^{990} là lẻ nên $(3^{100} + 19^{990}) : 2$.

b) Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là $a; (a+1); (a+2); (a+3) (a \in \mathbb{N})$

$$\text{Ta có : } a + (a+1) + (a+2) + (a+3) = 4a + 6$$

Vì $4a : 4, 6$ không chia hết cho 4 nên $4a + 6$ không chia hết cho 4 .

Bài 22: Cho a, b là các số nguyên. Chứng tỏ rằng nếu $(2a+3b):7$ thì $(8a+5b):7$.

Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-22

Lời giải

Với các số nguyên a, b ta có:

$$(2a+3b):7$$

$$4(2a+3b):7$$

$$(8a+12b):7;$$

$$(8a+5b+7b):7$$

Mà $7b:7$ nên $(8a+5b):7$.

Bài 23: Cho $B = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{30}$ Chứng minh rằng: B chia hết cho 21.

Trích đề HSG Trường THCS Lý Tự Trọng năm 2015-2016

Lời giải

Ta có: $B = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{30}$

$$= (2^1 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + \dots + (2^{29} + 2^{30})$$

$$= 2 \cdot (1+2) + 2^3 \cdot (1+2) + \dots + 2^{29} \cdot (1+2)$$

$$= 3 \cdot (2 + 2^3 + \dots + 2^{29})$$

suy ra $B \equiv 0 \pmod{3}$ (1)

Lại có: $B = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{30}$

$$= (2^1 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6) + \dots + (2^{28} + 2^{29} + 2^{30})$$

$$= 2 \cdot (1+2+2^2) + 2^4 \cdot (1+2+2^2) + \dots + 2^{28} \cdot (1+2+2^2)$$

$$= 7 \cdot (2 + 2^4 + \dots + 2^{28})$$

suy ra $B \equiv 0 \pmod{7}$ (2)

Mà $(3; 7) = 1$

Do đó từ (1) và (2) suy ra $B \equiv 0 \pmod{21}$ hay $B \equiv 0 \pmod{21}$

Bài 24: Chứng tỏ rằng

a) $(3^{100} + 19^{990}):2$

b) Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp không chia hết cho 4.

Trích đề HSG Huyện Lương Tài năm 2021-2022

Lời giải

a) Ta có 3 là lẻ nên 3^{100} là lẻ, 19 lẻ nên 19^{990} lẻ nên $(3^{100} + 19^{990}):2$

b) Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là $a; (a+1); (a+2); (a+3) (a \in \mathbb{N})$

Ta có : $a+(a+1)+(a+2)+(a+3)=4a+6$

Vì $4a:4; 6$ không chia hết cho 4 nên $4a+6$ không chia hết cho 4.

Bài 25: Cho $D = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{19} + 5^{20}$. Tìm số dư khi chia D cho 31.

Trích đề HSG Hoài Nhơn năm 2015-2016

Lời giải

$$D = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{19} + 5^{20}$$

$$D+1 = (1+5+5^2) + 5^3(1+5+5^2) + 5^6(1+5+5^2) + \dots + 5^{18}(1+5+5^2)$$

Do $1+5+5^2 = 31$ nên $D+1$ chia hết cho 31

D chia 31 dư 30.

Bài 26: Chứng tỏ rằng số có dạng \overline{abcabc} bao giờ cũng chia hết cho 11.

Trích đề HSG Trường Hưng Mỹ năm 2018 - 2019

Lời giải

Ta có: $\overline{abcabc} = \overline{abc}.1001 = \overline{abc}.11.91:11$

Vậy \overline{abcabc} bao giờ cũng chia hết cho 11 (đpcm).

Bài 27: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta có $n^3 - n : 6$.

Trích đề chọn HSG Trục Ninh năm 2017-2018

Lời giải

Ta có $(n^3 - n) = n(n^2 - 1) = n(n^2 - n + n - 1) = n[n(n-1) + (n-1)] = n(n-1)(n+1)$

Với mọi số nguyên dương n thì $(n-1)n(n+1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp sẽ chia hết cho 2 và 3 mà $(2; 3) = 1$ nên $n(n-1)(n+1) : 6$.

Bài 28: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng: $p^2 - 1 : 24$

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ và p không chia hết cho 3.

Ta có $p^2 - p + p - 1 = (p-1)(p+1)$

do p là số lẻ nên $p = 2k + 1 (k \in \mathbb{N}^*)$

$$p^2 - 1 = (p-1)(p+1) = 2k(2k+2) = 4k(k+1) : 8 \quad (1)$$

Mặt khác $p-1; p; p+1$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên có một số chia hết cho 3, mà p không chia hết cho 3 nên $p-1$ hoặc $p+1$ chia hết cho 3. Từ đó suy ra $p^2 - 1 = (p-1)(p+1) : 3 \quad (2)$

Vì $(3, 8) = 1$ và từ (1) và (2) nên suy ra $p^2 - 1 : 24$.

Bài 29: Chứng minh rằng: Nếu $7x + 4y : 37$ thì $13x + 18y : 37$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 5(13x+18y)-4(7x+4y) &= 65x+90y-28x-16y \\ &= 37x+74y = 37(x+2y):37 \end{aligned}$$

$$\text{Hay } 5(13x+18y)-4(7x+4y) : 37 \quad (*)$$

$$\text{Vi } 7x+4y : 37, \text{ mà } (4;37) = 1 \text{ nên } 4(7x+4y) : 37$$

$$\text{Do đó, từ } (*) \text{ suy ra: } 5(13x+18y) : 37, \text{ mà } (5;37) = 1 \text{ nên } 13x+18y : 37.$$

Bài 30: Cho $A = 2.3.4.5 \dots 98 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{98}\right)$. Chứng tỏ rằng M chia hết cho 99.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021-2022
Lời giải

$$\begin{aligned} A &= 2.3.4.5 \dots 98 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{98}\right) \\ &= 2.3.4.5 \dots 98 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{98}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{97}\right) + \dots + \left(\frac{1}{44} + \frac{1}{45}\right)\right] \\ &= 2.3.4.5 \dots 98 \cdot \left(\frac{99}{98} + \frac{99}{2.97} + \dots + \frac{99}{44.45}\right) \\ &= 2.3.4.5 \dots 98.99 \cdot \left(\frac{1}{98} + \frac{1}{2.97} + \dots + \frac{1}{44.45}\right) : 99 \end{aligned}$$

Vậy $A : 99$.

Bài 31:

a) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 và $10p+1$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng $5p+1$ chia hết cho 6.

b) Chứng tỏ rằng nếu $6x+11y : 31 (x, y \in \mathbb{Z})$ thì $x+7y : 31$.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021-2022

Lời giải

a) p và $10p+1$ là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $3k+1; 3k+2$

Nếu $p = 3k+2$ thì $10p+1 = 10(3k+2)+1 = 30k+21 : 3$ (loại vì $10p+1$ là số nguyên tố)

nên $p = 3k+1$

Có: $p = 3k+1$ suy ra $5p+1 = 5(3k+1)+1 = 15k+6 : 3$

Mà p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ nên $5p+1$ chẵn, suy ra $5p+1 : 2$

Mà $(2;3) = 1$ nên $5p+1 : (2.3)$ hay $5p+1 : 6$.

Vậy $5p+1$ chia hết cho 6.

b) Vì $6x+11y : 31 (x, y \in \mathbb{Z})$ nên $6x+11y+31y : 31$

hay $6x+42y : 31$

$$6(x+7y):31$$

$$\text{nên } x+7y:31$$

Vậy nếu $6x+11y:31(x, y \in \square)$ thì $x+7y:31$.

Bài 32: Chứng minh rằng: Nếu $7x+4y:37$ thì $13x+18y:37$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\text{Ta có: } 5(13x+18y)-4(7x+4y) = 65x+90y-28x-16y$$

$$= 37x+74y = 37(x+2y):37 \text{ Hay } 5(13x+18y)-4(7x+4y):37 (*)$$

$$\text{Vì } 7x+4y:37, \text{ mà } (4;37)=1 \text{ nên } 4(7x+4y):37$$

$$\text{Do đó, từ } (*) \text{ suy ra: } 5(13x+18y):37, \text{ mà } (5;37)=1 \text{ nên } 13x+18y:37.$$

Bài 33: Cho số tự nhiên có 4 chữ số \overline{abcd} . Chứng tỏ rằng \overline{abcd} chia hết cho 7 khi:
 $2b+3c+d-a$ chia hết cho 7

Trích đề HSG huyện Kỳ Anh năm 2021 – 2022

Lời giải

$$\overline{abcd} - (2b+3c+d-a)$$

$$= 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d - (2b+3c+d-a)$$

$$= 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d - 2b - 3c - d + a$$

$$= (1000 \cdot a + a) + (100 \cdot b - 2b) + (10 \cdot c - 3c) + (d - b)$$

$$= 1001 \cdot a + 98 \cdot b + 7 \cdot c$$

$$\text{Vì: } +) 1001:7 \Rightarrow 1001 \cdot a:7$$

$$+) 98:7 \Rightarrow 98 \cdot b:7$$

$$+) 7 \cdot c:7$$

$$\text{Nên: } 1001 \cdot a + 98 \cdot b + 7 \cdot c:7, \text{ Hay } \overline{abcd} - (2b+3c+d-a):7$$

$$\text{Vì } \overline{abcd} - (2b+3c+d-a):7 \text{ nên } \overline{abcd}:7 \text{ khi } 2b+3c+d-a:7$$

Bài 34: Chứng minh rằng: $\overline{ab} + \overline{ba}$ chia hết cho 11.

Trích đề HSG Liên trường năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b):11$$

$$\text{Vậy } \overline{ab} + \overline{ba} :11$$

Bài 35: Cho $M = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2017} + 2^{2018}$

a) Tính M

b) Chứng tỏ rằng M chia hết cho 3

Trích đề HSG THCS Trần Phú Gia Lai năm 2018-2019

Lời giải

Ta có $2M = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2018} + 2^{2019}$

Lấy $2M - M = 2^{2019} - 2$. Vậy $M = 2^{2019} - 2$

$$M = (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6) + \dots + (2^{2017} + 2^{2018})$$

$$M = 2(1+2) + 2^3(1+2) + 2^5(1+2) + \dots + 2^{2017}(1+2)$$

$$M = 3.(2 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{2017})$$

Vậy $M \div 3$

Bài 36: Cho biết $a + 4b$ chia hết cho 13 ($a, b \in \mathbb{Z}$). Chứng minh rằng $10 + b \div 13$

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018-2019

Lời giải

Ta có: $4b \div 13$ suy ra $10a + 40b \div 13$ suy ra $10a + b + 39b \div 13$

Mà $39b \div 13$ suy ra $10a + b \div 13$

Bài 37. Cho số $155*710*4*16$ có 12 chữ số. Chứng minh rằng nếu thay các dấu * bởi các chữ số khác nhau trong ba chữ số 1, 2, 3 một cách tùy ý thì số đó luôn chia hết cho 396.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Ta nhận thấy, vị trí của các chữ số thay thế ba dấu sao trong số trên đều ở hàng chẵn và vì ba chữ số đôi một khác nhau, nên tổng của chúng bằng $1+2+3=6$

Mặt khác: $396 = 4.9.11$ trong đó 4; 9; 11 đôi một nguyên tố cùng nhau nên cần chứng minh

$A = \overline{155*710*4*16}$ chia hết cho 4, 9, 11 Thật vậy:

Vì A tận cùng là 16 chia hết cho 4 nên $A \div 4$

$A \div 9$ vì tổng các chữ số chia hết cho 9

$A \div 11$ vì hiệu số giữa tổng các chữ số hàng chẵn và tổng các chữ số hàng lẻ là 0, chia hết cho 11

Vậy $A \div 396$

Bài 38: Cho biết $a + 4b$ chia hết cho 13 ($a, b \in \mathbb{Z}$). Chứng minh rằng $10a + b \div 13$

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018 - 2019

Lời giải

Ta có:

$$a + 4b \div 13$$

$$10a + 40b \div 13$$

$$10a + b + 39b \div 13$$

Do $39b \div 13$ nên $10a + b \div 13$

Bài 39: Chứng minh $A = 3^{n+3} - 2.3^n + 2^{n+5} - 7.2^n \div 25$ với $n \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Ta có: $A = 3^{n+3} - 2.3^n + 2^{n+5} - 7.2^n$

$$= 3^n.27 - 2.3^n + 2^n.32 - 7.2^n$$

$$= 3^n.(27 - 2) + 2^n.(32 - 7)$$

$$= 3^n.25 + 2^n.25 \div 25.$$

Bài 40: Cho $A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{1999} + 2^{2000}$. Chứng minh A chia hết cho 6.

Lời giải

Ta có: $A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{1999} + 2^{2000}$

$$= (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + \dots + (2^{1999} + 2^{2000})$$

$$= 6 + 2^3.(1+2) + \dots + 2^{1999}.(1+2)$$

$$= 6 + 2^3.3 + \dots + 2^{1999}.3 \div 6.$$

Bài 41: Cho biết $a+4b$ chia hết cho 13 ($a, b \in \mathbb{Z}$). Chứng minh rằng $10+b$: 13.

Trích đề HSG huyện Tam Nông năm 2018-2019

Lời giải

Ta có:

$$a+4b:13 \Rightarrow 10a+40b:13 \Rightarrow 10a+b+39b:13$$

$$\text{Do } 39b:13 \Rightarrow 10a+b:13.$$

Vậy $10+b$: 13.

Bài 42: Thay (*) bằng các số thích hợp:

a) $\overline{510^*}$; $\overline{61^*16}$ chia hết cho 3

b) $\overline{261^*}$ chia hết cho 2 và chia 3 dư 1.

Trích đề HSG cấp trường năm 2019-2020

Lời giải

a) Để $\overline{510^*}$; $\overline{61^*16}$ chia hết cho 3 thì $(5+1+*)$ chia hết cho 3, từ đó tìm được $* = \{0; 3; 6; 9\}$.

b) Để $\overline{261^*}$ chia hết cho 2 và chia cho 3 dư 1 thì * chẵn và $(2+6+1+*)$ chia 3 dư 1, từ đó tìm được $* = 4$.

Bài 43: Cho $A = 999993^{1999} - 555557^{1997}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 5.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Để chứng minh $A:5$ ta xét chữ số tận cùng của A bằng việc xét chữ số tận cùng của từng số hạng.

$$\text{Ta có: } 3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3^3 = 81^{499} \cdot 27 \text{ nên } 3^{1999} \text{ có tận cùng là } 7$$

$$7^{1997} = (7^4)^{499} \cdot 7 = 2401^{499} \cdot 7 \Rightarrow 7^{1997} \text{ tận cùng là } 7$$

Vậy A có tận cùng là 0 nên $A:5$.

Bài 44: Cho $a-b$: 6 với $a, b \in \mathbb{Z}$. Chứng minh $a-13b$: 6.

Lời giải

Ta có $a-b$: 6

$$\Rightarrow a-b-12b:6 \text{ vì } 12b:6$$

$$\Rightarrow a-13b:6$$

Vậy $a-13b$: 6.

Bài 45: Cho $x-y=7$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Chứng minh: $22x-y$: 7.

Lời giải

Ta có $x-y=7$

$$\Rightarrow x-y+21x:7 \text{ vì } 21x:7$$

$$\Rightarrow 22x-y:7.$$

Vậy $22x-y$: 7.

Bài 46: Chứng minh $A = 3^{n+2} - 2^{n+3} + 3^n - 2^{n+2}$: 6 với $n \in \mathbb{Z}^*$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 3^{n+2} - 2^{n+3} + 3^n - 2^{n+2}$$

$$\begin{aligned}
&= 3^n \cdot 9 - 2^n \cdot 8 + 3^n - 2^n \cdot 4 \\
&= 3^n \cdot (9+1) - 2^n \cdot (8+4) \\
&= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 12 : 6.
\end{aligned}$$

Bài 47: Cho $a - 11b + 3c : 17$. Chứng minh $2a - 5b + 6c : 17$.

Lời giải

Ta có $a - 11b + 3c : 17$

$$\Rightarrow 2(a - 11b + 3c) : 17$$

$$\Rightarrow 2a - 22b + 6c : 17$$

$$\Rightarrow 2a - 22b + 6c + 17b : 17 \text{ vì } 17b : 17$$

$$\Rightarrow 2a - 5b + 6c : 17.$$

Vậy $2a - 5b + 6c : 17$.

Bài 48: Cho $A = (4a + 7b)(5a + 4b) : 19$ với mọi $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Chứng minh $A : 361$.

Lời giải

Vì $A = (4a + 7b)(5a + 4b) : 19$

Mà 19 là số nguyên tố nên $4a + 7b : 19$ hoặc $5a + 4b : 19$.

+ Nếu $4a + 7b : 19$

$$\Rightarrow 5(4a + 7b) : 19$$

$$\Rightarrow 20a + 35b : 19$$

$$\Rightarrow 20a + 35b - 19b : 19$$

$$\Rightarrow 20a + 16b : 19$$

$$\Rightarrow 4(5a + 4b) : 19$$

Mà $4 \nmid 19$ nên $5a + 4b : 19$.

Vậy $A : 19 \cdot 19 \Rightarrow A : 361$.

+ Nếu $5a + 4b : 19$

$$\Rightarrow 4(5a + 4b) : 19$$

$$\Rightarrow 20a + 16b : 19$$

$$\Rightarrow 20a + 16b + 19b : 19$$

$$\Rightarrow 20a + 35b : 19$$

$$\Rightarrow 5(4a + 7b) : 19$$

Mà $5 \nmid 19$ nên $4a + 7b : 19$.

Vậy $A : 19 \cdot 19 \Rightarrow A : 361$.

Bài 48: Chứng minh rằng

$$a. A = 10^{28} + 8 : 72 \quad b. B = 81^7 - 27^9 - 9^{13} : 45$$

Lời giải

a) **Cách 1:**

Ta có: $10^{28} = 2^{28} \cdot 5^{28} = 2^3 \cdot 2^{25} \cdot 5^{28} : 8$ và $8 : 8 \Rightarrow A : 8$

Lại có $10^{28} + 8$ có tổng các chữ số là 9 nên chia hết cho 9. Vậy A chia hết cho 72

Cách 2:

$10^{28} + 8$ có ba chữ số tận cùng là 008 nên chia hết cho 8

$$10^{28} + 8 = \underbrace{10^{28} - 1}_{:9} + 9 \Rightarrow A : 9 \Rightarrow A : 72$$

b) Ta có $81^7 ; 27^9 ; 9^{13}$ chia hết cho 9 nên B chia hết cho 9

Lại có 81^7 có tận cùng là 1

$27^9 = 27^8 \cdot 27 = \overline{\dots 1} \cdot 27$ có tận cùng là 7

$9^{13} = 9^{12} \cdot 9 = \overline{\dots 1} \cdot 9$ có tận cùng là 9

nên B có tận cùng là 5 nên B chia hết cho 5.

Mà $(5; 9) = 1 \Rightarrow B : 5 \cdot 9 \Rightarrow B : 45$

Bài 50: Chứng minh : $A = 2^{20} \cdot 2^4 + 2^{20}$ chia hết cho 17 .

Lời giải

$$A = 2^{20} \cdot (16 + 1) = 2^{20} \cdot 17$$

$$\Rightarrow A : 17$$

Bài 51: Chứng minh rằng: $A = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ chia hết cho 19

Lời giải

Thêm bớt $7 \cdot 6^n$, ta được: $A = 7 \cdot 25^n - 7 \cdot 6^n + 19 \cdot 6^n = 7 \cdot (25^n - 6^n) + 19 \cdot 6^n$

Ta có: $25^n \equiv 6^n \pmod{19}$

$$\Rightarrow (25^n - 6^n) \equiv 0 \pmod{19}$$

$$\Rightarrow 7 \cdot (25^n - 6^n) + 19 \cdot 6^n \equiv 19 \cdot 6^n \pmod{19}$$

$$\Rightarrow A \equiv 0 \pmod{19}$$

Vậy $A : 19$

Ghi chú: Đối với một số bài toán lớp 8 nếu ta sử dụng đến hằng đẳng thức: $a^n - b^n : a - b$ với $(n \in \mathbb{N})$ $a^n + b^n : a + b$ với $(n \in \mathbb{N}; n \text{ lẻ})$. Thì ta có thể giải được một cách dễ dàng, tuy nhiên với học sinh lớp 6 thì chưa thể sử dụng những hằng đẳng thức đó. Vì vậy, ta có thể sử dụng Đồng dư thức để có được lời giải phù hợp với trình độ của học sinh lớp 6.

Bài 52: Chứng minh rằng: a) $A = 2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7 .

b) $B = 1961^{1962} + 1963^{1964} + 1965^{1966} + 2$ chia hết cho 7 .

Lời giải

$$\text{a) Ta có } A = (5555^{2222} - 4^{2222}) + (2222^{5555} + 4^{5555}) - (4^{5555} - 4^{2222})$$

$$\text{Mà } (5555^{2222} - 4^{2222}) : (5555 - 4) \Rightarrow (5555^{2222} - 4^{2222}) : 7$$

$$\text{Tương tự: } (2222^{5555} + 4^{5555}) : 7$$

$$4^{5555} - 4^{2222} = (4^5)^{1111} - (4^2)^{1111} : (4^5 - 4^2) \Rightarrow 4^{5555} - 4^{2222} : 7$$

Vậy $A = 2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7 .

$$\text{b) } B = 1961^{1962} + 1963^{1964} + 1965^{1966} + 2 : 7$$

Sử dụng tính chất: $(a + b)^n$ khi chia cho a có số dư là b

$$\text{Ta có } B = (1960 + 1)^{1962} + (1960 + 3)^{1964} + (1965 - 2)^{1966} + 2$$

$$B = (7m+1)^{1962} + (7n+3)^{1964} + (7p-2)^{1966} + 2$$

$$B = 7q+1+3^{1964} + 2^{1966} + 2$$

$$B = 7q+9.27^{654} + 2.2^{3.655} + 3$$

$$B = 7r+9+2+3$$

$$B = 7r+14 \div 7$$

Bài 53: Chứng minh rằng: $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{200}$ chia hết cho 6

Lời giải

Ta có: Tổng của hai số hạng : $2 + 2^2 = 2 + 4 = 6$

Tổng A có 200 số hạng ta chia thành 100 nhóm chứa hai số hạng có tổng 6.

$$\text{Nên: } A = (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + \dots + (2^{199} + 2^{200})$$

$$A = 6 + 2^2(2 + 2^2) + \dots + 2^{198}(2 + 2^2)$$

$$A = 6 + 2^2(6) + \dots + 2^{198}(6)$$

$$A = 6(1 + 2^2 + \dots + 2^{198})$$

Vậy A chia hết cho 6.

Bài 54: Chứng minh rằng: $A = 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{20}$ chia hết cho 4 và 5.

Lời giải

$$A = (2^2 + 2^4) + (2^6 + 2^8) + \dots + (2^{19} + 2^{20})$$

$$\Rightarrow A = 20 + 2^4(2^2 + 2^4) + \dots + 2^{16}(2^2 + 2^4)$$

$$\Rightarrow A = 20 + 2^4(20) + \dots + 2^{16}(20)$$

$$\Rightarrow A = 20.(1 + 2^4 + \dots + 2^{16})$$

$$\Rightarrow A = 5.4.(1 + 2^4 + \dots + 2^{16})$$

Vậy A chia hết cho 5 và 4.

Bài 55: Chứng minh rằng:

a, $(n+10)(n+15) \div 2$

b, $n(n+1)(n+2) \div 2; 3$

c, $n^2 + n + 1 \not\div 4; 2; 5$

Lời giải

a, Ta có:

Nếu n là số lẻ thì $n+15 \div 2$

Nếu n là số chẵn thì $n+10 \div 2$

Như vậy với mọi n là số tự nhiên thì : $(n+10)(n+15) \div 2$

b, Ta có: $n(n+1)(n+2)$ là tích ba số tự nhiên liên tiếp nên sẽ có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3.

c, Ta có: $n(n+1)+1$ là 1 số lẻ nên $n(n+1)+1 \not\div 4; 2$ và có chữ số tận cùng khác 0 và 5

Bài 56: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì:

$$a. A = n(2n+1)(7n+1) : 6$$

$$b. B = n^3 - 13n : 6$$

Lời giải

a) Ta có: $n+7n+1=8n+1$ là số lẻ nên n chẵn hoặc $7n$ chẵn,

$$\Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 2 \quad (1)$$

Xét các trường hợp :

$$n = 3k \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 3$$

$$n = 3k + 1 \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 3 \quad (\text{do } 2n+1 : 3)$$

$$n = 3k + 2 \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 3 \quad (\text{do } 7n+1 : 3)$$

$$\Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 3 \text{ với mọi số tự nhiên } n \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 2.3$ (Do 2 ; 3 là hai số nguyên tố cùng nhau)

$$\Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 6$$

$$b) B = n^3 - 13n = n^3 - n - 12n = \underbrace{n(n-1)(n+1)}_{:6} - \underbrace{12n}_{:6}$$

$$\text{Vậy } B = n^3 - 13n : 6$$

Bài 57: Chứng minh rằng tổng của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3.

Lời giải

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là: $a, a+1, a+2$

Tổng của ba số tự nhiên liên tiếp là

$$a+a+1+a+2 = (a+a+a) + (1+2) = (3a+3) : 3 \quad (\text{Tính chất chia hết của một tổng}).$$

Nâng cao: Có phải tổng của n số tự nhiên liên tiếp luôn luôn chia hết cho n hay không?

Bài 58: Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp có chia hết cho 4 hay không ?

Lời giải

Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là $a, a+1, a+2, a+3$.

Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp là:

$$a+a+1+a+2+a+3 = (a+a+a+a) + (1+2+3) = (4a+6).$$

Do 4 chia hết cho 4 nên $4a$ chia hết cho 4 mà 6 không chia hết cho 4 nên $(4a+6)$ không chia hết cho 4 \Rightarrow Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp không chia hết cho 4.

Kết luận nâng cao: Vậy không phải lúc nào tổng n số tự nhiên liên tiếp cũng chia hết cho n

Bài 59. a. Cho $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60}$. Chứng minh $A : 3, 7, 15$

b. Chứng minh rằng: $C = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31.

Lời giải

a) Biến đổi:

$$\begin{aligned} A &= (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + \dots + (2^{59} + 2^{60}) \\ &= 2(1+2) + 2^3 \cdot (1+2) + \dots + 2^{59} \cdot (1+2) \\ &= 3 \cdot (2 + 2^3 + \dots + 2^{59}) : 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= (2+2^2+2^3) + (2^4+2^5+2^6) + \dots + (2^{58}+2^{59}+2^{60}) \\
&= 2 \cdot (1+2+2^2) + 2^4 \cdot (1+2+2^2) + \dots + 2^{58} \cdot (1+2+2^2) \\
&= 7 \cdot (2+2^4+\dots+2^{58}) : 7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= (2+2^2+2^3+2^4) + (2^5+2^6+2^7+2^8) + \dots + (2^{57}+2^{58}+2^{59}+2^{60}) \\
&= 2 \cdot (1+2+2^2+2^3) + 2^5 \cdot (1+2+2^2+2^3) + \dots + 2^{57} \cdot (1+2+2^2+2^3) \\
&= 15 \cdot (2+2^5+\dots+2^{57}) : 15
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b. } C &= 2+2^2+2^3+\dots+2^{99}+2^{100} \\
&= 2 \cdot (1+2+2^2+2^3+2^4) + 2^6 \cdot (1+2+2^2+2^3+2^4) + \dots + 2^{96} \cdot (1+2+2^2+2^3+2^4) \\
&= 31 \cdot (2+2^6+\dots+2^{96}) : 31
\end{aligned}$$

Bài 60: Tìm số tự nhiên n để $5n+14$ chia hết cho $n+2$.

Lời giải

Ta có: $5n+14 = 5 \cdot (n+2) + 4$

Mà $5 \cdot (n+2)$ chia hết cho $(n+2)$

Do đó $(5n+14)$ chia hết cho $(n+2)$ nên 4 chia hết cho $(n+2)$ hay $(n+2)$ là ước của 4 .

$$(n+2) \in \{1; 2; 4\}$$

Do đó $n \in \{0; 2\}$

Vậy với $n \in \{0; 2\}$ thì $(5n+14)$ chia hết cho $(n+2)$.

Bài 61: Tìm số tự nhiên n để $\frac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên.

Lời giải

Để $\frac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên thì $(n+15)$ chia hết cho $(n+3)$.

$$[(n+15) - (n+3)] \text{ chia hết cho } (n+3).$$

12 chia hết cho $(n+3)$.

$$(n+3) \text{ là } U(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}.$$

$$n \in \{0; 1; 3; 9\}.$$

Vậy với $n \in \{0; 1; 3; 9\}$ thì $\frac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên.

Bài 62: Tìm số tự nhiên n để $(n^2+3n+6) : (n+3)$.

Lời giải

Ta có: $(n^2+3n+6) : (n+3)$

Suy ra:

$$[n(n+3)+6]:(n+3)$$

Suy ra $6:(n+3)$

Do đó $n+3 \in U(6) = \{1; 2; 3; 6\}$

Vậy $n=0; n=3$ thì $(n^2+3n+6):(n+3)$.

Bài 63: Tìm số nguyên n để phân số $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{4n+5}{2n-1} = \frac{4n-2+7}{2n-1} = \frac{2(2n-1)+7}{2n-1} = 2 + \frac{7}{2n-1}$$

Vì 2 là số nguyên nên để $\frac{4n+5}{2n-1}$ là số nguyên thì $\frac{7}{2n-1}$ là số nguyên

Suy ra $2n-1 \in U(7) = \{-7; -1; 1; 7\}$

$$2n \in \{-6; 0; 2; 8\}$$

$$n \in \{-3; 0; 1; 4\}$$

Vậy với $n \in \{-3; 0; 1; 4\}$ thì $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên.

Dạng 2: Tìm số thỏa mãn điều kiện chia hết.

Bài 1: Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (x, y) sao cho $\overline{34x5y}$ chia hết cho 36

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Ta có: $36 = 9 \cdot 4$ mà $ƯC(4, 9) = 1$

Vậy để $\overline{34x5y}$ chia hết cho 36 thì $\overline{34x5y}$ chia hết cho 4 và 9

$\overline{34x5y}$ chia hết cho 9 khi $3+4+x+5+y:9 \Rightarrow 12+x+y:9(1)$

$\overline{34x5y}$ chia hết cho 4 khi $\overline{5y}:4 \Rightarrow y=2, y=6$

Với $y=2$ thay vào (1) $\Rightarrow 14+x:9 \Rightarrow x=4$

Với $y=6$ thay vào (1) $\Rightarrow 18+x:9 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=9 \end{cases}$

Vậy các cặp (x, y) cần tìm là: $(4, 2); (0, 6); (9, 6)$

Bài 2: Tìm tất cả các số nguyên n để $(n+4):(n+1)$

A. $n \in \{-3; -1; 1; 3\}$

B. $n \in \{-4; -2; 0; 2\}$

C. $n \in \{1; 3\}$

D. $n \in \{0; 2\}$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 3: Bạn Lan tính tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến n và nhận thấy tổng đó chia hết cho 29. Bạn Loan tính tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến m và cũng nhận thấy tổng đó chia hết cho 29. Tìm các số tự nhiên m và n biết rằng $m < n < 50$.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Lời giải

Xét $1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ với $k \in N$ và $0 < k < 50$.

Vì $\frac{k(k+1)}{2}$ chia hết cho 29 nên $k(k+1):29$ mà 29 là số nguyên tố

$\Rightarrow k:29$ hoặc $k+1:29$.

Do $k \in N$ và $0 < k < 50$ nên $k=29$ hoặc $k+1=29 \Rightarrow k \in \{29; 28\}$

$\Rightarrow m=28, n=29$ (vì $m < n < 50$)

Vậy $m=28, n=29$.

Bài 4: Tìm chữ số x để:

- $137 + \overline{3x}$ chia hết cho 13
- $\overline{137x137x}$ chia hết cho 13

Trích đề HSG cấp huyện năm học 2016-2017

Lời giải

a) $137 + \overline{3x}$ chia hết cho 13

$$A = 137 + \overline{3x} = 137 + 30 + x = 12 \cdot 13 + (11 + x) \Rightarrow A:13 \text{ khi } 11 + x:13 \Rightarrow x = 2$$

b) $B = \overline{137x137x} = 13 \cdot 10^6 + \overline{7x} \cdot 10^4 + 13 \cdot 10^2 + \overline{7x} = 13 \cdot (10^6 + 10^2) + \overline{7x} \cdot 10001$

10001 không chia hết cho 13 $\Rightarrow B:13$ khi $\overline{7x}:13 \Rightarrow x = 8$

Bài 5: Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn: $(100a + 3b + 1)(2^a + 10a + b) = 225$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Lời giải

Ta có: $(100a + 3b + 1)(2^a + 10a + b) = 225$ (1)

Vì 225 lẻ nên $\begin{cases} 100a + 3b + 1 \\ 2^a + 10a + b \end{cases}$ cùng lẻ (2)

*) Với $a = 0$:

$$(1) \Leftrightarrow (100 \cdot 0 + 3b + 1)(2^0 + 10 \cdot 0 + b) = 225 \Rightarrow (3b + 1)(1 + b) = 225 = 3^2 \cdot 5^2$$

Vì $3b + 1$ chia cho 3 dư 1 và $3b + 1 > 1 + b$ nên $(3b + 1)(1 + b) = 25 \cdot 9 \Rightarrow \begin{cases} 3b + 1 = 25 \\ 1 + b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow b = 8$

*) Với a là số tự nhiên khác 0: Khi đó $100a$ chẵn, từ (2) $\Rightarrow 3b + 1$ lẻ $\Rightarrow b$ chẵn

$\Rightarrow 2^a + 10a + b$ chẵn, trái với (2) nên $b \in \emptyset$. Vậy $a = 0; b = 8$

Bài 6: Tìm số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số, sao cho chia nó cho 8 thì dư 7 và chia nó cho 31 thì dư 28

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Lời giải

Gọi số cần tìm là a ($a \in \square, 100 \leq a \leq 999$)

Vì a chia cho 8 dư 7 và chia cho 31 dư 28 nên ta có:

$$\begin{cases} a - 7:8 \\ a - 28:31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 7 + 8:8 \\ a - 28 + 31:8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 1:8 \\ a + 3:8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 1 + 64:8 \\ a + 3 + 62:31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 65:8 \\ a + 65:31 \end{cases}$$

Vì $(8, 31) = 1$ nên $a + 65:(8 \cdot 31)$ hay $a + 65:248 \Leftrightarrow a = 248k - 65$ ($k \in \square$ *)

Vì a là số có 3 chữ số lớn nhất nên $k = 4 \Rightarrow a = 927$

Bài 7: Tìm số tự nhiên có 3 chữ số, biết rằng khi chia số đó cho các số 25; 28; 35 thì được các số dư lần lượt là 5; 8; 15

Trích đề HSG trường Nguyễn Khuyến năm 20...-20...

Lời giải

Gọi số tự nhiên phải tìm là x

Từ giả thiết suy ra $(x+20):25, (x+20):28, (x+20):35 \Rightarrow x+20 \in BC(25, 28, 35)$

$BCNN(25; 28; 35) = 700 \Rightarrow x+20 = k \cdot 700 (k \in \mathbb{N})$

Vì x là số tự nhiên có ba chữ số $\Rightarrow x \leq 999 \Rightarrow x+20 \leq 1019 \Rightarrow k=1$

$\Rightarrow x+20 = 700 \Rightarrow x = 680$

Bài 8: a) Tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng bằng 504 và ƯCLN của chúng bằng 42

b) Tìm $a \in \mathbb{N}$ để $a+1$ là bội của $a-1$

c) Cho $K = 10^{28} + 8$. Chứng minh rằng K chia hết cho 72.

Trích đề 59 HSG năm 2018- 2019

Lời giải

a) Gọi a, b là hai số cần tìm, $a, b \in \mathbb{N}^*, a > b, a = 42a', b = 42b', (a', b') = 1$

Vì $a > b \Rightarrow a' > b'$

$a+b = 504 \Rightarrow a'+b' = 12$ có các cặp thỏa mãn là $(11; 1); (7; 5)$

$\Rightarrow (a, b) \in \{(462; 42); (294; 210)\}$

b) Để $a+1$ là bội của $a-1$ nên thì $\frac{a+1}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1}$ là số nguyên khi

$a-1 \in U(2) = \{-1; 1; -2; 2\} \Rightarrow a \in \{0; 2; -1; 3\}$

c) Lập luận được K chia hết cho 9 vì tổng các chữ số là 9 và chia hết cho 8 vì $10^{28} : 8$ và ba chữ số tận cùng là 008. Vậy K chia hết cho 72.

Bài 9: Cho $S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$

a) Chứng minh rằng S là bội của -20

b) Tính S , từ đó suy ra 3^{100} chia cho 4 dư 1

Trích đề 59 HSG năm 2018- 2019

Lời giải

a) Tổng S có 100 số hạng chia thành 25 nhóm, mỗi nhóm 4 số hạng

$S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$

$= (1 + 3 + 3^2 - 3^3) + (3^4 - 3^5 + 3^6 - 3^7) + \dots + (3^{96} - 3^{97} + 3^{98} - 3^{99})$

$= (-20) + 3^4 \cdot (-20) + \dots + 3^{96} \cdot (-20) \Rightarrow S : -20$

b) $S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$

$3S = 3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 + \dots + 3^{99} - 3^{100}$

$\Rightarrow 3S + S = 4S = \frac{1 - 3^{100}}{4}$

$\Rightarrow 3^{100} - 1 : 4 \Rightarrow 3^{100}$ chia cho 4 dư 1.

Bài 10: Tìm chữ số a, b để $\overline{62ab427}$ chia hết cho 99.

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overline{62ab427} &= 62.100000 + \overline{ab} \cdot 1000 + 427 = 6200000 + \overline{ab} \cdot 990 + \overline{ab} \cdot 10 + 370 + 57 \\ &= 62630.99 + \overline{ab} \cdot 990 + \overline{ab} \cdot 10 + 57 \end{aligned}$$

$$\text{Mà } \overline{62ab427} : 99 \text{ suy ra } \overline{ab} \cdot 10 + 57 : 99 \Rightarrow \overline{ab} \cdot 10 + 57 = 99k (k \in \mathbb{Z})$$

Ta thấy $\overline{ab} \cdot 10 + 57$ có chữ số tận cùng là 7 suy ra $99k$ phải có chữ số tận cùng là 7

Suy ra $k = 3$. Do đó

$$\overline{ab} \cdot 10 + 57 = 99 \cdot 3$$

$$\overline{ab} \cdot 10 = 240$$

$$\overline{ab} = 24$$

Vậy $a = 2; b = 4$.

Bài 11: Cho số $\overline{155*710*4*16}$ có 12 chữ số. Chứng minh rằng nếu thay các dấu (*) bởi các chữ số khác nhau trong ba chữ số 1; 2; 3 một cách tùy ý thì số đó luôn chia hết cho 396.

Trích đề HSG Trường THCS Ái Thượng năm 2021-2022

Lời giải

Ta thấy, vị trí của các chữ số thay thế ba dấu sao trong số trên đều ở hàng chẵn và vì ba chữ số đó đôi một khác nhau, lấy từ tập hợp $\{1; 2; 3\}$ nên tổng của chúng luôn bằng $1+2+3=6$.

Mặt khác $396 = 4 \cdot 9 \cdot 11$ trong đó 4; 9; 11 đôi một nguyên tố cùng nhau nên ta cần chứng minh

$$A = \overline{155*710*4*16} \text{ chia hết cho } 4; 9 \text{ và } 11.$$

Thật vậy :

*) $A \equiv 16$ vì số tạo bởi hai chữ số tận cùng của A là 16 chia hết cho 4

*) $A \equiv 0$ vì tổng các chữ số chia hết cho 9 :

$$1+5+5+7+1+4+1+6+(***) = 30+6=36 \text{ chia hết cho } 9$$

*) $A \equiv 0$ vì hiệu số giữa tổng các chữ số hàng chẵn và tổng các chữ số hàng lẻ là 0, chia hết cho 11.

$$\{1+5+7+4+1\} - \{5+1+6+(***)\} = 18 - 12 - 6 = 0$$

Vậy $A \equiv 0$.

Bài 12: Số tự nhiên a chia 36 dư bao nhiêu, biết a chia 4 dư 3 và chia 9 dư 4.

Trích đề HSG Huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Lời giải

Với $a \in \mathbb{N}$, ta có:

$$a \text{ chia } 4 \text{ dư } 3 \text{ nên } a - 3 \equiv 0 \pmod{4}; \text{ suy ra } a - 3 - 7 \cdot 4 \equiv 0 \pmod{4} \text{ hay } a - 31 \equiv 0 \pmod{4}$$

$$a \text{ chia } 9 \text{ dư } 4 \text{ nên } a - 4 \equiv 0 \pmod{9} \text{ suy ra } a - 4 - 3 \cdot 9 \equiv 0 \pmod{9} \text{ hay } a - 31 \equiv 0 \pmod{9}$$

$$\text{mà } (4; 9) = 1 \text{ suy ra } a - 31 \equiv 0 \pmod{4 \cdot 9} \text{ hay } a - 31 \equiv 0 \pmod{36} \text{ Do đó } a \text{ chia } 36 \text{ dư } 31.$$

Bài 13: Tìm số tự nhiên có ba chữ số sao cho khi lấy số đó chia cho 11 thì được thương bằng tổng các chữ số của số phải tìm.

Trích đề HSG Cấp Trường năm 2019-2020

Lời giải

Gọi số đó là \overline{xyz} , trong đó $1 \leq x \leq 9, 0 \leq y, z \leq 9, x, y, z \in \mathbb{Z}$

Theo đề ra ta có: $\overline{xyz} : 11 = (x + y + z)$

$$\overline{xyz} = 11(x + y + z)$$

$$100x + 10y + z = 11x + 11y + 11z$$

$$89x = 10z + y$$

$$\overline{zy} = 89x \quad (*)$$

Do $\overline{zy} < 100 \Rightarrow 89x < 100 \Rightarrow x \leq 1$ mà $x \neq 0 \Rightarrow x = 1$

Thay $x = 1$ vào $(*)$ ta có: $89 \cdot 1 = \overline{zy} \Rightarrow \overline{zy} = 89$

Vậy số cần tìm là 198.

Bài 14: Thay $(*)$ bằng các số thích hợp:

a) $\overline{510^*}; \overline{61^*16}$ chia hết cho 3.

b) $\overline{261^*}$ chia hết cho 2 và chia 3 dư 1.

Trích đề HSG Cấp Trường năm 2019-2020

Lời giải

a) Đề $\overline{510^*}$ chia hết cho 3 thì $5 + 1 + 0 + * = 6 + *$ từ đó tìm được $* \in \{0; 3; 6; 9\}$.

$\overline{61^*16}$ chia hết cho 3 thì $6 + 1 + * + 6 + 1 = 14 + *$ từ đó tìm được $* \in \{1; 4; 7\}$.

b) Đề $\overline{261^*}$ chia hết cho 2 và chia cho 3 dư 1 thì $*$ chẵn và $2 + 6 + 1 + *$ chia 3 dư 1, từ đó tìm được $* = 4$.

Bài 15: Cho $n = \overline{7a5} + \overline{8b4}$. Biết $a - b = 6$ và n chia hết cho 9. Tìm a và b .

Trích đề HSG Hoài Nhơn năm 2015-2016

Lời giải

Ta có: $n = \overline{7a5} + \overline{8b4} : 9$

Có $7 + a + 5 + 8 + b + 4 : 9$

$24 + a + b : 9$

Do đó $a + b \in \{3; 12\}$ (vì $a + b < 19$).

Mà $a - b = 6$ nên $a + b > 3$. Do đó $a + b = 12$.

Kết hợp với $a - b = 6$ suy ra $a = 9, b = 3$.

Bài 16: Tìm x, y biết $\overline{124xy} : 45$.

Trích đề HSG huyện Ba vì năm 2018-2019

Lời giải

Đặt $A = \overline{124xy}$

Để $A:45$ thì $A:5$ và 9

Để $A:5$ thì $y=0$ hoặc $y=5$

Nếu $y=0$, để $A:9$ thì $1+2+4+x+0:9$ suy ra $x=2$.

Nếu $y=5$, để $A:9$ thì $1+2+4+x+5:9$ suy ra $x=6$.

Vậy $(x; y) \in \{(2;0);(6;5)\}$.

Bài 17: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất lớn hơn 10, biết rằng số đó chia cho 5 ; 6 ; 7 có số dư lần lượt là 3 ; 2 ; 1

Trích đề HSG huyện Ba vì năm 2018-2019

Lời giải

Gọi số phải tìm là a ($a \in \mathbb{N}, a > 10$)

Theo đề bài ta có:

a chia cho 5 dư 3 nên $a-3:5$ suy ra $(a-3)-5:5$ hay $a-8:5$

a chia cho 6 dư 2 nên $a-2:6$ suy ra $(a-2)-6:6$ hay $a-8:6$

a chia cho 7 dư 1 nên $a-1:7$ suy ra $(a-1)-7:7$ hay $a-8:7$

Do đó $a-8 \in BC(5;6;7)$

Để a nhỏ nhất lớn hơn 10 thì $a-8 = BCNN(5;6;7) = 210$

$$a-8 = 210$$

$$a = 218$$

Vậy số tự nhiên phải tìm là 218.

Bài 18: Tìm số nguyên n để phân số $M = \frac{2n-7}{n-5}$ có giá trị là số nguyên.

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Lời giải

$$\text{Ta có } M = \frac{2n-7}{n-5} = \frac{2n-10+3}{n-5} = 2 + \frac{3}{n-5} \in \mathbb{Z}$$

để phân số $M = \frac{2n-7}{n-5}$ có giá trị là số nguyên thì $n-5 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$

$n-5$	-3	-1	1	3
n	2	4	6	8

Vậy $n \in \{2; 4; 6; 8\}$.

Bài 19: Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ biết: $2x(3y-2) + (3y-2) = -55$

Trích đề HSG cấp trường Hà Huy Tập năm 2018-2019

Lời giải

$$\text{Ta có } 2x(3y-2) + (3y-2) = -55$$

$$(3y-2)(2x+1) \in U(55) = \{\pm 1; \pm 5; \pm 11; \pm 55\}$$

$2x+1$	-5	5	1	-1	-55	55	11	-11
$3y-2$	11	-11	-55	55	1	-1	-5	5
x	-3	2	0	-1	-28	28	5	-6
y	$\frac{13}{3}$ (loại)	-3 TM	$-\frac{53}{3}$ (loại)	$\frac{57}{3}$ (loại)	1 TM	$\frac{1}{3}$ (loại)	-1 TM	$\frac{7}{3}$ (loại)

Sau khi thử các trường hợp ta có $(x; y) \in \{(5; -1); (2; -3); (-28; 1)\}$

Bài 20: Cho a là một số nguyên có dạng $a = 3b + 7 (b \in \mathbb{Z})$. Hỏi a có thể nhận những giá trị nào trong các giá trị sau: $a = 11; a = 2002; a = 2003; a = 11570; a = 22789; a = 29563; a = 299537$

Trích đề HSG cấp trường Bá Thước năm 2018-2019

Lời giải

Số nguyên có dạng $a = 3b + 7 (b \in \mathbb{Z})$ hay a là số chia 3 dư 1

Vậy a có thể nhận những giá trị là $a = 2002; a = 22789; a = 29563$

Trắc nghiệm

Bài 21: Tập hợp các số nguyên n để $(n+3):(n+1)$ là:

A. $\{0; 1; -2; -3\}$.

B. $\{0; 1\}$.

C. $\{-2; -3\}$.

D. $\{1; 2; -1; -2\}$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: A. $\{0; 1; -2; -3\}$.

Tự luận

Bài 22: Tìm các số có ba chữ số chia hết cho 8 và tổng các chữ số của nó cũng chia hết cho 8.

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

Lời giải

Gọi số cần tìm là \overline{abc} với a, b, c là các chữ số, $a \neq 0$.

Theo đề ta có $\overline{abc} : 8$ và $(a+b+c) : 8$

Với $\overline{abc} : 8$

$(100a+10b+c) : 8$

$(96a+4a+8b+2b+c):8$

$(4a+2b+c):8$

$(3a+b+a+b+c) : 8$ mà $(a+b+c) : 8$

$(3a+b) : 8$ mà $0 < 3a+b \leq 36$ nên $3a+b \in \{8; 16; 24; 32\}$

Lại có $(a+b+c) : 8$ mà $0 < a+b+c \leq 27$ nên $a+b+c \in \{8; 16; 24\}$

+ Với $3a+b=8$ suy ra $a=1, b=5, c=2$ hoặc $a=2, b=2, c=4$

+ Với $3a+b=16$ suy ra $a=3, b=7, c=6$ hoặc $a=4, b=4, c \in (0;8)$

+ Với $3a+b=24$ suy ra $a=5, b=9, c=2$ hoặc $a=6, b=6, c=4$

Vậy các số cần tìm là 224; 440; 448; 592; 664

Bài 23: Tìm số nguyên n để $A = 2n^2 + n - 6$ chia hết cho $2n+1$.

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có $A = 2n^2 + n - 6 = n.(2n+1) - 6$

Vì A chia hết cho $2n+1$ nên $6 : 2n+1$ hay $2n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$

Do $2n+1$ là số lẻ nên ta có bảng sau

$2n+1$	1	-1	3	-3
$2n$	0	-2	2	-4
n	0	-1	1	-2

Vậy với $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$ thì A chia hết cho $2n+1$.

Bài 24: Thay a, b bằng các chữ số thích hợp sao cho $\overline{24a68b} : 45$.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có $45 = 9 \cdot 5$

Vậy $\overline{24a68b} : 45$ thì $\overline{24a68b} : 5, 9$

$\overline{24a68b} : 5$ suy ra $b \in \{0; 5\}$

$\overline{24a68b} : 9$ suy ra $(20+a+b) : 9$

TH1: $b=0$ tìm được $a=7$

TH2: $b=5$ tìm được $a=2$

Vậy $a=7, b=0$ hoặc $a=2, b=5$.

Bài 25: Tìm số tự nhiên n biết: $(3n-2):(2n+1)$.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021-2022

Lời giải

Vì $(3n-2):(2n+1)$ nên $2(3n-2):(2n+1)$ hay $(6n-4):(2n+1)$

và $(2n+1):(2n+1)$ nên $3(2n+1):(2n+1)$ hay $(6n+3):(2n+1)$

Suy ra $(6n+3)-(6n-4):(2n+1)$ hay $7:(2n+1)$.

Vậy $2n+1 \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$.

Ta có bảng sau:

$2n+1$	1	-1	7	-7
n	0	-1	3	-4
$n \in \square$	TM	KTM	TM	KTM

Vậy $n \in \{0; 3\}$.

Bài 26: Cho $A = \frac{12n+1}{2n+3}$. Tìm giá trị của n để A là một số nguyên.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải

$$A = \frac{12n+1}{2n+3} = \frac{6(2n+3)-17}{2n+3} = 6 - \frac{17}{2n+3}$$

A là số nguyên khi $2n+3 \in U(17)$; $2n+3 \in \{\pm 1; \pm 17\}$

Vậy $n \in \{-10; -2; -1; 7\}$.

Bài 27: Số $N = \overline{14a5b}$ trong a, b là các chữ số. Biết rằng N chia hết cho cả 2, 5 và 9. Tính giá trị $a + b$.

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018-2019

Lời giải

Vì $N:2, 5$ nên $b=0$ khi đó tổng các chữ số của N là $1+4+a+5+0=10+a$, mà $N:9$ suy ra $a=8$ suy ra $a+b=8+0=8$

Bài 28: Tìm tất cả các số tự nhiên có 3 chữ số \overline{abc} sao cho $\overline{abc} = n^2 - 1$ và $\overline{cba} = (n-2)^2$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Ta có: $\overline{abc} = 100a + 10b + c = n^2 - 1$ (1)

$\overline{cba} = 100c + 10b + c = n^2 - 4n + 4$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $99(a-c) = 4n-5$ suy ra $44n-5:99$, mặt khác:

$$100 \leq (n^2 - 1) \leq 999 \text{ suy ra } 101 \leq n^2 \leq 10000 \Rightarrow 11 \leq n \leq 100$$

$$\text{suy ra } 39 \leq 4n - 5 \leq 100$$

$$4n - 5 = 99$$

$$n = 26$$

$$\text{Vậy } \overline{abc} = 675$$

Bài 29: Một số tự nhiên chia 7 dư 3, chia 17 dư 12, chia 23 dư 7. Hỏi số đó chia cho 2737 dư bao nhiêu?

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021-2022

Lời giải

Gọi số đã cho là A . Theo bài ra ta có:

$$A \text{ chia } 7 \text{ dư } 3, \text{ chia } 17 \text{ dư } 12, \text{ chia } 23 \text{ dư } 7 \text{ nên } A = 7a + 3 = 17b + 12 = 23c + 7 \text{ (} a, b, c \in \square \text{)}$$

$$\text{Có: } A + 39 = 7a + 42 = 17b + 51 = 23c + 46$$

$$= 7(a+6) = 17(b+3) = 23(c+2)$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} A+39:7 \\ A+39:17 \\ A+39:23 \end{cases}$$

$$\text{Mà } (7;17;23)=1$$

nên $A+39:(7.17.23)$ hay $A+39:2737$.

Khi đó $A+39=2737k, (k \in \mathbb{Z})$

$$A=2737k-39=2737(k-1)+2698$$

Do $2698 < 2737$ nên 2698 là số dư của phép chia A cho 2737.

Bài 30: Trong một đợt trồng cây, một tổ học sinh lớp 6 đã trồng được một số cây. Số đó là nhỏ nhất đem chia cho 3 dư 2, chia cho 4 dư 3, chia cho 5 dư 4, chia cho 10 dư 9. Hỏi số cây trồng được là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi số cây trồng được của một tổ học sinh lớp 6 là a với $a \in \mathbb{Z}$.

Vì a chia cho 3 dư 2 nên $a-2$ chia hết cho 3.

Vì a chia cho 4 dư 3 nên $a-3$ chia hết cho 4.

Vì a chia cho 5 dư 4 nên $a-4$ chia hết cho 5.

Vì a chia cho 10 dư 9 nên $a-9$ chia hết cho 10.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a-2:3 \\ a-3:4 \\ a-4:5 \\ a-9:10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-2+3:3 \\ a-3+4:4 \\ a-4+5:5 \\ a-9+10:10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+1:3 \\ a+1:4 \\ a+1:5 \\ a+1:10 \end{cases}$$

Suy ra $a+1 \in BC(3;4;5;10) = B(60) = \{0;60;120;180;.....\}$

Do đó $a \in \{59;119;179;.....\}$.

Vì a là số nhỏ nhất nên $a=59$.

Vậy một tổ của lớp 6 đã trồng được 59 cây.

Bài 31: Một cửa hàng mới nhập về một số cuốn sách. Chủ cửa hàng yêu cầu nhân viên đóng sách vào các túi. Họ tính rằng nếu đóng vào mỗi túi 8 cuốn thì vừa hết, nếu đóng vào mỗi túi 12 cuốn thì thừa ra 4 cuốn còn nếu đóng vào mỗi túi 14 cuốn thì thừa 6 cuốn. Hỏi cửa hàng mới nhập về bao nhiêu cuốn sách? Biết rằng số sách nhập về trong khoảng từ 230 đến 300 cuốn.

Lời giải

Gọi số sách nhập về là a với $a \in \mathbb{Z}$ và $230 \leq a \leq 300$.

Vì đóng mỗi túi 12 cuốn thì thừa 4 cuốn nên $a-4$ chia hết cho 12

Vì đóng mỗi túi 14 cuốn thì thừa 6 cuốn nên $a-6$ chia hết cho 14

$$\text{Ta có } \begin{cases} a-4:12 \\ a-6:14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-4+12:12 \\ a-6+14:14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+8:12 \\ a+8:14 \end{cases}$$

Suy ra $a+8 \in BC(12;14) = B(84) = \{0;84;168;252;336;.....\}$

Do đó $a \in \{76;160;244;328;.....\}$.

Vì $230 \leq a \leq 300$ nên $a = 244$.

Vậy số sách nhập về là 244 cuốn.

Bài 32: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho số đó chia cho 17; 25 được dư lần lượt là 8; 16.

Lời giải

Vì a chia cho 17 dư 8 nên $a-8$ chia hết cho 17.

Và a chia cho 25 dư 16 nên $a-16$ chia hết cho 25.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a-8:17 \\ a-16:25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-8+17:17 \\ a-16+25:25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+9:17 \\ a+9:25 \end{cases}$$

Suy ra $a+9 \in BC(17;25) = B(425) = \{0;425;850;.....\}$

Do đó $a \in \{416;841;.....\}$.

Vì a nhỏ nhất nên $a = 416$

Bài 33: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có ba chữ số, biết rằng khi chia số đó cho 11, 13 thì được số dư lần lượt là 5 và 10.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là a .

Vì a chia cho 11 dư 5 nên $a-5$ chia hết cho 11.

Vì a chia cho 13 dư 10 nên $a-10$ chia hết cho 13.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a-5:11 \\ a-10:13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-5-44:11 \\ a-10-39:13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-49:11 \\ a-49:13 \end{cases}$$

Suy ra $a-49 \in BC(11;13) = B(143) = \{0;143;286;.....\}$

Do đó $a \in \{49;192;335;.....\}$.

Vì a là số tự nhiên nhỏ nhất có ba chữ số nên $a = 192$.

Bài 43: Khi chia một số tự nhiên a cho 4 ta được số dư là 3 còn khi chia a cho 9 ta được số dư là 5. Tìm số dư trong phép chia a cho 36.

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022

Lời giải

Theo đề bài ta có:

$$a = 4p + 3 = 9q + 3 (p, q \in \mathbb{Z})$$

Suy ra $a + 13 = 4p + 3 + 13 = 4(p + 4)$ (1)

$$a + 13 = 9q + 5 + 13 = 9(q + 2)$$
 (2)

Từ (1) và (2) ta nhận thấy $a + 13$ là bội của 4 và 9 mà $(4, 9) = 1$ suy ra $a + 13$ là bội của $4 \cdot 9 = 36$

Ta có $a + 13 = 36k (k \in \mathbb{Z})$ suy ra $a = 36k - 13 = 36(k - 1) + 23$

Vậy a chia cho 36 dư 23

Bài 35: Tìm số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số, sao cho chia nó cho 8 thì dư 7 và chia nó cho 31 thì dư 28.

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022

Lời giải

Gọi số cần tìm là $a (a \in \mathbb{Z}, 100 \leq a \leq 999)$

Vì a chia cho 8 dư 7 và chia cho 31 dư 28 nên ta có:

$$a - 7 : 8 \text{ và } a - 28 : 31 \text{ suy ra } a - 7 + 72 : 8 \text{ và } a - 28 + 93 : 31 \text{ suy ra } a + 65 : 31, 8$$

Vì $(8, 31) = 1$ nên $a + 65 : (8 \cdot 31)$ hay $a + 65 : 248$ suy ra $a = 248k - 65 (k \in \mathbb{Z}^*)$

Vì a là số có ba chữ số lớn nhất nên $k = 4$ suy ra $a = 927$

Bài 36: Một số tự nhiên chia cho 7 dư 5, chia cho 13 dư 4. Nếu đem số đó chia cho 91 thì dư bao nhiêu?

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Lời giải

Gọi số đó là a

Vì a chia cho 7 dư 5, chia cho 13 dư 4 suy ra $a + 9 : 7; a + 9 : 13$

mà $(7, 13) = 1$ nên $a + 9$ chia hết cho $7 \cdot 13$

suy ra $a + 9 = 91k$ suy ra $a = 91k - 9 = 91k - 91 + 82 = 91(k - 1) + 82 (k \in \mathbb{Z})$

Vậy a chia cho 91 dư 82

Bài 37: Tìm các số nguyên x , biết:

a) $x^2 + 2x + 7 : x + 2$

b) $2x^2 + x + 4 : 2x + 1$.

Lời giải

a) $x^2 + 2x + 7 : x + 2 \Rightarrow x(x + 2) + 7 : x + 2$

Vì $x(x + 2) : x + 2$ với mọi x khác -2 .

Nên $7 : x + 2 \Rightarrow x + 2 \in U(7) = \{1; 7; -1; -7\}$

$$\Rightarrow x \in \{-1; 5; -3; -9\}.$$

b) $2x^2 + x + 4 : 2x + 1$

$$\Rightarrow x(2x + 1) + 4 : 2x + 1$$

Vì $x(2x + 1) : 2x + 1$ với mọi x nguyên

Nên $4 : 2x + 1 \Rightarrow 2x + 1 \in U(4) = \{1; 2; 4; -1; -2; -4\}$

$$\Rightarrow 2x \in \{0; 1; 3; -2; -3; -5\} \Rightarrow x \in \left\{0; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -1; \frac{-3}{2}; \frac{-5}{2}\right\}.$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{0; -1\}$.

Bài 38.

b) Tính tổng C . Tìm x để $2^{2x-1} - 2 = C$

Lời giải

b) $C = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99} + 2^{100} \Rightarrow 2C = 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99} + 2^{100} + 2^{101}$

$$C = 2C - C = 2^{101} - 2$$

$$2^{101} = 2^{2x-1}$$

$$2x-1=101$$

$$x=51$$

Bài 39. Một số chia cho 4 dư 3, chia cho 17 dư 9, chia cho 19 dư 13. Hỏi số đó chia cho 1292 dư bao nhiêu?

Lời giải

Gọi số cần tìm A ta có:

$$A+25=4(q_1+7)=17(q_2+2)=19(q_3+2)$$

$$A=4q_1+3=17q_2+9=19q_3+13$$

$$A+25:4,17,19 \text{ suy ra } A+25=1292k$$

$$A=1292k-25=1292(k+1)+1267$$

Nên khi chia A cho 1292 ta được dư 1267

Bài 40. Số học sinh của một trường học xếp hàng, mỗi hàng có 20 người hoặc 25 người hoặc 30 người đều thừa 15 người. Nếu xếp mỗi hàng 41 người đều vừa đủ. Tính số học sinh của trường đó, biết số học sinh của trường chưa đến 1000.

Lời giải

Gọi số học sinh của trường là x

Theo đề ta suy ra $x-15$ chia hết cho 20; 25; 30 suy ra $x-15 \in BC(20, 25, 30)$

$$BCNN(20, 25, 30) = 300 \text{ và } x < 1000 \text{ do đó } x \in \{315; 615; 915\}$$

Vì $x:41$ nên $x=615$. Vậy số học sinh của trường là 615 em

Dạng 3: Dùng phương pháp phản chứng; nguyên lý Dirichlet để chứng minh chia hết hoặc không chia hết.

Bài 1: Cho 2023 số tự nhiên bất kì: $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2023}$. Chứng minh rằng tồn tại một số hoặc tổng một số các số liên tiếp nhau trong dãy trên chia hết cho 2023.

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2022 - 2023

Lời giải

$$\text{Đặt } B_1 = a_1$$

$$B_2 = a_1 + a_2$$

.....

$$B_{2023} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2023}$$

Nếu tồn tại B_i ($i=1; 2; 3; \dots; 2023$) nào đó chia hết cho 2023 thì bài toán được chứng minh

Nếu không tồn tại B_i chia hết cho 2023 ta làm như sau

Ta đem B_i chia cho 2023 sẽ được 2022 số dư (các số dư thuộc $\{1; 2; 3; \dots; 2022\}$). Theo nguyên lý

Dirichlet phải có ít nhất hai số có số dư bằng nhau, giả sử hai số đó là B_m ; và B_n suy ra

$B_n - B_m$ ($n > m$) chia hết cho 2023, mà $B_n - B_m$ là một số hoặc là tổng số các số liên tiếp ta được điều phải chứng minh.

Bài 2: Cho 2016 số tự nhiên $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2015}; a_{2016}$. Chứng minh rằng trong 2016 số ấy, tồn tại một số chia hết cho 2016 hoặc tồn tại một vài số chia hết cho 2016.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Tường năm 2015 - 2016

Lời giải

Nếu một trong 2016 số tự nhiên đó có số 2016. Thì 2016 chia hết cho 2016. Bài toán được chứng minh.

Nếu tất cả 2016 số từ $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2015}; a_{2016}$ không có số nào chia hết cho 2016. Thì mỗi số đó khi chia cho 2016 sẽ nhận được 2015 số dư 1; 2; 3; ...; 2014; 2015.

Có 2016 số mà có 2015 số dư nên tồn tại 2 số có cùng số dư khi chia cho 2016.

Suy ra hiệu của hai số chia hết cho 2016 (đpcm).

Bài 3: Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên chỉ được viết bởi chữ số 2 và chữ số 0 mà số đó chia hết cho 2015.

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015 - 2016

Lời giải

Xét 2016 số : 2; 22; 222; ...; 222...2 số cuối cùng có 2016 chữ số 2.

Các số này khi chia cho 2015 ta được 2016 số dư. Mà một số tự nhiên bất kỳ khi chia cho 2015 chỉ có thể có số dư là : 0; 1; 2; ...; 2014 có 2015 khả năng dư.

Do đó theo nguyên tắc Dirichlê tồn tại hai số trong các số trên có cùng số dư khi chia cho 2015. Hiệu của chúng có dạng 222...2000...0 chia hết cho 2015.

II. Số nguyên tố, hợp số.

Dạng 1: Tìm số để biểu thức là số nguyên tố, hợp số.

Bài 1: Với giá trị nào của k thì dãy $k+1, k+2, k+3, \dots, k+10$ chứa nhiều số nguyên tố nhất?

A. $k = 5$

B. $k = 10$

C. $k = 0$

D. $k = 1$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 2: Có bao nhiêu số nguyên dương n để $3n-16; 4n-21, 5n-23$ là các số nguyên tố?

A. 3

B. 2

C. 1

D. 4

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 3: Tìm số nguyên tố p sao cho $p+10$ và $p+14$ đều là số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015-2016

Lời giải

Xét các trường hợp sau :

Với $p = 2$ thì $p+10 = 2+10 = 12$; (loại)

$p+14 = 2+14 = 16$ (loại)

Nên $p = 2$ là nguyên tố (loại)

Với $p = 3$ thì $p+10 = 3+10 = 13$ (Thỏa mãn)

$p+14 = 3+14 = 17$ (Thỏa mãn)

Nên $p = 3$ là nguyên tố (nhận)

Với $p > 3$ thì $p = 3k+1$ hoặc $p = 3k+2$

Nếu $p = 3k+1$ thì $p+14 = 3k+1+14 = 3k+15; 3$ nên $p+14$ là hợp số (loại)

Nếu $p = 3k+2$ thì $p+10 = 3k+2+10 = 3k+12; 3$ nên $p+10$ là hợp số. (loại)

Vậy với $p = 3$ thì $p+10$ và $p+14$ là nguyên tố.

Bài 4: Tìm các số nguyên tố p sao cho p^2+44 cũng là số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Tường năm 2015 -2016

Lời giải

* Với $p = 2$ thì $p^2 + 44 = 2^2 + 44 = 48$; 2 không là số nguyên tố.

* Với $p = 3$ thì $p^2 + 44 = 3^2 + 44 = 53$ cũng là số nguyên tố.

Vậy $p = 3$ thỏa mãn.

* Với $p > 3$, vì p là số nguyên tố nên p không chia hết cho 3 nên $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2$

Trường hợp 1: $p = 3k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} \text{Ta có } p^2 + 44 &= (3k + 1)^2 + 44 = (3k + 1) \cdot (3k + 1) + 44 \\ &= 3k \cdot (3k + 1) + 1 \cdot (3k + 1) + 44 = 9k^2 + 3k + 3k + 1 + 44 \\ &= 9k^2 + 6k + 45 = 3 \cdot (3k^2 + 2k + 15) : 3 . \end{aligned}$$

Vậy trường hợp này loại.

Trường hợp 2: $p = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } p^2 + 44 &= (3k + 2)^2 + 44 = (3k + 2) \cdot (3k + 2) + 44 \\ &= 3k \cdot (3k + 2) + 2 \cdot (3k + 2) + 44 \\ &= 9k^2 + 6k + 6k + 4 + 44 \\ &= 9k^2 + 12k + 48 = 3 \cdot (3k^2 + 4k + 16) : 3 \end{aligned}$$

Vậy trường hợp này loại.

Vậy với $p = 3$ thì $p^2 + 44$ cũng là số nguyên tố.

Bài 5: Tìm p nguyên tố để $p + 10$ và $p + 26$ cũng là số nguyên tố

Trích đề HSG huyện Ba vì năm 2018-2019

Lời giải

* Với $p = 2$ thì $p + 10 = 2 + 10 = 12$ và $p + 26 = 2 + 26 = 28$ không là số nguyên tố.

* Với $p = 3$ thì $p + 10 = 13$ và $p + 26 = 29$ đều là số nguyên tố nên $p = 3$ thỏa mãn.

* Với $p > 3$, vì p là số nguyên tố nên p không chia hết cho 3 nên $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2$

Nếu $p = 3k + 1$ thì $p + 26 = 3k + 1 + 26 = 3k + 27 = 3 \cdot (k + 9) : 3$ không thỏa mãn

Nếu $p = 3k + 2$ thì $p + 10 = 3k + 2 + 10 = 3k + 12 = 3 \cdot (k + 4) : 3$ không thỏa mãn

Vậy $p = 3$.

Bài 6: Cho p và $p + 4$ là các số nguyên tố ($p > 3$). Chứng minh rằng $p + 8$ là hợp số.

Trích đề HSG cấp trường vòng 2 THCS Tân Lập năm 2018-2019

Lời giải

Vì $p > 3$ nên p có dạng $3k + 1$; $3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$)

Với $p = 3k + 2$ thì $p + 4$ là hợp số (trái với đề bài)

Với $p = 3k + 1$ thì $p + 8 = 3k + 9 : 3$ hay $p + 8$ là hợp số

Bài 7: Tìm số tự nhiên x sao cho $2x + 1$, $2x + 3$ và $2x + 11$ đều là các số nguyên tố.

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Lời giải

- Với $x = 0$ thì $2x + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ không là số nguyên tố. Do đó $x = 0$ không thỏa mãn đề bài.

- Với $x=1$ thì $2x+1=2.1+1=3$, $2x+3=2.1+3=5$, $2x+11=2.1+11=13$ đều là các số nguyên tố.
Do đó $x=1$ thỏa mãn đề bài.

- Với $x=2$ thì $2x+11=2.2+11=15$ là hợp số. Do đó $x=2$ không thỏa mãn đề bài.

- Với $x=3$ thì $2x+3=2.3+3=9$ là hợp số. Do đó $x=3$ không thỏa mãn đề bài.

- Với $x=4$ thì $2x+1=2.4+1=9$ là hợp số. Do đó $x=4$ không thỏa mãn đề bài.

- Với $x>4$ thì n có dạng $x=4k+1$, $x=4k+2$, $x=4k+3$, ($k \in \mathbb{N}^*$).

+ Với $x=4k+1$ thì $2x+11=2(4k+1)+11=8k+13$ là hợp số. Do đó $x=4k+1$ không thỏa mãn.

+ Với $x=4k+3$ thì $2x+3=2(4k+3)+3=8k+9$ là hợp số. Do đó $x=4k+3$ không thỏa mãn.

+ Với $x=4k+2$ thì $2x+11=2(4k+2)+11=8k+15$ là hợp số. Do đó $x=4k+2$ không thỏa mãn.

Do đó $x=1$ thỏa mãn đề bài.

Bài 8: Cho n là số nguyên tố lớn hơn 3. Hỏi $n^2 + 2006$ là số nguyên tố hay hợp số.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

n là số nguyên tố nên $n > 3$ và không chia hết cho 3. Vậy n^2 chia cho 3 dư 1 do đó

$$n^2 + 2006 = 3m + 1 + 2006 = 3m + 2007 = 3.(m + 669) : 3$$

Vậy $n^2 + 2006$ là hợp số.

Bài 9: Cho $a, b, c, d, n \in \mathbb{N}^*$, biết $ab = cd$. Chứng minh rằng $a^n + b^n + c^n + d^n$ là hợp số.

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Lời giải

Giả sử $t = (a, c)$. Đặt $a = a_1 t$; $c = c_1 t$ với $(a_1, c_1) = 1$

$$ab = cd, \text{ suy ra } a_1 b t = c_1 d t, \text{ suy ra } a_1 b = c_1 d$$

Mà $(a_1, c_1) = 1$, suy ra $b : c_1$, đặt $b = c_1 k$ do đó: $d = a_1 k$

Ta có:

$$A = a_1^n . t^n + c_1^n . k^n + c_1^n . t^n + a_1^n . k^n$$

$$A = (a_1^n + c_1^n) (k^n + t^n)$$

Vì a_1, c_1, t, k nguyên dương nên A là hợp số.

Bài 10: Chứng minh rằng: nếu p và $p^2 + 2$ là các số nguyên tố thì $p^3 + 2$ cũng là số nguyên tố

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2019-2020

Lời giải

Ta nhận xét rằng với mọi số nguyên tố lớn hơn 3 thì chia cho 3 đều có dạng $p = 3k + 1$ hoặc

$$p = 3k + 2 (k \in \mathbb{N}^*)$$

Với $p = 3k + 1$ thì $p^2 + 2 = 9k^2 + 6k + 3$ chia hết cho 3

Với $p = 3k + 2$ thì $p^2 + 2 = 9k^2 - 6k + 6$ chia hết cho 3

Vì p nguyên tố nên $p \geq 2$, khi đó trong cả 2 trường hợp trên thì $p^2 + 2$ đều lớn hơn 3 và chia hết cho 3.

Tức là $p^2 + 2$ là hợp số

Suy ra $p^3 + 2$ chỉ là số nguyên tố khi $p = 3$ (khi đó $p^2 + 2 = 11$ là số nguyên tố)

Suy ra $p^3 + 2 = 27 + 2 = 29$ là số nguyên tố.

Vậy nếu p và $p^2 + 2$ là các số nguyên tố thì $p^3 + 2$ cũng là số nguyên tố

Dạng 2: Chứng minh là số nguyên tố, hợp số.

Bài 1: Chứng tỏ rằng $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Lời giải

Gọi d là ước chung của $12n+1$ và $30n+2$ ta có:

$$5(12n+1) - 2(30n+2) = 1 \text{ chia hết cho } d$$

Vậy $d = 1$ nên $12n+1$ và $30n+2$ nguyên tố cùng nhau

Do đó: $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản

Bài 2: Chứng minh rằng: Nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 và $2p+1$ cũng là số nguyên tố thì $4p+1$ là hợp số.

Trích đề HSG huyện Tiền Hải năm 2016 -2017

Lời giải

Vì p là số nguyên tố, $p > 3$ nên $4p$ không chia hết cho 3.

$$\text{Ta có: } 4p+2 = 2(2p+1)$$

Theo bài ra $p > 3 \Rightarrow 2p+1 > 7$ và là số nguyên tố.

Suy ra $2p+1$ không chia hết cho 3. Hay $4p+2$ không chia hết cho 3.

Mà $4p; 4p+1; 4p+2$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên tồn tại một số chia hết cho 3, do đó $4p+1$ chia hết cho 3.

Vì $4p+1 > 13$ nên $4p+1$ là số tự nhiên lớn hơn 1 và có nhiều hơn 2 ước.

Suy ra $4p+1$ là hợp số.

Bài 3: Cho p và $10p+1$ là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh $17p+1$ là hợp số.

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Lời giải

$$\text{Ta có } 10p+1 = 9p + (p+1).$$

Ta có $10p+1$ nguyên tố lớn hơn 3 nên $10p+1$ không chia hết cho 3

Mà $9p$ chia hết cho 3

Nên $p+1$ không chia hết cho 3

Ta có p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3

Trong ba số: $p-1; p; p+1$ có một số chia hết cho 3

Mà p và $p+1$ không chia hết cho 3

$$\text{Suy ra } p-1 \vdots 3 \text{ suy ra } 18p - (p-1) \vdots 3 \text{ hay } 17p+1 \vdots 3.$$

Mà $17p+1 > 3$ suy ra $17p+1$ là hợp số

Vậy với p và $10p+1$ là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì $17p+1$ là hợp số.

Bài 4: Chứng tỏ rằng $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Lời giải

Chúng tỏ rằng $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản

Gọi d là ước chung lớn nhất của $12n+1$ và $30n+2$ ta có:

$$12n+1 : d \text{ suy ra } 5(12n+1) : d$$

$$30n+2 : d \text{ suy ra } 2(30n+2) : d$$

$$(5(12n+1) - 2(30n+2)) : d$$

$$1 : d \text{ hay } d = 1$$

Do đó $12n+1$ và $30n+2$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Vậy $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản.

Dạng 3: Tìm số nguyên tố thỏa mãn điều kiện cho trước.

Bài 1: Tìm số nguyên tố p sao cho $p+6, p+12, p+18, p+24$ cũng là các số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Lời giải

Với $p = 2; p = 3$ thấy không thỏa mãn

Với $p = 5$, ta có:

$$p+6 = 5+6 = 11; p+12 = 5+12 = 17; p+18 = 5+18 = 23; p+24 = 5+24 = 29$$

đều là số nguyên tố (thỏa mãn)

Với $p > 5$, ta xét các khả năng:

$$p = 5k+1; p = 5k+2; p = 5k+3; p = 5k+4 \text{ (với } k \in \mathbb{N}^* \text{)} \text{ đều không thỏa mãn}$$

Vậy $p = 5$

Bài 2: Tìm các số nguyên tố x, y sao cho: $x^2 + 45 = y^2$

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Lời giải

$$x^2 + 45 = y^2 \Rightarrow y^2 > 45, \text{ do đó } y \text{ là số nguyên tố lẻ}$$

Suy ra x là số nguyên tố chẵn nên $x = 2$. từ đó ta có:

$$y^2 = 4 + 45 = 49 \Rightarrow y = 7$$

Bài 3: Tìm số nguyên tố p để $p+6; p+8; p+12; p+14$ đều là các số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện năm 2019-2020

Lời giải

Xét phép chia của p cho 5 ta thấy p có 1 trong 5 dạng sau

$$p = 5k, p = 5k+1, p = 5k+2, p = 5k+3, p = 5k+4$$

+Nếu $p = 5k$ thì p nguyên tố nên $k = 1 \Rightarrow p = 5$

+Nếu $p = 5k+1 \Rightarrow p+14 = 5(k+3) : 5$ và $p > 5$ nên là hợp số (loại)

+Nếu $p = 5k+2 \Rightarrow p+8 = 5(k+2) : 5, p > 5$ nên là hợp số (loại)

+Nếu $p = 5k+3 \Rightarrow p+12 = 5(k+3) : 5, p > 5$ nên là hợp số (loại)

+nếu $p = 5k+4 \Rightarrow p+6 = 5(k+2) : 5, p > 5$ nên là hợp số (loại)

Thử lại với $p = 5$ thỏa mãn.

Bài 4: Tìm số nguyên tố P sao cho: $P+10$ và $P+14$ đều là những số nguyên tố

Trích đề HSG Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020

Lời giải

$$P = 2 \Rightarrow P+10; P+14 \text{ không là nguyên tố}$$

$P = 3 \Rightarrow P + 10 = 13; P + 14 = 17$ là số nguyên tố (thỏa mãn)

$P > 3 \Rightarrow P = 3k + 1$ hoặc $P = 3k + 2$ (do P nguyên tố)

Khi đó ta thấy $P + 10$, hoặc $P + 14$ không nguyên tố

Vậy chỉ có $P = 3$ thỏa mãn

Bài 5: Hiệu của hai số nguyên tố có thể bằng 2013 được không? Vì sao?

Trích đề HSG huyện Quế Sơn năm 2018-2019

Lời giải

Xét tính chẵn, lẻ của hai số nguyên tố:

- Đều là số lẻ (nếu cả hai đều lớn hơn 2): Lúc đó hiệu là số chẵn nên không thể bằng 2013

- Có 1 số chẵn (là số 2) và một số lẻ. Lúc đó hai số có hiệu bằng 2013 là 2015 và 2. Số 2015 không là số nguyên tố.

Vậy hiệu hai số nguyên tố không thể bằng 2013.

Bài 6: Tìm số nguyên tố \overline{ab} ($a > b > 0$) sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Lời giải

$$\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 9(a - b) = 3^2(a - b)$$

Vì $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương nên $a - b$ là số chính phương

Vì $1 \leq a - b \leq 8$ nên $a - b \in \{1; 4\}$

Với $a - b = 1$ thì $\overline{ab} \in \{21; 32; 43; 54; 76; 87; 98\}$

Loại các hợp số là 21; 32; 54; 76; 87; 98; còn lại 43 là số nguyên tố.

Với $a - b = 4$ thì $\overline{ab} \in \{51; 62; 73; 84; 95\}$

Loại các hợp số là 51; 62; 84; 95; còn lại 73 là số nguyên tố

Vậy \overline{ab} là 43 hoặc 73. Khi đó $\overline{ab} - \overline{ba} = 43 - 34 = 9 = 3^2$

$$\text{Hoặc } \overline{ab} - \overline{ba} = 73 - 37 = 36 = 6^2$$

Bài 7: Tìm số nguyên tố p sao cho $p + 2, p + 4$ là số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 - 2022

Lời giải

- Nếu $p = 2$, thì $p + 2 = 2 + 2 = 4$ và $p + 4 = 2 + 4 = 6$ đều không phải là số nguyên tố.

- Nếu $p = 3$, thì $p + 2 = 3 + 2 = 5$ và $p + 4 = 3 + 4 = 7$ đều là số nguyên tố.

- Nếu $p > 3$ thì số nguyên tố p có một trong 3 dạng: $3k + 1; 3k + 2$ với $k \in \mathbb{N}^*$

+ Nếu $p = 3k + 1 \Rightarrow p + 2 = 3k + 3$ chia hết cho 3, không là số nguyên tố.

+ Nếu $p = 3k + 2 \Rightarrow p + 4 = 3k + 6$ chia hết cho 3, không là số nguyên tố.

Vậy $p = 3$.

Bài 8: Cho $140 = a^2 \cdot b \cdot 7$, với a, b là các số nguyên tố. Giá trị của a, b là?

Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 - 2022

Lời giải

$$140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow a = 2; b = 5$$

Bài 9: Tìm các số nguyên tố p , sao cho các số sau cũng là số nguyên tố:

$$p + 2, p + 6, p + 8, p + 12, p + 14.$$

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021-2022

Lời giải

TH1: Nếu $p = 2$ thì $p + 2 = 2 + 2 = 4$ là hợp số suy ra $p = 2$ (loại)

TH2: Nếu $p = 3$ thì $p + 6 = 3 + 6 = 9$ là hợp số suy ra $p = 3$ (loại)

TH3: Nếu $p = 5$ thì

$p + 6 = 11$ là số nguyên tố.

$p + 8 = 13$ là số nguyên tố.

$p + 12 = 17$ là số nguyên tố.

$p + 14 = 19$ là số nguyên tố.

Vậy $p = 5$ thỏa mãn.

TH4: Nếu $p > 5$ thì p không chia hết cho 5 thì $p \in \{5k + 1; 5k + 2; 5k + 3; 5k + 4\}$ với $k \in \mathbb{N}^*$

Nếu $p = 5k + 1$ thì $p + 14 = 5k + 1 + 14 = 5k + 15 = 5(k + 3)$ suy ra $(p + 14) : 5$ mà $p + 14 > 5$ với $p > 5$ nên $p + 14$ là hợp số.

Nếu $p = 5k + 2$ thì $p + 8 = 5k + 2 + 8 = 5k + 10 = 5(k + 2)$ suy ra $(p + 8) : 5$ mà $p + 8 > 5$ với $p > 5$ nên $p + 8$ là hợp số.

Nếu $p = 5k + 3$ thì $p + 12 = 5k + 3 + 12 = 5k + 15 = 5(k + 3)$ suy ra $(p + 12) : 5$ mà $p + 12 > 5$ với $p > 5$ nên $p + 12$ là hợp số.

Nếu $p = 5k + 4$ thì $p + 6 = 5k + 4 + 6 = 5k + 10 = 5(k + 2)$ suy ra $(p + 6) : 5$ mà $p + 6 > 5$ với $p > 5$ nên $p + 6$ là hợp số.

Từ các trường hợp trên thì $p > 5$ loại.

Vậy $p = 5$.

Bài 10: Tìm các số nguyên tố x và y biết $x^2 - 6y^2 = 1$.

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Lời giải

Ta có : $x^2 - 1 = 6y^2$.

Do $6y^2 : 2 \Rightarrow x^2 - 1 : 2$ mà $x^2 - 1 = x^2 - x + x - 1 = x(x - 1) + (x - 1) = (x + 1)(x - 1) : 2$

Ta thấy $(x + 1)(x - 1) = 2x : 2$, do đó $x + 1$ và $x - 1$ là hai số chẵn liên tiếp

$\Rightarrow (x + 1)(x - 1) : 8 \Rightarrow 6y^2 : 8 \Rightarrow 3y^2 : 4$,

Do $(3; 4) = 1$, nên $y^2 : 4$,

Theo đề bài cho y là số nguyên tố nên chỉ có giá trị $y = 2$ là thỏa mãn.

$$x^2 - 1 = 24$$

$$x^2 = 25$$

$x = 5$ (do x là số nguyên tố)

Vậy $(x; y) = (5; 2)$.

Trắc nghiệm

Bài 11: Cho các số 312; 213; 435; 417; 3311; 67. Số các số nguyên tố trong các số đã cho là:

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiên (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: B. 1.

Tự luận

Bài 12: Tìm các số nguyên tố x và y biết $x^2 - 6y^2 = 1$.

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có $x^2 - 6y^2 = 1$

$$x^2 - 1 = 6y^2$$

$$x^2 - x + x - 1 = 6y^2$$

$$(x-1)(x+1) = 6y^2$$

Vì $6y^2 \div 2$ nên $(x-1)(x+1) \div 2$ mà $(x+1) + (x-1) = 2x \div 2$ nên $x-1$ và $x+1$ là hai số chẵn liên tiếp suy ra $(x+1)(x-1) \div 8$

Do đó $6y^2 \div 8$ suy ra $3y^2 \div 4$ nên $y \div 2$ mà y là số nguyên tố nên $y = 2$.

Với $y = 2$, suy ra $x^2 - 6 \cdot 2^2 = 1$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5$$

Vậy $(x; y) = (5; 2)$.

Bài 13: Tìm số nguyên tố p sao cho $p+10, p+14$ cũng là các số nguyên tố.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Lời giải

Giả sử với $p = 2$ là số nguyên tố thì $p+10 = 12 \div 2$ là hợp số nên $p = 2$ (loại).

Với $p = 3$ là số nguyên tố thì $p+10 = 13, p+14 = 17$ đều là số nguyên tố nên $p = 3$ (thỏa mãn điều kiện)

Với $p > 3$ thì $p = 3k + 1, p = 3k + 2, (k \in \mathbb{N}^*)$

Nếu $p = 3k + 1$ giả sử là số nguyên tố thì $p+14 = 3k + 1 + 14 = 3k + 15 \div 3$ là hợp số nên $p = 3k + 1$ (loại)

Nếu $p = 3k + 2$ giả sử là số nguyên tố thì $p+10 = 3k + 2 + 10 = 3k + 12 \div 3$ là hợp số nên $p = 3k + 2$ (loại)

Vậy $p = 3$ là số nguyên tố cần tìm.

Bài 14: Tìm số nguyên tố p sao cho $p+20$ và $p+10$ là các số nguyên tố.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Nếu $p = 2$ thì $p+20 = 22$ là hợp số (không thỏa mãn).

Nếu $p = 3$ thì $p + 20 = 23$, $p + 10 = 13$ đều là các số nguyên tố.

Nếu $p > 3$ thì p có các dạng $p = 3k + 1$; $p = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

+ Với $p = 3k + 1$ thì $p + 20 = 3k + 21$ chia hết cho 3 và lớn hơn 3 nên là hợp số (loại).

+ Với $p = 3k + 2$ thì $p + 10 = 3k + 12$ chia hết cho 3 và lớn hơn 3 nên là hợp số (loại).

Vậy $p = 3$

Bài 15: Tìm các số nguyên tố a, b, c thỏa mãn $a^b + 1 = c$

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Lời giải

Vì a, b là các số nguyên tố nên $a \geq 2, b \geq 2$ suy ra $c \geq 5$ suy ra a^b là số chẵn suy ra a chẵn mà a là số nguyên tố nên $a = 2$ thay vào ta có $c = 2^b + 1$

Nếu b lẻ suy ra $2^b + 1 \equiv 3 \pmod{3}$ (vì $x^n + y^n \equiv x + y \pmod{3}$ nếu n lẻ) suy ra $c \equiv 3 \pmod{3}$ mà $c \geq 5$ suy ra c là hợp số (loại)

Do đó b là số chẵn nên $b = 2$

Thay $a = 2, b = 2$ suy ra $c = 5$

Vậy $a = 2; b = 2$ suy ra $c = 5$

III. Bội và ước.

Dạng 1: Chứng minh hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 1: Cho $a + b = p$ (p nguyên tố). Chứng minh a và b nguyên tố cùng nhau.

Trích đề HSG Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020

Lời giải

Giả sử a và b không nguyên tố cùng nhau. Suy ra a và b có ít nhất một ước chung $d > 1$

$\Rightarrow a:d, b:d \Rightarrow (a+b):d \Rightarrow P:d, d > 1$ điều này vô lý vì p nguyên tố $\Rightarrow (a, b) = 1$

Bài 2: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $UCLN(21n+4; 14n+3) = 1$.

Trích đề HSG huyện Tiên Hải năm 2016-2017

Lời giải

Gọi d là $UCLN(21n+4; 14n+3)$ thì $21n+4:d$ và $14n+3:d$

Suy ra $2.(21n+4):d$ và $14n+3:d$

$2.(21n+4):d$ và $3.(14n+3):d$

$3.(14n+3) - 2.(21n+4):d$

$1:d$ suy ra $d = 1$

Vậy $UCLN(21n+4; 14n+3) = 1$.

Bài 3: Chứng minh với mọi số nguyên dương n thì $2n+1$ và $6n+5$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Lời giải

Gọi $d = UCLN(2n+1, 6n+5)$ thì $2n+1:d$ và $6n+5:d$

Suy ra $6n+5 - 3(2n+1):d$

$2:d$ suy ra $d \in \{1; 2\}$.

Vì n nguyên dương nên $2n+1$ không chia hết cho 2 do đó $d=1$.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì $2n+1$ và $6n+5$ nguyên tố cùng nhau

Trắc nghiệm

Bài 4: ƯCLN($n+1; 2n+5$) là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: C. 3.

Tự luận

Bài 5. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $\frac{5n+3}{3n+2}$ là phân số tối giản.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Lời giải

Gọi $d = \text{UCLN}(5n+3, 3n+2)$ thì $5n+3 \vdots d$; $3n+2 \vdots d$

Do đó: $3 \cdot (5n+3) \vdots d$ và $5 \cdot (3n+2) \vdots d$.

Suy ra $[15n+10 - (15n+9)] \vdots d$

hay $1 \vdots d$. Vậy $d=1$

Do vậy: $\frac{5n+3}{3n+2}$ là phân số tối giản.

Dạng 2: Bài toán thực tế về số nguyên tố. (không có)

Dạng 3: Toán quan hệ giữa ƯCLN và BCNN.

Bài 1: Tìm hai số tự nhiên a và b biết: $\text{BCNN}(a, b) = 420$, $\text{ƯCLN}(a, b) = 21$ và $a+21=b$

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Lời giải

Từ dữ liệu đề bài cho, ta có:

Vì $\text{ƯCLN}(a, b) = 21$ nên tồn tại các số tự nhiên m và n khác 0, sao cho:

$$a = 21m; b = 21n \quad (1) \text{ và } \text{ƯCLN}(m, n) = 1 \quad (2)$$

Vì $\text{BCNN}(a, b) = 420$ nên theo trên ta suy ra:

$$\Rightarrow \text{BCNN}(21m; 21n) = 420 = 21 \cdot 20 \Rightarrow \text{BCNN}(m, n) = 20 \quad (3)$$

$$\text{Vì } a+21=b \text{ nên theo trên ta suy ra: } 21m+21=21n \Rightarrow 21(m+1)=21n \Rightarrow m+1=n \quad (4)$$

Trong các trường hợp thỏa mãn các điều kiện (2) và (3), thì chỉ có trường hợp: $m=4, n=5$ hoặc $m=2, n=3$ là thỏa mãn điều kiện (4).

Vậy với $m=4, n=5$ hoặc $m=2, n=3$ ta được các số phải tìm là:

$$a = 21 \cdot 4 = 84; \quad b = 21 \cdot 5 = 105$$

Bài 2: Tìm hai số tự nhiên a và b , biết: $\text{BCNN}(a, b) = 300$; $\text{ƯCLN}(a, b) = 15$ và $a+15=b$

Trích đề HSG huyện Nông Cống năm học 2019-2020

Lời giải

Từ dữ liệu đề bài cho, ta có :

Vì $UCLN(a,b)=15$ nên tồn tại các số tự nhiên m và n khác 0, sao cho:

$$a = 15m; b = 15n \quad (1) \quad \text{và} \quad UCLN(m,n) = 1 \quad (2)$$

Vì $BCNN(a,b) = 300$; nên theo trên, ta suy ra

$$\Rightarrow BCNN(15m, 15n) = 300 = 15 \cdot 20$$

$$\Rightarrow BCNN(m,n) = 20 \quad (3)$$

Vì $a+15 = b$, nên theo trên ta suy ra:

$$\Rightarrow 15m+15 = 15n \Rightarrow 15 \cdot (m+1) = 15n \Rightarrow m+1 = n \quad (4)$$

Trong các trường hợp thỏa mãn các điều kiện (2) và (3), thì chỉ có trường hợp $m = 4; n = 5$ là thỏa mãn điều kiện (4)

Vậy với $m = 4, n = 5$ ta được các số phải tìm là: $a = 15 \cdot 4 = 60; b = 15 \cdot 5 = 75$

Bài 3: Tìm các số tự nhiên x, y, z nhỏ nhất khác không sao cho $18 \cdot x = 24 \cdot y = 36 \cdot z$.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Lời giải

Đặt $18x = 24y = 36z = m$ (với $m \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow m:18; m:24; m:36$

Do x, y, z nhỏ nhất khác không thỏa mãn $18x = 24y = 36z = m$ nên m cũng nhỏ nhất mà $m:18; m:24; m:36 \Rightarrow m = BCNN(18, 24, 36)$

Ta tìm được $BCNN(18, 24, 36) = 72 \Rightarrow m = 72$

Với $m = 72$ ta tìm được $x = 4; y = 3; z = 2$

Vậy $x = 4; y = 3; z = 2$

Bài 4: Khi chia một số tự nhiên a cho 4 ta được số dư là 3. Còn khi chia a cho 9 ta được số dư là 5. Hãy tìm số dư trong phép chia a cho 36

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Lời giải

Đặt $a = 4q + 3 = 9p + 5$ (p, q là thương trong hai phép chia)

$$\Rightarrow a + 13 = 4(q + 4) = 9(p + 2)$$

$$\Rightarrow a + 13 \text{ là bội của } 4 \text{ và } 9, \text{ mà } (4, 9) = 1 \Rightarrow a + 13 \in BC(36) \Rightarrow a + 13 = 36k \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Rightarrow a = 36k - 13 = 36(k - 1) + 23$$

Vậy a chia 36 dư 23.

Bài 5: Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số $\frac{18n+3}{21n+7}$ có thể rút gọn được

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Lời giải

Giả sử $18n+3$ và $21n+7$ cùng chia hết cho số nguyên tố d

$$\Rightarrow 18n+3:d, 21n+7:d \Rightarrow 6(21n+7) - 7(18n+3):d$$

$$\Rightarrow 21:d \Rightarrow d \in U(21) = \{3; 7\}$$

Mà $21n+7$ không chia hết cho 3 nên $d \neq 3$

$$\text{Ta lại có } 21n+7:7 \Rightarrow 18n+3:7 \Rightarrow 18n+3-21:7$$

$$\Rightarrow 18(n-1):7 \text{ mà } (18, 7) = 1 \Rightarrow n-1:7 \Rightarrow n = 7k+1 \quad (k \in \mathbb{N})$$

Vậy để phân số $\frac{18n+3}{21n+7}$ có thể rút gọn được thì $n = 7k+1 \quad (k \in \mathbb{N})$

Bài 6:

a) Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 3 dư 2, chia cho 4 dư 3, chia cho 5 dư 4 và chia cho 6 dư 5

b) Một số chia cho 3 dư 2, chia cho 4 dư 3, chia cho 167 dư 130. Hỏi số đó khi chia cho 2004 thì số dư là bao nhiêu ?

Trích đề Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020
Lời giải

a) Gọi số tự nhiên đó là a ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (a+1):3 \\ (a+1):4 \\ (a+1):5 \\ (a+1):6 \end{array} \right\} \Rightarrow (a+1) \text{ chia hết cho } 3,4,5,6.$$

Mà a nhỏ nhất $\Rightarrow a+1 = BCNN(3,4,5,6) = 60 \Rightarrow a = 59$

b) Gọi số đó là A ta có:

$$A = 3k + 2 \Rightarrow A + 37 = 3k + 2 + 37 = 3(k + 13):3$$

$$A = 4q + 3 \Rightarrow A + 37 = 4q + 4 = 4(q + 10):4$$

$$A = 167r + 130 \Rightarrow A + 37 = 167r + 167 = 167(r + 1):167$$

$$\Rightarrow A + 37 : 3.4.167 = 2004 \Rightarrow A + 37 = 2004n$$

$$\Rightarrow A = 2004n - 37 = 2004(n - 1) + 2004 - 37 = 2004(n - 1) + 1967$$

Vậy A chia cho 2004 có số dư là 1967

Bài 7:

Tìm hai số tự nhiên a và b , biết $a > b$; $a + b = 16$ và $ƯCLN(a, b) = 4$

Trích đề Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020
Lời giải

$$ƯCLN(a, b) = 4 \Rightarrow a = 4k, b = 4m, k, m \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow a + b = 4(k + m) = 16 \Rightarrow k + m = 4$$

Và $a > b$ nên $k > m$ và $k, m \notin \mathbb{N}^*$, do đó $k = 3, m = 1$

Vậy $a = 12, b = 4$

Bài 8: Tìm hai số tự nhiên a và b biết tổng BCNN và ƯCLN của chúng là 15.

HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014 -2015

Lời giải

Giả sử $a > b$

Gọi $d = ƯCLN(a, b)$ ($d \in \mathbb{N}^*$)

Suy ra $a = d.m$; $b = d.n$ [$(m; n) = 1; m > n$]

$$BCNN(a; b) = d.m.n$$

Ta có: $BCNN(a; b) + ƯCLN(a, b) = 15$

$$d.m.n + d = 15$$

$$d.(m.n + 1) = 15$$

$$15 : d$$

Mà $d \in \mathbb{N}^*$

Vậy $d \in \{1; 3; 5; 15\}$

Với $d=1$ thì $m.n+1=15 \Rightarrow m.n=14$

$$\text{Mà } (m; n)=1; m > n \Rightarrow \begin{cases} m=14; n=1 \\ m=7; n=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=14; b=1 \\ a=7; b=2 \end{cases}$$

Với $d=3$ thì $m.n+1=5 \Rightarrow m.n=4$

$$\text{Mà } (m; n)=1; m > n \Rightarrow \begin{cases} m=4 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=12 \\ b=3 \end{cases}$$

Với $d=5$ thì $m.n+1=3 \Rightarrow m.n=2$

$$\text{Mà } (m; n)=1; m > n \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=5 \end{cases}$$

Với $d=15$ thì $m.n+1=1 \Rightarrow m.n=0$, vô lý

Vậy các cặp giá trị $(a; b)$ thỏa mãn đầu bài là: $(14;1);(1;14);(7;2);(2;7);(10;5);(5;10)$.

Bài 9: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia cho 11 dư 6, chia cho 4 dư 1 và chia cho 19 dư 11

HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014 -2015

Lời giải

Gọi số cần tìm là a ($a \in \mathbb{N}$)

Vì khi chia a cho 11 dư 6 suy ra $(a-6):11$ nên $(a-6+33):11$ hay $(a+27):11$

Vì khi chia cho 4 dư 1 suy ra $(a-1):4$ nên $(a-1+28):4$ hay $(a+27):4$

Vì khi chia cho 19 dư 11 suy ra $(a-11):19$ nên $(a-11+38):19$ hay $(a+27):19$

Do a là số tự nhiên nhỏ nhất nên $a+27$ nhỏ nhất.

Suy ra: $a+27 = BCNN(4; 11; 19)$.

Ta có: $4 = 2^2; 11; 19$

$$BCNN(4; 11; 19) = 2^2 \cdot 11 \cdot 19 = 836$$

$$a+27 = 836$$

$$a = 836 - 27 = 809$$

Vậy $a = 809$.

Bài 10: Viết dạng tổng quát của số tự nhiên chia cho 5 thì dư 1, chia cho 7 thì dư 5. Tìm số nhỏ nhất?

HSG huyện Vĩnh Tường năm 2015 -2016

Lời giải

Gọi số tự nhiên chia cho 5 thì dư 1, chia cho 7 thì dư 5 là x ($x \in \mathbb{N}, x > 5$).

Vì x chia cho 5 thì dư 1 nên $x = 5n+1$ với $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Suy ra } x+9 = 5n+1+9$$

$$x+9 = 5n+10 = 5(n+2)$$

$$x+9:5 \quad (1)$$

Vì x chia cho 7 thì dư 5 nên $x = 7m+5$ với $m \in \mathbb{N}$.

$$\text{Suy ra } x+9 = 7m+5+9$$

$$x+9 = 7m+14 = 7(m+2)$$

$$x+9:7 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $x+9 \in BC(5; 7)$

Mà $BCNN(5; 7) = 35$

Suy ra $x+9 = 35k$ hay $x = 35k - 9$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

Vậy dạng của số tự nhiên chia cho 5 thì dư 1, chia cho 7 thì dư 5 là $x = 35k - 9$.

Và số nhỏ nhất ứng với $k = 1$ là $35 \cdot 1 - 9 = 36$.

Bài 11: Cho \overline{ababab} là số có sáu chữ số, chứng tỏ số \overline{ababab} là bội của 3.

HSG huyện Tân Uyên năm 2010 -2011

Lời giải

$$\overline{ababab} = \overline{ab} \cdot 100000 + \overline{ab} \cdot 100 + \overline{ab} \cdot 1 = 10101 \cdot \overline{ab}$$

Do 10101 chia hết cho 3 nên \overline{ababab} chia hết cho 3 hay \overline{ababab} là bội của 3.

Bài 12: Số học sinh khối 6 của một trường chưa đến 400 bạn, biết khi xếp hàng 10;12;15 đều dư 3 nhưng nếu xếp hàng 11 thì không dư. Tính số học sinh khối 6 của trường đó.

HSG huyện Tân Uyên năm 2010 -2011

Lời giải

Gọi số học sinh là a ($0 < a < 400$) (học sinh).

Vì học sinh khối 6 khi xếp hàng 10;12;15 đều dư 3.

Ta có $a - 3 \in BC(10; 12; 15)$

$$BCNN(10; 12; 15) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

$$a - 3 \in BC(10; 12; 15) = B(60) = \{0; 60; 120; 180; 240; 300; 360; 420; \dots\}$$

$$a \in \{3; 63; 123; 183; 243; 303; 363; 423; \dots\}.$$

Vì xếp hàng 11 thì không dư nên $a : 11$.

Trong các giá trị trên, chỉ có $a = 363 < 400$ và $a : 11$.

Vậy số học sinh cần tìm là 363 học sinh.

Bài 13: Tìm 2 số tự nhiên A và B biết rằng A có n ước số tự nhiên là a_1, a_2, \dots, a_n và B có m ước số tự nhiên là b_1, b_2, \dots, b_m thỏa mãn $a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot \dots \cdot a_n^2 = 729$ và $b_1^2 \cdot b_2^2 \cdot \dots \cdot b_m^2 = 1296$.

HSG huyện Sông Lô năm 2015 -2016

Lời giải

$$\text{Từ } a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot \dots \cdot a_n^2 = 729$$

$$(a_1 a_2 \dots a_n)^2 = 27^2$$

$$a_1 a_2 \dots a_n = 27.$$

Giả sử $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Khi đó $a_n = A$ và $a_n : a_1, a_n : a_2, \dots, a_n : a_{n-1}$

Mặt khác $a_1 a_2 \dots a_n = 27 = 1 \cdot 3 \cdot 9$ nên $a_n = 9$. Từ đó $A = 9$

$$\text{Lại có } b_1^2 b_2^2 \dots b_m^2 = 1296$$

$$\text{suy ra } (b_1 b_2 \dots b_m)^2 = 36^2$$

$$b_1 b_2 \dots b_m = 36.$$

Giả sử $b_1 < b_2 < \dots < b_m$. Khi đó $b_m = B$ và $b_m : b_1, b_m : b_2, \dots, b_m : b_{m-1}$

Vì $b_1 b_2 \dots b_m = 36 = 1.2.3.6$ nên $b_m = 6$ hay $B = 6$.

Vậy $A = 9$; $B = 6$.

Bài 14: Có 68 người đi tham quan bằng hai loại xe: loại 12 chỗ ngồi và loại 7 chỗ ngồi. Biết số người đi vừa đủ với số ghế ngồi. Hỏi mỗi loại có mấy xe.

HSG huyện Anh Sơn năm 2018 -2019

Lời giải

Gọi x là số xe 12 chỗ ngồi, y là số xe 7 chỗ ngồi ($x, y \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ra ta có: $12x + 7y = 68$

Vì $12x : 4, 68 : 4 \Rightarrow 7y : 4, do(7,4) = 1 \Rightarrow y : 4$

Hơn nữa $x \in \mathbb{N}^*$ nên $y \leq 8 \Rightarrow y = 4, y = 8$

Với $y = 4$ suy ra $12x + 7.4 = 68$

$$x = \frac{10}{3} (ktm)$$

Với $y = 8$; suy ra $x = 1 (tm)$

Vậy có 1 xe loại 12 chỗ ngồi, 8 xe loại 7 chỗ ngồi.

Bài 15: a) Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, biết rằng số đó khi chia cho 3, cho 4, cho 5, cho 6 đều dư 2, còn chia cho 7 thì dư 3.

b) Tìm hai số tự nhiên biết tổng UCLN và BCNN là 23.

HSG huyện Thanh Chương năm 2019 -2020

Lời giải

a) Gọi số tự nhiên đó là a ($a \in \mathbb{N}^*$)

Vì khi chia a cho 3, cho 4, cho 5, cho 6 đều dư 2 nên $a - 2 : 3; a - 2 : 4; a - 2 : 5; a - 2 : 6$

Hay $a - 2 \in BC(3; 4; 5; 6)$

$$BCNN(3; 4; 5; 6) = 2^2.3.5 = 60$$

$$a - 2 \in B(60) = \{0; 60; 120; 180; 240; \dots\}$$

$$a \in \{2; 62; 122; 182; 242; \dots\}$$

Mặt khác a là số tự nhiên nhỏ nhất chia 7 dư 3 nên $a = 122$.

b) Gọi hai số tự nhiên đó là a, b ($a, b \in \mathbb{N}$).

Gọi $d = UCLN(a, b)$

Ta có:

$$a = a'.d, b = b'.d, (a', b') = 1$$

$$\text{Khi đó } BCNN(a; b) = \frac{ab}{UCLN(a; b)} = \frac{a'.b'.d^2}{d} = a'.b'.d$$

Theo bài ra ta có:

$$UCLN(a; b) + BCNN(a; b) = 23 \text{ nên } d + a.b'.d' = 23 = d(1 + a'.b') = 23$$

Suy ra $d=1, 1+a'b'=23 \Rightarrow a'b'=22$

$$\text{Mà } (a', b')=1 \Rightarrow \begin{cases} a'=1; b'=22 \\ a'=11; b'=2 \end{cases}$$

Vậy $(a'; b') = \{(1; 22), (11; 2)\}$.

Bài 16: Tìm 2 số tự nhiên biết rằng ước chung lớn nhất và bội chung nhỏ nhất của chúng lần lượt là 648 và 11340

Trích đề HSG huyện Kỳ Anh năm 2021-2022

Lời giải

Gọi 2 số cần tìm là a, b . Vì $UCLN(a, b) = 648$ nên sẽ có 2 số tự nhiên m, n sao cho:

$$a = 648 \cdot m; b = 648 \cdot n \text{ với } UCLN(m, n) = 1$$

$$\text{Khi đó: } BCNN(a, b) = 648 \cdot m \cdot n$$

$$\text{Theo bài ra: } BCNN(a, b) = 113400 = 648 \cdot 175$$

$$\text{Suy ra: } m \cdot n = 175 \text{ và } UCLN(m, n) = 1$$

$$\text{hay } m \cdot n = 5^2 \cdot 7 \text{ và } UCLN(m, n) = 1$$

m	1	5^2
n	$5^2 \cdot 7$	7
a	648	$5^2 \cdot 648 = 16200$
b	113400	$7 \cdot 648 = 4536$

Vậy có 2 cặp số thỏa mãn điều kiện bài ra gồm 648 và 11340 hoặc 16200 và 4536

Bài 17. Tìm hai số tự nhiên a, b có hai chữ số $a.b = 448$ và $UCLN(a, b) = 4$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Vì $UCLN(a, b) = 4$ suy ra $a = 4k; b = 4l$ (k, l) = 1

Do $a.b = 448$ nên $(4k).(4l) = 448$ suy ra $16kl = 448$ suy ra $kl = 28$

Mà $28 = 1.28 = 4.7$ Ta có các trường hợp sau:

$$\text{Nếu } k=1 \text{ thì } l=28 \text{ suy ra } \begin{cases} a=4 \\ b=112 \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\text{Nếu } k=4 \text{ thì } l=7 \text{ suy ra } \begin{cases} a=6 \\ b=28 \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\text{Nếu } k=7 \text{ thì } l=4 \text{ suy ra } \begin{cases} a=16 \\ b=28 \end{cases} \text{ (tm)}$$

Vậy $a=16, b=28$

Bài 18: Tìm hai số tự nhiên a, b biết tổng $BCNN$ với $UCLN$ của chúng là 15.

Trích đề HSG huyện Tĩnh Gia năm 2018 - 2019

Lời giải

$$\text{Gọi } UCLN(a, b) = d, \text{ suy ra } \begin{cases} a = dm \\ b = dn \end{cases}, \text{ khi đó } (m, n) = 1$$

Mặt khác ta có tích của hai số bằng tích của $BCNN$ với $UCLN$ của hai số đó nên:

$$BCNN(a,b) = \frac{d^2 mn}{d} = dmn$$

$$\text{Vậy } BCNN(a,b) + UCLN(a,b) = dmn + d = d(mn+1) = 15$$

Giả sử $a \leq b$ khi đó $m \leq n$ và $mn+1 \geq 2$

Lập bảng ta thu được

$$(a,b) = \{(1;14); (2;7); (3;12); (5;10)\}.$$

Bài 19. Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn $\frac{5a+7b}{6a+5b} = \frac{29}{28}$ và $(a,b) = 1$

Lời giải

$$140a + 196b = 174a + 145b \text{ suy ra } 2a = 3b(*)$$

Vì $(a,b) = 1; (2,3) = 1$ nên $(*)$ xảy ra khi $a:3$

Và b chia hết cho 2 suy ra $a = 3p, b = 2q (p, q \in \mathbb{N})$

Thay vào $(*)$ ta có: $6p = 6q$ hay $p = q$

Vì $(a,b) = 1$ suy ra $(3p; 2q) = 1$ do đó $p = q = 1$

Vậy $a = 3; b = 2$

B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

I. Quan hệ chia hết và tính chất.

Dạng 1: Chứng minh chia hết.

Bài 1: Cho biểu thức $A = 2010 + 2010^2 + 2010^3 + \dots + 2010^{2009} + 2010^{2010}$

Chứng minh rằng A chia hết cho 2011

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2018 - 2019

Bài 2: Chứng minh rằng $B = 3 \cdot 10^{100} + 10^{99} + 8$ chia hết cho 24 .

Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 - 2022

Bài 3: Cho $M = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$

- Chứng tỏ rằng $M \vdots 5$
- Tìm chữ số tận cùng của M

Trích đề HSG tỉnh Bắc Ninh năm 2016 - 2017

Bài 4: Chứng tỏ rằng $M = 75 \cdot (4^{2021} + 4^{2020} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 100.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 5: Chứng minh rằng: $10^{28} + 8$ chia hết cho 72

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Bài 6: Cho biết $a + 4b$ chia hết cho 13 ($a, b \in \mathbb{Z}$).

Chứng minh rằng $10 + b$ chia hết cho 13

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 7: Chứng tỏ: $S = 16^5 + 2^{15}$ chia hết cho 33

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018 - 2019

Bài 8: Chứng tỏ rằng: $A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{11} + 2^{12}$ chia hết cho 7

Trích đề HSG huyện Đoan Hùng năm 2018-2019

Bài 9: Cho $S = 3^1 + 3^3 + 3^5 + \dots + 3^{2011} + 3^{2013} + 3^{2015}$. Chứng tỏ:

- S không chia hết cho 9
- S chia hết cho 70

Trích đề HSG huyện Quế Sơn 2018-2019

Bài 10: Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{90}$. Chứng minh A chia hết cho 11 và 13

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Bài 11: Cho $C = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{2014} + 4^{2015} + 4^{2016}$

Chứng minh rằng C chia hết cho 21 và 105

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Bài 12: Chứng minh rằng: Nếu $7x + 4y \vdots 37$ thì $13x + 18y \vdots 37$

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Bài 13: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng: $p^2 - 1 \vdots 4$

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Bài 14: a) Tìm hai số tự nhiên x, y sao cho $(2x+1) \cdot (y-5) = 12$.

b) Tìm tất cả các số $B = \overline{62xy427}$ biết rằng số B chia hết cho 99.

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015-2016

Bài 15: Chứng tỏ rằng $2x + 3y$ chia hết cho 17 thì $9x + 5y$ chia hết cho 17 và ngược lại.

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015-2016

Bài 16: Chứng minh: $S = 16^5 + 2^{15}$ chia hết cho 33.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2010-2011

Bài 17: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , ta có $n^2 + n + 2$ không chia hết cho 5.

Trích đề HSG huyện Anh Sơn năm 2018-2019

Bài 18: Chứng minh rằng $3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{101}$ chia hết cho 120.

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2017-2018

Bài 19: Tìm số tự nhiên $x; y$ biết $\overline{32x1y}$ chia hết cho 45.

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2019-2020

Bài 20: Chứng minh rằng số viết bởi 27 chữ số giống nhau thì chia hết cho 27.

Trích đề HSG huyện Tiền Hải năm 2016 -2017

Bài 21: Chứng tỏ rằng;

a) $(3^{100} + 19^{990}) : 2$

b) Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp không chia hết cho 4.

Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015 -2016

Bài 22: Cho a, b là các số nguyên. Chứng tỏ rằng nếu $(2a + 3b) : 7$ thì $(8a + 5b) : 7$.

Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-22

Bài 23: Cho $B = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{30}$ Chứng minh rằng: B chia hết cho 21.

Trích đề HSG Trường THCS Lý Tự Trọng năm 2015-2016

Bài 24: Chứng tỏ rằng

a) $(3^{100} + 19^{990}) : 2$

b) Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp không chia hết cho 4.

Trích đề HSG Huyện Lương Tài năm 2021-2022

Bài 25: Cho $D = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{19} + 5^{20}$. Tìm số dư khi chia D cho 31.

Trích đề HSG Hoài Nhơn năm 2015-2016

Bài 26: Chứng tỏ rằng số có dạng \overline{abcabc} bao giờ cũng chia hết cho 11.

Trích đề HSG Trường Hưng Mỹ năm 2018 - 2019

Bài 27: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta có $n^3 - n : 6$

Trích đề chọn HSG Trục Ninh năm 2017-2018

Bài 28: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng: $p^2 - 1 : 24$

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đông (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Bài 29: Chứng minh rằng: Nếu $7x + 4y : 37$ thì $13x + 18y : 37$.

Bài 30: Cho $A = 2.3.4.5 \dots 98 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{98}\right)$. Chứng tỏ rằng M chia hết cho 99.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021-2022

Bài 31:

a) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 và $10p+1$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng $5p+1$ chia hết cho 6.

b) Chứng tỏ rằng nếu $6x+11y:31 (x, y \in \mathbb{Z})$ thì $x+7y:31$.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021-2022

Bài 32: Chứng minh rằng: Nếu $7x+4y:37$ thì $13x+18y:37$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Bài 33: Cho số tự nhiên có 4 chữ số \overline{abcd} . Chứng tỏ rằng \overline{abcd} chia hết cho 7 khi:
 $2b+3c+d-a$ chia hết cho 7

Trích đề HSG huyện Kỳ Anh năm 2021 – 2022

Bài 34: Chứng minh rằng: $\overline{ab} + \overline{ba}$ chia hết cho 11.

Trích đề HSG Liên trường năm 2021 - 2022

Bài 35: Cho $M = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2017} + 2^{2018}$

a) Tính M

b) Chứng tỏ rằng M chia hết cho 3

Trích đề HSG THCS Trần Phú Gia Lai năm 2018-2019

Bài 36: Cho biết $a+4b$ chia hết cho 13 ($a, b \in \mathbb{Z}$). Chứng minh rằng $10+b:13$

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018-2019

Bài 37. Cho số $\overline{155*710*4*16}$ có 12 chữ số. Chứng minh rằng nếu thay các dấu * bởi các chữ số khác nhau trong ba chữ số 1, 2, 3 một cách tùy ý thì số đó luôn chia hết cho 396.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 38: Cho biết $a+4b$ chia hết cho 13 ($a, b \in \mathbb{Z}$). Chứng minh rằng $10a+b : 13$

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018 - 2019

Bài 39: Chứng minh $A = 3^{n+3} - 2.3^n + 2^{n+5} - 7.2^n : 25$ với $n \in \mathbb{Z}$.

Bài 40: Cho $A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{1999} + 2^{2000}$. Chứng minh A chia hết cho 6.

Bài 41: Cho biết $a+4b$ chia hết cho 13 ($a, b \in \mathbb{Z}$). Chứng minh rằng $10+b:13$.

Trích đề HSG huyện Tam Nông năm 2018-2019

Bài 42: Thay (*) bằng các số thích hợp:

a) $\overline{510*}$; $\overline{61*16}$ chia hết cho 3

b) $\overline{261*}$ chia hết cho 2 và chia 3 dư 1.

Trích đề HSG cấp trường năm 2019-2020

Bài 43: Cho $A = 999993^{1999} - 555557^{1997}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 5.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 44: Cho $a - b \vdots 6$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Chứng minh $a - 13b \vdots 6$.

Bài 45: Cho $x - y = 7$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Chứng minh: $22x - y \vdots 7$.

Bài 46: Chứng minh $A = 3^{n+2} - 2^{n+3} + 3^n - 2^{n+2} \vdots 6$ với $n \in \mathbb{Z}^*$.

Bài 47: Cho $a - 11b + 3c \vdots 17$. Chứng minh $2a - 5b + 6c \vdots 17$.

Bài 48: Cho $A = (4a + 7b)(5a + 4b) \vdots 19$ với mọi $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Chứng minh $A \vdots 361$.

Bài 49: Chứng minh rằng

a. $A = 10^{28} + 8 \vdots 72$ b. $B = 81^7 - 27^9 - 9^{13} \vdots 45$

Bài 50: Chứng minh : $A = 2^{20} \cdot 2^4 + 2^{20}$ chia hết cho 17.

Bài 51: Chứng minh rằng: $A = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ chia hết cho 19

Bài 52: Chứng minh rằng: a) $A = 2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7.

b) $B = 1961^{1962} + 1963^{1964} + 1965^{1966} + 2$ chia hết cho 7.

Bài 52: Chứng minh rằng: $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{200}$ chia hết cho 6

Bài 54: Chứng minh rằng: $A = 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{20}$ chia hết cho 4 và 5.

Bài 55 : Chứng minh rằng:

a, $(n+10)(n+15) \vdots 2$ b, $n(n+1)(n+2) \vdots 2; 3$ c, $n^2 + n + 1 \not\vdots 4; 2; 5$

Bài 56: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì:

a. $A = n(2n+1)(7n+1) \vdots 6$ b. $B = n^3 - 13n \vdots 6$

Bài 57: Chứng minh rằng tổng của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3.

Bài 58: Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp có chia hết cho 4 hay không ?

Bài 59. a. Cho $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60}$. Chứng minh $A \vdots 3, 7, 15$

b. Chứng minh rằng: $C = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31.

Bài 60: Tìm số tự nhiên n để $5n + 14$ chia hết cho $n + 2$.

Bài 61: Tìm số tự nhiên n để $\frac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên.

Bài 62: Tìm số tự nhiên n để $(n^2 + 3n + 6) \vdots (n + 3)$.

Bài 63 : Tìm số nguyên n để phân số $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên.

Dạng 2: Tìm số thỏa mãn điều kiện chia hết.

Bài 1: Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (x, y) sao cho $\overline{34x5y}$ chia hết cho 36

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 2: Tìm tất cả các số nguyên n để $(n+4) \vdots (n+1)$

A. $n \in \{-3; -1; 1; 3\}$

B. $n \in \{-4; -2; 0; 2\}$

C. $n \in \{1; 3\}$

D. $n \in \{0; 2\}$

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 3: Bạn Lan tính tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến n và nhận thấy tổng đó chia hết cho 29. Bạn Loan tính tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến m và cũng nhận thấy tổng đó chia hết cho 29. Tìm các số tự nhiên m và n biết rằng $m < n < 50$.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 4: Tìm chữ số x để:

- $\overline{137+3x}$ chia hết cho 13
- $\overline{137x137x}$ chia hết cho 13

Trích đề HSG cấp huyện năm học 2016-2017

Bài 5: Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn: $(100a + 3b + 1)(2^a + 10a + b) = 225$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Bài 6: Tìm số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số, sao cho chia nó cho 8 thì dư 7 và chia nó cho 31 thì dư 28

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Bài 7: Tìm số tự nhiên có 3 chữ số, biết rằng khi chia số đó cho các số 25; 28; 35 thì được các số dư lần lượt là 5; 8; 15

Trích đề HSG trường Nguyễn Khuyến năm 20...-20...

Bài 8: a) Tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng bằng 504 và ƯCLN của chúng bằng 42

b) Tìm $a \in \mathbb{Z}$ để $a+1$ là bội của $a-1$

c) Cho $K = 10^{28} + 8$. Chứng minh rằng K chia hết cho 72.

Trích đề 59 HSG năm 2018- 2019

Bài 9: Cho $S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$

- Chứng minh rằng S là bội của -20
- Tính S , từ đó suy ra 3^{100} chia cho 4 dư 1

Trích đề 59 HSG năm 2018- 2019

Bài 10: Tìm chữ số a, b để $\overline{62ab427}$ chia hết cho 99.

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Bài 11: Cho số $\overline{155*710*4*16}$ có 12 chữ số. Chứng minh rằng nếu thay các dấu (*) bởi các chữ số khác nhau trong ba chữ số 1; 2; 3 một cách tùy ý thì số đó luôn chia hết cho 396.

Trích đề HSG Trường THCS Ái Thượng năm 2021-2022

Bài 12: Số tự nhiên a chia 36 dư bao nhiêu, biết a chia 4 dư 3 và chia 9 dư 4.

Trích đề HSG Huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Bài 13: Tìm số tự nhiên có ba chữ số sao cho khi lấy số đó chia cho 11 thì được thương bằng tổng các chữ số của số phải tìm.

Trích đề HSG Cấp Trường năm 2019-2020

Bài 14: Thay (*) bằng các số thích hợp:

- $\overline{510*}; \overline{61*16}$ chia hết cho 3.
- $\overline{261*}$ chia hết cho 2 và chia 3 dư 1.

Trích đề HSG Cấp Trường năm 2019-2020

Bài 15: Cho $n = \overline{7a5} + \overline{8b4}$. Biết $a - b = 6$ và n chia hết cho 9. Tìm a và b .

Trích đề HSG Hoài Nhơn năm 2015-2016

Bài 16: Tìm x, y biết $\overline{124xy} : 45$.

Trích đề HSG huyện Ba vì năm 2018-2019

Bài 17: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất lớn hơn 10, biết rằng số đó chia cho 5 ; 6 ; 7 có số dư lần lượt là 3 ; 2 ; 1

Trích đề HSG huyện Ba vì năm 2018-2019

Bài 18: Tìm số nguyên n để phân số $M = \frac{2n-7}{n-5}$ có giá trị là số nguyên.

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Bài 19: Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ biết: $2x(3y-2) + (3y-2) = -55$

Trích đề HSG cấp trường Hà Huy Tập năm 2018-2019

Bài 20: Cho a là một số nguyên có dạng $a = 3b + 7 (b \in \mathbb{Z})$. Hỏi a có thể nhận những giá trị nào trong các giá trị sau: $a = 11; a = 2002; a = 2003; a = 11570; a = 22789; a = 29563; a = 299537$

Trích đề HSG cấp trường Bá Thước năm 2018-2019

Trắc nghiệm

Bài 21: Tập hợp các số nguyên n để $(n+3):(n+1)$ là:

A. $\{0; 1; -2; -3\}$.

B. $\{0; 1\}$.

C. $\{-2; -3\}$.

D. $\{1; 2; -1; -2\}$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Tự luận

Bài 22: Tìm các số có ba chữ số chia hết cho 8 và tổng các chữ số của nó cũng chia hết cho 8.

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

Bài 23: Tìm số nguyên n để $A = 2n^2 + n - 6$ chia hết cho $2n + 1$.

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Bài 24: Thay a, b bằng các chữ số thích hợp sao cho $\overline{24a68b} : 45$.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 25: Tìm số tự nhiên n biết: $(3n-2):(2n+1)$.

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021-2022

Bài 26: Cho $A = \frac{12n+1}{2n+3}$. Tìm giá trị của n để A là một số nguyên.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Bài 27: Số $N = \overline{14a5b}$ trong a, b là các chữ số. Biết rằng N chia hết cho cả 2, 5 và 9. Tính giá trị $a + b$.

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018-2019

Bài 28: Tìm tất cả các số tự nhiên có 3 chữ số \overline{abc} sao cho $\overline{abc} = n^2 - 1$ và $\overline{cba} = (n - 2)^2$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 29: Một số tự nhiên chia 7 dư 3, chia 17 dư 12, chia 23 dư 7. Hỏi số đó chia cho 2737 dư bao nhiêu?

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021-2022

Bài 30: Trong một đợt trồng cây, một tổ học sinh lớp 6 đã trồng được một số cây. Số đó là nhỏ nhất đem chia cho 3 dư 2, chia cho 4 dư 3, chia cho 5 dư 4, chia cho 10 dư 9. Hỏi số cây trồng được là bao nhiêu?

Bài 31: Một cửa hàng mới nhập về một số cuốn sách. Chủ cửa hàng yêu cầu nhân viên đóng sách vào các túi. Họ tính rằng nếu đóng vào mỗi túi 8 cuốn thì vừa hết, nếu đóng vào mỗi túi 12 cuốn thì thừa ra 4 cuốn còn nếu đóng vào mỗi túi 14 cuốn thì thừa 6 cuốn. Hỏi cửa hàng mới nhập về bao nhiêu cuốn sách? Biết rằng số sách nhập về trong khoảng từ 230 đến 300 cuốn.

Bài 32: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho số đó chia cho 17; 25 được dư lần lượt là 8; 16.

Bài 33: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có ba chữ số, biết rằng khi chia số đó cho 11, 13 thì được số dư lần lượt là 5 và 10.

Bài 34: Khi chia một số tự nhiên a cho 4 ta được số dư là 3 còn khi chia a cho 9 ta được số dư là 5. Tìm số dư trong phép chia a cho 36.

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022

Bài 35: Tìm số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số, sao cho chia nó cho 8 thì dư 7 và chia nó cho 31 thì dư 28.

Trích đề HSG huyện Đức Thọ năm 2021-2022

Bài 36: Một số tự nhiên chia cho 7 dư 5, chia cho 13 dư 4. Nếu đem số đó chia cho 91 thì dư bao nhiêu?

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Bài 37: Tìm các số nguyên x , biết:

a) $x^2 + 2x + 7 : x + 2$

b) $2x^2 + x + 4 : 2x + 1$.

Bài 38. Tính tổng C . Tìm x để $2^{2x-1} - 2 = C$

Bài 39. Một số chia cho 4 dư 3, chia cho 17 dư 9, chia cho 19 dư 13. Hỏi số đó chia cho 1292 dư bao nhiêu?

Bài 40. Số học sinh của một trường học xếp hàng, mỗi hàng có 20 người hoặc 25 người hoặc 30 người đều thừa 15 người. Nếu xếp mỗi hàng 41 người đều vừa đủ. Tính số học sinh của trường đó, biết số học sinh của trường chưa đến 1000.

Dạng 3: Dùng phương pháp phản chứng; nguyên lí Diricle để cm chia hết hoặc không chia hết.

Bài 1: Cho 2023 số tự nhiên bất kì: $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2023}$. Chứng minh rằng tồn tại một số hoặc tổng một số các số liên tiếp nhau trong dãy trên chia hết cho 2023.

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2022 – 2023

Bài 2: Cho 2016 số tự nhiên $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2015}; a_{2016}$. Chứng minh rằng trong 2016 số ấy, tồn tại một số chia hết cho 2016 hoặc tồn tại một vài số chia hết cho 2016.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Tường năm 2015 - 2016

Bài 3: Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên chỉ được viết bởi chữ số 2 và chữ số 0 mà số đó chia hết cho 2015.

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015 - 2016

II. Số nguyên tố, hợp số.

Dạng 1: Tìm số để biểu thức là số nguyên tố, hợp số.

Bài 1: Với giá trị nào của k thì dãy $k + 1, k + 2, k + 3, \dots, k + 10$ chứa nhiều số nguyên tố nhất?

A. $k = 5$

B. $k = 10$

C. $k = 0$

D. $k = 1$

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 2: Có bao nhiêu số nguyên dương n để $3n - 16; 4n - 21, 5n - 23$ là các số nguyên tố?

A. 3

B. 2

C. 1

D. 4

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022

Bài 3: Tìm số nguyên tố p sao cho $p + 10$ và $p + 14$ đều là số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015-2016

Bài 4: Tìm các số nguyên tố p sao cho $p^2 + 44$ cũng là số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Tường năm 2015 -2016

Bài 5: Tìm p nguyên tố để $p + 10$ và $p + 26$ cũng là số nguyên tố

Trích đề HSG huyện Ba vì năm 2018-2019

Bài 6: Cho p và $p + 4$ là các số nguyên tố ($p > 3$). Chứng minh rằng $p + 8$ là hợp số.

Trích đề HSG cấp trường vòng 2 THCS Tân Lập năm 2018-2019

Bài 7: Tìm số tự nhiên x sao cho $2x + 1, 2x + 3$ và $2x + 11$ đều là các số nguyên tố.

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Bài 8: Cho n là số nguyên tố lớn hơn 3. Hỏi $n^2 + 2006$ là số nguyên tố hay hợp số.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 9: Cho $a, b, c, d, n \in \mathbb{N}^*$, biết $ab = cd$. Chứng minh rằng $a^n + b^n + c^n + d^n$ là hợp số.

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Bài 10: Chứng minh rằng: nếu p và $p^2 + 2$ là các số nguyên tố thì $p^3 + 2$ cũng là số nguyên tố

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2019-2020

Dạng 2: Chứng minh là số nguyên tố, hợp số.

Bài 1: Chứng tỏ rằng $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Bài 2: Chứng minh rằng: Nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 và $2p + 1$ cũng là số nguyên tố thì $4p + 1$ là hợp số.

Trích đề HSG huyện Tiên Hải năm 2016 -2017

Bài 3: Cho p và $10p + 1$ là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh $17p + 1$ là hợp số.

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Bài 4: Chứng tỏ rằng $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Dạng 3: Tìm số nguyên tố thỏa mãn điều kiện cho trước.

Bài 1: Tìm số nguyên tố p sao cho $p + 6, p + 12, p + 18, p + 24$ cũng là các số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 2: Tìm các số nguyên tố x, y sao cho: $x^2 + 45 = y^2$

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Bài 3: Tìm số nguyên tố p để $p + 6; p + 8; p + 12; p + 14$ đều là các số nguyên tố.

Trích đề HSG huyệnnăm 2019-2020

Bài 4: Tìm số nguyên tố P sao cho: $P+10$ và $P+14$ đều là những số nguyên tố

Trích đề HSG Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020

Bài 5: Hiệu của hai số nguyên tố có thể bằng 2013 được không? Vì sao?

Trích đề HSG huyện Quế Sơn năm 2018-2019

Bài 6: Tìm số nguyên tố \overline{ab} ($a > b > 0$) sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 7: Tìm số nguyên tố p sao cho $p+2, p+4$ là số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 - 2022

Bài 8: Cho $140 = a^2.b.7$, với a, b là các số nguyên tố. Giá trị của a, b là?

Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 – 2022

Bài 9: Tìm các số nguyên tố p , sao cho các số sau cũng là số nguyên tố:

$p+2, p+6, p+8, p+12, p+14.$

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021-2022

Bài 10: Tìm các số nguyên tố x và y biết $x^2 - 6y^2 = 1.$

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Trắc nghiệm

Bài 11: Cho các số 312; 213; 435; 417; 3311; 67. Số các số nguyên tố trong các số đã cho là:

A. 3 .

B. 1 .

C. 4 .

D. 2 .

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Tự luận

Bài 12: Tìm các số nguyên tố x và y biết $x^2 - 6y^2 = 1.$

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Bài 13: Tìm số nguyên tố p sao cho $p+10, p+14$ cũng là các số nguyên tố.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Bài 14: Tìm số nguyên tố p sao cho $p+20$ và $p+10$ là các số nguyên tố.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 15: Tìm các số nguyên tố a, b, c thỏa mãn $a^b + 1 = c$

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

III. Bội và ước.

Dạng 1: Chứng minh hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 1: Cho $a+b = p$ (p nguyên tố). Chứng minh a và b nguyên tố cùng nhau.

Trích đề HSG Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020

Bài 2: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $UCLN(21n+4; 14n+3) = 1.$

Trích đề HSG huyện Tiên Hải năm 2016 -2017

Bài 3: Chứng minh với mọi số nguyên dương n thì $2n+1$ và $6n+5$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Trắc nghiệm

Bài 4: ƯCLN($n+1; 2n+5$) là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Tự luận

Bài 5. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $\frac{5n+3}{3n+2}$ là phân số tối giản.

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Dạng 2: Bài toán thực tế về số nguyên tố. (Không có)

Dạng 3: Toán quan hệ giữa ƯCLN và BCNN.

Bài 1: Tìm hai số tự nhiên a và b biết: $BCNN(a,b) = 420$, $ƯCLN(a,b) = 21$ và $a+21=b$

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Bài 2: Tìm hai số tự nhiên a và b , biết: $BCNN(a,b) = 300$; $ƯCLN(a,b) = 15$ và $a+15=b$

Trích đề HSG huyện Nông Công năm học 2019-2020

Bài 3: Tìm các số tự nhiên x, y, z nhỏ nhất khác không sao cho $18.x = 24.y = 36.z$.

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021-2022

Bài 4: Khi chia một số tự nhiên a cho 4 ta được số dư là 3. Còn khi chia a cho 9 ta được số dư là 5. Hãy tìm số dư trong phép chia a cho 36

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Bài 5: Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số $\frac{18n+3}{21n+7}$ có thể rút gọn được

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Bài 6:

a) Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 3 dư 2, chia cho 4 dư 3, chia cho 5 dư 4 và chia cho 6 dư 5

b) Một số chia cho 3 dư 2, chia cho 4 dư 3, chia cho 167 dư 130. Hỏi số đó khi chia cho 2004 thì số dư là bao nhiêu ?

Trích đề Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020

Bài 7: Tìm hai số tự nhiên a và b , biết $a > b$; $a+b=16$ và $ƯCLN(a,b) = 4$

Trích đề Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020

Bài 8: Tìm hai số tự nhiên a và b biết tổng BCNN và ƯCLN của chúng là 15.

HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014 -2015

Bài 9: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia cho 11 dư 6, chia cho 4 dư 1 và chia cho 19 dư 11

HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014 -2015

Bài 10: Viết dạng tổng quát của số tự nhiên chia cho 5 thì dư 1, chia cho 7 thì dư 5. Tìm số nhỏ nhất?

HSG huyện Vĩnh Tường năm 2015 -2016

Bài 11: Cho \overline{ababab} là số có sáu chữ số, chứng tỏ số \overline{ababab} là bội của 3.

HSG huyện Tân Yên năm 2010 -2011

Bài 12: Số học sinh khối 6 của một trường chưa đến 400 bạn, biết khi xếp hàng 10;12;15 đều dư 3 nhưng nếu xếp hàng 11 thì không dư. Tính số học sinh khối 6 của trường đó.

HSG huyện Tân Yên năm 2010 -2011

Bài 13: Tìm 2 số tự nhiên A và B biết rằng A có n ước số tự nhiên là a_1, a_2, \dots, a_n và B có m ước số tự nhiên là b_1, b_2, \dots, b_m thỏa mãn $a_1^2.a_2^2 \dots a_n^2 = 729$ và $b_1^2.b_2^2 \dots b_m^2 = 1296$.

HSG huyện Sông Lô năm 2015 -2016

Bài 14: Có 68 người đi tham quan bằng hai loại xe: loại 12 chỗ ngồi và loại 7 chỗ ngồi. Biết số người đi vừa đủ với số ghế ngồi. Hỏi mỗi loại có mấy xe.

HSG huyện Anh Sơn năm 2018 -2019

Bài 15: a) Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, biết rằng số đó khi chia cho 3, cho 4, cho 5, cho 6 đều dư 2, còn chia cho 7 thì dư 3.

b) Tìm hai số tự nhiên biết tổng ƯCLN và BCNN là 23.

HSG huyện Thanh Chương năm 2019 -2020

Bài 16: Tìm 2 số tự nhiên biết rằng ước chung lớn nhất và bội chung nhỏ nhất của chúng lần lượt là 648 và 11340

Trích đề HSG huyện Kỳ Anh năm 2021-2022

Bài 17. Tìm hai số tự nhiên a, b có hai chữ số $a.b = 448$ và $ƯCLN(a, b) = 4$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 18: Tìm hai số tự nhiên a, b biết tổng BCNN với ƯCLN của chúng là 15.

Trích đề HSG huyện Tĩnh Gia năm 2018 - 2019

Bài 19. Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn $\frac{5a+7b}{6a+5b} = \frac{29}{28}$ và $(a, b) = 1$

C. SỬU TẦM CÁC BÀI TƯƠNG TỰ

Bài 1: Cho $S = 9^{23} + 5 \cdot 3^{43}$. Chứng minh rằng: $S \vdots 32$

Lời giải

$$\text{Ta có } S = 9^{23} + 5 \cdot 3^{43} = 3^{46} - 5 \cdot 3^{43} = 3^{43} (3^3 - 5) = 3^{43} \cdot 32 \vdots 32.$$

Vậy $S \vdots 32$

Bài 2: CMR: $\text{UCLN}(12n+1, 30n+1) = 1$ với mọi số tự nhiên n

Lời giải

Gọi $\text{UCLN}(12n+1, 30n+1) = d$, suy ra $d \in \mathbb{N}^*$ khi đó ta có :

$$\begin{cases} 12n+1 \vdots d \\ 30n+1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(12n+1) \vdots d \\ 2(30n+1) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 60n+5 \vdots d \\ 60n+2 \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (60n+5) - (60n+2) \vdots d \Rightarrow 3 \vdots d \Rightarrow d \in \{1, 3\}$$

Vì $12n+1$ là một số không chia hết cho 3 nên $d = 3$ loại

Vậy $d = 1$, khi đó $\text{UCLN}(12n+1, 30n+1) = 1$

Bài 3: Tìm ba số nguyên tố x, y, z thỏa mãn $(x+y+z) \cdot 5 = xyz$

Trích đề HSG huyện Hải Hậu năm 2011- 2012

Lời giải

Ta có: $5(x+y+z) = xyz \Rightarrow x+y+z = xyz : 5$

$$\Rightarrow xyz \vdots 5$$

\Rightarrow có ít nhất 1 trong ba số x, y, z chia hết cho 5

Vì vai trò của ba số x, y, z như nhau nên giả sử $z \vdots 5$. Mà z nguyên tố nên $z = 5$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow x+y+5 = xy$$

$$\Rightarrow x - xy + y - 1 = -6$$

$$\Rightarrow (x-1)(y-1) = 6 = 2 \cdot 3 = 1 \cdot 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ y-1=3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x-1=1 \\ y-1=6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \text{ (loại vì } x, y \text{ nguyên tố)} \text{ hoặc } \begin{cases} x=2 \\ y=7 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy ba số nguyên tố x, y, z cần tìm là $(2; 7; 5); (2; 5; 7); (5; 7; 2); (5; 2; 7); (7; 2; 5); (7; 5; 2)$

Bài 4: Chứng minh rằng $10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27

Trích đề HSG huyện Xuân Trường, năm 2012- 2013

Lời giải

$$10^n + 18n - 1$$

$$= 10^n - 1 + 18n$$

$$= 99\dots 9 (n \text{ chữ số } 9) + 18n$$

$$9 \cdot (11\dots 1 (n \text{ chữ số } 1) + 2n)$$

Tổng các chữ số của $11\dots 1 (n \text{ chữ số } 1)$ là n

$$\Rightarrow 11\dots 1 - n : 3$$

$$\Rightarrow 11\dots 1 - n + 3n : 3$$

$$\Rightarrow 9 \cdot (11\dots 1 (n \text{ chữ số } 1) + 2n) : 27$$

Bài 5: Chứng minh rằng: $3a + 2b : 17$ khi và chỉ khi $10a + b : 17$ ($a, b \in \square$) và ngược lại có đúng không?

Lời giải

$$* 3a + 2b : 17 \Rightarrow 10a + b : 17$$

$$\text{Ta có: } 3a + 2b : 17 \Rightarrow 9 \cdot (3a + 2b) : 17 \Rightarrow 27a + 18b : 17 \Rightarrow (17a + 17b) + (10a + b) : 17 \Rightarrow 10a + b : 17$$

$$* 10a + b : 17 \Rightarrow 3a + 2b : 17$$

$$\text{Ta có: } 10a + b : 17 \Rightarrow 2(10a + b) : 17 \Rightarrow 20a + 2b : 17 \Rightarrow 17a + 3a + 2b : 17 \Rightarrow 3a + 2b : 17$$

Bài 6: Chứng tỏ rằng trong 27 số tự nhiên tùy ý luôn tồn tại hai số sao cho tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 50.

Lời giải

TH1: Nếu 27 số tự nhiên trên có 2 số có cùng số dư khi chia cho 50 thì hiệu của chúng chia hết cho 50.

TH2: Nếu 27 số tự nhiên trên không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho 50

Số dư khi chia cho 50 gồm: 0; 1; 2; ...; 49 chia làm 26 nhóm:

$$(0), (1; 49), (2; 48), \dots, (24; 26), (25)$$

Chia 27 số dư khác nhau vào 26 nhóm trên, tồn tại ít nhất 2 số cùng một nhóm.

Suy ra tổng của chúng chia hết cho 50.

Bài 7: Tìm n là số tự nhiên để: $A = (n+5)(n+6) : 6n$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 12n + n(n-1) + 30, \text{ Để } A : 6n \Rightarrow n(n-1) + 30 : 6n$$

$$\text{Ta có: } n(n-1) : n \Rightarrow 30 : n \Rightarrow n \in U(30) = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$$

$$\text{Và } n(n-1) : 6 \Rightarrow n(n-1) : 3 \Rightarrow n \in \{1; 3; 6; 10; 15; 30\}$$

Thử vào ta thấy $n \in \{1; 3; 10; 30\}$ thỏa mãn yêu cầu đầu bài

Bài 8: Tìm 3 số nguyên tố liên tiếp p, q, r sao cho $p^2 + q^2 + r^2$ cũng là số nguyên tố.

Lời giải

Nếu 3 số nguyên tố p, q, r đều khác 3 thì p, q, r đều có dạng $3k \pm 1$ suy ra p^2, q^2, r^2 chia cho 3 đều dư 1. Khi đó $p^2 + q^2 + r^2 : 3$ và $p^2 + q^2 + r^2 > 3$ nên $p^2 + q^2 + r^2$ là hợp số.

Vậy $p = 3, q = 5, r = 7$, khi đó $p^2 + q^2 + r^2 = 3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$ là số nguyên tố.

Bài 9: Tìm tất cả các số nguyên tố p để $2^p + p^2$ cũng là số nguyên tố.

Lời giải

Với $p = 2$ ta có $2^p + p^2 = 2^2 + 2^2 = 4$ không là số nguyên tố.

Với $p = 3$ ta có $2^p + p^2 = 2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố.

Với $p > 3$ ta có $p^2 + 2^p = (p^2 - 1) + (2^p + 1)$. Vì p lẻ và p không chia hết cho 3 nên $p^2 - 1 \vdots 3$ và $2^p + 1 \vdots 3$, do đó $2^p + p^2$ là hợp số.

Vậy, với $p=3$ thì $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

Bài 10: Chứng minh rằng hai số $n+1$ và $3n+4$ ($n \in \mathbb{N}$) là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

Gọi $d = \text{CLN}(n+1, 3n+4) \Rightarrow d \in \mathbb{N}^*$, nên ta có:

$$\begin{cases} n+1 \vdots d \\ 3n+4 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n+3 \vdots d \\ 3n+4 \vdots d \end{cases} \Rightarrow (3n+4) - (3n+3) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d$$

Vậy hai số $n+1$ và $3n+4$ là hai số nguyên tố cùng nhau với ($n \in \mathbb{N}$).

Bài 11: Chứng minh rằng $2n+1$ và $2n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

Gọi $d = \text{CLN}(2n+1, 2n+3) \Rightarrow d \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Khi đó ta có: } \begin{cases} 2n+1 \vdots d \\ 2n+3 \vdots d \end{cases} \Rightarrow (2n+3) - (2n+1) \vdots d \Rightarrow 2 \vdots d \Rightarrow d \in (2) = \{1; 2\}$$

Mà ta lại có $(2n+1) \vdots d$ mà $2n+1$ là số lẻ nên $d = 2$ (loại), do đó $d = 1$

Vậy hai số $2n+1$ và $2n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 12: Tìm $n \in \mathbb{N}$ để: $7n+10$ và $5n+7$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải :

Gọi $d = \text{CLN}(7n+10; 5n+7) \Rightarrow d \in \mathbb{N}^*$

Khi đó ta có:

$$\begin{cases} 7n+10 \vdots d \\ 5n+7 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(7n+10) \vdots d \\ 7(5n+7) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 35n+50 \vdots d \\ 35n+49 \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (35n+50) - (35n+49) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d$$

Do đó $d = 1$

Vậy với mọi $n \in \mathbb{N}$ hai số $7n+10$ và $5n+7$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Bài 13: Tìm hai số tự nhiên a và b biết $\text{BCNN}(a, b) = 180$; $\text{UCLN}(a, b) = 12$.

Trích đề HSG huyện Hà Trung năm 2021-2022

Lời giải

Ta có $a \cdot b = \text{UCLN}(a, b) \cdot \text{BCNN}(a, b) \Rightarrow ab = 180 \cdot 12 = 2160$

Giả sử $a \leq b$.

Vì $\text{UCLN}(a, b) = 12$ nên $a = 12m, b = 12n$ với $(m, n) = 1$ và $m \leq n$.

$\Rightarrow 12m \cdot 12n = 2160 \Rightarrow mn = 15$. Ta có bảng sau:

m	n	a	b
1	15	12	180
3	5	36	60

Vậy ta có hai cặp $(a; b)$ là $(12; 180), (36; 60)$.

Bài 14: Tìm số nguyên tố p sao cho $p+4$ và $p+14$ là các số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện năm 2021-2022

Lời giải

Với $p=2$ thì $p+4=2+4=6$ là hợp số (loại)

Với $p=3$ thì $p+4=3+4=7$ (thỏa mãn)

$$p+14=3+14=17 \text{ (thỏa mãn)}$$

Với $p>3$ thì $p=3k+1$ hoặc $p=3k+2$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

Nếu $p=3k+1$ thì $p+14=3k+1+14=3k+15:3$ (loại)

Nếu $p=3k+2$ thì $p+4=3k+2+4=3k+6:3$ (loại)

Vậy $p=3$ thì $p+4$ và $p+14$ là các số nguyên tố.

Bài 15: Chứng minh rằng: Nếu $7x+4y : 37$ thì $13x+18y : 37$

Lời giải:

Ta có: $5(13x+18y)-4(7x+4y)=65x+90y-28x-16y$

$$=37x+74y=37(x+2y):37$$

Hay $5(13x+18y)-4(7x+4y):37$ (*)

Vì $7x+4y:37$, mà $(4;37)=1$ nên $4(7x+4y):37$

Do đó, từ (*) suy ra: $5(13x+18y):37$, mà $(5;37)=1$ nên $13x+18y:37$

CHỦ ĐỀ 3: TÍNH CHẤT CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ TỰ NHIÊN
A. PHẦN NỘI DUNG

I. Quan hệ chia hết và tính chất.

Dạng 1: Chứng minh chia hết.

Bài 1: Chứng minh rằng : $(3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}) : 120 \quad (x \in \mathbb{N})$.

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021 – 2022

Lời giải

Ta có :

$$\begin{aligned} & (3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}) \\ &= (3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4}) + (3^{x+5} + 3^{x+6} + 3^{x+7} + \dots + 3^{x+8}) + \dots + (3^{x+97} + 3^{x+98} + 3^{x+99} + \dots + 3^{x+100}) \\ &= 3^x \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^{x+4} \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{x+96} \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) \\ &= 3^x \cdot 120 + 3^{x+4} \cdot 120 + \dots + 3^{x+96} \cdot 120 \\ &= 120 \cdot (3^x + 3^4 + \dots + 3^{x+96}) : 120 \end{aligned}$$

Bài 2: Cho $S = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + 5^6 + \dots + 5^{2016}$. Chứng tỏ rằng S chia hết cho 65.

Trích đề KS HSG thị xã Sơn Tây năm 2021-2022

Lời giải

Ta có: $5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 = (5 + 5^3) + 5(5 + 5^3) = 130 + 5 \cdot 130 = 130 \cdot 6 = 12 \cdot 65$

Suy ra $5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 : 65$.

$$S = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + 5^6 + \dots + 5^{2016}$$

$$S = (5 + 5^2 + 5^3 + 5^4) + 5^4(5 + 5^2 + 5^3 + 5^4) + \dots + 5^{2012}(5 + 5^2 + 5^3 + 5^4)$$

Tổng trên có 504 số hạng chia hết cho 65 nên S chia hết cho 65.

Vậy S chia hết cho 65.

Bài 3: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng : $p^2 - 1 : 24$

Trích đề kiểm định chất lượng HSG huyện Nghĩa Đồng năm 2021-2022.

Lời giải

vì p nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ và p không chia hết cho 3.

$$\text{Ta có } p^2 - 1 = p^2 - p + p - 1 = (p-1)(p+1)$$

do p là số lẻ nên $p = 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{N}^*)$

$$p^2 - 1 = (p-1)(p+1) = 2k(2k+2) = 4k(k+1) : 8 \quad (1)$$

Mặt khác $p-1, p, p+1$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên có một số chia hết cho 3, mà p không chia hết cho 3 nên $p-1$ hoặc $p+1$ chia hết cho 3.

$$\text{Từ đó suy ra } p^2 - 1 = (p-1)(p+1) : 3 \quad (2)$$

Vì $(3;8) = 1$ và từ (1) và (2) nên suy ra $p^2 - 1 : 24$

Bài 4: Chứng tỏ: $A = 10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27 (với n là số tự nhiên)

Trích đề thi chọn HSG huyện Kim Sơn năm 2021-2022

Lời giải

$$A = 10^n + 18n - 1 = 10^n - 1 - 9n + 27n$$

$$= 9 \cdot \underbrace{(11 \dots 1 - n)}_n + 27n$$

Ta biết số n và số có tổng các chữ số bằng n có cùng số dư khi chia cho 9 do đó $\underbrace{11 \dots 1 - n}_n : 9$

nên $9 \cdot \underbrace{(11 \dots 1 - n)}_n : 27$. Vậy $A : 27$

Bài 5: Chứng minh rằng: Nếu $(\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}) : 11$ thì $\overline{abcdeg} : 11$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overline{abc \text{ deg}} &= 10000.\overline{ab} + 100.\overline{cd} + \overline{eg} \\ &= (9999.\overline{ab} + 99.\overline{cd}) + (\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}) \\ &= 99.(101.\overline{ab} + \overline{cd}) + (\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}) \\ &= 11.9.(101.\overline{ab} + \overline{cd}) + (\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}) \end{aligned}$$

Do $11.9.(101.\overline{ab} + \overline{cd}) : 11$ và theo bài ra $(\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}) : 11$

Suy ra: $\overline{abc \text{ deg}} : 11$

Vậy nếu $(\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}) : 11$ thì $\overline{abc \text{ deg}} : 11$.

Bài 6: Cho $A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2022}\right) \cdot 2.3.4 \dots 2022$. Hỏi A có chia hết cho 2023 không?

Lời giải

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2022} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1010}\right) + \left(\frac{1}{1011} + \frac{1}{1012} + \frac{1}{1013} + \dots + \frac{1}{2022}\right) \text{ (mỗi ngoặc có 1010 số hạng)} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2022}\right) + \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2021}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2020}\right) + \dots + \left(\frac{1}{1010} + \frac{1}{1011}\right) \\ &= \frac{2023}{1.2022} + \frac{2023}{2.2021} + \frac{2023}{3.2020} + \dots + \frac{2023}{1010.1011} \\ &= 2023 \cdot \left(\frac{1}{1.2022} + \frac{1}{2.2021} + \frac{1}{3.2020} + \dots + \frac{1}{1010.1011}\right) \\ &= \frac{2023}{1.2022} + \frac{2023}{2.2021} + \frac{2023}{3.2020} + \dots + \frac{2023}{1010.1011} \\ &= \frac{2023}{1.2022} + \frac{2023}{2.2021} + \frac{2023}{3.2020} + \dots + \frac{2023}{1010.1011} \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } A = 2023.2.3.4 \dots 2022 \cdot \left(\frac{1}{1.2022} + \frac{1}{2.2021} + \frac{1}{3.2020} + \dots + \frac{1}{1010.1011}\right)$$

Đặt $m = 2.3.4 \dots 2022$

$$\text{Khi đó } A = 2023.m \cdot \left(\frac{1}{1.2022} + \frac{1}{2.2021} + \frac{1}{3.2020} + \dots + \frac{1}{1010.1011}\right)$$

$$A = 2023 \cdot \left(\frac{m}{1.2022} + \frac{m}{2.2021} + \frac{m}{3.2020} + \dots + \frac{m}{1010.1011}\right) \quad (1)$$

$$\text{Vì } m = 2.3.4 \dots 2022 \Rightarrow \frac{m}{1.2022}; \frac{m}{2.2021}; \frac{m}{3.2020}; \dots; \frac{m}{1010.1011} \in \mathbb{Q}^*$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m}{1.2022} + \frac{m}{2.2021} + \frac{m}{3.2020} + \dots + \frac{m}{1010.1011}\right) \in \mathbb{Q}^* \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A:2023$.

Vậy A chia hết cho 2023

Bài 7: Cho $a; b; c; d$ là các số nguyên ($a \neq c$) với thỏa mãn $ab+cd$ chia hết cho $a-c$. Chứng tỏ rằng $ad + bc$ chia hết cho $a-c$.

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\text{Xét hiệu: } (ab+cd)-(ad+bc)=(ab-bc)+(cd-ad)$$

$$=b(a-c)-d(a-c)=(a-c)(b-d):(a-c)$$

$$\text{Mà } (ab+cd):(a-c)$$

$$\Rightarrow (ad+bc):(a-c) \text{ (điều phải chứng minh)}$$

Bài 8:

Chứng tỏ rằng $M = 75.(4^{2021} + 4^{2020} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 100.

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021-2022

Lời giải

Chứng tỏ rằng $M = 75.(4^{2021} + 4^{2020} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 100.

$$\text{Đặt } S = 4^{2021} + 4^{2020} + \dots + 4^2 + 4 + 1 \Rightarrow M = 75.S + 25$$

$$\text{Ta có } S = 4^{2021} + 4^{2020} + \dots + 4^2 + 4 + 1 \Rightarrow 4S = 4^{2022} + 4^{2021} + \dots + 4^3 + 4^2 + 4$$

$$\Rightarrow 4S - S = 4^{2022} - 1 \Leftrightarrow S = \frac{4^{2022} - 1}{3}$$

$$\text{Do đó } M = 75.S + 25 = 75 \cdot \frac{4^{2022} - 1}{3} + 25 = 25 \cdot (4^{2022} - 1) + 25 = 25 \cdot 4^{2022} = 100 \cdot 4^{2021}$$

Suy ra $M:100$

Bài 9:

Cho ba số nguyên tố lớn hơn 3, trong đó số sau lớn hơn số trước là d đơn vị. Chứng minh d chia hết cho 6.

Trích đề HSG huyện Quế Võ năm 2021 – 2022

Gọi ba số nguyên tố đã cho là $p; p+d; p+2d$.

Để chứng minh d chia hết cho 6 ta phải chứng minh d chia hết cho cả 2 và 3.

a) Chứng minh d chia hết cho 2 :

Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ, mà $p+d$ là số nguyên tố $\Rightarrow d$ là số chẵn $\Rightarrow d:2$.

b) Chứng minh d chia hết cho 3 :

Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $p=3q+1$ hoặc $p=3q+2$ (với $q \in \mathbb{N}^*$)

- Trường hợp 1: $p=3q+1$

+) Nếu d chia 3 dư 1 thì $2d$ chia 3 dư 2 $\Rightarrow p+2d$ chia hết cho 3

Mà $p+2d > 3 \Rightarrow p+2d$ là hợp số \rightarrow loại.

+) Nếu d chia 3 dư 2 $\Rightarrow p+d$ chia hết cho 3

Mà $p+d > 3 \Rightarrow p+d$ là hợp số \rightarrow loại.

Suy ra d phải chia hết cho 3 .

- Trường hợp 2: $p = 3q + 2$

+) Nếu d chia 3 dư 1 $\Rightarrow p+d$ chia hết cho 3

Mà $p+d > 3 \Rightarrow p+d$ là hợp số \rightarrow loại.

+) Nếu d chia 3 dư 2 thì $2d$ chia 3 dư 1 $\Rightarrow p+2d$ chia hết cho 3

Mà $p+2d > 3 \Rightarrow p+2d$ là hợp số \rightarrow loại.

Suy ra d phải chia hết cho 3 .

Do đó, d luôn chia hết cho 3 . Vậy bài toán được chứng minh.

Dạng 2: Tìm số thỏa mãn điều kiện chia hết.

Bài 1: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia số đó cho 3 dư 1, chia cho 4 dư 2, chia cho 5 dư 3 chia cho 6 dư 4 và chia hết cho 11.

Trích đề đề xuất năm 2021-2022

Lời giải

Gọi số phải tìm là x ($x \in N$)

Theo bài ra ta có:

$x-1:3$ suy ra $x+2:3$

$x-2:4$ suy ra $x+2:4$

$x-3:5$ suy ra $x+2:5$

$x-4:6$ suy ra $x+2:6$

Do đó $x+2 \in BC(3,4,5,6)$

Mà: $BCNN(3,4,5,6) = 60$ nên $x+2 = 60n$

Do đó $x = 60n - 2$ ($n = 1; 2; 3; \dots$)

Mặt khác x là số tự nhiên nhỏ nhất $x:11$ nên lần lượt cho $n = 1; 2; 3; \dots$

Ta thấy $n = 7$ thì ta được số 418 thỏa mãn.

Vậy số nhỏ nhất phải tìm là 418.

Bài 2: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng số đó chia cho 9 dư 5, chia cho 7 dư 4 và chia cho 5 thì dư 3.

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021-2022.

Lời giải

Gọi số cần tìm là a (a là số tự nhiên khác 0).

Vì a chia cho 9 dư 5 nên ta có $a = 9k + 5$ ($k \in N$) thì $2a = 9k_1 + 1$ ($k_1 \in N$) suy ra $(2a-1):9$

Vì a chia cho 7 dư 4 nên ta có $a = 7m + 4$ ($m \in N$) thì $2a = 7m_1 + 1$ ($m_1 \in N$) suy ra $(2a-1):7$

Vì a chia cho 5 dư 3 nên ta có $a = 5t + 3$ ($t \in N$) suy ra $2a = 5t_1 + 1$ ($t_1 \in N$) suy ra $(2a-1):5$

Suy ra $(2a-1)$ chia hết cho cả 9; 7 và 5. Mà 9; 7; 5 nguyên tố cùng nhau và a là số tự nhiên nhỏ nhất nên $2a-1 = BCNN(9;7;5) = 315$.

Vậy $a = 158$.

Bài 3: Tìm các số tự nhiên a, b sao cho: $(2008a+3b+1)(2008^a+2008a+b) = 225$

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021-2022.

Lời giải

Theo đề bài $2008a+3b+1$ và $2008^a+2008a+b$ là 2 số lẻ.

Nếu $a \neq 0$ suy ra $2008^a+2008a$ là số chẵn

để $2008^a+2008a+b$ lẻ suy ra b lẻ

Nếu b lẻ suy ra $3b+1$ chẵn do đó $2008a+3b+1$ chẵn (không thoả mãn)

Vậy $a = 0$

Với $a = 0$ suy ra $(3b+1)(b+1) = 225$

Vì $b \in \mathbb{N}$ suy ra $(3b+1)(b+1) = 225 = 3.75 = 5.45 = 9.25$

$3b+1$ không chia hết cho 3 và $3b+1 > b+1$

Nên $\begin{cases} 3b+1=25 \\ b+1=9 \end{cases}$ suy ra $b=8$

Vậy $a=0; b=8$.

Bài 4: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có 3 chữ số sao cho số đó chia 7 dư 3 và chia 11 dư 5.

Trích đề KS HSG thị xã Sơn Tây năm 2021-2022

Lời giải

Gọi số tự nhiên nhỏ nhất có 3 chữ số là a .

Vì a chia 7 dư 3 nên $a = 7n+3$ ($n \in \mathbb{N}$) suy ra $a+4 = 7(n+1)$

Do đó $a+4+35 \vdots 7$ hay $a+39 \vdots 7$

Vì a chia 11 dư 5 nên $a = 11m+5$ ($m \in \mathbb{N}$) suy ra $a+6 = 11(m+1)$

Do đó $a+6+33 \vdots 11$ hay $a+39 \vdots 11$

Vậy $a+39 \in BC(7,11)$ suy ra $a+39 = 154$ nên $a = 115$

Vậy số cần tìm là 115.

Bài 5: Tìm số tự nhiên $n > 1$ sao cho $2n+1$ chia hết cho $n-1$.

Trích đề Olympic năm 2021-2022

Lời giải

Ta có $(2n+1):(n-1)$ hay $(2n-2+3):(n-1)$ hay $2(n-1)+3:n-1$

Mà $2(n-1):(n-1)$ nên $3:(n-1)$ hay $n-1$ là ước của 3

$U(3) = \{-3; -1; 1; 3\}$

Mà: $n > 1$ nên $(n-1) \in \{1; 3\}$

Suy ra $n \in \{1; 4\}$.

Vậy $n \in \{1; 4\}$.

Bài 6: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng khi chia số này cho 9 thì dư 5 và chia cho 11 thì dư 9.

Trích đề Olympic năm 2021-2022

Lời giải

Gọi số cần tìm là a ($a \in \mathbb{N}$).

Ta có $(a-5):9$ suy ra $(a-5+18):9$ mà $18:9$ nên $(a+13):9$

Lại có $(a-9):11$ suy ra $(a-9+22):11$ suy ra $(a+13):11$

Từ đó ta có $a+13 \in BC(9;11)$ mà a nhỏ nhất nên $a+13 = BCNN(9;11) = 99$ nên $a = 86$.

Vậy số cần tìm là 86.

Bài 7: Tìm các chữ số x, y sao cho: $B = \overline{62x427y}$ chia hết cho 18.

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2021-2022.

Lời giải

Ta có: $18 = 2 \cdot 9$ mà $\text{CLN}(2; 9) = 1$.

$B = \overline{62x427y}$ chia hết cho 18 thì $B:2$ và $B:9$

$B:2$ suy ra $y \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$ (vì y là chữ số)

$B:9$ suy ra $6+2+x+4+2+7+y = 21+x+y:9$

$\rightarrow y = 0$ suy ra $21+x:9$ suy ra $x = 6$ (vì x là chữ số).

$\rightarrow y = 2$ suy ra $23+x:9$ suy ra $x = 4$ (vì x là chữ số).

$\rightarrow y = 4$ suy ra $25+x:9$ suy ra $x = 2$ (vì x là chữ số).

$\rightarrow y = 6$ suy ra $27+x:9$ suy ra $x = 0$ hoặc $x = 9$ (vì x là chữ số).

$\rightarrow y = 8$ suy ra $29+x:9$ suy ra $x = 7$ (vì x là chữ số).

Vậy $(x; y) \in \{(6; 0); (4; 2); (2; 4); (0; 6); (9; 6); (7; 8)\}$

Bài 8: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho số đó chia cho 3 dư 1; chia cho 4 dư 2; chia cho 5 dư 3; chia cho 6 dư 4 và chia hết cho 11.

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2021-2022.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là a

Ta có: a chia cho 3 dư 1 suy ra $a-1:3$ suy ra $a-1+3:3$ suy ra $a+2:3$

a chia cho 4 dư 2 suy ra $a-2:4$ suy ra $a-2+4:4$ suy ra $a+2:4$

a chia cho 5 dư 3 suy ra $a-3:5$ suy ra $a-3+5:5$ suy ra $a+2:5$

a chia cho 6 dư 4 suy ra $a-4:6$ suy ra $a-4+6:6$ suy ra $a+2:6$

Do đó: $a+2 \in \{0; 60; 120; 180; 240; 300; 360; 420; 560; \dots\}$

Suy ra $a \in \{-2; 58; 118; 178; 238; 298; 358; 418; 558; \dots\}$

Mà a nhỏ nhất và chia hết cho 11

Vậy $a = 418$

Bài 9: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho a chia cho 3 dư 2; a chia cho 5 dư 4; a chia cho 7 dư 6.

Trích đề HSG huyện Sóc Sơn năm 2021-2022.

Lời giải

Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} a = 3k + 2 \\ a = 5p + 4 \\ a = 7q + 6 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} a + 1 : 3 \\ a + 1 : 5 \\ a + 1 : 7 \end{cases}$$

Suy ra $a+1 \in BC(3; 5; 7)$

Mà a là số tự nhiên nhỏ nhất nên $a+1 = BCNN(3; 5; 7)$

$BCNN(3; 5; 7) = 105$

Suy ra $a+1 = 105$

Suy ra $a = 104$. Vậy $a = 104$

Bài 10: Tìm các số tự nhiên có 3 chữ số chia hết cho 7 và tổng các chữ số của nó cũng chia hết cho 7

Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021-2022.

Lời giải

Gọi số đó là \overline{abc} ($0 \leq a; b; c \leq 9$) $a \neq 0$

Ta có $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 98a + 7b + 2a + 3b + c = 7(14a + b) + (2a + 3b + c)$

Vì $\overline{abc} : 7$ nên $(2a + 3b + c) : 7$. Mà $(a + b + c) : 7$ nên $2(a + b + c) : 7$

Suy ra $(b - c) : 7$

Mà $b; c$ là chữ số nên $b - c \in \{-7; 0; 7\}$.

Nếu $b - c = 7$ thì $c = b + 7$

$a + b + c = (a + 2b + 7) : 7$

$(a + 2b) : 7$

$\overline{abc} \in \{707; 518; 329\}$

Nếu $b - c = 0$ nên $b = c$ khi đó $a + b + c = (a + 2b) : 7$

Nên $\overline{abc} \in \{133; 322; 511; 700; 266; 455; 644; 833; 399; 588; 777; 966\}$.

Vậy các số cần tìm là:

707; 518; 329; 770; 581; 392; 133; 322; 511; 700; 266; 455; 644; 833; 399; 588; 777; 966

Bài 11: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia cho 11 dư 6, chia cho 4 dư 1 và chia cho 19 dư 11.

Trích đề thi chọn HSG huyện Kim Sơn năm 2021-2022

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là a

Ta có: a chia cho 11 dư 6 suy ra $a - 6 : 11$ suy ra $a - 6 + 33 : 11$ suy ra $a + 27 : 11$

a chia cho 4 dư 1 suy ra $a - 1 : 4$ suy ra $a - 1 + 28 : 4$ suy ra $a + 27 : 4$

a chia cho 19 dư 11 suy ra $a - 11 : 19$ suy ra $a - 11 + 38 : 19$ suy ra $a + 27 : 19$

mà a là số tự nhiên nhỏ nhất nên $a + 27$ nhỏ nhất

Suy ra: $a + 27 = BCNN(4; 11; 19)$.

Từ đó tìm được $a = 809$

Bài 12: Tìm 1 số tự nhiên có 2 chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 9 vào bên trái số đó ta được 1 số lớn gấp 13 lần số đã cho.

Trích đề thi chọn HSG huyện Tiên Du năm 2021-2022.

Lời giải

Gọi số phải tìm là \overline{ab} . Với a, b là các chữ số a khác 0

Viết thêm chữ số 9 vào bên trái ta được số $9\overline{ab}$.

Theo bài ra ta có :

$$9\overline{ab} = 13.\overline{ab}$$

$$900 + \overline{ab} = \overline{ab}.13$$

$$\overline{ab} = 75. \text{ Thử lại đúng.}$$

Vậy số phải tìm là 75.

Bài 13: Tìm tất cả các số tự nhiên n , biết rằng $n + S(n) = 2014$, trong đó $S(n)$ là tổng các chữ số của n .

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019

Nếu n là số có ít hơn 4 chữ số thì $n \leq 999$ và $S(n) \leq 27$

Suy ra $n + S(n) \leq 999 + 27 = 1026 < 2014$ (ktm)

Mặt khác $n \leq n + S(n) = 2014$ nên n là số có ít hơn 5 chữ số.

Vậy n là số có 4 chữ số, suy ra $S(n) \leq 9.4 = 36$.

Do vậy $n \geq 2014 - 36 = 1978$

$$\text{Vì } 1978 \leq n \leq 2014 \text{ suy ra } \begin{cases} n = \overline{19ab} \\ n = \overline{20cd} \end{cases}$$

*Nếu $n = \overline{19ab}$. Ta có: $\overline{19ab} + (1+9+a+b) = 2014$

$$1910 + 11a + 2b = 2014 \text{ suy ra } 11a + 2b = 104 \text{ suy ra } a:2$$

và $11a = 104 - 2b \geq 104 - 2 \cdot 9 = 86$ suy ra $8 \leq 10 < a, a:2$ nên $a = 8$ khi đó $b = 8$

$$\text{suy ra } n = 1988(tm)$$

*Nếu $n = \overline{20cd}$ thì $\overline{20cd} + (2+0+c+d) = 2014$

$$2002 + 11c + 2d = 2014 \text{ nên } 11c + 2d = 12 \text{ suy ra } c:2$$

$$\text{Và } 11c \leq 12$$

+TH1 $c = 0$ thì $d = 6, n = 2006(tm)$

+TH2 $c = 1$ thì $2d = 1(ktm)$

$$\text{Vậy } n \in \{1988; 2006\}$$

Bài 14: Tìm các số nguyên a, b biết rằng: $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+1}$

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019

Bài giải

$$\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+1} \text{ suy ra } \frac{2a-7}{14} = \frac{1}{b+1} \text{ suy ra } (2a-7)(b+1) = 14$$

Do $a, b \in \mathbb{Z}$ suy ra $2a-7 \in U(14) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 7; \pm 14\}$

Vì $2a-7$ lẻ nên $2a-7 \in \{-7; -1; 1; 7\}$ suy ra $a \in \{0; 3; 4; 7\}$

Từ đó tính được $(a, b) = \{(0; -3); (3; -15); (4; 13); (7; 1)\}$

Bài 15: Cho $n = \overline{7a5} + \overline{8b4}$. Biết $a-b=6$ và n chia hết cho 9. Tìm a, b

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019

Bài giải

Ta có: $n = \overline{7a5} + \overline{8b4} : 9$ thì $7+a+5+8+b+4 : 9$

$$24+a+b : 9 \text{ suy ra } a+b \in \{3; 12\} \text{ (vì } a+b < 19)$$

Mà $a-b=6$ suy ra $a+b > 3$ suy ra $a+b=12$

Kết hợp với $a-b=6$ suy ra $a=9, b=3$

Bài 16 : Tìm các chữ số x, y sao cho $\overline{2014xy} : 42$.

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019.

Bài giải

$$\overline{2014xy} = 201400 + \overline{xy} = 42 \cdot 4795 + 10 + \overline{xy} : 42 \text{ suy ra } 10 + \overline{xy} : 42$$

Do $0 \leq \overline{xy} < 100$ suy ra $\overline{xy} \in \{32; 74\}$.

Vậy $(x, y) = (3; 2); (7; 4)$

Bài 17: Tìm các số nguyên tố x, y sao cho $x^2 + 117 = y^2$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2018-2019

Bài giải

Với $x=2$ thì $2^2 + 117 = 121$ khi đó $y^2 = 121$ nên $y=11$ (là số nguyên tố)

Với $x > 2, x$ là số nguyên tố nên x lẻ nên $y^2 = x^2 + 117$ là số chẵn

Nên y chẵn, kết hợp với y nguyên tố nên $y=2(ktm)$

Vậy $x=2; y=11$

Bài 18: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, biết rằng số đó khi chia cho 3, cho 4, cho 5, cho 6 đều dư là 2, còn chia cho 7 thì dư 3.

Trích đề HSG huyện Vĩnh lộc năm 2017-2018

Lời giải

Gọi a là số tự nhiên cần tìm

Vì a chia cho 3, 4, 5, 6 đều dư 2 nên $a-2$ chia hết cho 3, 4, 5, 6

$$(a-2) \in BC(3; 4; 5; 6), BCNN(3, 4, 5, 6) = 60$$

$$a-2 \in \{0; 60; 120; 180; \dots\} \text{ suy ra } a \in \{2; 62; 122; 182; \dots\}$$

Mà a là số nhỏ nhất và chia cho 7 dư 3 suy ra $a=122$

Bài 19: Tìm số tự nhiên b biết 326 chia b dư 11 và 557 chia b dư 17.

Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Lời giải

Theo bài cho ta có $b \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Ta có } 326 \text{ chia } b \text{ dư } 11 \Rightarrow (326-11):b; b > 11 \Rightarrow 315:b; b > 11(1)$$

$$\text{Ta có: } 557 \text{ chia } b \text{ dư } 17 \Rightarrow (557-17):b; b > 17 \Rightarrow 540:b; b > 17(2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow b \in UC(315, 540); b > 17(3)$$

Phân tích các số 315, 540 ra thừa số nguyên tố, ta có

$$315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$$

$$\Rightarrow UCLN(315; 540) = 3^2 \cdot 5 = 45$$

$$\Rightarrow UC(315; 540) = U(45) = \{1; 3; 5; 9; 15; 45\} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow b = 45$.

Vậy $b = 45$.

Bài 20: Tìm các chữ số $x; y$ biết $\overline{75x1y}$ chia hết cho 45.

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021 - 2022

Lời giải

Vì $45 = 9 \cdot 5$ mà $UCLN(5; 9) = 1$ nên

$$\overline{75x1y}:45 \Rightarrow \begin{cases} \overline{75x1y}:5 \\ \overline{75x1y}:9 \end{cases}$$

$$\text{Vì } \overline{75x1y}:5 \Rightarrow y \in \{0; 5\}$$

$$\text{Vì } \overline{75x1y}:9 \Rightarrow (13+x+y):9$$

Với $y=0 \Rightarrow x=5$ suy ra số cần tìm là 75510

Với $y=5 \Rightarrow x=0$ hoặc $x=9$ suy ra số cần tìm là 75015 hoặc 75915

Bài 21: Tìm các chữ số $x; y$ để $B = \overline{x183y}$ chia cho 2; 5; 9 đều dư 1

Lời giải

$B = \overline{x183y}$ chia cho 2;5 đều dư 1 thì $y = 1$

$$\Rightarrow B = \overline{x1831}$$

Để $B = \overline{x1831}$ chia cho 9 dư 1 thì $x + 1 + 8 + 3 + 1$ chia cho 9 dư 1

$$\Rightarrow x + 13 \text{ chia cho } 9 \text{ dư } 1, \text{ mà } x \text{ là chữ số} \Rightarrow x = 6$$

Bài 22: Tìm các chữ số x, y biết $\overline{75x1y}$ chia hết cho 45.

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Lời giải

Vì $45 = 5 \cdot 9$ và $(5;9) = 1$ nên

$$\overline{75x1y}:45 \Rightarrow \begin{cases} \overline{75x1y}:5 \\ \overline{75x1y}:9 \end{cases}$$

$$\text{Vì } \overline{75x1y}:5 \Rightarrow y \in \{0;5\}$$

$$\text{Vì } \overline{75x1y}:9 \Rightarrow (13+x+y):9$$

Với $y = 0 \Rightarrow x = 5$ suy ra số cần tìm là 75510

Với $y = 5 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = 9$ suy ra số cần tìm là 75015 hoặc 75915

Bài 23: Tìm số tự nhiên n có 4 chữ số biết n là số chính phương và n là bội của 147.

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Lời giải

Vì n là số tự nhiên có 4 chữ số nên $1000 \leq n \leq 9999$

Theo bài ra n là bội của 147 nên $n = 147 \cdot k = 7^2 \cdot 3k$

Do n là số chính phương nên khi phân tích n ra thừa số nguyên tố thì lũy thừa của các thừa số nguyên tố phải có số mũ chẵn suy ra $k:3$

$$\Rightarrow k = 3m \Rightarrow n = 7^2 \cdot 3^2 \cdot m = 441m$$

$$\Rightarrow 1000 \leq 441m \leq 9999$$

$$\Rightarrow 2 < m \leq 22$$

Để n là số chính phương thì m phải là số chính phương nên $m \in \{4;9;16\}$

Suy ra các số tự nhiên cần tìm là: 1764; 3969; 7056

Bài 24: Số nhà của hai bạn An và Bình đều là số tự nhiên có bốn chữ số dạng $\overline{a53b}$ và chia hết cho cả 5 và 9. Tìm số nhà của hai bạn biết số nhà của bạn An lớn hơn số nhà của bạn Bình.

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2021-2022

Lời giải

Vì $\overline{a53b}$ chia hết cho 5 nên $b = 0$ hoặc $b = 5$

+ Với $b = 0$ ta có số dạng $\overline{a530}$

$\overline{a530}$ chia hết cho 9 khi $a + 8$ chia hết cho 9

Vì a là chữ số khác 0 nên $a = 1$. Ta được số 1530

+ Với $b = 5$ ta có số dạng $\overline{a535}$

$\overline{a535}$ chia hết cho 9 khi $a + 13$ chia hết cho 9

Vì a là chữ số khác 0 nên $a = 5$. Ta được số 5535

Vì số nhà của bạn An lớn hơn số nhà của bạn Bình nên số nhà của bạn An là 5535, số nhà của bạn Bình là 1530.

Bài 25: Một số tự nhiên khi chia cho 11 dư 4, chia cho 13 dư 8. Tìm số dư trong phép chia số đó cho 143.

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2021-2022

Lời giải

Gọi số đó là a .

Vì a chia cho 11 dư 4, chia cho 13 dư 8 nên $a + 18 \equiv 11, a + 18 \equiv 13$

Mà $\text{ƯCLN}(11, 13) = 1$ nên $a + 18 \equiv 11 \cdot 13 \Rightarrow a + 18 \equiv 143$

$$\Rightarrow a + 18 = 143k \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Rightarrow a + 143 - 125 = 143k$$

$$\Rightarrow a = 143(k - 1) + 125$$

Suy ra a chia cho 143 dư 125

Bài 26: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất chia cho 5 dư 1, chia cho 7 dư 3.

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2021-2022

Lời giải

Gọi a là số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm ($a \in \mathbb{N}^*$)

Vì a chia cho 5 dư 1 nên $a + 4 \equiv 5$ (1)

Vì a chia cho 7 dư 3 nên $a + 4 \equiv 7$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a + 4 \in BC(7; 5)$

$$BC(7; 5) = 35$$

$$\text{suy ra } BC(5; 7) = \{0; 35; 70; 105 \dots\}$$

$$\text{Suy ra } (a + 4) \in \{0; 35; 70; 105 \dots\}$$

a là số tự nhiên nhỏ nhất suy ra $a + 4 = 35$ suy ra $a = 31$.

Dạng 3: Dùng phương pháp phản chứng; nguyên lí Dirichlet để cm chia hết hoặc không chia hết.

II. Số nguyên tố, hợp số.

Dạng 1: Tìm số để biểu thức là số nguyên tố, hợp số.

Bài 1: Cho tập hợp $A = \{6; 12; 18; 24\}$. Tìm số nguyên tố p sao cho p cộng với mỗi phần tử của A đều được kết quả là một số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021-2022.

Lời giải

Ta thấy $p = 2; p = 3$ không thoả mãn.

$$\text{Với } p = 5 \text{ suy ra } \begin{cases} p + 6 = 11 \\ p + 12 = 17 \\ p + 18 = 23 \\ p + 24 = 29 \end{cases} (TM)$$

Nếu $p > 5, p \in P$ thì p không chia hết cho 5, suy ra p chia cho 5 dư có thể là 1; 2; 3; 4.

Nếu p chia 5 dư 1 thì $(p + 24) : 5, p + 24 > 5$ nên $p + 24 \notin P$ (loại)

Nếu p chia 5 dư 2 thì $(p + 18) : 5$ (loại)

Nếu p chia 5 dư 3 thì $(p + 12) : 5$ (loại)

p chia 5 dư 4 thì $(p + 6) : 5$ (loại)

Vậy $p = 5$

Bài 2: Tìm số tự nhiên n để $(n + 3)(n + 1)$ là số nguyên tố

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019.

Lời giải

Để $(n + 3)(n + 1)$ là số nguyên tố thì một trong hai thừa số $n + 3; n + 1$ phải bằng 1

Mà $n + 3 > n + 1 \geq 1$ nên $n + 1 = 1$ do đó $n = 0$ Khi đó $n + 3 = 3$ là số nguyên tố.

Vậy $n = 0$ thì $(n + 3)(n + 1)$ là số nguyên tố.

Bài 3: Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p + 11$ cũng là số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Bạch Thông năm 2018-2019.

Lời giải

Nếu p lẻ suy ra $p + 11$ là số chẵn lớn hơn 11 nên không là số nguyên tố

Suy ra p chẵn suy ra $p = 2$

Dạng 2: Chứng minh là số nguyên tố, hợp số.

Bài 1: Cho p và $2p + 1$ là các số nguyên tố (với $p > 3$). Hỏi $4p + 1$ là số nguyên tố hay hợp số?

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3. Do đó, p có dạng $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

Nếu $p = 3k + 1$ thì $2p + 1 = 2(3k + 1) + 1 = 3(2k + 1)$ chia hết cho 3

Mà $p > 3$ suy ra $2p + 1 > 3$ nên $2p + 1$ là hợp số (trái với đề bài vì $2p + 1$ là số nguyên tố)

Do đó, p phải có dạng $p = 3k + 2$

khi đó $4p + 1 = 4(3k + 2) + 1 = 3(4k + 3)$ chia hết cho 3

Mà $p > 3$ nên $4p+1 > 3$ nên $4p+1$ là hợp số

Vậy $4p+1$ là hợp số.

Dạng 3: Tìm số nguyên tố thỏa mãn điều kiện cho trước.

Bài 1: Tìm các số nguyên tố x và y biết $x^2 - 6y^2 = 1$

Trích đề HSG huyện Nghĩa Đồng năm 2021-2022.

Lời giải

Ta có $x^2 - 6y^2 = 1$ nên $x^2 - 1 = 6y^2$ suy ra $x^2 - x + x - 1 = 6y^2$ suy ra $(x-1)(x+1) = 6y^2$

Vì $6y^2 : 2$ suy ra $(x-1)(x+1) : 2$ mà $(x-1) + (x+1) = 2x : 2$ nên $(x-1); (x+1)$ là hai số chẵn liên tiếp nên $(x+1)(x-1) : 8$.

$6y^2 : 8$ suy ra $3y^2 : 4$ suy ra $y : 2$ mà y là số nguyên tố nên $y = 2$.

Với $y = 2$ suy ra $x^2 = 25$ nên $x = 5$

Vậy $(x; y) = (5; 2)$.

Bài 2: Tìm số nguyên tố p sao cho $p+2$ và $p+4$ cũng là các số nguyên tố.

Trích đề thi chọn HSG huyện Tiên Du năm 2021-2022

Lời giải

Vì p là số nguyên tố nên ta xét các trường hợp

Với $p = 2$ thì $p+2 = 4$ không là số nguyên tố (không thỏa mãn)

Với $p = 3$ thì $p+2 = 5$; $p+4 = 7$ đều là các số nguyên tố (thỏa mãn)

Với $p > 3$, vì p là số nguyên tố nên p không chia hết cho 3, do đó p có dạng $3k+1$

hoặc $3k+2$ ($k \in \mathbb{N}$)

+) nếu $p = 3k+1$ thì $p+2 = 3k+3$ chia hết cho 3 nên là hợp số (không thỏa mãn)

+) nếu $p = 3k+2$ thì $p+4 = 3k+6$ chia hết cho 3 nên là hợp số (không thỏa mãn)

Vậy $p+2$ và $p+4$ cũng là các số nguyên tố

Bài 3: Tìm các số nguyên tố x, y sao cho $x^2 + 117 = y^2$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2018-2019

Lời giải

Với $x = 2$ thì $2^2 + 117 = 121$ nên $y^2 = 121$ suy ra $y = 11$ (là số nguyên tố)

Với $x > 2$, x là số nguyên tố nên x lẻ nên $y^2 = x^2 + 117$ là số chẵn

Nên y chẵn, kết hợp với y nguyên tố nên $y = 2(ktm)$

Vậy $x = 2; y = 11$

Bài 4: Tìm các số nguyên tố x, y, z thỏa mãn $x^y + 1 = z$.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Lời giải

Vì x, y là các số nguyên tố $\Rightarrow x \geq 2, y \geq 2$

$\Rightarrow z \geq 5 \Rightarrow z$ là số nguyên tố lẻ

$\Rightarrow x^y$ là số chẵn $\Rightarrow x$ chẵn

$\Rightarrow x = 2$ thay vào ta có $z = 2^y + 1$

Nếu y lẻ $\Rightarrow 2^y + 1 : 3$ ($a^n + b^n : a + b$ với n lẻ) $\Rightarrow z : 3$ vô lí

Do đó y là số chẵn $\Rightarrow y = 2$

Thay $x = 2; y = 2 \Rightarrow z = 5$

Vậy $x=2; y=2; z=5$

Bài 5: Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn điều kiện:

$$20abc < 30(ab+bc+ca) < 21abc.$$

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $\frac{2}{3} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{7}{10}$. Để không giảm tính tổng quát giả sử $a > b > c > 1$.

Suy ra $\frac{2}{3} < \frac{3}{c} \Rightarrow 2c < 9$, do đó $c \in \{2; 3\}$.

Với $c=2$ suy ra $\frac{2}{3} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{2} < \frac{7}{10} \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{2}{b}; \frac{1}{b} < \frac{1}{5}$.

Do đó $b \in \{7; 11\}$.

+ Với $b=7$, khi đó từ $\frac{1}{6} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{5}$ suy ra $\frac{1}{42} < \frac{1}{a} < \frac{2}{35} \Rightarrow a \in \{19; 23; 29; 31; 37; 41\}$.

+ Với $b=11$ từ $\frac{1}{6} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{5}$ suy ra $\frac{5}{66} < \frac{1}{a} < \frac{6}{55} \Rightarrow a=13$ (do $a > b$).

Với $c=3$ từ giả thiết suy ra $\frac{1}{3} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{11}{30} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{2}{b} \Rightarrow b < 6 \Rightarrow b=5$ (do $b > c$).

Thay $b=5$ vào $\frac{1}{3} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{11}{30}$ ta được $6 < a < \frac{15}{2} \Rightarrow a=7$.

Vậy các bộ ba số nguyên tố khác nhau $(a; b; c)$ thỏa mãn là: $(19; 7; 2)$, $(23; 7; 2)$, $(29; 7; 2)$, $(31; 7; 2)$, $(37; 7; 2)$, $(41; 7; 2)$, $(13; 11; 2)$, $(7; 5; 3)$ và các hoán vị của nó.

Bài 6: Tìm số nguyên tố p để $p+2; p+4$ đều là số nguyên tố.

Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Lời giải

Vì p là số nguyên tố nên ta có các trường hợp sau:

Với $p=2 \Rightarrow p+2=4$ không là số nguyên tố (trái đề bài) $\Rightarrow p=2$ (loại)

Với $p=3 \Rightarrow p+2=5; p+4=7$ là các số nguyên tố $\Rightarrow p=3$ (chọn)

Với $p > 3$ mà p là số nguyên tố nên p không chia hết cho 3

$$\Rightarrow p=3k+1 \text{ hoặc } p=3k+2 \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{Với } p=3k+1 \quad (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow p+2=3k+1+2=3(k+1)$$

$$\Rightarrow p+2:3 \text{ mà } p+2 > 3 \text{ (vì } p > 3) \Rightarrow p+2 \text{ là hợp số (trái đề bài)}$$

$$\Rightarrow p=3k+1 \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } p=3k+2 \quad (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow p+1=3k+2+1=3(k+1)$$

$$\Rightarrow p+1:3 \text{ mà } p+1 > 3 \text{ (vì } p > 3) \Rightarrow p+1 \text{ là hợp số (trái đề bài)}$$

$$\Rightarrow p = 3k + 2 \text{ (loại)}$$

Từ ba trường hợp trên suy ra $p = 3$.

Vậy $p = 3$.

Bài 7: Cho hai số nguyên tố x và y sao cho: $x^2 - 2x + 1 = 6y^2 - 2x + 2$. Tính $P = (x - 2y)^{2022} + 2021$

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có: $x^2 - 2x + 1 = 6y^2 - 2x + 2$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 6y^2 \Rightarrow 6y^2 = (x-1)(x+1):2 \text{ do } 6y^2:2$$

Mặt khác $x-1+x+1=2x:2 \Rightarrow x-1$ và $x+1$ cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Vậy $x-1$ và $x+1$ cùng chẵn $\Rightarrow x-1$ và $x+1$ là hai số chẵn liên tiếp

$$\Rightarrow (x-1)(x+1):8 \Rightarrow 6y^2:8 \Rightarrow 3y^2:4 \Rightarrow y^2:2 \Rightarrow y:2$$

$$\Rightarrow y = 2 \text{ (do } y \text{ là số nguyên tố), tìm được } x = 5$$

$$\text{Vậy } P = (x - 2y)^{2022} + 2021 = 2022$$

Bài 8: Tìm số nguyên tố p sao cho $p^2 + 4$ và $p^2 - 4$ đều là số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Tiền Hải năm 2021-2022

Lời giải

Với $p = 2 \Rightarrow p^2 + 4 = 8; p^2 - 4 = 0 \Rightarrow p^2 + 4$ và $p^2 - 4$ là hợp số.

Vậy $p = 2$ không thỏa mãn.

Với $p = 3 \Rightarrow p^2 + 4 = 13; p^2 - 4 = 5 \Rightarrow p^2 + 4$ và $p^2 - 4$ là số nguyên tố.

Vậy $p = 3$ thỏa mãn.

Với p là số nguyên tố và $p > 3 \Rightarrow p:3$ dư 1 hoặc 2 $\Rightarrow p^2:3$ dư 1 $\Rightarrow p^2 - 4:3$, Là hợp số không thỏa mãn.

Vậy $p = 3$ thì $p^2 + 4$ và $p^2 - 4$ đều là số nguyên tố.

III. Bội và ước.

Dạng 1: Chứng minh hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 1: Chứng tỏ rằng: $\frac{2n+5}{n+3}$ ($n \in \mathbb{N}$) là phân số tối giản

Trích đề đề xuất thi HSG huyện năm 2021-2022

Lời giải

Gọi $d = (n+3; 2n+5)$

Suy ra $n+3:d$ và $2n+5:d$

Suy ra $2(n+3) - (2n+5):d$ nên $1:d$ nên $d = 1$

Do đó $\frac{2n+5}{n+3}$ ($n \in \mathbb{N}$) là phân số tối giản

Bài 2: Chứng tỏ rằng $\frac{12n+1}{30n+2}$ ($n \in \mathbb{N}$) là phân số tối giản

Lời giải

$$\text{Gọi } d = (12n+1; 30n+2)$$

$$\text{Thì } 12n+1 : d \text{ và } 30n+2 : d$$

$$\text{Suy ra } 5(12n+1) - 2(30n+2) : d \text{ nên } 1 : d \text{ suy ra } d = 1$$

$$\text{Vậy } \frac{12n+1}{30n+2} \text{ (} n \in \mathbb{N} \text{)} \text{ là phân số tối giản.}$$

Dạng 2: Bài toán thực tế về số nguyên tố.

Dạng 3: Toán quan hệ giữa ƯCLN và BCNN.

Bài 1: Cho hai số tự nhiên $6n+1$ và $7n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) không nguyên tố cùng nhau. Hỏi ƯCLN của $6n+1$ và $7n-1$ là bao nhiêu ?

Trích đề HSG huyện Sóc Sơn năm 2021-2022.

Lời giải

$$\text{Gọi } d = (6n+1; 7n-1) \text{ (} d \in \mathbb{N}^* \text{)}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} 6n+1 : d \\ 7n-1 : d \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} 42n+7 : d \\ 42n-6 : d \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } (42n+7) - (42n-6) : d$$

$$\text{Hay } 13 : d \text{ nên } d \in \{1; 13\}$$

$$\text{Mà } (6n+1; 7n-1) \neq 1 \text{ nên } d = 13$$

$$\text{Vậy } (6n+1; 7n-1) = 13$$

Bài 2: Tìm 2 số tự nhiên có tổng bằng 432 và ƯCLN của chúng là 36

Trích đề thi chọn HSG huyện Kim Sơn năm 2021-2022.

Lời giải

Gọi 2 số là a, b . Ta có: $a+b=432$

Giả sử $a \leq b$. Vì $\text{CLN}(a, b) = 36$ nên $a = 36m; b = 36n$ với $(m; n) = 1$ và $m \leq n$

$$\text{nên } 36m + 36n = 432 \text{ suy ra } n+m=12$$

Ta có bảng sau:

m	n	a	b
1	11	36	396
5	7	180	252

$$\text{Vậy } a = 36; b = 396 \text{ hoặc } a = 180; b = 252$$

Bài 3: Tìm 2 số tự nhiên a, b ($a > b$) sao cho $a+b=45$ và $\text{CLN}(a, b) = 9$

Trích đề chọn HSG huyện Tiên Du năm 2021-2022.

Lời giải

Theo bài ra ta có $a+b=45$ và $\text{CLN}(a, b) = 9$ với $a > b$

$$\text{Vì } \text{CLN}(a, b) = 9 \text{ nên } \begin{cases} a = 9x \\ b = 9y \end{cases} \text{ (} x, y \in \mathbb{N}^*; \text{CLN}(x, y) = 1, x > y \text{)}$$

Theo bài ra $a+b=45$ nên ta có $9x+9y=45$ nên $x+y=5$

Ta có bảng sau:

x	4	3
$a = 9x$	36	27
y	1	2

$b = 9y$	9	18
----------	---	----

Vậy hai số tự nhiên cần tìm là: $a = 36$ và $b = 9$ hoặc $a = 27$ và $b = 18$.

B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

I. Quan hệ chia hết và tính chất.

Dạng 1: Chứng minh chia hết.

Bài 1: Chứng minh rằng : $(3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}) : 120 \quad (x \in \mathbb{N})$.

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021 – 2022

Bài 2: Cho $S = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + 5^6 + \dots + 5^{2016}$. Chứng tỏ rằng S chia hết cho 65.

Trích đề KS HSG thị xã Sơn Tây năm 2021-2022

Bài 3: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng : $p^2 - 1 : 24$

Trích đề kiểm định chất lượng HSG huyện Nghĩa Đồng năm 2021-2022.

Bài 4: Chứng tỏ: $A = 10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27 (với n là số tự nhiên)

Trích đề thi chọn HSG huyện Kim Sơn năm 2021-2022

Bài 5: Chứng minh rằng: Nếu $(\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}) : 11$ thì $\overline{abc} \deg : 11$.

Trích đề thi chọn HSG huyện Tiên Du năm 2021-2022

Bài 6: Cho $A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2022}\right) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2022$. Hỏi A có chia hết cho 2023 không?

Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Bài 7: Cho $a; b; c; d$ là các số nguyên ($a \neq c$) với thỏa mãn $ab + cd$ chia hết cho $a - c$. Chứng tỏ rằng $ad + bc$ chia hết cho $a - c$.

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Bài 1: Chứng tỏ rằng $M = 75 \cdot (4^{2021} + 4^{2020} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 100.

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021-2022

Bài 2: Cho ba số nguyên tố lớn hơn 3, trong đó số sau lớn hơn số trước là d đơn vị. Chứng minh d chia hết cho 6.

Trích đề HSG huyện Quế Võ năm 2021 – 2022

Dạng 2: Tìm số thỏa mãn điều kiện chia hết.

Bài 1: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia số đó cho 3 dư 1, chia cho 4 dư 2, chia cho 5 dư 3, chia cho 6 dư 4 và chia hết cho 11.

Trích đề đề xuất năm 2021-2022

Bài 2: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng số đó chia cho 9 dư 5, chia cho 7 dư 4 và chia cho 5 thì dư 3.

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021-2022.

Bài 3: Tìm các số tự nhiên a, b sao cho: $(2008a + 3b + 1)(2008^a + 2008a + b) = 225$

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021-2022.

Bài 4: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có 3 chữ số sao cho số đó chia 7 dư 3 và chia 11 dư 5.

Trích đề KS HSG thị xã Sơn Tây năm 2021-2022

Bài 5: Tìm số tự nhiên $n > 1$ sao cho $2n + 1$ chia hết cho $n - 1$.

Trích đề Olympic huyện Hương Sơn năm 2021-2022

Bài 6: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng khi chia số này cho 9 thì dư 5 và chia cho 11 thì dư 9.

Trích đề Olympic huyện Hương Sơn năm 2021-2022

Bài 7: Tìm các chữ số x, y sao cho: $B = \overline{62x427y}$ chia hết cho 18.

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2021-2022.

Bài 8: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho số đó chia cho 3 dư 1; chia cho 4 dư 2; chia cho 5 dư 3; chia cho 6 dư 4 và chia hết cho 11.

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2021-2022.

Bài 9: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho a chia cho 3 dư 2; a chia cho 5 dư 4; a chia cho 7 dư 6.

Trích đề HSG huyện Sóc Sơn năm 2021-2022.

Bài 10: Tìm các số tự nhiên có 3 chữ số chia hết cho 7 và tổng các chữ số của nó cũng chia hết cho 7

Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021-2022.

Bài 11: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia cho 11 dư 6, chia cho 4 dư 1 và chia cho 19 dư 11.

Trích đề thi chọn HSG huyện Kim Sơn năm 2021-2022.

Bài 12: Tìm 1 số tự nhiên có 2 chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 9 vào bên trái số đó ta được 1 số lớn gấp 13 lần số đã cho.

Trích đề thi chọn HSG huyện Tiên Du năm 2021-2022.

Bài 13: Tìm tất cả các số tự nhiên n , biết rằng $n + S(n) = 2014$, trong đó $S(n)$ là tổng các chữ số của n .

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019

Bài 14: Cho $n = \overline{7a5} + \overline{8a4}$. Biết $a - b = 6$ và n chia hết cho 9. Tìm a, b

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019

Bài 15: Tìm các chữ số x, y sao cho $\overline{2014xy} : 42$.

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019.

Bài 16: Tìm các số nguyên tố x, y sao cho $x^2 + 117 = y^2$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2018-2019

Bài 17: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, biết rằng số đó khi chia cho 3, cho 4, cho 5, cho 6 đều dư là 2, còn chia cho 7 thì dư 3.

Trích đề HSG huyện Vĩnh lộc năm 2018-2019

Bài 18: Tìm số tự nhiên b biết 326 chia b dư 11 và 557 chia b dư 17.

Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Bài 19: Tìm các chữ số $x; y$ biết $\overline{75x1y}$ chia hết cho 45.

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021 - 2022

Bài 20: Tìm các chữ số $x; y$ để $B = \overline{x183y}$ chia cho 2; 5; 9 đều dư 1

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Bài 21: Tìm các chữ số x, y biết $\overline{75x1y}$ chia hết cho 45.

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Lời giải

Bài 22: Tìm số tự nhiên n có 4 chữ số biết n là số chính phương và n là bội của 147.

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Bài 23: Số nhà của hai bạn An và Bình đều là số tự nhiên có bốn chữ số dạng $\overline{a53b}$ và chia hết cho cả 5 và 9. Tìm số nhà của hai bạn biết số nhà của bạn An lớn hơn số nhà của bạn Bình.

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2021-2022

Bài 24: Một số tự nhiên khi chia cho 11 dư 4, chia cho 13 dư 8. Tìm số dư trong phép chia số đó cho 143.

Bài 24: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất chia cho 5 dư 1, chia cho 7 dư 3.

Dạng 3: Dùng phương pháp phản chứng; nguyên lí Diricle để cm chia hết hoặc không chia hết.

II. Số nguyên tố, hợp số.

Dạng 1: Tìm số để biểu thức là số nguyên tố, hợp số.

Bài 1: Cho tập hợp $A = \{6; 12; 18; 24\}$. Tìm số nguyên tố p sao cho p cộng với mỗi phần tử của A đều được kết quả là một số nguyên tố.

Bài 2: Tìm số tự nhiên n để $(n+3)(n+1)$ là số nguyên tố

Bài 3: Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p+11$ cũng là số nguyên tố.

Dạng 2: Chứng minh là số nguyên tố, hợp số.

Bài 1: Cho p và $2p+1$ là các số nguyên tố (với $p > 3$). Hỏi $4p+1$ là số nguyên tố hay hợp số?

Dạng 3: Tìm số nguyên tố thỏa mãn điều kiện cho trước.

Bài 1: Tìm các số nguyên tố x và y biết $x^2 - 6y^2 = 1$

Bài 2: Tìm số nguyên tố p để $4p+1$ là số chính phương

Bài 3: Tìm các số nguyên tố x, y sao cho $x^2 + 117 = y^2$

Bài 4: Tìm các số nguyên tố x, y, z thỏa mãn $x^y + 1 = z$.

Bài 5: Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn điều kiện:

$$20abc < 30(ab + bc + ca) < 21abc.$$

Bài 6: Tìm số nguyên tố p để $p+2$; $p+4$ đều là số nguyên tố.

Bài 7: Cho hai số nguyên tố x và y sao cho: $x^2 - 2x + 1 = 6y^2 - 2x + 2$. Tính $P = (x - 2y)^{2022} + 2021$

Bài 8: Tìm số nguyên tố p sao cho $p^2 + 4$ và $p^2 - 4$ đều là số nguyên tố.

III. Bội và ước.

Bài 1: Tìm các số nguyên tố x, y sao cho $x^2 + 117 = y^2$

Dạng 2: Chứng minh hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 1: Chứng tỏ rằng: $\frac{2n+5}{n+3}$ ($n \in \mathbb{N}$) là phân số tối giản

Dạng 2: Bài toán thực tế về số nguyên tố.

Dạng 3: Toán quan hệ giữa ƯCLN và BCNN.

Bài 1: Cho hai số tự nhiên $6n+1$ và $7n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) không nguyên tố cùng nhau. Hỏi ƯCLN của $6n+1$ và $7n-1$ là bao nhiêu ?

Trích đề HSG huyện Sóc Sơn năm 2021-2022.

Bài 2: Tìm 2 số tự nhiên có tổng bằng 432 và ƯCLN của chúng là 36

Trích đề thi chọn HSG huyện Kim Sơn năm 2021-2022.

Bài 3: Tìm 2 số tự nhiên a, b ($a > b$) sao cho $a+b=45$ và $\text{CLN}(a, b)=9$

Trích đề chọn HSG huyện Hương Sơn năm 2021-2022.

Bài 4: Tìm hai số tự nhiên a, b biết: $\text{BCNN}(a, b)=420$; $\text{CLN}(a, b)=21$ và $a+21=b$

Trích đề KS HSG huyện Đồng Tháp năm 2018-2019

C. SƯU TẦM CÁC BÀI TRONG CÁC ĐỀ CỦA NHỮNG NĂM TRƯỚC ĐÓ

I. Quan hệ chia hết và tính chất.

Dạng 1: Chứng minh chia hết.

Bài 1: Chứng tỏ rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $p^2 - 1$ chia hết cho 3.

Trích đề thi HSG huyện Hoàng Hóa năm 2018-2019.

Lời giải

Xét số nguyên tố p khi chia cho 3. Ta có: $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

$$+) p = 3k + 1$$

$$\text{suy ra } p^2 - 1 = (3k + 1)^2 - 1 = 9k^2 + 6k : 3$$

$$\text{Nếu } p = 3k + 2 \text{ thì } p^2 - 1 = (3k + 2)^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 : 3$$

$$\text{Vậy } p^2 - 1 : 3$$

Dạng 2: Tìm số thỏa mãn điều kiện chia hết.

Bài 1: Tìm tất cả các số tự nhiên n , biết rằng $n + S(n) = 2014$, trong đó $S(n)$ là tổng các chữ số của n .

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019

Lời giải

Nếu n là số có ít hơn 4 chữ số thì $n \leq 999$ và $S(n) \leq 27$

$$\text{Suy ra } n + S(n) \leq 999 + 27 = 1026 < 2014 \text{ (ktm)}$$

Mặt khác $n \leq n + S(n) = 2014$ nên n là số có ít hơn 5 chữ số. Vậy n là số có 4 chữ số, suy ra

$$S(n) \leq 9 \cdot 4 = 36. \text{ Do vậy } n \geq 2014 - 36 = 1978$$

$$\text{Vì } 1978 \leq n \leq 2014 \text{ suy ra } \begin{cases} n = \overline{19ab} \\ n = \overline{20cd} \end{cases}$$

$$*\text{Nếu } n = \overline{19ab}. \text{ Ta có: } \overline{19ab} + (1 + 9 + a + b) = 2014$$

$$1910 + 11a + 2b = 2014$$

$$11a + 2b = 104 \text{ nên } a : 2$$

$$\text{và } 11a = 104 - 2b \geq 104 - 2 \cdot 9 = 86$$

$$8 \leq 10 < a; a : 2 \text{ suy ra } a = 8 \text{ nên } b = 8 \text{ do đó } n = 1988 \text{ (tm)}$$

$$*\text{Nếu } n = \overline{20cd} \text{ thì } \overline{20cd} + (2 + 0 + c + d) = 2014$$

$$\text{Suy ra } 2002 + 11c + 2d = 2014$$

$$11c + 2d = 12 \text{ suy ra } c : 2$$

$$\text{Và } 11c \leq 12 \text{ nên } \begin{cases} c = 0 \text{ suy ra } d = 6, n = 2006 \text{ (tm)} \\ c = 1 \text{ suy ra } 2d = 1 \text{ (ktm)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } n \in \{1988; 2006\}$$

Bài 2: Cho $n = \overline{7a5} + \overline{8b4}$. Biết $a - b = 6$ và n chia hết cho 9. Tìm a, b

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019.

Lời giải

$$\text{Ta có: } n = \overline{7a5} + \overline{8b4} : 9 \text{ suy ra } 7 + a + 5 + 8 + b + 4 : 9$$

$$24 + a + b : 9 \text{ suy ra } a + b \in \{3; 12\} \text{ (vì } a + b < 19)$$

$$\text{Mà } a - b = 6 \text{ suy ra } a + b > 3 \text{ nên } a + b = 12$$

$$\text{Kết hợp với } a - b = 6 \text{ suy ra } a = 9, b = 3$$

Bài 3: Tìm các chữ số x, y sao cho $\overline{2014xy} : 42$.

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019.

Lời giải

$$\overline{2014xy} = 201400 + \overline{xy} = 42.4795 + 10 + \overline{xy}; 42$$

$$\text{Nên } 10 + \overline{xy}; 42$$

$$\text{Do } 0 \leq \overline{xy} < 100 \text{ nên } \overline{xy} \in \{32; 74\}$$

$$\text{Vậy } (x; y) = (3; 2); (7; 4)$$

Bài 4: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, biết rằng số đó khi chia cho 3, cho 4, cho 5, cho 6 đều dư là 2, còn chia cho 7 thì dư 3.

Trích đề HSG huyện Vĩnh lộc năm 2018-2019

Lời giải

Gọi a là số tự nhiên cần tìm

Vì a chia cho 3; 4; 5; 6 đều dư 2 nên $a - 2$ chia hết cho 3; 4; 5; 6

$$(a - 2) \in BC(3; 4; 5; 6), BCNN(3, 4, 5, 6) = 60$$

$$a - 2 \in \{0; 60; 120; 180; \dots\} \text{ nên } a \in \{2; 62; 122; 182; \dots\}$$

Mà a là số nhỏ nhất và cho 7 thì dư 3 nên $a = 122$

Dạng 3: Dùng phương pháp phản chứng; nguyên lí Diricle để cm chia hết hoặc không chia hết.

II. Số nguyên tố, hợp số.

Dạng 1: Tìm số để biểu thức là số nguyên tố, hợp số.

Bài 1: Tìm số tự nhiên n để $(n+3)(n+1)$ là số nguyên tố

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018-2019.

Lời giải

Để $(n+3)(n+1)$ là số nguyên tố thì một trong hai thừa số $n+3; n+1$ phải bằng 1

$$\text{Mà } n+3 > n+1 \geq 1$$

$$\text{Suy ra } n+1 = 1$$

$$n = 0$$

Khi đó $n+3 = 3$ là số nguyên tố.

Vậy $n = 0$ thì $(n+3)(n+1)$ là số nguyên tố.

Bài 2: Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p+11$ cũng là số nguyên tố.

Trích đề HSG huyện Bạch Thông năm 2018-2019.

Lời giải

Nếu p lẻ thì $p+11$ là số chẵn lớn hơn 11 nên không là số nguyên tố

$$\text{Suy ra } p \text{ chẵn suy ra } p = 2$$

Dạng 2: Chứng minh là số nguyên tố, hợp số.

Dạng 3: Tìm số nguyên tố thỏa mãn điều kiện cho trước.

Bài 1: Tìm các số nguyên tố x, y sao cho $x^2 + 117 = y^2$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2018-2019

Lời giải

Với $x = 2$ thì $2^2 + 117 = 121$ nên $y^2 = 121$ nên $y = 11$ (là số nguyên tố)

Với $x > 2$, x là số nguyên tố nên x lẻ nên $y^2 = x^2 + 117$ là số chẵn

Nên y chẵn, kết hợp với y nguyên tố nên $y = 2(ktm)$

$$\text{Vậy } x = 2; y = 11$$

Bài 2: Tìm các số nguyên tố x, y sao cho $x^2 + 117 = y^2$

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2018-2019

Lời giải

Với $x = 2$ thì $2^2 + 117 = 121$ nên $y^2 = 121$ suy ra $y = 11$ (là số nguyên tố)

Với $x > 2$, x là số nguyên tố nên x lẻ nên $y^2 = x^2 + 117$ là số chẵn

Nên y chẵn, kết hợp với y nguyên tố nên $y = 2(ktm)$

Vậy $x = 2; y = 11$

III. Bội và ước.

Dạng 1: Chứng minh hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 1: Cho n là số tự nhiên bất kỳ. Chứng minh $(n+3)$ và $(2n+5)$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Trích đề KS HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Gọi $d = (n+3, 2n+5)$ suy ra $n+3 : d; 2n+5 : d$

Suy ra $2(n+3) : d, 2n+5 : d$

$(2n+6) - (2n+5) : d$

$1 : d$ suy ra $d = 1$

Vậy $(n+3)$ và $2n+5$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Dạng 2: Bài toán thực tế về số nguyên tố.

Dạng 3: Toán quan hệ giữa ƯCLN và BCNN.

Bài 2: Tìm hai số tự nhiên a và b biết $BCNN(a, b) = 180$; \downarrow $CLN(a, b) = 12$

Trích đề chọn HSG huyện Nga Sơn năm 2017-2018.

Lời giải

Ta có $ab = 180.12 = 2160$

Giả sử $a \leq b$. Vì \downarrow $CLN(a, b) = 12$ nên $a = 12m, b = 12n$ với $(m, n) = 1$ và $m \leq n$

Suy ra $12m.12n = 2160$ nên $mn = 15$ Ta có bảng sau:

m	n	a	b
1	15	12	180
3	5	36	60

Bài 3: Tìm hai số tự nhiên a, b biết: $BCNN(a, b) = 420$; \downarrow $CLN(a, b) = 21$ và $a + 21 = b$

Trích đề KS HSG huyện Đồng Tháp năm 2018-2019

Lời giải

Vì \downarrow $CLN(a, b) = 21$

suy ra $\begin{cases} a = 21m \\ b = 21n \end{cases}, (m, n) = 1$

Vì $BCNN(a, b) = 420$

$BCNN(21m, 21n) = 420 = 21.20$

$BCNN(m, n) = 20$

Vì $a + 21 = b$ suy ra $21m + 21 = 21n$ suy ra $m + 1 = n$ (*)

Trong các trường hợp cần xét chỉ có $\begin{cases} m = 4, n = 5 \\ m = 2, n = 3 \end{cases}$ là thỏa (*)

Vậy với $\begin{cases} m = 4, n = 5 \\ m = 2, n = 3 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a = 21.4 = 84 \\ b = 21.5 = 105 \end{cases}$

Bài 4: Tìm 2 số tự nhiên có tổng bằng 432 và ƯCLN của chúng là 36.

Trích đề KS HSG huyện Kim Sơn năm 2018-2019

Lời giải

Gọi 2 số là $a; b$. Ta có: $a + b = 432$

Giả sử $a \leq b$. Vì $\downarrow \text{CLN}(a,b) = 36$ nên $a = 36m; b = 36n$ với $(m;n) = 1$ và $m \leq n$

$$36m + 36n = 432.$$

$$m + n = 12$$

Ta có bảng sau:

m	n	a	b
1	11	36	396
5	7	180	252

Bài 5: Tìm hai số tự nhiên a và b biết $BCNN(a,b) = 180$; $\downarrow \text{CLN}(a,b) = 12$

Trích đề chọn HSG huyện Nga Sơn năm 2017-2018.

Lời giải

Ta có $ab = 180.12 = 2160$

Giả sử $a \leq b$. Vì $\downarrow \text{CLN}(a,b) = 12$ nên $a = 12m, b = 12n$ với $(m,n) = 1$ và $m \leq n$

Suy ra $12m.12n = 2160$ nên $mn = 15$. Ta có bảng sau:

m	n	a	b
1	15	12	180
3	5	36	60

Bài 6: Tìm hai số tự nhiên a, b biết: $BCNN(a,b) = 420$; $\downarrow \text{CLN}(a,b) = 21$ và $a + 21 = b$

Trích đề KS HSG huyện Đông Tháp năm 2018-2019

Lời giải

Vì $\downarrow \text{CLN}(a,b) = 21$ suy ra $\begin{cases} a = 21m \\ b = 21n \end{cases}, (m,n) = 1$

Vì $BCNN(a,b) = 420$

$$BCNN(21m, 21n) = 420 = 21.20$$

$$BCNN(m, n) = 20$$

Vì $a + 21 = b$

$$21m + 21 = 21n$$

$$m + 1 = n (*)$$

Trong các trường hợp cần xét chỉ có $\begin{cases} m = 4, n = 5 \\ m = 2, n = 3 \end{cases}$ là thỏa (*)

Vậy với $\begin{cases} m = 4, n = 5 \\ m = 2, n = 3 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a = 21.4 = 84 \\ b = 21.5 = 105 \end{cases}$

Bài 7: Tìm hai số tự nhiên biết: Hiệu của chúng bằng 84 $\downarrow \text{CLN}$ của chúng bằng 28 và các số đó khoảng từ 300 đến 400

Trích đề KS HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Gọi hai số phải tìm là $a, b (a, b \in \mathbb{N}^*, a > b)$

Ta có:

$$\downarrow \text{CLN}(a,b) = 28$$

$$\begin{cases} a = 28k \\ b = 28q \end{cases} (k, q \in \mathbb{N}^*, (k, q) = 1)$$

Ta có: $a - b = 84$

$$k - q = 3$$

Theo bài ra: $300 \leq b < a \leq 440$ nên $10 < q < k < 16$

Chỉ có 2 số 11, 14 nguyên tố cùng nhau và có hiệu là 3 nên $q = 11, k = 14$

$$\text{Do đó } \begin{cases} a = 28 \cdot 11 = 308 \\ b = 28 \cdot 14 = 392 \end{cases}$$

Vậy hai số phải tìm là 308, 392.

Bài 8: Chứng minh rằng : nếu $(\overline{ab + cd + eg}) : 11$ thì : $\overline{abc deg} : 11$.

Lời giải

Tách như sau :

$$\begin{aligned} \overline{abc deg} &= 10000\overline{ab} + 100\overline{cd} + \overline{eg} = (9999\overline{ab} + 99\overline{cd}) + (\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}). \\ &= 99(101\overline{ab} + \overline{cd}) + (\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}) \Rightarrow (9999\overline{ab} + 99\overline{cd}) : 11 \end{aligned}$$

Theo bài ra $(\overline{ab + cd + eg}) : 11$ nên : $\overline{abc deg} : 11$. (đpcm)

Bài 9: Cho $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60}$. Chứng minh : $A : 3 ; 7 ; 15$.

Lời giải

$$\begin{aligned} *A &= (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + \dots + (2^{59} + 2^{60}) \\ &= 2(1 + 2) + 2^3(1 + 2) + \dots + 2^{59}(1 + 2) \\ &= 3(2 + 2^3 + \dots + 2^{59}) : 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *A &= (2 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6) + \dots + (2^{58} + 2^{59} + 2^{60}) \\ &= 2 \cdot (1 + 2 + 2^2) + 2^4 \cdot (1 + 2 + 2^2) + \dots + 2^{58} \cdot (1 + 2 + 2^2) \\ &= 7(2 + 2^4 + \dots + 2^{58}) : 7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *A &= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8) + \dots + (2^{57} + 2^{58} + 2^{59} + 2^{60}) \\ &= 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3) + 2^5(1 + 2 + 2^2 + 2^3) + \dots + 2^{57}(1 + 2 + 2^2 + 2^3) \\ &= 15 \cdot (2 + 2^5 + \dots + 2^{57}) : 15. \end{aligned}$$

CHỦ ĐỀ: SỐ CHÍNH PHƯƠNG**A. PHẦN NỘI DUNG****Dạng 1: Nhận biết một số là số chính phương****Bài 1:** Tìm số nguyên tố \overline{ab} ($a > b > 0$) sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương*Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018-2019***Lời giải**Ta có: $\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - 10b - a = 9(a - b)$ Do 9 là số chính phương nên $(a - b)$ là số chính phương. Mà $1 \leq a - b \leq 8$ nên $a - b \in \{1; 4\}$ Nếu $a - b = 1$ suy ra $\overline{ab} \in \{21; 32; 43; 54; 65; 76; 87; 98\}$ suy ra: $\overline{ab} = 43$ Nếu $a - b = 4$ suy ra $\overline{ab} \in \{51; 62; 73; 84\}$ suy ra: $\overline{ab} = 73$ Vậy $\overline{ab} \in \{43; 73\}$ **Bài 2:** Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ để $n^2 + 2006$ là số chính phương.*Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015 - 2016***Lời giải**Giả sử $n^2 + 2006$ là số chính phương khi đó ta đặt: $n^2 + 2006 = a^2$ ($a \in \mathbb{Z}$)

$$a^2 - n^2 = 2006$$

$$(a - n)(a + n) = 2006 \quad (1)$$

Mà $(a + n) - (a - n) = 2n$ chia hết cho 2. $a + n$ và $a - n$ có cùng tính chẵn lẻ.+) TH1: $a + n$ và $a - n$ cùng lẻ nên $(a - n)(a + n)$ lẻ, trái với (1).+) TH2: $a + n$ và $a - n$ cùng chẵn nên $(a - n)(a + n)$ chia hết cho 4, trái với (1).Vậy không có n thỏa mãn $n^2 + 2006$ là số chính phương.**Bài 3:** Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $n + 1; 2n + 1; 5n + 1$ đều là số chính phương?*Trích đề chọn HSG Trục Ninh năm 2017-2018***Lời giải**Do $n + 1$ là số chính phương nên khi chia cho 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1.Nếu $n + 1 \equiv 3$ thì n chia cho 3 dư 2 nên $2n + 1$ chia cho 3 dư 2, vô lý.Do đó $n + 1$ chia cho 3 sẽ dư 1 nên $n \equiv 3$ Do $2n + 1$ là số chính phương lẻ nên $2n + 1$ chia cho 8 dư 1, suy ra $2n \equiv 8$, từ đó $n \equiv 4$ Do đó $n + 1$ là số chính phương lẻ nên $n + 1$ chia cho 8 dư 1, suy ra $n \equiv 8$ Ta thấy $n \equiv 3, n \equiv 8$ mà $(3, 8) = 1$ nên $n \equiv 24$ mà n là số nguyên dươngVới $n = 24$ thì $n + 1 = 25 = 5^2; 2n + 1 = 49 = 7^2; 5n + 1 = 121 = 11^2$ Vậy $n = 24$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn đề bài**Bài 4:** Tìm số nguyên tố \overline{ab} ($a > b > 0$) biết $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương*Trích đề chọn HSG Nga Sơn năm 2017-2018***Lời giải**

Ta có: $\overline{ab} - \overline{ba} = 9(a - b)$

Do a, b là các chữ số, \overline{ab} là số nguyên tố, nên $3 \leq b$. Do đó $9.(a - b)$ là số chính phương khi $a - b \in \{1; 4\}$

+) Với $a - b = 1$ mà \overline{ab} là số nguyên tố nên ta được số $\overline{ab} = 43$

+) Với $a - b = 4$ mà \overline{ab} là số nguyên tố nên ta được số $\overline{ab} = 73$

Vậy $\overline{ab} = \{43; 73\}$

Bài 5: Tìm số tự nhiên n sao cho: $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ là số chính phương.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Xét: $n = 1 \Rightarrow 1! = 1^2$

$n = 2$ nên $1! + 2! = 3$

$n = 3$ nên $1! + 2! + 3! = 9 = 3^2$

$n = 4$ nên $1! + 2! + 3! + 4! = 33$

Với $n > 4$ thì $n! = 1.2.3 \dots n$ là một số chẵn. Nên $1! + 2! + \dots + n! = 33$ cộng với một số chẵn bằng số có chữ số tận cùng là 3 nên không là chính phương

Vậy $n = 1, n = 3$ thì thỏa đề

Bài 6: Cho $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2022} + 5^{2023}$ có phải là số chính phương không? Vì sao?

Trích đề HSG THCS Quỳnh Thiện năm 2022 - 2023

Lời giải

Vì mỗi số hạng của M đều chia hết cho 5 nên $M : 5$ Nhưng M không chia hết cho 25 (do trong tổng chỉ có duy nhất 1 số hạng là 5 không chia hết cho 25). Do đó M không phải là số chính phương.

Bài 7: Tìm số tự nhiên n có 4 chữ số biết n là số chính phương và n là bội của 147

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021 - 2022

Lời giải

Vì n là số tự nhiên có 4 chữ số nên $1000 \leq n \leq 9999$

Theo bài ra n là bội của 147 nên $n = 147.k = 7^2.3k$

Do n là số chính phương nên khi phân tích n ra thừa số nguyên tố thì lũy thừa của các thừa số nguyên tố phải có số mũ chẵn suy ra $k : 3$

$\Rightarrow k = 3m \Rightarrow n = 7^2.3^2.m = 441m$

$\Rightarrow 1000 \leq 441m \leq 9999$

$\Rightarrow 2 < m \leq 22$

Để n là số chính phương thì m phải là số chính phương nên $m \in \{4; 9; 16\}$

Suy ra các số tự nhiên cần tìm là: 1764; 3969; 7056

Bài 8: Cho phân số $C = \frac{6x-1}{3x+2}$. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để C có giá trị là số nguyên và $M = 5x+11$ có giá trị là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Lời giải

Để C có giá trị là số nguyên thì $6x-1 \vdots 3x+2$

$$\Rightarrow 2(3x+2) - 5 \vdots 3x+2$$

$$\Rightarrow 5 \vdots 3x+2 \text{ (do } 2(3x+2) \vdots 3x+2 \text{)}$$

Mà $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3x+2 \in U(5) = \{-5; -1; 1; 5\}$

$$\Rightarrow 3x \in \{-7; -3; -1; 3\} \text{ Mà } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-1; 1\}$$

Với $x = -1$ ta có $M = 5 \cdot (-1) + 11 = 6$ không là số chính phương.

Với $x = 1$ ta có $M = 5 \cdot 1 + 11 = 16$ là số chính phương.

Vậy $x = 1$ thỏa mãn đề bài.

Dạng 2: Chứng minh một số là số chính phương

Bài 1: Cho $E = 125 \cdot (1 + 6 + 6^2 + \dots + 6^{2011})$. Chứng minh rằng $E + 25$ là một số chính phương.

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Lời giải

$$E = 125 \cdot (1 + 6 + 6^2 + \dots + 6^{2011})$$

$$\text{Đặt } A = (1 + 6 + 6^2 + \dots + 6^{2011})$$

$$6A = (6 + 6^2 + 6^3 + \dots + 6^{2012})$$

$$6A - A = 5A = 6^{2012} - 1$$

$$A = \frac{6^{2012} - 1}{5}$$

$$E = 125 \cdot \frac{6^{2012} - 1}{5} = 25(6^{2012} - 1)$$

$$E + 25 = 25 \cdot (6^{2012} - 1) + 25 = 25 \cdot 6^{2012} = 5^2 \cdot (6^{1006})^2 = (2 \cdot 6^{1006})^2$$

Vậy $E + 25$ là một số chính phương.

Bài 2: M có là một số chính phương không, nếu: $M = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$ (với $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$).

Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015 - 2016

Lời giải

$$M = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) \quad (n \in \mathbb{N}, n \neq 0)$$

Tính số số hạng: $(2n-1-1) : 2 + 1 = n$

Tính tổng: $M = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = (2n-1+1) \cdot n : 2 = 2n^2 : 2 = n^2$

Vậy M là số chính phương.

Bài 3: Tổng của n số tự nhiên lẻ đầu tiên có phải là một số chính phương không? Tại sao?

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Lời giải

Ta có n lẻ nên ta đặt $n = 2k + 1; k \in \mathbb{N}$

Tổng của n số tự nhiên lẻ đầu tiên là: $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 2k + 1$

Tổng S có số số hạng là: $\frac{(2k+1)-1}{2} + 1 = k + 1$

$$S = \frac{[(2k+1)+1](k+1)}{2} = \frac{2(k+1)^2}{2} = (k+1)^2$$

Vậy S là số chính phương.

Bài 4: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu nhân nó với 735 thì được một số chính phương.

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là n , ta có: $735n = a^2$ (a tự nhiên) hay $7^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot n = a^2$.

Số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn nên $n = 3 \cdot 5 \cdot k^2$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

Nếu $k \geq 3$ thì $n \geq 135$, n có nhiều hơn hai chữ số (loại). Vậy $k = 1$ hoặc $k = 2$.

Khi đó hai số cần tìm là 15 và 60.

Bài 5: Tìm số nguyên tố p, q sao cho $p^2 + 3pq + q^2$ là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Lời giải

Với các số nguyên tố p, q , ta có $p^2 + 3pq + q^2$ là số chính phương.

Đặt $p^2 + 3pq + q^2 = k^2$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$(p+q)^2 + pq = k^2$$

$$k^2 - (p+q)^2 = pq$$

$$(k-p-q)(k+p+q) = pq$$

Ta xét ba trường hợp :

$$\text{TH1 : } k - p - q = 1; k + p + q = pq$$

$$2p + 2q = pq - 1$$

$$pq - 2p - 2q = 1$$

$$p(q-2) - 2(p-2) = 5$$

$$(p-2)(q-2) = 5$$

Vì p, q là các số nguyên tố nên :

$$\begin{cases} p-2=1 \\ q-2=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p-2=5 \\ q-2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=3 \\ q=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=7 \\ q=3 \end{cases}$$

Vậy ta có hai cặp p, q là $(3;7), (7;3)$.

$$\text{TH2 : } k-p-q = pq; k+p+q=1 ;$$

Vì p, q là số nguyên tố nên $pq > 1$

$$k-p-q > k+p+q \text{ mà } k-p-q < k+p+q \text{ (vô lí, loại).}$$

$$\text{TH3 : } k-p-q = p; k+p+q = q ;$$

$$2p+2q = q-p$$

$$3p+q = 0 \text{ (vô lí, loại).}$$

Vậy ta có hai cặp p, q là $(3;7), (7;3)$.

Bài 6: Cho $B = 80^2 - 79.80 + 1601$

Chứng minh rằng B là bình phương của một số tự nhiên

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2018 - 2019

Lời giải

$$B = 80^2 - 79.80 + 1601 = 80.(80-79) + 1601 = 80.1 + 1601 = 1681 = 41^2$$

Vậy B là bình phương của một số tự nhiên là 41.

Bài 7: Tổng của n số tự nhiên lẻ đầu tiên có phải là một số chính phương không? Tại sao?

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Lời giải

Tổng của n số tự nhiên lẻ đầu tiên có phải là một số chính phương không? Tại sao?

Vì n lẻ nên ta đặt $n = 2k + 1$

Tổng của n số tự nhiên lẻ đầu tiên là : $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 2k + 1$

Tổng S có số số hạng là: $\frac{(2k+1)-1}{2} + 1 = k + 1$

$$S = \frac{[(2k+1)+1](k+1)}{2} = \frac{2(k+1)^2}{2} = (k+1)^2$$

Nên S là số chính phương

Bài 8: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên khác 0, có số lượng các ước tự nhiên là một số lẻ thì số tự nhiên đó là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Lời giải

Gọi số tự nhiên đó là $P (P \neq 0)$

Nếu $P = 1 \Rightarrow 1^2 = 1 \Rightarrow P$ là số chính phương

Nếu $P > 1$. Phân tích P ra thừa số nguyên tố ta có: $P = a^x \cdot b^y \cdot \dots \cdot c^z$ (với $a, b, c \dots$ là các số nguyên tố)

Khi đó số lượng các ước của P : $(x+1)(y+1) \dots (z+1)$

Theo bài ra $(x+1)(y+1) \dots (z+1)$ là số lẻ

$\Rightarrow x+1; y+1; \dots; z+1$ đều là các số lẻ

$\Rightarrow x, y, \dots, z$ đều là các số chẵn

Do đó $x = 2m, y = 2n, z = 2t$

Nên $P = a^{2m} b^{2n} c^{2t} = (a^m \cdot b^n \cdot \dots \cdot c^t)^2$

Vậy P là số chính phương.

Bài 9: Tìm số nguyên tố p để $4p+1$ là số chính phương

Trích đề thi chọn HSG Trường Phật Tích huyện Tiên Du năm 2021-2022

Lời giải

$4p+1$ là số chính phương và p là số nguyên tố nên

$$4p+1 = x^2 \quad (x \in \mathbb{N}; x \geq 3)$$

$$\text{Suy ra } 4p = x^2 - 1 \text{ suy ra } 4p = (x-1)(x+1)$$

Vì $x \in \mathbb{N}; x \geq 3$ nên $(x-1)(x+1)$ là tích hai số lẻ hoặc chẵn liên tiếp.

Do $4p$ là số chẵn nên $(x-1)(x+1)$ là tích hai số chẵn liên tiếp.

$$\text{Do đó } (x-1)(x+1) : 8 \text{ suy ra } 4p : 8 \text{ suy ra } p : 2$$

Mà p là số nguyên tố suy ra $p = 2$

$$\text{Thử lại : } 4 \cdot 2 + 1 = 9 = 3^2. \text{ Vậy } p = 2.$$

Dạng 3: Chứng minh một số không là số chính phương

Bài 1: Cho $B = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2022}$. Chứng minh rằng $2B+3$ không là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Lời giải

$$\text{Ta có: } B = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2022} \quad (1)$$

$$\text{Suy ra: } 3 \cdot B = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2023} \quad (2)$$

$$\text{Lấy (2) trừ (1) ta được: } 3 \cdot B - B = 3^{2023} - 3$$

Suy ra:

$$2B = 3^{2023} - 3$$

$$2B + 3 = 3^{2023} - 3 + 3$$

$$2B + 3 = 3^{2023}$$

$$2B + 3 = 3^{2022} \cdot 3 = (3^{1011})^2 \cdot 3$$

Ta có $(3^{1011})^2 \cdot 3$ không là số chính phương do 3 không là số chính phương.

Vậy $2B + 3$ không là số chính phương.

Bài 2: Cho $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2021}$. Tìm số dư trong phép chia M cho 6. Hỏi M có phải là số chính phương?

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Lời giải

M có 2021 số hạng nên ta có

$$M = 5 + (5^2 + 5^3) + (5^4 + 5^5) \dots + (5^{2020} + 5^{2021})$$

$$= 5 + 5^2(1+5) + 5^4(1+5) + \dots + 5^{2020}(1+5)$$

$$= 5 + 6(5^2 + 5^4 + \dots + 5^{2020}) = 6k + 5, k \in \mathbb{N}$$

Vậy M chia 6 dư 5.

Vì số chính phương khi chia cho 6 chỉ có thể dư 0; 1; 2; 3; 4 nên M không phải là số chính phương

(HS có thể lập luận M chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25)

Dạng 4: Tìm điều kiện để một số là số chính phương

Bài 1: Tìm số tự nhiên n sao cho: $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ là số chính phương

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn, năm 2018- 2019

Lời giải

$$\text{Đặt } A = 1! + 2! + 3! + \dots + n!$$

$$+ \text{ Xét } n = 1 \Rightarrow A = 1 \text{ (là số chính phương)} \Rightarrow n = 1 (TM)$$

$$+ \text{ Xét } n = 2 \Rightarrow A = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \text{ (không là số chính phương)} \Rightarrow n = 2 \text{ (loại)}$$

$$+ \text{ Xét } n = 3 \Rightarrow A = 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9 \text{ (là số chính phương)} \Rightarrow n = 3 (TM)$$

$$+ \text{ Xét } n = 4 \Rightarrow A = 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 33 \text{ (không là số chính phương)} \Rightarrow n = 4 \text{ (loại)}$$

$$+ \text{ Xét } n \geq 5 \Rightarrow A = 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + B = 33 + B \text{ (trong đó } B \text{ là số có chữ số tận cùng là 0)}$$

Suy ra A có chữ số tận cùng là 3

Mà số chính phương không thể có chữ số tận cùng là 3 $\Rightarrow A$ không là số chính phương với

$$\forall n \geq 5; n \in \mathbb{N}$$

Vậy ta tìm được $n \in \{1; 3\}$

Bài 2: Tìm số nguyên tố \overline{ab} ($a > b > 0$) sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương

Trích đề HSG huyện Lâm Thao, năm 2018- 2019

Lời giải

$$\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - (10b + a) = 3^2(a - b)$$

Do $\overline{ab} - \overline{ba}$ chính phương nên $a - b$ chính phương

$$\text{Vì } 1 \leq a - b \leq 8 \Rightarrow a - b \in \{1; 4\}$$

$$\text{Với } a - b = 1 \Rightarrow ab \in \{21; 32; 43; 54; 65; 76; 87; 98\}$$

Loại các hợp số $21:3; 32:2; 54:2; 65:5; 76:2; 87:3; 98:2$, còn lại 43 là số nguyên tố.

$$\text{Với } a - b = 4 \Rightarrow a - b \in \{51; 62; 73; 84; 95\}$$

Loại các hợp số $51:3; 62:2; 84:2; 95:5$, còn 73 là số nguyên tố.

Vậy \overline{ab} là 43 hoặc 73. Khi đó $\overline{ab} - \overline{ba} = 43 - 34 = 3^2$ hoặc $\overline{ab} - \overline{ba} = 73 - 37 = 6^2$

B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

(copy đề bài ở các dạng trên để làm phiếu phô tô cho HS)

Dạng 1: Nhận biết một số là số chính phương

Bài 1: Tìm số nguyên tố \overline{ab} ($a > b > 0$) sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018-2019

Bài 2: Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ để $n^2 + 2006$ là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015 - 2016

Bài 3: Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $n+1; 2n+1; 5n+1$ đều là số chính phương?

Trích đề chọn HSG Trục Ninh năm 2017-2018

Bài 4: Tìm số nguyên tố \overline{ab} ($a > b > 0$) biết $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương

Trích đề chọn HSG Nga Sơn năm 2017-2018

Bài 5: Tìm số tự nhiên n sao cho $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ là số chính phương.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 6: Cho $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2022} + 5^{2023}$ có phải là số chính phương không? Vì sao?

Trích đề HSG THCS Quỳnh Thiện năm 2022 - 2023

Bài 7: Tìm số tự nhiên n có 4 chữ số biết n là số chính phương và n là bội của 147

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021 - 2022

Bài 8: Cho phân số $C = \frac{6x-1}{3x+2}$. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để C có giá trị là số nguyên và $M = 5x+11$ có giá trị là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Dạng 2: Chứng minh một số là số chính phương

Bài 1: Cho $E = 125 \cdot (1 + 6 + 6^2 + \dots + 6^{2011})$. Chứng minh rằng $E + 25$ là một số chính phương.

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Bài 2: M có là một số chính phương không, nếu: $M = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$ (với $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$).

Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015 - 2016

Bài 3: Tổng của n số tự nhiên lẻ đầu tiên có phải là một số chính phương không? Tại sao?

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Bài 4: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu nhân nó với 735 thì được một số chính phương.

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Bài 5: Tìm số nguyên tố p, q sao cho $p^2 + 3pq + q^2$ là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Bài 6: Cho $B = 80^2 - 79 \cdot 80 + 1601$

Chứng minh rằng B là bình phương của một số tự nhiên

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2018 - 2019

Bài 7: Tổng của n số tự nhiên lẻ đầu tiên có phải là một số chính phương không? Tại sao?

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Bài 8: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên khác 0, có số lượng các ước tự nhiên là một số lẻ thì số tự nhiên đó là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Bài 9: Tìm số nguyên tố p để $4p+1$ là số chính phương

Trích đề thi chọn HSG Trường Phật Tích huyện Tiên Du năm 2021-2022

Dạng 3: Chứng minh một số không là số chính phương

Bài 1: Cho $B = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2022}$. Chứng minh rằng $2B+3$ không là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Bài 2: Cho $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2021}$. Tìm số dư trong phép chia M cho 6. Hỏi M có phải là số chính phương?

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Dạng 4: Tìm điều kiện để một số là số chính phương

Bài 1: Tìm số tự nhiên n sao cho: $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ là số chính phương

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn, năm 2018- 2019

Bài 2: Tìm số nguyên tố \overline{ab} ($a > b > 0$) sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương



C. SỬU TÀM CÁC BÀI TRONG CÁC ĐỀ CỦA NHỮNG NĂM TRƯỚC ĐÓ

(Phần này lấy các câu từ những năm trước, trước năm 2020-2021, tối thiểu 10 bài)

Bài 1: Cho p là tích của 2016 số nguyên tố đầu tiên. Chứng minh rằng $p-1$ và $p+1$ không là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá (Thanh Hoá) năm 2015 - 2016

Lời giải

Nhận xét: Một số chính phương khi chia cho 3 và 4 thì chỉ có thể dư 0 hoặc 1.

Từ giả thiết suy ra p chia hết cho 2, 3 nhưng không chia hết cho 4.

Vì $p \div 3$ nên $p-1$ chia cho 3 dư 2. Vậy $p-1$ không là số chính phương.

Vì $p \div 2$ và p không chia hết cho 4 suy ra p chia cho 4 dư 2 nên $p+1$ chia cho 4 dư 3 do đó $p+1$ cũng không là số chính phương.

Vậy $p-1$ và $p+1$ không là số chính phương.

Bài 2: Với $a, b \in \mathbb{N}$ và $(a-b)(a+b+1) = b^2$. Hãy chứng tỏ rằng $a-b$ và $a+b+1$ là các số chính phương.

Trích đề HSG Quận Hoàng Mai (Hà Nội) năm 2016 - 2017

Lời giải

Vì $b \in \mathbb{N}^*$ và $(a-b)(a+b+1) = b^2$ (*)

nên tích $(a-b)(a+b+1)$ là một số chính phương (1)

Gọi d là ước chung lớn nhất của $a-b$ và $a+b+1$.

Ta có $a-b \div d$ và $a+b+1 \div d$

Suy ra $(a+b+1) - (a-b) \div d$ hay $2b+1 \div d$

Mặt khác, từ (*) ta có: $b^2 \div d^2$ suy ra $b \div d$

Từ $2b+1$ chia hết cho d và b chia hết cho d nên ta có 1 chia hết cho d hay $d=1$.

Vậy $a-b$ và $a+b+1$ là các số tự nhiên nguyên tố cùng nhau (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a-b$ và $a+b+1$ đều là các số chính phương.

Bài 3: Chứng minh số $n = 2004^2 + 2003^2 + 2002^2 - 2001^2$ không phải là số chính phương

Lời giải

Ta có: 2004^2 có chữ số tận cùng là 6.

2003^2 có chữ số tận cùng là 9.

2002^2 có chữ số tận cùng là 4.

2001^2 có chữ số tận cùng là 1.

Suy ra: $2004^2 + 2003^2 + 2002^2 - 2001^2$ có chữ số tận cùng là 8.

Do đó: $n = 2004^2 + 2003^2 + 2002^2 - 2001^2$ không phải là số chính phương.

Bài 4: Tổng $A = 10^{100} + 10^{50} + 1$ là số chính phương không?

Lời giải

$A = 10^{100} + 10^{50} + 1$ có tổng các chữ số bằng 3 nên chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9 nên không là số chính phương.

Bài 5: Cho $A = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2019}$. Hỏi $4A + 5$ có phải là số chính phương không.

Lời giải

$$5.A = 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2020}.$$

$$\text{Suy ra: } 5.A - A = (5^2 - 5^2) + (5^3 - 5^3) + \dots + (5^{2019} - 5^{2019}) + 5^{2020} - 5.$$

$$4.A = 5^{2020} - 5$$

Suy ra: $4.A + 5 = 5^{2020}$ là một số chính phương.

Bài 6: Cho $S = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2020}$. Chứng minh S không phải là số chính phương.

Lời giải

Ta có: với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì $3^n \div 9$, suy ra $3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2020}$ chia hết cho 9.

Do đó: $3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2020}$ chia cho 9 dư 3 hay S không chia hết cho 9

Mặt khác: S chia hết cho 3, do đó S không phải là số chính phương.

Bài 7: Cho $B = 1.3.5.7 \dots 2017.2019$, hỏi trong các số $2B - 1, 2B, 2B + 1$ số nào là số chính phương?

Lời giải

Ta có: $2B - 1 = 2.1.3.5 \dots 2017.2019 - 1$, vì $2B \div 3$ nên $2B - 1 = 3k + 2 (k \in N)$ Vậy $2B - 1$ không là số chính phương.

Ta có: $2B = 2.1.3.5 \dots 2017.2019$ vậy $2B$ là số chẵn, mà B lẻ nên $B \not\div 2$ suy ra $B \not\div 2$ nhưng $2B \not\div 4$

Và $2B$ chẵn nên $2B$ chia cho 4 dư 1 hoặc dư 3, vậy $2B$ không là số chính phương.

Ta có: $2B + 1 = 2.1.3.5 \dots 2017.2019 + 1$ vậy $2B + 1$ là số lẻ, nên $2B + 1 \not\div 4$

và $2B \not\div 4$ suy ra $2B + 1$ chia 4 dư 1, vậy $2B + 1$ không là số chính phương.

Bài 8: Số $m = 1992^2 + 1993^2 + 1994^2$ có phải là số chính phương không?

Lời giải

Ta có: $1992^2, 1994^2$ chia cho 3 dư 1, còn 1993^2 chia hết cho 3.

suy ra $1992^2 + 1993^2 + 1994^2$ chia cho 3 dư 2.

Mà số chính phương chia cho 3 không bao giờ có số dư là 2.

Do đó $m = 1992^2 + 1993^2 + 1994^2$ không là số chính phương.

Bài 9: Chứng minh rằng tổng của bốn số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương?

Lời giải

Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là: $a, a + 1, a + 2, a + 3 \quad a \in N$

Xét tổng ta có: $S = 4a + 6$, thấy tổng chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên không là số chính phương

Bài 10: Cho $M = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$. Chứng tỏ rằng M không là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $M = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111a + 111b + 111c = 111(a + b + c) = 3 \cdot 37 \cdot (a + b + c)$

Ta có: $1 \leq b \leq 9, 1 \leq c \leq 9, 1 \leq a \leq 9$, suy ra: $3 \leq a + b + c \leq 27$

Mà số chính phương chứa thừa số nguyên tố với số mũ chẵn, do đó

$$a + b + c = 37k^2 (k \in \mathbb{N}), \text{ vô lí vì } a + b + c \leq 27$$

Vậy M không là số chính phương.

Bài 11: Tìm số nguyên tố $\overline{ab} (a > b > 0)$ sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương

Trích đề HSG huyện Tam Nông năm 2018-2019

Lời giải

Ta có:

$$\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - 10b - a = 9a - 9b = 9(a - b)$$

Suy ra: $\overline{ab} \in \{43; 73\}$.

Bài 12: Tìm n để $n^2 + 2006$ là một số chính phương

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Giả sử $n^2 + 2006$ là số chính phương khi đó ta đặt $n^2 + 2006 = a^2 (a \in \mathbb{Z}) \Rightarrow a^2 - n^2 = 2006$

$$\Rightarrow (a - n)(a + n) = 2006 (*)$$

Thấy a, n khác tính chất chẵn lẻ thì vế trái (*) là số lẻ nên không thỏa mãn (*)

Nếu a, n cùng tính chẵn hoặc lẻ thì $(a - n): 2, (a + n): 2$ nên vế trái chia hết cho 4 và vế phải không chia hết cho 4.

Vậy không tồn tại n để $n^2 + 2006$ là số chính phương.

Bài 13: Số $A = 10^{10} + 8$ là số chính phương không?

Lời giải $A = 10^{10} + 8$ có chữ số tận cùng là 8 nên không là số chính phương.

Bài 14: Tổng $B = 11 + 11^2 + 11^3$ là số chính phương không?

Lời giải

Tổng B có chữ số tận cùng là 3 nên không là số chính phương.

Bài 15: Tổng $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{20}$ là số chính phương không.

Lời giải

Tổng A chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9.

Nên A không là số chính phương.

Bài 16: Cho $A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$. Chứng minh rằng $A + 4$ không là số chính phương?

Lời giải

$$2.A = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{21}$$

$$\Rightarrow 2.A - A = (2^3 - 2^3) + (2^4 - 2^4) + \dots + (2^{20} - 2^{20}) + 2^{21} - 2^2$$

$$\Rightarrow A = 2^{21} - 2^2$$

$$\Rightarrow A + 4 = 2^{21} \text{ không là số chính phương vì có mũ lẻ.}$$

Bài 17: Cho $B = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$. Chứng minh rằng $2B + 3$ không là số chính phương?

Lời giải

$$3.B = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{101}.$$

$$\Rightarrow 3.B - B = (3^2 - 3^2) + (3^3 - 3^3) + \dots + (3^{100} - 3^{100}) + 3^{101} - 3$$

$$\Rightarrow 2.B = 3^{101} - 3$$

$\Rightarrow 2.B + 3 = 3^{101}$ không là số chính phương vì mũ lẻ.

Bài 18 : Tìm số tự nhiên n có hai chữ số biết $2n+1$ và $3n+1$ đều là số chính phương.

Lời giải

Vì n là số tự nhiên có 2 chữ số nên $10 \leq n \leq 99 \Rightarrow 21 \leq 2n+1 \leq 199$.

Mà $2n+1$ là số chính phương lẻ nên $2n+1 \in \{25; 49; 81; 121; 169\}$

$$\Rightarrow 2n \in \{24; 48; 80; 120; 168\} \Rightarrow n \in \{12; 24; 40; 60; 84\}$$

Khi đó $3n+1 \in \{37; 73; 121; 181; 253\}$

Thấy chỉ có 121 là số chính phương.

Vậy $n = 40$.

Bài 19 : Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $C = 2n^2 + 2n + 3$ không là số chính phương.

Lời giải:

Nếu $n = 0$ thì $C = 2n^2 + 2n + 3 = 3$ không là số chính phương.

Giả sử với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, C là số chính phương.

Suy ra: $C = k^2$ suy ra: $2n^2 + 2n + 3 = k^2$.

Hay $2n(n+1) + 3 = k^2$ (*).

Mà $n(n+1):2$ nên $2n(n+1):4$.

Nên (*) mâu thuẫn hay vô lý hay không xảy ra.

Vậy với mọi số tự nhiên n thì $C = 2n^2 + 2n + 3$ không là số chính phương.

Bài 20: Tìm số tự nhiên n có hai chữ số để $3n+1$ và $4n+1$ đều là các số chính phương.

Lời giải

Vì n là số tự nhiên có 2 chữ số nên $10 \leq n \leq 99 \Rightarrow 41 \leq 4n+1 \leq 397$.

Mặt khác $4n+1$ là số chính phương lẻ nên $4n+1 \in \{49; 81; 121; 169; 225; 289; 361\}$

$$\Rightarrow 4n \in \{48; 80; 120; 168; 224; 288; 360\}$$

$$\Rightarrow n \in \{12; 20; 30; 42; 56; 72; 90\}.$$

Khi đó $3n+1 \in \{37; 61; 91; 127; 169; 217; 271\}$.

Nhận thấy chỉ có số 56 là số chính phương.

Vậy $n = 56$.

Bài 21: Chứng minh rằng $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n .

(Đề thi vào lớp 10 chuyên trường ĐHSPTP Hồ Chí Minh 2015 - 2016)

Lời giải

Ta có

$$2012^{4n} \div 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$2014^{4n} \div 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$2013^{4n} = (2013^{4n} - 1) + 1 \text{ chia cho } 4 \text{ dư } 1$$

$$2015^{4n} = (2015^{4n} - 1) + 1 \text{ chia cho } 4 \text{ dư } 1$$

Do đó $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ chia cho 4 dư 2

Ta có $A \div 2$ nhưng A không chia hết cho 2^2 , mà 2 là số nguyên tố nên A không là số chính phương.

Vậy A không là số chính phương.

Bài 22: Chứng minh rằng $n^5 + 1999n + 2017 (n \in \mathbb{N})$ không phải là số chính phương.

(Trích đề thi HSG tỉnh Quảng Ngãi 2017 - 2018)

Lời giải

Ta có

$$A = n^5 + 1999n + 2017 = n^5 - n + 2000n + 2015 + 2$$

$$A = n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) + 5n(n-1)(n+2) + 2000n + 2015 + 2$$

Ta thấy

$$n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) \div 5$$

$$5n(n-1)(n+2) \div 5$$

$$2000.n \div 5$$

$$2015 \div 5$$

Nên A chia 5 dư 2, mà không có số chính phương nào chia 5 dư 2.

Vậy $n^5 + 1999n + 2017 (n \in \mathbb{N})$ không là số chính phương.

Bài 23: Chứng minh rằng tổng bốn số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương.

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Nguyễn Huy Tưởng năm học 2004-2005)

Lời giải

Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là $a, a+1, a+2, a+3 (a \in \mathbb{N}^*)$

Ta xét $S = a + (a+1) + (a+2) + (a+3) = 4a + 6$

Vì $4a \div 2$ và $6 \div 2$ nên $S \div 2$

Mặt khác $4a \div 4$ và 6 không chia hết cho 4 nên S không chia hết cho 4.

Vậy S chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên S không là số chính phương.

Bài 24: Cho $B = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n-1)(n-2)$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng B không là số chính phương.

(Trích đề thi HSG Bắc Ninh 2018-2019)

Lời giải

Ta có

$$4B = 1.2.3.4 + 2.3.4.(5-1) + 3.4.5.(6-2) + \dots + n(n-1)(n-2).[(n+3) - (n-1)]$$

$$4B = n(n+1)(n+2)(n+3) = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$$

Ta có: $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n < n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$

$$n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n > n^4 + 6n^3 + 9n^2 = (n^2 + 3n)^2$$

Suy ra $(n^2 + 3n)^2 < n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n < (n^2 + 3n + 1)^2$

Vậy B không là số chính phương.

Bài 25: Chứng tỏ tổng sau không là số chính phương $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ không là số chính phương.
(Trích đề thi Olympic lớp 6 THCS Cầu Giấy năm học 2011-2012)

Lời giải

Ta có: $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111a + 111b + 111c$
 $= 111(a + b + c) = 3.37.(a + b + c)$

Để S là số chính phương thì $a + b + c = 3.37.k^2 (k \in \mathbb{N})$

Điều này vô lí vì $a + b + c \leq 27 < 37$

Vậy S không là số chính phương.

Bài 26: Cho $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$

- Chứng minh M chia hết cho 6.
- Chứng minh M không là số chính phương.

(Trích đề thi HSG lớp 6 Đa Phúc 2010-2011)

Lời giải

a) Ta có: $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$

$$M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$$

$$M = (5 + 5^2) + (5^3 + 5^4) + \dots + (5^{79} + 5^{80})$$

$$M = 5.(1 + 5) + 5^3.(1 + 5) + \dots + 5^{79}.(1 + 5)$$

$$M = 6.(5 + 5^3 + \dots + 5^{79})$$

$$\Rightarrow M : 6$$

b) Ta có:

$$5 : 5$$

$$5^2 : 5$$

$$5^3 : 5$$

...

$$5^{80} : 5$$

$$\Rightarrow M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80} : 5$$

Mặt khác:

5 không chia hết cho 25

$$5^2 : 25$$

$$5^3 : 25$$

...

$$5^{80} : 25$$

$$\Rightarrow M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80} \text{ không chia hết cho } 25.$$

Ta có $M : 5$ nhưng M không chia hết cho 5^2 nên M không là số chính phương.

Bài 27: Cho $E = 125.(1 + 6 + 6^2 + \dots + 6^{2021})$ Chứng minh $E + 25$ là một số chính phương.

(Trích đề thi Olympic lớp 6 Nghĩa Đô 2010-2011)

Lời giải

$$\text{Ta có: } a^0 + a^1 + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - a^0}{a - 1}$$

Nên

$$1 + 6 + 6^2 + \dots + 6^{2021} = \frac{6^{2022} - 1}{5}$$

$$\Rightarrow E + 25 = 125 \cdot \frac{6^{2022} - 1}{5} + 25 = 25 \cdot (6^{2022} - 1) + 25 = 25 \cdot 6^{2022} = 5^2 \cdot (6^{1011})^2 = (5 \cdot 6^{1011})^2$$

Nên $E + 25$ là số chính phương.

Bài 28: Cho $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$

a) Chứng minh A chia hết cho 24.

b) Chứng minh A không là số chính phương.

(Trích đề thi HSG lớp 6 huyện Anh Sơn 2011-2012)

Lời giải

a) Ta có:

$$A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$$

$$A = 10^3 \cdot (10^{2009} + 10^{2008} + 10^{2007} + 10^{2006}) + 8$$

$$A = 8 \cdot 125 \cdot (10^{2009} + 10^{2008} + 10^{2007} + 10^{2006}) + 8$$

$$A = 8 \cdot [125 \cdot (10^{2009} + 10^{2008} + 10^{2007} + 10^{2006}) + 1]$$

$$\Rightarrow A : 8$$

Ta lại có $10^{2012}, 10^{2011}, 10^{2010}, 10^{2009}$ có tổng các chữ số bằng 1 nên khi chia $10^{2012}, 10^{2011}, 10^{2010}, 10^{2009}$ cho 3 đều dư 1.

Ta có 8 chia 3 dư 2.

Vậy A chia 3 có số dư là dư của phép chia $(1+1+1+1+2)$

$$\Rightarrow A : 3$$

Vì 8 và 3 là hai số nguyên tố nguyên cùng nhau, $A : 3$, $A : 8$ nên $A : 24$

b) Ta có $10^{2012}, 10^{2011}, 10^{2010}, 10^{2009}$ có chữ số tận cùng là 0 nên:

$$A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8 \text{ có chữ số tận cùng là } 8$$

Vậy A không là số chính phương vì số chính phương có tận cùng là 1; 4; 5; 6; 9

Bài 29: Tìm số chính phương có bốn chữ số, được viết bởi các chữ số: 3; 6; 6; 8

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Sơn Đông 2011-2012)

Lời giải

Gọi số chính phương phải tìm là n^2

- Vì số chính phương không có chữ số tận cùng là 3; 8 do đó phải có tận cùng là 6.

- Số có tận cùng bằng 86 thì chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên không là số chính phương.

$\Rightarrow n^2$ có tận cùng là 36.

Vậy số chính phương đó là 8836 (với $8836 = 94^2$).

Bài 30: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu nhân nó với 135 thì ta được một số chính phương?

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Sơn Đông 2013-2014)

Lời giải

Gọi số phải tìm là n ($n \in \mathbb{N}$, $10 < n < 99$)

Ta có: $135.n = a^2$ ($a \in \mathbb{N}$) hay $\Rightarrow 3^3.5.n = a^2$

Vì số chính phương chỉ có các thừa số nguyên tố với mũ chẵn nên $\Rightarrow n = 3.5.k^2$ ($k \in \mathbb{N}$)

+) Với $k = 1 \Rightarrow n = 3.5.1^2 = 15$

+) Với $k = 2 \Rightarrow n = 3.5.2^2 = 60$

+) Với $k \geq 3 \Rightarrow n \geq 3.5.3^2 \geq 135$ (loại vì n có nhiều hơn hai chữ số)

Vậy số cần tìm là 15; 60.

Bài 31: Cho tổng $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 2009 + 2011$. Chứng tỏ S là một số chính phương.

(Trích đề HSG toán 6 THCS Hồng Hà năm 2013 - 2014)

Lời giải

Ta có: $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 2009 + 2011 = \left(\frac{2011+1}{2}\right)\left(\frac{2011-1}{2} + 1\right) = \left(\frac{2011+1}{2}\right)\left(\frac{2011+1}{2}\right) = 1006^2$

Vậy S là một số chính phương.

Bài 32: Chứng minh rằng với $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $3^n + 4$ không là số chính phương.

Lời giải:

- Với $n = 0$ suy ra: $3^n + 4 = 5$ không là số chính phương.

- Với $n = 1$ suy ra: $3^n + 4 = 7$ không là số chính phương.

- Với $n \geq 2$.

Giả sử là số chính phương.

Suy ra: $3^n + 4 = m^2$ ($m \in \mathbb{N}$, $m > 3$).

$m^2 - 4 = 3^n$.

$(m-2)(m+2) = 3^n$.

Suy ra: $\begin{cases} m-2 = 3^k \\ m+2 = 3^q \end{cases}$ ($k, q \in \mathbb{N}; k+q = n$)

Suy ra:

$(m+2) - (m-2) = 3^q - 3^k$

$4 = 3^q - 3^k$ (*).

Ta thấy $\begin{cases} 4 \nmid 3 \\ (3^q - 3^k) : 3 \end{cases}$ là điều mâu thuẫn với nhau so với đẳng thức (*).

Vậy $3^n + 4$ không là số chính phương với mọi số tự nhiên n .

Bài 33: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $n^2 + 2$ không là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử $n^2 + 2$ là số chính phương.

Khi đó đặt $n^2 + 2 = m^2$ ($m \in \mathbb{N}^*$).

$$m^2 - n^2 = 2 \quad (1).$$

$$(m+n).(m-n) = 2 \quad (1).$$

Như vậy, trong hai số $m+n$ và $m-n$ phải có ít nhất một số chẵn (2).

Mặt khác $m+n+m-n = 2m$ chẵn.

Suy ra hai số $m+n$ và $m-n$ cùng tính chẵn lẻ (3).

Từ (1) và (2) suy ra $m+n$ và $m-n$ là hai số chẵn.

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} (m+n) : 2 \\ (m-n) : 2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } [(m+n).(m-n)] : 4$$

Suy ra : $(m^2 - n^2) : 4$ mà $2 \nmid 4$, so sánh điều này với (1), ta thấy đây là điều vô lý.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì $n^2 + 2$ không là số chính phương.

Bài 34: Chứng minh rằng tích của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

Lời giải:

Gọi bốn số nguyên dương liên tiếp lần lượt là $n, n+1, n+2, n+3$ và $n+4$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$\text{Đặt } S = n(n+1)(n+2)(n+3) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Ta đi chứng minh S không là số chính phương.

$$\text{Giả sử } S = m^2 > 0 \quad (m \in \mathbb{N}^*) \quad (1)$$

$$\text{Suy ra: } n(n+1)(n+2)(n+3) = m^2.$$

$$(n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) = m^2.$$

$$\text{Đặt } n^2 + 3n = a \quad (a \in \mathbb{N}^*).$$

$$\text{Suy ra : } a(a+2) = m^2.$$

$$a^2 + 2a = m^2.$$

$$a^2 + 2a + 1 = m^2 + 1.$$

$$(a+1)^2 = m^2 + 1.$$

$$(a+1+m)(a+1-m) = 1$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} a+1-m=1 \\ a+1+m=1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } m=0 \quad (2)$$

Ta thấy (2) mâu thuẫn với (1)

Vậy S không là số chính phương hay tích của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

Bài 35: Chứng minh rằng với tổng của $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ không là số chính phương.

Lời giải:

$$\text{Đặt } S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111(a+b+c) = 3.37(a+b+c) \quad (a, b, c \in \mathbb{N}^*; a, b, c \leq 9).$$

Giả sử S là số chính phương.

$$\text{Suy ra: } S : 37.$$

$$\text{Suy ra: } S : 37^2.$$

$$\text{Suy ra: } (a+b+c) : 37.$$

$$\text{Mà } (a+b+c) \leq 37.$$

Đây là điều vô lý.

Vậy S không là số chính phương.

Bài 36: Chứng minh rằng với n lẻ và $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ thì $7^n + 24$ không là số chính phương.

Lời giải:

$$\text{Đặt } 7^n + 24 = a^2 \quad (a \in \mathbb{N}^*).$$

$$\text{Khi } n \text{ lẻ: Đặt } n = 2k + 1.$$

$$\text{Suy ra: } 7^n + 24 = 7^{2k+1} + 24 = 7^{2k} \cdot 7 + 24 = (7^2)^k \cdot 7 + 24 = 49^k \cdot 7 + 24 = a^2.$$

Có 49 chia 4 dư 1 suy ra: 49^k chia 4 dư 1; $7 \cdot 49^k$ chia 4 dư 3 suy ra: a^2 chia 4 dư 3 (vô lý).

Vậy với n lẻ và $n \in \mathbb{N}^*$ thì $7^n + 24$ không là số chính phương.

Bài 37: Chứng minh rằng nếu số tự nhiên \overline{abc} là số nguyên tố thì $b^2 - 4ac$ không là số chính phương.

Lời giải:

$$\text{Giả sử } b^2 - 4ac \text{ là số chính phương } m^2 \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Xét

$$4a.\overline{abc} = 4a(100a+10b+c) = (20a+b)^2 - (b^2 - 4ac) = (20a+b)^2 - m^2 = (20a+b+m)(20a+b-m).$$

Tồn tại một trong hai thừa số $20a+b+m$, $20a+b-m$ chia hết cho số nguyên tố.

Điều này không xảy ra vì cả hai thừa số trên đều nhỏ hơn \overline{abc} .

Thật vậy, do $m < b$ (vì $m^2 - b^2 = -4ac < 0$).

Nên $20a+b-m \leq 20a+b+m < 100a+10b+c = \overline{abc}$.

Vậy nếu số tự nhiên \overline{abc} là số nguyên tố thì $b^2 - 4ac$ không là số chính phương.

Bài 38: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì $2^n - 1$ không là số chính phương.

Lời giải:

Với $n = 2$ suy ra: $2^n - 1 = 3$ không là số chính phương.

Với $n > 2$:

Giả sử $2^n - 1$ là số chính phương.

Mà $2^n - 1$ là số lẻ nên $2^n - 1 = (2k+1)^2$ suy ra: $2^n - 1 = 4k^2 + 4k + 1$.

suy ra: $2^n = 4k^2 + 4k + 2$ (*).

Vì $n \geq 2$ nên $2^n : 4$ (1)

Mà $4k^2 + 4k = 4k(k+1) : 4$.

Nên $4k^2 + 4k + 2 \not\vdots 4$ (2)

So sánh (1) và (2) với (*), ta thấy mâu thuẫn với nhau.

Vậy với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì $2^n - 1$ không là số chính phương.

Bài 39: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ thì $A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ không là số chính phương.

Lời giải:

Với $n \geq 1$:

Giả sử A là số chính phương.

Suy ra: $A = k^2$ suy ra: $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 = k^2$.

Suy ra: $n^2(n^2 + 2n + 1) + (n^2 + 2n + 1) = k^2$.

Suy ra: $n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 = k^2$ suy ra: $(n^2 + 1)(n+1)^2 = k^2$.

Suy ra: $(n^2 + 1)$ là số chính phương với mọi $n \geq 1$ (vô lí).

Vậy với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ thì $A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ không là số chính phương.

Bài 40: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên thì $B = n^3 - n + 2$ không là số chính phương.

Lời giải:

Với $n = 0$ thì $B = n^3 - n + 2 = 2$ không là số chính phương.

Giả sử với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, B là số chính phương.

Suy ra: $B = k^2$ suy ra: .

$$n^3 - n + 2 = k^2 \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$n(n^2 - 1) + 2 = k^2 .$$

$$n(n-1)(n+1) + 2 = k^2 \quad (*)$$

Mà $n(n-1)(n+1) \div 3$ $n(n-1)(n+1) + 2 = k^2$ chia 3 dư 2

Nên (*) mâu thuẫn hay vô lý hay không xảy ra.

Vậy với mọi số tự nhiên thì $B = n^3 - n + 2$ không là số chính phương.

Bài 41: Tìm số tự nhiên $n \geq 1$ sao cho tổng $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ là một số chính phương.

Trích đề HSG huyện Phúc Yên năm 2009 -2010

Lời giải

Với $n = 1$ thì $1! = 1 = 1^2$ là số chính phương.

Với $n = 2$ thì $1! + 2! = 3$ không là số chính phương.

Với $n = 3$ thì $1! + 2! + 3! = 1 + 1.2 + 1.2.3 = 9 = 3^2$ là số chính phương.

Với $n \geq 4$ ta có $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 = 33$ còn $5!; 6!; \dots; n!$ đều tận cùng bởi 0 do đó $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ có tận cùng bởi chữ số 3 nên nó không phải là số chính phương.

Vậy có 2 số tự nhiên n thỏa mãn đề bài là $n = 1; n = 3$.

Bài 42: Tìm số nguyên dương n sao cho $A = (n+3)(4n^2 + 14n + 7)$ là số một chính phương.

Trích đề HSG huyện Thái Bình năm 2014 -2015

Lời giải

$$\text{Ta có: } 4n^2 + 14n + 7 = 4n^2 + 12n + 2n + 6 + 1$$

$$= 4n(n+3) + 2(n+3)$$

$$= (n+3)(4n+2) + 1$$

Và n là số nguyên dương nên $n+3$ và $4n^2 + 14n + 7$ là nguyên tố cùng nhau. Vì vậy, để A là số chính phương thì $4n^2 + 14n + 7$ và $n+3$ phải là số chính phương.

Do $n \in \mathbb{Z}^+$ nên ta có $(2n+3)^2 \leq 4n^2 + 14n + 7 < (2n+4)^2$.

$$4n^2 + 14n + 7 = (2n+3)^2 \Rightarrow n = 1. \text{ Khi đó } n+3 = 4 \text{ là số chính phương.}$$

Thử lại, với $n = 1$, ta có $A = 10^2$.

Vậy số nguyên dương cần tìm là $n = 1$.

Bài 43: Cho biểu thức: $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{30}$. Chứng tỏ rằng:

- a) M chia hết cho 6.
b) M không phải là số chính phương.

Trích đề HSG trường Quỳnh Giang năm 2010 -2011

Lời giải

a) Ta có :

$$\begin{aligned} M &= 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80} \\ &= (5 + 5^2) + (5^3 + 5^4) + (5^5 + 5^6) + \dots + (5^{79} + 5^{80}) \\ &= (5 + 5^2) + 5^2 \cdot (5 + 5^2) + 5^4 (5 + 5^2) + \dots + 5^{78} (5 + 5^2) \\ &= 30 + 30 \cdot 5^2 + 30 \cdot 5^4 + \dots + 30 \cdot 5^{78} \\ &= 30 \cdot (1 + 5^2 + 5^4 + \dots + 5^{78}) : 30 \end{aligned}$$

Vậy M chia hết cho 6.

b) Ta thấy : $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$ chia hết cho số nguyên tố 5 .

Mặt khác, do: $5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$ chia hết cho 5^2 (vì tất cả các số hạng đều chia hết cho 5^2).

$M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$ không chia hết cho 5^2 (do 5 không chia hết cho 5^2).

M chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 5^2 .

M không phải là số chính phương. (Vì số chính phương chia hết cho số nguyên tố p thì chia hết cho p^2).

Bài 44: Cho $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$.

- a) Chứng minh rằng A chia hết cho 24.
b) Chứng minh rằng A không phải là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Hoài Đức năm 2010 -2011

Lời giải

a) Chứng minh rằng A chia hết cho 24.

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } A &= 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8 \\ &= 10^3 (10^{2009} + 10^{2003} + 10^{2007} + 10^{2006}) + 8 \\ &= 8 \cdot 125 (10^{2009} + 10^{2008} + 10^{2007} + 10^{2008}) + 8 \\ &= 8 \cdot [125 (10^{2009} + 10^{2008} + 10^{2007} + 10^{2006}) + 1] : 8 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta lại có các số : $10^{2012}; 10^{2011}; 10^{2010}; 10^{2009}$ có tổng tổng các chữ số bằng 1.

Nên các số $10^{2012}; 10^{2011}; 10^{2010}; 10^{2009}$ khi chia cho 3 đều có số dư bằng 1. 8 chia cho 3 dư 2 .

Vậy $A = 10^8 (10^{2009} + 10^{2003} + 10^{2007} + 10^{2006}) + 8$ chia cho 3 có số dư là dư của phép chia

$(1+1+1+1+2)$ chia cho 3.

Hay dư của phép chia 6 chia cho 3 (có số dư bằng 0).

A chia hết cho 3.

Vì 8 và 3 là hai số nguyên tố cùng nhau nên A chia hết cho $8.3 = 24$.

b) Chứng minh rằng A không phải là số chính phương.

Ta có các số : $10^{2012}; 10^{2011}; 10^{2010}; 10^{2009}$ đều có chữ số tận cùng là 0.

Nên $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$ có chữ số tận cùng là 8.

Vậy A không phải là số chính phương vì số chính phương là những số có chữ số tận cùng là 1; 4; 5; 6; 9.

Bài 45: Tìm số tự nhiên x để biểu thức $x^2 + 2x + 20$ có giá trị là một số chính phương.

Trích đề HSG huyện Ba Vì năm 2014 -2015

Lời giải

Giả sử $x^2 + 2x + 20 = a^2 (a \in \mathbb{N}, a > 4)$.

$$a^2 - (x+1)^2 = 19$$

$$(a-x-1)(a+x+1) = 19$$

Vì $(a-x-1) < (a+x+1)$ và $19 = 1.19$ nên $\begin{cases} a-x-1=1 \\ a+x+1=19 \end{cases}$.

Do đó $x = 8$.

Thử lại với $x = 8$, ta có $x^2 + 2x + 20 = 8^2 + 2.8 + 20 = 10^2$ thỏa mãn.

Vậy số tự nhiên cần tìm là $x = 8$.

Bài 46: Chứng minh rằng tổng các bình phương của 5 số tự nhiên liên tiếp không thể là một số chính phương.

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2014 -2015

Lời giải

Gọi 5 số tự nhiên liên tiếp đó là $n-2, n-1, n+1, n+2$ ($n \in \mathbb{N}, n > 2$).

$$\text{Ta có } (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5 \cdot (n^2 + 2)$$

Vì n không thể tận cùng bởi 3 hoặc 8 do đó $n^2 + 2$ không thể chia hết cho 5.

5. $(n^2 + 2)$ không là số chính phương hay A không là số chính phương.

Bài 47: Chứng minh rằng tổng bình phương của 2 số lẻ bất kỳ không phải là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Phúc Thọ năm 2014 -2015

Lời giải

Vì a và b lẻ nên $a = 2k + 1, b = 2m + 1$ (Với $k, m \in \mathbb{N}$).

$$a^2 + b^2 = (2k + 1)^2 + (2m + 1)^2$$

$$= 4k^2 + 4k + 1 + 4m^2 + 4m + 1$$

$$= 4(k^2 + k + m^2 + m) + 2$$

$a^2 + b^2$ không thể là số chính phương.

Vậy tổng bình phương của 2 số lẻ bất kỳ không phải là số chính phương.

Bài 48: Tìm 3 số lẻ liên tiếp mà tổng bình phương là một số có 4 chữ số giống nhau.

Trích đề HSG huyện Đan Phượng năm 2016 -2017

Lời giải

Gọi 3 số lẻ liên tiếp đó là: $2n-1; 2n+1; 2n+3$ ($n \in \mathbb{N}$)

Ta có : $A = (2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 = 12n^2 + 12n + 11$

Theo đề bài ta đặt $12n^2 + 12n + 11 = \overline{aaaa} = 1111.a$ với a lẻ và $1 \leq a \leq 9$.

$$12n(n+1) = 11(101a-1)$$

$$101a-1 \vdots 3$$

$$2a-1 \vdots 3$$

Vì $1 \leq a \leq 9$ nên $1 \leq 2a-1 \leq 17$ và $2a-1$ lẻ nên $2a-1 \in \{3; 9; 15\}$

$$a \in \{2; 5; 8\}$$

Vì a lẻ nên $a = 5$. Do đó $n = 21$

Vậy 3 số cần tìm là: 41; 43; 45.

Bài 49: Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.

Trích đề HSG huyện Phúc Thọ năm 2018 -2019

Lời giải

Gọi số chính phương phải tìm là: $\overline{aabb} = n^2$ với $a, b \in \mathbb{N}; 1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9$.

Ta có: $n^2 = \overline{aabb} = 11 \cdot \overline{a0b} = 11 \cdot (100a + b) = 11 \cdot (99a + a + b)$

Nhận xét thấy $\overline{aabb} : 11$ nên $a + b : 11$

Mà $1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9$ nên $1 \leq a + b \leq 18$. Do đó $a + b = 11$

Thay $a + b = 11$ vào (1) được $n^2 = 11^2(9a + 1)$ do đó $9a + 1$ là số chính phương.

Bằng phép thử với $a = 1; 2; \dots; 9$ ta thấy chỉ có $a = 7$ thoả mãn. Do đó $a + b = 11$ $b = 4$

Vậy số cần tìm là: 7744.

Bài 50: Chứng minh rằng mọi số nguyên x, y thì:

$A = (x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4$ là số chính phương.

Trích đề HSG quận Bắc Từ Liêm năm 2018 -2019

Lời giải

Ta có $A = (x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4$

$$= (x^2 + 5xy + 4y^2)(x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4$$

Đặt $x^2 + 5xy + 5y^2 = t$ ($t \in \mathbb{Z}$) thì

$$A = (t - y^2)(t + y^2) + y^4 = t^2 - y^4 + y^4 = t^2 = (x^2 + 5xy + 5y^2)^2$$

Vì $x, y, z \in \mathbb{Z}$ nên $x^2 \in \mathbb{Z}; 5xy \in \mathbb{Z}; 5y^2 \in \mathbb{Z}$. Do đó $x^2 + 5xy + 5y^2 \in \mathbb{Z}$
 Vậy A là số chính phương.

Bài 51: Chứng tỏ rằng số $1.2.3.4...2019+7$ không phải là số chính phương

Trích đề HSG huyện Mỹ Lộc, năm 2011- 2012

Lời giải

Ta có: $1.2.3.4...2019$ có chữ số tận cùng là 0

Suy ra: $1.2.3.4...2019+7$ có chữ số tận cùng là 7

Do đó: $1.2.3.4...2019+7$ không phải là số chính phương

Bài 52: Tìm số chính phương có bốn chữ số \overline{abcd} , biết số đó chia hết cho 9 và d là một số nguyên tố

Trích đề HSG huyện Nghi Lộc, năm 2011- 2012

Lời giải

Vì a, b, c, d là số có một chữ số nên $a+b+c \leq 27$

d là một số nguyên tố $\Rightarrow d \in \{2; 3; 5; 7\}$

\overline{abcd} là số chính phương $\Rightarrow d = 5$

$\Rightarrow \overline{abcd}$ chia hết cho 9 và 5 nên $\overline{abc5} = 9.5.5a^2$ (a là số lẻ vì $\overline{abc5}$ là số lẻ)

$\Rightarrow \overline{abc5} = (3.5.a)^2 = (15a)^2$

Với $a = 1 \Rightarrow \overline{abc5} = 225$ (loại)

Với $a = 3 \Rightarrow \overline{abc5} = 2025$ (TM)

Với $a = 5 \Rightarrow \overline{abc5} = 5625$ (TM)

Với $a = 7 \Rightarrow \overline{abc5} = 11025$ (loại)

Vậy số cần tìm là: 2025 và 5625

Bài 53: Chứng minh rằng tổng bốn số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương.

Lời giải

Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là $a, a+1, a+2, a+3$ ($a \in \mathbb{N}^*$)

Ta xét $S = a + (a+1) + (a+2) + (a+3) = 4a+6$

Vì $4a : 2$ và $6 : 2$ nên $S : 2$

Mặt khác $4a : 4$ và 6 không chia hết cho 4 nên S không chia hết cho 4.

Vậy S chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên S không là số chính phương.

Bài 54: Chứng tỏ tổng sau không là số chính phương $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ không là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111a + 111b + 111c$

$= 111(a+b+c) = 3.37.(a+b+c)$

Để S là số chính phương thì $a+b+c = 3.37.k^2$ ($k \in \mathbb{N}$)

Điều này vô lí vì $a+b+c \leq 27 < 37$

Vậy S không là số chính phương.

Bài 55: Tìm số chính phương có 4 chữ số, biết rằng hai chữ số đầu giống nhau, hai chữ số cuối giống nhau

Lời giải

Gọi số chính phương cần tìm là: $\overline{aabb} = n^2$ ($a, b \in N, 1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$)

Ta có: $n^2 = \overline{aabb} = 11 \cdot \overline{a0b} = 11(100a + b) = 11(99a + a + b)$ (1)

Thấy $\overline{aabb} : 11 \Rightarrow a + b : 11 \Rightarrow a + b = 11$ Thay vào (1) ta được:

$n^2 = 11^2(9a + 1) \Rightarrow 9a + 1$ là số chính phương

Thử $a = 1, 2, 3, \dots, 9$ thấy $a = 7$ thỏa mãn $\Rightarrow b = 4$

Bài 56: Cho $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$. Chứng minh rằng A không phải là số chính phương.

Lời giải

Ta có các số : $10^{2012} ; 10^{2011} ; 10^{2010} ; 10^{2009}$ đều có chữ số tận cùng là 0

Nên $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$ có chữ số tận cùng là 8

Vậy A không phải là số chính phương vì số chính phương là những số có chữ số tận cùng là 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9

Bài 57: Chứng minh rằng số sau là một số chính phương $N = \underbrace{11111\dots 1}_{1995 \text{ số } 1} \cdot \underbrace{10000\dots 0}_{1994 \text{ số } 0} 5 + 1$

Lời giải

Ta có :

$$\begin{aligned} N &= \frac{10^{1995} - 1}{9} (10^{1995} + 5) + 1 = \frac{(10^{1995} - 1)(10^{1995} + 5) + 9}{9} \\ &= \frac{(10^{1995})^2 + 4 \cdot 10^{1995} + 4}{9} = \left(\frac{10^{1995} + 2}{3} \right)^2 = \left(\frac{10^{1995} - 1}{3} + 1 \right)^2 \\ &= \left[\frac{3}{9} (10^{1995} - 1) + 1 \right]^2 = \underbrace{33333\dots 3}_{1994 \text{ số } 3} 4^2 \end{aligned}$$

Vậy số N là một số chính phương

Bài 58: Tìm số nguyên tố \overline{ab} ($a > b > 0$) sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương.

Lời giải

$$\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b) = 3^2(a - b)$$

Do $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương nên $a - b$ là số chính phương.

Ta thấy $1 \leq a - b \leq 8$ nên $a - b \in \{1; 4\}$

Với $a - b = 1$ thì $\overline{ab} \in \{21;32;43;54;65;76;87;98\}$ loại các số là hợp số 21;32;54;65;76;87;98.
Còn 43 là số nguyên tố.

Với $a - b = 4$ Thì $\overline{ab} \in \{51;62;73;84;95\}$ loại các hợp số 51; 62; 84; 95. Còn 73 là số nguyên tố.

Vậy $\overline{ab} = 43;73$

Bài 59: Tìm một số có 4 chữ số vừa là số chính phương vừa là một lập phương.

Lời giải

Gọi số chính phương đó là \overline{abcd} .

Vì \overline{abcd} vừa là số chính phương vừa là một lập phương nên đặt $\overline{abcd} = x^2 = y^3$ với $x, y \in \mathbb{N}^*$

Vì $y^3 = x^2$ nên y cũng là một số chính phương.

Ta có : $1000 \leq \overline{abcd} \leq 9999 \Rightarrow 10 \leq y \leq 21$ và y chính phương

$\Rightarrow y = 16 \Rightarrow \overline{abcd} = 4096$

Bài 60: Tìm số chính phương \overline{abcd} biết rằng $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$

Lời giải

Giả sử $n^2 = \overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 100(\overline{cd} + 1) + \overline{cd} = 101\overline{cd} + 100$

Suy ra : $101\overline{cd} = n^2 - 100 = (n - 10)(n + 10)$

Vì $n < 100$ và 101 là số nguyên tố nên $n + 10 = 101$ suy ra $n = 91$

Thử lại $\overline{abcd} = 91^2 = 8281$ có $82 - 81 = 1$

Vậy số cần tìm là 8281

Bài 61: Tìm một số chính phương có 4 chữ số sao cho khi viết 4 chữ số đó theo thứ tự ngược lại ta cũng được một số chính phương và số chính phương này là bội số của số chính phương cần tìm.

Lời giải

Đặt số phải tìm là $\overline{abcd} = M^2$ thì $1000 < M^2 < 10000$ nên $31 < M < 50$

Ta lại có $\overline{dcba} = N^2$. Tính tổng và hiệu hai số chính phương này ta được

$$\overline{abcd} + \overline{dcba} = 1001(a + d) + 110(b + c) : 11$$

$$\overline{abcd} - \overline{dcba} = 999(d - a) + 90(c - b) : 3$$

Vì \overline{dcba} là bội của \overline{abcd} nên \overline{abcd} vừa phải chia hết cho 11 vừa phải chia hết cho 3 tức là bội số của 33. Mà $31 < M < 50$ nên $M = 33$ và ta có: $\overline{abcd} = 33^2 = 1089$, $\overline{dcba} = 9801 = 99^2$

Bài 62: Tìm số nguyên tố \overline{ab} ($a > b > 0$), sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b)$ là số chính phương;

Mà $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương.

$\Rightarrow a - b$ là số chính phương

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a - b = 4 \end{cases}$$

+) Với $a - b = 1 \Rightarrow \overline{ab} \in \{21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98\}$

+) Với $a - b = 4 \Rightarrow \overline{ab} \in \{51, 62, 73, 84, 95\}$

Vậy các số nguyên tố \overline{ab} thỏa yêu cầu đề bài là: $\overline{ab} \in \{43; 73\}$

Bài 63: Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{33}$. Hỏi A có là số chính phương không? Vì sao?

Lời giải

Ta có:

$$A = 1 + 2 + (2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + \dots + (2^{30} + 2^{31} + 2^{32} + 2^{33})$$

$$A = 3 + 2(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + 2^{29}(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$$

$$A = 3 + 2 \cdot 30 + \dots + 2^{29} \cdot 30$$

$$A = 3 + 30 \cdot (2 + 2^2 + \dots + 2^{29})$$

$$A = [3 \cdot (2 + 2^2 + \dots + 2^{29})] \cdot 10 + 3$$

$\Rightarrow A$ có chữ số tận cùng là 3

$\Rightarrow A$ không là số chính phương.

Bài 64: Cho $B = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$. Chứng minh rằng $2B + 3$ không là số chính phương

Lời giải

$$B = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$$

$$3B = 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100} + 3^{101}$$

$$3B - B = (3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100} + 3^{101}) - (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100})$$

$$2B = 3^{101} - 3 \Rightarrow 2B + 3 = 3^{101}$$

$$\text{Mà } 2B + 3 = 3^{101} = 3^{25 \cdot 4 + 1} = 3 \cdot (3^4)^{25} = 3 \cdot 81^{25} = 3 \cdot \overline{\dots\dots\dots 1} = \overline{\dots\dots\dots 3}$$

$2B + 3$ là số có tận cùng là 3 nên không phải là số chính phương vì số chính phương thì có tận cùng là 0; 1; 4; 5; 6; 9.

Bài 65: Chứng tỏ $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{57} + 3^{58}$ không phải là số chính phương.

Lời giải

$$3S = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{58} + 3^{59}$$

$$3S - S = 2S = 3^{59} - 1$$

Vì $3^{59} = (3^4)^{14} \cdot 27$ có chữ số tận cùng là 7 nên $3^{59} - 1$ có chữ số tận cùng là 6 nên S có chữ số tận cùng là 3.

Bài 66: Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $n+1; 2n+1; 5n+1$ đều là số chính phương?

Trích đề HSG huyện Trực Ninh năm 2017 – 2018

Lời giải

Do $n+1$ là số chính phương nên khi chia cho 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1.

Nếu $n+1 \div 3$ thì n chia cho 3 dư 2 suy ra $2n+1$ chia cho 3 dư 2, vô lý.

Do đó $n+1$ chia cho 3 sẽ dư 1 suy ra $n \div 3$

Do $2n+1$ là số chính phương lẻ nên $2n+1$ chia cho 8 dư 1, suy ra $2n \div 8$, từ đó $n \div 4$

Do đó $n+1$ là số chính phương lẻ nên $n+1$ chia cho 8 dư 1, suy ra $n \div 8$

Ta thấy $n \div 3, n \div 8$ mà $(3, 8) = 1$ nên $n \div 24$ mà n là số nguyên dương

Với $n = 24$ thì $n+1 = 25 = 5^2; 2n+1 = 49 = 7^2; 5n+1 = 121 = 11^2$

Vậy $n = 24$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn đề bài

Bài 67: Với n là số tự nhiên thì $n! = 1.2.3....$. Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $A = 1! + 2! + 3! + \dots + n!$ là một số chính phương.

Trích đề sưu tầm

Lời giải

Xét $n = 1$ ta có $A = 1! = 1 = 1^2$ là số chính phương.

Xét $n = 2$ ta có $A = 1! + 2! = 1 + 2 = 3$ không là số chính phương.

Xét $n = 3$ ta có $A = 1! + 2! + 3! = 1 + 2 + 6 = 9 = 3^2$ là số chính phương.

Xét $n \geq 4$ ta có $A = 1! + 2! + 3! + 4! = 33$ và từ $5!$ trở lên mỗi số đều có chữ số tận cùng là 0 nên A có tận cùng là 3 nên A không là số chính phương.

Vậy $n = 1$ và $n = 3$ thỏa mãn.

Bài 68: Tìm số tự nhiên n có hai chữ số, biết rằng $4n+1; 5n+1$ đều là số chính phương

Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2021-2022

Lời giải

Ta có $10 \leq n \leq 99$ nên $41 \leq 4n+1 \leq 397$ và $4n+1$ lẻ

Các số chính phương lẻ trong khoảng trên gồm có: 49; 81; 121; 169; 225; 289; 361

Tương ứng với n bằng: 12; 20; 30; 42; 56; 72; 90

Số $5n+1$ tương ứng bằng: 61; 101; 151; 211; 281; 361; 451.

Chỉ có số 361 thỏa mãn.

Vậy $n = 72$

Bài 69: Tìm số tự nhiên n có hai chữ số, biết rằng $2n+1; 3n+1$ đều là số chính phương

Trích đề KS HSG huyện Tam Đảo năm 2021-2022

Lời giải

Ta có $10 \leq n \leq 99$ nên $21 \leq 2n+1 \leq 199$ và $2n+1$ lẻ

Các số chính phương lẻ trong khoảng trên gồm có: 25; 49; 81; 121; 169

Tương ứng với n bằng: 12; 24; 40; 60; 84

Số $3n+1$ tương ứng bằng: 37; 73; 121; 181; 253.

Chỉ có số 121 thỏa mãn.

Vậy $n = 40$

Bài 70: Tìm các số nguyên tố $x; y$ sao cho: $x^2 + 45 = y^2$

Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2021-2022**Lời giải**

Từ đầu bài : $x^2 + 45 = y^2$ suy ra $y^2 > 45$. Do đó y là số nguyên tố lẻ

+ Vì y là số nguyên tố lẻ suy ra y^2 là số lẻ. Mà $x^2 + 45 = y^2$

Từ đó ta có: $x^2 + 45$ là số lẻ hay x là số nguyên tố chẵn (vì 45 là số lẻ) nên $x = 2$.

+ Thay $x = 2$ vào đầu bài thì $y^2 = 49 = 7^2$ suy ra $y = 7$ (chọn)

Vậy $(x; y) = (2; 7)$

Bài 71: Tìm số tự nhiên n có 2 chữ số biết rằng $2n+1$ và $3n+1$ đều là các số chính phương.

Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2017-2018**Lời giải**

Ta biết rằng số chính phương chia cho 3 dư 0 hoặc 1

Nếu $n = 3k + 1 (k \in N)$ thì $n + 1 = 3k + 2$, không là số chính phương.

Nếu $n = 3k + 2 (k \in N)$ thì $2n + 1 = 6k + 5 = 3(2k + 1) + 2$, không là số chính phương.

Vậy $n \div 3$.

$2n + 1$ là số chính phương lẻ nên chia 8 dư 1. Suy ra $2n \div 8$ suy ra $n \div 4$ nên $n + 1$ lẻ.

Do $n + 1$ là số chính phương lẻ nên $n + 1$ chia 8 dư 1 suy ra $n \div 8$

Do $n \div 3; n \div 8$ mà 3 và 8 nguyên tố cùng nhau nên $n \div 24$, mà n nhỏ nhất nên $n = 24$.

Vậy $n = 24$.

Bài 72: Cho $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$

a) Chứng minh rằng A chia hết cho 24

b) Chứng minh rằng A không phải là số chính phương

Đề sưu tầm.

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= 10^3 (10^{2009} + 10^{2008} + 10^{2007} + 10^{2006}) + 8 \\ &= 8.125.(10^{2009} + 10^{2008} + 10^{2007} + 10^{2006}) + 8 \\ &= 8.[125.(10^{2009} + 10^{2008} + 10^{2007} + 10^{2006}) + 1] \div 8 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta lại có các số: $10^{2012}; 10^{2011}; 10^{2010}; 10^{2009}$ có tổng các chữ số bằng 1, nên các số $10^{2012}; 10^{2011}; 10^{2010}; 10^{2009}$ khi chia cho 3 đều có số dư bằng 1, 8 chia 3 dư 2

Vậy A chia hết cho 3 (2)

Và $(3, 8) = 1$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $A \div 24$

b) Ta có các số $10^{2012}; 10^{2011}; 10^{2010}; 10^{2009}$ đều có chữ số tận cùng là 0 nên

$A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$ có chữ số tận cùng là 8

Vậy A không phải là số chính phương vì số chính phương là những số có tận cùng là 0; 1; 4; 5; 6; 9

Bài 73: Cho biểu thức : $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$. Chứng tỏ rằng:

a) M chia hết cho 6

b) M không phải là số chính phương

Trích đề HSG huyện Quỳnh Lưu năm 2018-2019.

$$\begin{aligned} a) M &= 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80} \\ &= (5 + 5^2) + (5^3 + 5^4) + \dots + (5^{79} + 5^{80}) \\ &= (5 + 5^2) + 5^2 \cdot (5 + 5^2) + \dots + 5^{78} \cdot (5 + 5^2) \\ &= 30 \cdot (1 + 5^2 + \dots + 5^{78}) : 30 \end{aligned}$$

b) Ta thấy : $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$ chia hết cho 5 (1)

Mặt khác, do $5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$ chia hết cho 5^2

$M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$ không chia hết cho 25 (2)

Từ (1) và (2) suy ra M không là số chính phương.

Bài 74: Chứng tỏ rằng số sau không phải là số chính phương: $A = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Tường năm 2019-2020.

Giả sử A là số chính phương.

$$A = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 3 \cdot 37 \cdot (a + b + c) : 37 \text{ suy ra } A : 37^2 \text{ suy ra } 3 \cdot (a + b + c) : 37$$

Vô lý vì 37 là số nguyên tố và $0 < a + b + c \leq 27$

Vậy A không phải là số chính phương.

Bài 75: Chứng minh tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 2005 không phải là số chính phương.

Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2019-2020

$$\text{Ta có: } 1 + 2 + 3 + \dots + 2005 = \frac{(1 + 2005) \cdot 2005}{2} = 1003 \cdot 2005 \equiv 3 \pmod{4}$$

Mà số chính phương chia 4 chỉ có thể dư 0 hoặc 1

Vậy tổng của các số từ 1 đến 2005 không là số chính phương

PHIẾU BÀI TẬP SỐ 2

Bài 1: Cho p là tích của 2016 số nguyên tố đầu tiên. Chứng minh rằng $p-1$ và $p+1$ không là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá (Thanh Hoá) năm 2015 - 2016

Bài 2: Với $a, b \in \mathbb{N}$ và $(a-b)(a+b+1) = b^2$. Hãy chứng tỏ rằng $a-b$ và $a+b+1$ là các số chính phương.

Trích đề HSG Quận Hoàng Mai (Hà Nội) năm 2016 - 2017

Bài 3: Chứng minh số $n = 2004^2 + 2003^2 + 2002^2 - 2001^2$ không phải là số chính phương

Bài 4: Tổng $A = 10^{100} + 10^{50} + 1$ là số chính phương không?

Bài 5: Cho $A = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2019}$. Hỏi $4A + 5$ có phải là số chính phương không.

Bài 6: Cho $S = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2020}$. Chứng minh S không phải là số chính phương.

Bài 7: Cho $B = 1.3.5.7 \dots 2017.2019$, hỏi trong các số $2B-1, 2B, 2B+1$ số nào là số chính phương?

Bài 8: Số $m = 1992^2 + 1993^2 + 1994^2$ có phải là số chính phương không?

Bài 9: Chứng minh rằng tổng của bốn số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương?

Bài 10: Cho $M = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$. Chứng tỏ rằng M không là số chính phương.

Bài 11: Tìm số nguyên tố \overline{ab} ($a > b > 0$) sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương

(Trích đề HSG huyện Tam Nông năm 2018-2019)

Bài 12: Tìm n để $n^2 + 2006$ là một số chính phương

(Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019)

Bài 13: Số $A = 10^{10} + 8$ là số chính phương không?

Bài 14: Tổng $B = 11 + 11^2 + 11^3$ là số chính phương không?

Bài 15: Tổng $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{20}$ là số chính phương không.

Bài 16: Cho $A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$. Chứng minh rằng $A + 4$ không là số chính phương?

Bài 17: Cho $B = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$. Chứng minh rằng $2B + 3$ không là số chính phương?

Bài 18: Tìm số tự nhiên n có hai chữ số biết $2n + 1$ và $3n + 1$ đều là số chính phương.

Bài 19: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $C = 2n^2 + 2n + 3$ không là số chính phương.

Bài 20: Tìm số tự nhiên n có hai chữ số để $3n + 1$ và $4n + 1$ đều là các số chính phương.

Bài 21: Chứng minh rằng $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n .

(Đề thi vào lớp 10 chuyên trường ĐHSPTP Hồ Chí Minh 2015 - 2016)

Bài 22: Chứng minh rằng $n^5 + 1999n + 2017$ ($n \in \mathbb{N}$) không phải là số chính phương.

(Trích đề thi HSG tỉnh Quảng Ngãi 2017 - 2018)

Bài 23: Chứng minh rằng tổng bốn số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương.

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Nguyễn Huy Tưởng năm học 2004-2005)

Bài 24: Cho $B = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n-1)(n-2)$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng B không là số chính phương.

(Trích đề thi HSG Bắc Ninh 2018-2019)

Bài 25: Chứng tỏ tổng sau không là số chính phương $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ không là số chính phương.

(Trích đề thi Olympic lớp 6 THCS Cầu Giấy năm học 2011-2012)

Bài 26: Cho $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$

a) Chứng minh M chia hết cho 6.

b) Chứng minh M không là số chính phương.

(Trích đề thi HSG lớp 6 Đa Phúc 2010-2011)

Bài 27: Cho $E = 125.(1 + 6 + 6^2 + \dots + 6^{2021})$ Chứng minh $E + 25$ là một số chính phương.

(Trích đề thi Olympic lớp 6 Nghĩa Đô 2010-2011)

Bài 28: Cho $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$

a) Chứng minh A chia hết cho 24.

b) Chứng minh A không là số chính phương.

(Trích đề thi HSG lớp 6 huyện Anh Sơn 2011-2012)

Bài 29: Tìm số chính phương có bốn chữ số, được viết bởi các chữ số: 3; 6; 6; 8

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Sơn Đông 2011-2012)

Bài 30: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu nhân nó với 135 thì ta được một số chính phương?
(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Sơn Đông 2013-2014)

Bài 31: Cho tổng $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 2009 + 2011$. Chứng tỏ S là một số chính phương.
(Trích đề HSG toán 6 THCS Hồng Hà năm 2013 - 2014)

Bài 32: Chứng minh rằng với $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $3^n + 4$ không là số chính phương.

Bài 33: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $n^2 + 2$ không là số chính phương.

Bài 34: Chứng minh rằng tích của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

Bài 35: Chứng minh rằng với tổng của $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ không là số chính phương.

Bài 36: Chứng minh rằng với n lẻ và $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ thì $7^n + 24$ không là số chính phương.

Bài 37: Chứng minh rằng nếu số tự nhiên \overline{abc} là số nguyên tố thì $b^2 - 4ac$ không là số chính phương.

Bài 38: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì $2^n - 1$ không là số chính phương.

Bài 39: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ thì $A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ không là số chính phương.

Bài 40: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên thì $B = n^3 - n + 2$ không là số chính phương.

Bài 41: Tìm số tự nhiên $n \geq 1$ sao cho tổng $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ là một số chính phương.

Trích đề HSG huyện Phúc Yên năm 2009 -2010

Bài 42: Tìm số nguyên dương n sao cho $A = (n+3)(4n^2 + 14n + 7)$ là số một chính phương.

Trích đề HSG huyện Thái Bình năm 2014 -2015

Bài 43: Cho biểu thức: $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{30}$. Chứng tỏ rằng:

- M chia hết cho 6.
- M không phải là số chính phương.

Trích đề HSG trường Quỳnh Giang năm 2010 -2011

Bài 44: Cho $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$.

- Chứng minh rằng A chia hết cho 24.
- Chứng minh rằng A không phải là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Hoài Đức năm 2010 -2011

Bài 45: Tìm số tự nhiên x để biểu thức $x^2 + 2x + 20$ có giá trị là một số chính phương.

Trích đề HSG huyện Ba Vì năm 2014 -2015

Lời giải

Giả sử $x^2 + 2x + 20 = a^2 (a \in \mathbb{N}, a > 4)$.

$$a^2 - (x+1)^2 = 19$$

$$(a-x-1)(a+x+1) = 19$$

Vì $(a-x-1) < (a+x+1)$ và $19 = 1.19$ nên $\begin{cases} a-x-1=1 \\ a+x+1=19 \end{cases}$.

Do đó $x = 8$.

Thử lại với $x = 8$, ta có $x^2 + 2x + 20 = 8^2 + 2 \cdot 8 + 20 = 10^2$ thỏa mãn.

Vậy số tự nhiên cần tìm là $x = 8$.

Bài 46: Chứng minh rằng tổng các bình phương của 5 số tự nhiên liên tiếp không thể là một số chính phương.

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2014 -2015

Bài 47: Chứng minh rằng tổng bình phương của 2 số lẻ bất kỳ không phải là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Phúc Thọ năm 2014 -2015

Bài 48: Tìm 3 số lẻ liên tiếp mà tổng bình phương là một số có 4 chữ số giống nhau.

Trích đề HSG huyện Đan Phượng năm 2016 -2017

Bài 49: Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.

Trích đề HSG huyện Phúc Thọ năm 2018 -2019

Bài 50: Chứng minh rằng mọi số nguyên x, y thì:

$A = (x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4$ là số chính phương.

Trích đề HSG quận Bắc Từ Liêm năm 2018 -2019

Bài 51: Chứng tỏ rằng số $1.2.3.4...2019 + 7$ không phải là số chính phương

Trích đề HSG huyện Mỹ Lộc, năm 2011- 2012

Bài 52: Tìm số chính phương có bốn chữ số \overline{abcd} , biết số đó chia hết cho 9 và d là một số nguyên tố

Trích đề HSG huyện Nghi Lộc, năm 2011- 2012

Bài 53: Chứng minh rằng tổng bốn số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương.

Bài 54: Chứng tỏ tổng sau không là số chính phương $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ không là số chính phương.

Bài 55: Tìm số chính phương có 4 chữ số, biết rằng hai chữ số đầu giống nhau, hai chữ số cuối giống nhau

Bài 56: Cho $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$. Chứng minh rằng A không phải là số chính phương.

Bài 57: Chứng minh rằng số sau là một số chính phương $N = \underbrace{11111...1}_{1995 \text{ số } 1} \cdot \underbrace{10000...0}_{1994 \text{ số } 0} + 1$

Bài 58: Tìm số nguyên tố \overline{ab} ($a > b > 0$) sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương.

Bài 59: Tìm một số có 4 chữ số vừa là số chính phương vừa là một lập phương.

Bài 60: Tìm số chính phương \overline{abcd} biết rằng $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$

Bài 61: Tìm một số chính phương có 4 chữ số sao cho khi viết 4 chữ số đó theo thứ tự ngược lại ta cũng được một số chính phương và số chính phương này là bội số của số chính phương cần tìm.

Bài 62: Tìm số nguyên tố \overline{ab} ($a > b > 0$), sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương.

Bài 63: Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{33}$. Hỏi A có là số chính phương không? Vì sao?

Bài 64: Cho $B = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$. Chứng minh rằng $2B + 3$ không là số chính phương

Bài 65: Chứng tỏ $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{57} + 3^{58}$ không phải là số chính phương.

Bài 66: Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $n+1; 2n+1; 5n+1$ đều là số chính phương?

Trích đề HSG huyện Trục Ninh năm 2017 – 2018

Bài 67: Với n là số tự nhiên thì $n! = 1.2.3....$. Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $A = 1! + 2! + 3! + \dots + n!$ là một số chính phương.

Trích đề sưu tầm

Bài 68: Tìm số tự nhiên n có hai chữ số, biết rằng $4n+1; 5n+1$ đều là số chính phương

Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2021-2022

Bài 69: Tìm số tự nhiên n có hai chữ số, biết rằng $2n+1; 3n+1$ đều là số chính phương

Trích đề KS HSG huyện Tam Đảo năm 2021-2022

Bài 70: Tìm các số nguyên tố $x; y$ sao cho: $x^2 + 45 = y^2$

Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2021-2022

Bài 71: Tìm số tự nhiên n có 2 chữ số biết rằng $2n+1$ và $3n+1$ đều là các số chính phương.

Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2017-2018

Bài 72: Cho $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$

a) Chứng minh rằng A chia hết cho 24

b) Chứng minh rằng A không phải là số chính phương

Đề sưu tầm.

Bài 73: Cho biểu thức : $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$. Chứng tỏ rằng:

a) M chia hết cho 6

b) M không phải là số chính phương

Trích đề HSG huyện Quỳnh Lưu năm 2018-2019.

Bài 74: Chứng tỏ rằng số sau không phải là số chính phương: $A = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$.

Trích đề HSG huyện Vĩnh Tường năm 2019-2020.

Bài 75: Chứng minh tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 2005 không phải là số chính phương.

Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2019-2020

**CHỦ ĐỀ: SỐ CHÍNH PHƯƠNG****A. PHẦN NỘI DUNG****Dạng 1: Nhận biết một số là số chính phương****Bài 1:** Cho $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2022} + 5^{2023}$ có phải là số chính phương không? Vì sao?*Trích đề HSG THCS Quỳnh Thiện năm 2022 - 2023***Lời giải**

Vì mỗi số hạng của M đều chia hết cho 5 nên $M : 5$ Nhưng M không chia hết cho 25 (do trong tổng chỉ có duy nhất 1 số hạng là 5 không chia hết cho 25). Do đó M không phải là số chính phương.

Bài 2: Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ để $n^2 + 2006$ là số chính phương.*Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015 - 2016***Lời giải**

Giả sử $n^2 + 2006$ là số chính phương khi đó ta đặt: $n^2 + 2006 = a^2$ ($a \in \mathbb{Z}$)

$$a^2 - n^2 = 2006$$

$$(a - n)(a + n) = 2006 \quad (1)$$

Mà $(a + n) - (a - n) = 2n$ chia hết cho 2.

$a + n$ và $a - n$ có cùng tính chẵn lẻ.

+) TH1: $a + n$ và $a - n$ cùng lẻ nên $(a - n)(a + n)$ lẻ, trái với (1).

+) TH2: $a + n$ và $a - n$ cùng chẵn nên $(a - n)(a + n)$ chia hết cho 4, trái với (1).

Vậy không có n thỏa mãn $n^2 + 2006$ là số chính phương.

Bài 3: Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $n+1; 2n+1; 5n+1$ đều là số chính phương?*Trích đề chọn HSG Trục Ninh năm 2017-2018***Lời giải**

Do $n+1$ là số chính phương nên khi chia cho 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1.

Nếu $n+1 : 3$ thì n chia cho 3 dư 2 nên $2n+1$ chia cho 3 dư 2, vô lý.

Do đó $n+1$ chia cho 3 sẽ dư 1 nên $n : 3$

Do $2n+1$ là số chính phương lẻ nên $2n+1$ chia cho 8 dư 1, suy ra $2n : 8$, từ đó $n : 4$

Do đó $n+1$ là số chính phương lẻ nên $n+1$ chia cho 8 dư 1, suy ra $n : 8$

Ta thấy $n : 3, n : 8$ mà $(3, 8) = 1$ nên $n : 24$ mà n là số nguyên dương

Với $n = 24$ thì $n+1 = 25 = 5^2; 2n+1 = 49 = 7^2; 5n+1 = 121 = 11^2$

Vậy $n = 24$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn đề bài

Bài 4: Tìm số nguyên tố \overline{ab} ($a > b > 0$) biết $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương*Trích đề chọn HSG Nga Sơn năm 2017-2018***Lời giải**

Ta có: $\overline{ab} - \overline{ba} = 9(a - b)$



Do a, b là các chữ số, \overline{ab} là số nguyên tố, nên $3 \leq b$. Do đó $9 \cdot (a - b)$ là số chính phương khi $a - b \in \{1; 4\}$

+) Với $a - b = 1$ mà \overline{ab} là số nguyên tố nên ta được số $\overline{ab} = 43$

+) Với $a - b = 4$ mà \overline{ab} là số nguyên tố nên ta được số $\overline{ab} = 73$

Vậy $\overline{ab} = \{43; 73\}$

Bài 5: Tìm số tự nhiên n sao cho : $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ là số chính phương.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Xét : $n = 1 \Rightarrow 1! = 1^2$

$n = 2$ nên $1! + 2! = 3$

$n = 3$ nên $1! + 2! + 3! = 9 = 3^2$

$n = 4$ nên $1! + 2! + 3! + 4! = 33$

Với $n > 4$ thì $n! = 1.2.3 \dots n$ là một số chẵn. Nên $1! + 2! + \dots + n! = 33$ cộng với một số chẵn bằng số có chữ số tận cùng là 3 nên không là chính phương

Vậy $n = 1, n = 3$ thì thỏa đề

Bài 6: Tìm số nguyên tố \overline{ab} ($a > b > 0$) sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018-2019

Lời giải

Ta có: $\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - 10b - a = 9(a - b)$

Do 9 là số chính phương nên $(a - b)$ là số chính phương. Mà $1 \leq a - b \leq 8$ nên $a - b \in \{1; 4\}$

Nếu $a - b = 1$ suy ra $\overline{ab} \in \{21; 32; 43; 54; 65; 76; 87; 98\}$ suy ra : $\overline{ab} = 43$

Nếu $a - b = 4$ suy ra $\overline{ab} \in \{51; 62; 73; 84\}$ suy ra : $\overline{ab} = 73$

Vậy $\overline{ab} \in \{43; 73\}$

Bài 7: Tìm n để $n^2 + 2006$ là một số chính phương

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Giả sử $n^2 + 2006$ là số chính phương khi đó ta đặt $n^2 + 2006 = a^2$ ($a \in \mathbb{Z}$) suy ra : $a^2 - n^2 = 2006$

Suy ra : $(a - n)(a + n) = 2006$ (*)

Thấy a, n khác tính chất chẵn lẻ thì vế trái (*) là số lẻ nên không thỏa mãn (*)

Nếu a, n cùng tính chẵn hoặc lẻ thì $(a - n) : 2, (a + n) : 2$ nên vế trái chia hết cho 4 và vế phải không chia hết cho 4.

Vậy không tồn tại n để $n^2 + 2006$ là số chính phương

Bài 8: Tìm số tự nhiên n có 4 chữ số biết n là số chính phương và n là bội của 147

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021 - 2022

Lời giải

Vì n là số tự nhiên có 4 chữ số nên $1000 \leq n \leq 9999$

Theo bài ra n là bội của 147 nên $n = 147.k = 7^2.3k$

Do n là số chính phương nên khi phân tích n ra thừa số nguyên tố thì lũy thừa của các thừa số nguyên tố phải có số mũ chẵn suy ra $k : 3$



$$\Rightarrow k = 3m \Rightarrow n = 7^2 \cdot 3^2 \cdot m = 441m$$

$$\Rightarrow 1000 \leq 441m \leq 9999$$

$$\Rightarrow 2 < m \leq 22$$

Để n là số chính phương thì m phải là số chính phương nên $m \in \{4; 9; 16\}$

Suy ra các số tự nhiên cần tìm là: 1764; 3969; 7056

Bài 9: Cho phân số $C = \frac{6x-1}{3x+2}$. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để C có giá trị là số nguyên và $M = 5x+11$ có giá trị là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Lời giải

Để C có giá trị là số nguyên thì $6x-1 \vdots 3x+2$

$$\Rightarrow 2(3x+2) - 5 \vdots 3x+2$$

$$\Rightarrow 5 \vdots 3x+2 \text{ (do } 2(3x+2) \vdots 3x+2 \text{)}$$

$$\text{Mà } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3x+2 \in U(5) = \{-5; -1; 1; 5\}$$

$$\Rightarrow 3x \in \{-7; -3; -1; 3\} \text{ Mà } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-1; 1\}$$

Với $x = -1$ ta có $M = 5 \cdot (-1) + 11 = 6$ không là số chính phương.

Với $x = 1$ ta có $M = 5 \cdot 1 + 11 = 16$ là số chính phương.

Vậy $x = 1$ thỏa mãn đề bài.

Bài 10:

1. Tìm số nguyên tố p sao cho $p+6, p+12, p+18, p+24$ cũng là các số nguyên tố.

2. Bạn Lan tính tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến n và nhận thấy tổng đó chia hết cho 29. Bạn Loan tính tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến m và cũng nhận thấy tổng đó chia hết cho 29. Tìm các số tự nhiên m và n biết rằng $m < n < 50$.

Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021-2022

Lời giải

1. Tìm số nguyên tố p sao cho $p+6, p+12, p+18, p+24$ cũng là các số nguyên tố.

Với $p = 2; p = 3$ thấy không thỏa mãn

Với $p = 5$, ta có:

$$p+6 = 5+6 = 11; p+12 = 5+12 = 17; p+18 = 5+18 = 23; p+24 = 5+24 = 29$$

đều là số nguyên tố (thỏa mãn)

Với $p > 5$, ta xét các khả năng:

$$p = 5k+1; p = 5k+2; p = 5k+3; p = 5k+4 \text{ (với } k \in \mathbb{N}^* \text{)} \text{ đều không thỏa mãn}$$



Vậy $p = 5$.

2. Xét $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ với $k \in N$ và $0 < k < 50$.

Vì $\frac{k(k+1)}{2}$ chia hết cho 29 nên $k(k+1) : 29$ mà 29 là số nguyên tố

$\Rightarrow k : 29$ hoặc $k+1 : 29$.

Do $k \in N$ và $0 < k < 50$ nên $k = 29$ hoặc $k+1 = 29 \Rightarrow k \in \{29; 28\}$

$m = 28, n = 29$ (vì $m < n < 50$)

Vậy $m = 28, n = 29$.

Dạng 2: Chứng minh một số là số chính phương

Bài 1: Cho $B = 80^2 - 79.80 + 1601$

Chứng minh rằng B là bình phương của một số tự nhiên

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2018 - 2019

Lời giải

$$B = 80^2 - 79.80 + 1601 = 80.(80 - 79) + 1601 = 80.1 + 1601 = 1681 = 41^2$$

Vậy B là bình phương của một số tự nhiên là 41.

Bài 2: Tổng của n số tự nhiên lẻ đầu tiên có phải là một số chính phương không? Tại sao?

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Lời giải

Tổng của n số tự nhiên lẻ đầu tiên có phải là một số chính phương không? Tại sao?

Vì n lẻ nên ta đặt $n = 2k + 1$

Tổng của n số tự nhiên lẻ đầu tiên là : $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 2k + 1$

Tổng S có số số hạng là: $\frac{(2k+1)-1}{2} + 1 = k + 1$

$$S = \frac{[(2k+1)+1](k+1)}{2} = \frac{2(k+1)^2}{2} = (k+1)^2$$

Nên S là số chính phương

Bài 3: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên khác 0, có số lượng các ước tự nhiên là một số lẻ thì số tự nhiên đó là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Lời giải

Gọi số tự nhiên đó là $P (P \neq 0)$

Nếu $P = 1 \Rightarrow 1^2 = 1 \Rightarrow P$ là số chính phương

Nếu $P > 1$. Phân tích P ra thừa số nguyên tố ta có: $P = a^x . b^y . \dots . c^z$ (với $a, b, c \dots$ là các số nguyên tố)

Khi đó số lượng các ước của P: $(x+1)(y+1) \dots (z+1)$



Theo bài ra $(x+1)(y+1)\dots(z+1)$ là số lẻ

$\Rightarrow x+1; y+1; \dots; z+1$ đều là các số lẻ

$\Rightarrow x, y, \dots, z$ đều là các số chẵn

Do đó $x = 2m, y = 2n, z = 2t$

Nên $P = a^{2m}b^{2n}c^{2t} = (a^m \cdot b^n \cdot c^t)^2$

Vậy P là số chính phương.

Bài 4: M có là một số chính phương không, nếu: $M = 1+3+5+\dots+(2n-1)$ (với $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$).

Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015 -2016

Lời giải

$M = 1+3+5+\dots+(2n-1) (n \in \mathbb{N}, n \neq 0)$

Tính số số hạng: $(2n-1-1):2+1 = n$

Tính tổng: $M = 1+3+5+\dots+(2n-1) = (2n-1+1).n:2 = 2n^2:2 = n^2$

Vậy M là số chính phương.

Bài 5: Tổng của n số tự nhiên lẻ đầu tiên có phải là một số chính phương không? Tại sao?

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Lời giải

Ta có n lẻ nên ta đặt $n = 2k+1; k \in \mathbb{N}$

Tổng của n số tự nhiên lẻ đầu tiên là: $S = 1+3+5+\dots+2k+1$

Tổng S có số số hạng là: $\frac{(2k+1)-1}{2} + 1 = k+1$

$S = \frac{[(2k+1)+1](k+1)}{2} = \frac{2(k+1)^2}{2} = (k+1)^2$

Vậy S là số chính phương.

Bài 6: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu nhân nó với 735 thì được một số chính phương.

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là n , ta có: $735n = a^2$ (a tự nhiên) hay $7^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot n = a^2$.

Số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn nên $n = 3 \cdot 5 \cdot k^2 (k \in \mathbb{N}^*)$

Nếu $k \geq 3$ thì $n \geq 135, n$ có nhiều hơn hai chữ số (loại). Vậy $k = 1$ hoặc $k = 2$.

Khi đó hai số cần tìm là 15 và 60.

Bài 7: Tìm số nguyên tố p, q sao cho $p^2 + 3pq + q^2$ là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Lời giải



Với các số nguyên tố p, q , ta có $p^2 + 3pq + q^2$ là số chính phương.

$$\text{Đặt } p^2 + 3pq + q^2 = k^2 \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$(p+q)^2 + pq = k^2$$

$$k^2 - (p+q)^2 = pq$$

$$(k-p-q)(k+p+q) = pq$$

Ta xét ba trường hợp :

$$\text{TH1 : } k-p-q=1; k+p+q=pq$$

$$2p+2q=pq-1$$

$$pq-2p-2q=1$$

$$p(q-2)-2(p-2)=5$$

$$(p-2)(q-2)=5$$

Vì p, q là các số nguyên tố nên :

$$\left[\begin{array}{l} p-2=1 \\ q-2=5 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} p-2=5 \\ q-2=1 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} p=3 \\ q=7 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} p=7 \\ q=3 \end{array} \right.$$

Vậy ta có hai cặp p, q là $(3;7), (7;3)$.

$$\text{TH2 : } k-p-q=pq; k+p+q=1 ;$$

Vì p, q là số nguyên tố nên $pq > 1$

$$k-p-q > k+p+q \text{ mà } k-p-q < k+p+q \text{ (vô lí, loại).}$$

$$\text{TH3 : } k-p-q=p; k+p+q=q ;$$

$$2p+2q=q-p$$

$$3p+q=0 \text{ (vô lí, loại).}$$

Vậy ta có hai cặp p, q là $(3;7), (7;3)$.

Bài 8: Cho $E = 125.(1+6+6^2+\dots+6^{2011})$. Chứng minh rằng $E+25$ là một số chính phương.

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Lời giải

$$E = 125.(1+6+6^2+\dots+6^{2011})$$



$$\text{Đặt } A = (1 + 6 + 6^2 + \dots + 6^{2011})$$

$$6A = (6 + 6^2 + 6^3 + \dots + 6^{2012})$$

$$6A - A = 5A = 6^{2012} - 1$$

$$A = \frac{6^{2012} - 1}{5}$$

$$E = 125 \cdot \frac{6^{2012} - 1}{5} = 25(6^{2012} - 1)$$

$$E + 25 = 25 \cdot (6^{2012} - 1) + 25 = 25 \cdot 6^{2012} = 5^2 \cdot (6^{1006})^2 = (2 \cdot 6^{1006})^2$$

Vậy $E + 25$ là một số chính phương.

Bài 9: Tìm số nguyên tố p để $4p + 1$ là số chính phương

Trích đề thi chọn HSG Trường Phạt Tích huyện Tiên Du năm 2021-2022

Lời giải

$4p + 1$ là số chính phương và p là số nguyên tố nên

$$4p + 1 = x^2 \quad (x \in \mathbb{N}; x \geq 3)$$

$$\text{Suy ra } 4p = x^2 - 1 \text{ suy ra } 4p = (x - 1)(x + 1)$$

Vì $x \in \mathbb{N}; x \geq 3$ nên $(x - 1)(x + 1)$ là tích hai số lẻ hoặc chẵn liên tiếp.

Do $4p$ là số chẵn nên $(x - 1)(x + 1)$ là tích hai số chẵn liên tiếp.

$$\text{Do đó } (x - 1)(x + 1) : 8 \text{ suy ra } 4p : 8 \text{ suy ra } p : 2$$

Mà p là số nguyên tố suy ra $p = 2$

$$\text{Thử lại : } 4 \cdot 2 + 1 = 9 = 3^2. \text{ Vậy } p = 2.$$

Bài 10: Tìm số tự nhiên n có hai chữ số biết $2n + 1$ và $3n + 1$ đều là số chính phương

Trích đề HSG huyện Chương Mỹ năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\text{Ta có: } 10 \leq n \leq 99 \Rightarrow 21 \leq 2n + 1 \leq 199,$$

Tìm các số chính phương lẻ trong khoảng trên ta được: 25; 49; 81; 121; 169

ứng với $n \in \{12; 24; 40; 60; 84\}$

Khi đó $(3n + 1) \in \{37; 73; 121; 181; 253\}$, ta thấy chỉ có 121 là số chính phương.

$$\text{Vậy } n = 40$$

Dạng 3: Chứng minh một số không là số chính phương

Bài 1: Cho $B = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2022}$. Chứng minh rằng $2B + 3$ không là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Lời giải

$$\text{Ta có: } B = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2022} \quad (1)$$

$$\text{Suy ra: } 3 \cdot B = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2023} \quad (2)$$

$$\text{Lấy (2) trừ (1) ta được: } 3 \cdot B - B = 3^{2023} - 3$$

Suy ra:

$$2B = 3^{2023} - 3$$

$$2B + 3 = 3^{2023} - 3 + 3$$



$$2B + 3 = 3^{2023}$$

$$2B + 3 = 3^{2022} \cdot 3 = (3^{1011})^2 \cdot 3$$

Ta có $(3^{1011})^2 \cdot 3$ không là số chính phương do 3 không là số chính phương.

Vậy $2B + 3$ không là số chính phương.

Bài 2: Cho $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2021}$. Tìm số dư trong phép chia M cho 6. Hỏi M có phải là số chính phương?

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Lời giải

M có 2021 số hạng nên ta có

$$M = 5 + (5^2 + 5^3) + (5^4 + 5^5) \dots + (5^{2020} + 5^{2021})$$

$$= 5 + 5^2(1+5) + 5^4(1+5) + \dots + 5^{2020}(1+5)$$

$$= 5 + 6(5^2 + 5^4 + \dots + 5^{2020}) = 6k + 5, k \in \mathbb{N}$$

Vậy M chia 6 dư 5.

Vì số chính phương khi chia cho 6 chỉ có thể dư 0;1;2;3;4 nên M không phải là số chính phương

(HS có thể lập luận M chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25)

Dạng 4: Tìm điều kiện để một số là số chính phương

Bài 1: Tìm số tự nhiên n sao cho: $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ là số chính phương

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn, năm 2018- 2019

Lời giải

Đặt $A = 1! + 2! + 3! + \dots + n!$

+ Xét $n = 1 \Rightarrow A = 1$ (là số chính phương) $\Rightarrow n = 1$ (TM)

+ Xét $n = 2 \Rightarrow A = 1 + 2.1 = 3$ (không là số chính phương) $\Rightarrow n = 2$ (loại)

+ Xét $n = 3 \Rightarrow A = 1 + 2.1 + 3.2.1 = 9$ (là số chính phương) $\Rightarrow n = 3$ (TM)

+ Xét $n = 4 \Rightarrow A = 1 + 2.1 + 3.2.1 + 4.3.2.1 = 33$ (không là số chính phương) $\Rightarrow n = 4$ (loại)

+ Xét $n \geq 5 \Rightarrow A = 1 + 2.1 + 3.2.1 + 4.3.2.1 + B = 33 + B$ (trong đó B là số có chữ số tận cùng là 0)

Suy ra A có chữ số tận cùng là 3

Mà số chính phương không thể có chữ số tận cùng là 3 $\Rightarrow A$ không là số chính phương với

$$\forall n \geq 5; n \in \mathbb{N}$$

Vậy ta tìm được $n \in \{1; 3\}$

Bài 2: Tìm số nguyên tố \overline{ab} ($a > b > 0$) sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương

Trích đề HSG huyện Lâm Thao, năm 2018- 2019

Lời giải

$$\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - (10b + a) = 3^2(a - b)$$

Do $\overline{ab} - \overline{ba}$ chính phương nên $a - b$ chính phương

$$\text{Vì } 1 \leq a - b \leq 8 \Rightarrow a - b \in \{1; 4\}$$



Với $a - b = 1 \Rightarrow ab \in \{21; 32; 43; 54; 65; 76; 87; 98\}$

Loại các hợp số $21:3; 32:2; 54:2; 65:5; 76:2; 87:3; 98:2$, còn lại 43 là số nguyên tố.

Với $a - b = 4 \Rightarrow a - b \in \{51; 62; 73; 84; 95\}$

Loại các hợp số $51:3; 62:2; 84:2; 95:5$, còn 73 là số nguyên tố.

Vậy \overline{ab} là 43 hoặc 73. Khi đó $\overline{ab} - \overline{ba} = 43 - 34 = 3^2$ hoặc $\overline{ab} - \overline{ba} = 73 - 37 = 6^2$

B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

Dạng 1: Nhận biết một số là số chính phương

Bài 1: Cho $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2022} + 5^{2023}$ có phải là số chính phương không? Vì sao?

Trích đề HSG THCS Quỳnh Thiện năm 2022 – 2023

Bài 2: Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ để $n^2 + 2006$ là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015 – 2016

Bài 3: Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $n+1; 2n+1; 5n+1$ đều là số chính phương?

Trích đề chọn HSG Trục Ninh năm 2017-2018

Bài 4: Tìm số nguyên tố \overline{ab} ($a > b > 0$) biết $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương

Trích đề chọn HSG Nga Sơn năm 2017-2018

Bài 5: Tìm số tự nhiên n sao cho $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ là số chính phương.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 6: Tìm số nguyên tố \overline{ab} ($a > b > 0$) sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018-2019

Bài 7: Tìm n để $n^2 + 2006$ là một số chính phương

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 8: Tìm số tự nhiên n có 4 chữ số biết n là số chính phương và n là bội của 147

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021 - 2022

Bài 9: Cho phân số $C = \frac{6x-1}{3x+2}$. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để C có giá trị là số nguyên và $M = 5x+11$ có giá trị là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022



Dạng 2: Chứng minh một số là số chính phương

Bài 1: Cho $B = 80^2 - 79.80 + 1601$

Chứng minh rằng B là bình phương của một số tự nhiên

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2018 - 2019

Bài 2: Tổng của n số tự nhiên lẻ đầu tiên có phải là một số chính phương không? Tại sao?

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Bài 3: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên khác 0, có số lượng các ước tự nhiên là một số lẻ thì số tự nhiên đó là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Bài 4: M có là một số chính phương không, nếu: $M = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ (với $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$).

Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015 -2016

Bài 5: Tổng của n số tự nhiên lẻ đầu tiên có phải là một số chính phương không? Tại sao?

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Bài 6: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu nhân nó với 735 thì được một số chính phương.

Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Bài 7: Tìm số nguyên tố p, q sao cho $p^2 + 3pq + q^2$ là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Bài 8: Cho $E = 125 \cdot (1 + 6 + 6^2 + \dots + 6^{2011})$. Chứng minh rằng $E + 25$ là một số chính phương.

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Dạng 3: Chứng minh một số không là số chính phương

Bài 1: Cho $B = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2022}$. Chứng minh rằng $2B + 3$ không là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Bài 2: Cho $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2021}$. Tìm số dư trong phép chia M cho 6. Hỏi M có phải là số chính phương?

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Dạng 4: Tìm điều kiện để một số là số chính phương

Bài 1: Tìm số tự nhiên n sao cho: $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ là số chính phương

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn, năm 2018- 2019

Bài 2: Tìm số nguyên tố \overline{ab} ($a > b > 0$) sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương

Trích đề HSG huyện Lâm Thao, năm 2018- 2019



C. SỬU TÀM CÁC BÀI TRONG CÁC ĐỀ CỦA NHỮNG NĂM TRƯỚC ĐÓ

Bài 1: Chứng tỏ rằng số $1.2.3.4...2019+7$ không phải là số chính phương

Trích đề HSG huyện Mỹ Lộc, năm 2011- 2012

Lời giải

Ta có: $1.2.3.4...2019$ có chữ số tận cùng là 0

Suy ra: $1.2.3.4...2019+7$ có chữ số tận cùng là 7

Do đó: $1.2.3.4...2019+7$ không phải là số chính phương

Bài 2: Tìm số chính phương có bốn chữ số \overline{abcd} , biết số đó chia hết cho 9 và d là một số nguyên tố

**Lời giải**

Vì a, b, c, d là số có một chữ số nên $a + b + c \leq 27$

d là một số nguyên tố $\Rightarrow d \in \{2; 3; 5; 7\}$

\overline{abcd} là số chính phương $\Rightarrow d = 5$

$\Rightarrow \overline{abcd}$ chia hết cho 9 và 5 nên $\overline{abc5} = 9.5.5a^2$ (a là số lẻ vì $\overline{abc5}$ là số lẻ)

$\Rightarrow \overline{abc5} = (3.5.a)^2 = (15a)^2$

Với $a = 1 \Rightarrow \overline{abc5} = 225$ (loại)

Với $a = 3 \Rightarrow \overline{abc5} = 2025$ (TM)

Với $a = 5 \Rightarrow \overline{abc5} = 5625$ (TM)

Với $a = 7 \Rightarrow \overline{abc5} = 11025$ (loại)

Vậy số cần tìm là: 2025 và 5625

Bài 3: Chứng minh rằng tổng bốn số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương.

Lời giải

Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là $a, a+1, a+2, a+3$ ($a \in \mathbb{N}^*$)

Ta xét $S = a + (a+1) + (a+2) + (a+3) = 4a+6$

Vì $4a:2$ và $6:2$ nên $S:2$

Mặt khác $4a:4$ và 6 không chia hết cho 4 nên S không chia hết cho 4.

Vậy S chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên S không là số chính phương.

Bài 4: Chứng tỏ tổng sau không là số chính phương $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ không là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111a + 111b + 111c$
 $= 111(a+b+c) = 3.37.(a+b+c)$

Để S là số chính phương thì $a+b+c = 3.37.k^2$ ($k \in \mathbb{N}$)

Điều này vô lí vì $a+b+c \leq 27 < 37$

Vậy S không là số chính phương.

Bài 5: Tìm số chính phương có 4 chữ số, biết rằng hai chữ số đầu giống nhau, hai chữ số cuối giống nhau

Lời giải

Gọi số chính phương cần tìm là: $\overline{aabb} = n^2$ ($a, b \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$)

Ta có: $n^2 = \overline{aabb} = 11.a0b = 11(100a+b) = 11(99a+a+b)$ (1)

Thấy $\overline{aabb}:11 \Rightarrow a+b:11 \Rightarrow a+b=11$ Thay vào (1) ta được:

$n^2 = 11^2(9a+1) \Rightarrow 9a+1$ là số chính phương

Thử $a=1, 2, 3, \dots, 9$ thấy $a=7$ thỏa mãn $\Rightarrow b=4$

Bài 6: Cho $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$. Chứng minh rằng A không phải là số chính phương.

Lời giải



Ta có các số : 10^{2012} ; 10^{2011} ; 10^{2010} ; 10^{2009} đều có chữ số tận cùng là 0

Nên $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$ có chữ số tận cùng là 8

Vậy A không phải là số chính phương vì số chính phương là những số có chữ số tận cùng là 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9

Bài 7: Chứng minh rằng số sau là một số chính phương $N = \underbrace{11111\dots1}_{1995 \text{ số } 1} \cdot \underbrace{10000\dots0}_{1994 \text{ số } 0} 5 + 1$

Lời giải

Ta có :

$$\begin{aligned} N &= \frac{10^{1995} - 1}{9} (10^{1995} + 5) + 1 = \frac{(10^{1995} - 1)(10^{1995} + 5) + 9}{9} \\ &= \frac{(10^{1995})^2 + 4 \cdot 10^{1995} + 4}{9} = \left(\frac{10^{1995} + 2}{3} \right)^2 = \left(\frac{10^{1995} - 1}{3} + 1 \right)^2 \\ &= \left[\frac{3}{9} (10^{1995} - 1) + 1 \right]^2 = \underbrace{33333\dots3}_{1994 \text{ số } 3} 4^2 \end{aligned}$$

Vậy số N là một số chính phương

Bài 8: Tìm số nguyên tố \overline{ab} ($a > b > 0$) sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương.

Lời giải

$$\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b) = 3^2(a - b)$$

Do $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương nên $a - b$ là số chính phương.

Ta thấy $1 \leq a - b \leq 8$ nên $a - b \in \{1; 4\}$

Với $a - b = 1$ thì $\overline{ab} \in \{21; 32; 43; 54; 65; 76; 87; 98\}$ loại các số là hợp số 21; 32; 54; 65; 76; 87; 98. Còn 43 là số nguyên tố.

Với $a - b = 4$ thì $\overline{ab} \in \{51; 62; 73; 84; 95\}$ loại các hợp số 51; 62; 84; 95. Còn 73 là số nguyên tố.

Vậy $\overline{ab} = 43; 73$

Bài 9: Tìm một số có 4 chữ số vừa là số chính phương vừa là một lập phương.

Lời giải

Gọi số chính phương đó là \overline{abcd} .

Vì \overline{abcd} vừa là số chính phương vừa là một lập phương nên đặt $\overline{abcd} = x^2 = y^3$ với $x, y \in \mathbb{N}^*$

Vì $y^3 = x^2$ nên y cũng là một số chính phương.

Ta có : $1000 \leq \overline{abcd} \leq 9999 \Rightarrow 10 \leq y \leq 21$ và y chính phương

$\Rightarrow y = 16 \Rightarrow \overline{abcd} = 4096$



Bài 10: Tìm số chính phương \overline{abcd} biết rằng $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$

Lời giải

$$\text{Giả sử } n^2 = \overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 100(\overline{cd} + 1) + \overline{cd} = 101\overline{cd} + 100$$

$$\text{Suy ra : } 101\overline{cd} = n^2 - 10^2 = (n - 10)(n + 10)$$

Vì $n < 100$ và 101 là số nguyên tố nên $n + 10 = 101$ suy ra $n = 91$

$$\text{Thử lại } \overline{abcd} = 91^2 = 8281 \text{ có } 82 - 81 = 1$$

Vậy số cần tìm là 8281

Bài 11: Tìm một số chính phương có 4 chữ số sao cho khi viết 4 chữ số đó theo thứ tự ngược lại ta cũng được một số chính phương và số chính phương này là bội số của số chính phương cần tìm.

Lời giải

Đặt số phải tìm là $\overline{abcd} = M^2$ thì $1000 < M^2 < 10000$ nên $31 < M < 50$

Ta lại có $\overline{dcba} = N^2$. Tính tổng và hiệu hai số chính phương này ta được

$$\overline{abcd} + \overline{dcba} = 1001(a + d) + 110(b + c) : 11$$

$$\overline{abcd} - \overline{dcba} = 999(d - a) + 90(c - b) : 3$$

Vì \overline{dcba} là bội của \overline{abcd} nên \overline{abcd} vừa phải chia hết cho 11 vừa phải chia hết cho 3 tức là bội số của 33. Mà $31 < M < 50$ nên $M = 33$ và ta có: $\overline{abcd} = 33^2 = 1089$, $\overline{dcba} = 9801 = 99^2$

Bài 12: Tìm số nguyên tố \overline{ab} ($a > b > 0$), sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b)$ là số chính phương;

Mà $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương.

$\Rightarrow a - b$ là số chính phương

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a - b = 4 \end{cases}$$

$$\text{+) Với } a - b = 1 \Rightarrow \overline{ab} \in \{21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98\}$$

$$\text{+) Với } a - b = 4 \Rightarrow \overline{ab} \in \{51, 62, 73, 84, 95\}$$

Vậy các số nguyên tố \overline{ab} thỏa yêu cầu đề bài là: $\overline{ab} \in \{43; 73\}$

Bài 13: Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{33}$. Hỏi A có là số chính phương không? Vì sao?

Lời giải

Ta có:

$$A = 1 + 2 + (2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + \dots + (2^{30} + 2^{31} + 2^{32} + 2^{33})$$

$$A = 3 + 2(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + 2^{29}(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$$

$$A = 3 + 2.30 + \dots + 2^{29}.30$$



$$A = 3 + 30.(2 + 2^2 + \dots + 2^{29})$$

$$A = [3.(2 + 2^2 + \dots + 2^{29})].10 + 3$$

$\Rightarrow A$ có chữ số tận cùng là 3

$\Rightarrow A$ không là số chính phương.

Bài 14: Cho $B = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$. Chứng minh rằng $2B + 3$ không là số chính phương

Lời giải

$$B = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$$

$$3B = 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100} + 3^{101}$$

$$3B - B = (3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100} + 3^{101}) - (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100})$$

$$2B = 3^{101} - 3 \Rightarrow 2B + 3 = 3^{101}$$

$$\text{Mà } 2B + 3 = 3^{101} = 3^{25.4+1} = 3.(3^4)^{25} = 3.81^{25} = 3.\overline{\dots\dots\dots}1 = \overline{\dots\dots\dots}3$$

$2B + 3$ là số có tận cùng là 3 nên không phải là số chính phương vì số chính phương thì có tận cùng là 0;1;4;5;6;9.

Bài 15: Chứng tỏ $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{57} + 3^{58}$ không phải là số chính phương.

Lời giải

$$3S = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{58} + 3^{59}$$

$$3S - S = 2S = 3^{59} - 1$$

Vì $3^{59} = (3^4)^{14}.27$ có chữ số tận cùng là 7 nên $3^{59} - 1$ có chữ số tận cùng là 6 nên S có chữ số tận cùng là 3.

Bài 16: Tìm số tự nhiên $n \geq 1$ sao cho tổng $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ là một số chính phương.

Trích đề HSG huyện Phúc Yên năm 2009 -2010

Lời giải

Với $n = 1$ thì $1! = 1 = 1^2$ là số chính phương.

Với $n = 2$ thì $1! + 2! = 3$ không là số chính phương.

Với $n = 3$ thì $1! + 2! + 3! = 1 + 1.2 + 1.2.3 = 9 = 3^2$ là số chính phương.

Với $n \geq 4$ ta có $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 = 33$ còn $5!; 6!; \dots; n!$ đều tận cùng bởi 0 do đó $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ có tận cùng bởi chữ số 3 nên nó không phải là số chính phương.

Vậy có 2 số tự nhiên n thỏa mãn đề bài là $n = 1; n = 3$.

Bài 17: Tìm số nguyên dương n sao cho $A = (n + 3)(4n^2 + 14n + 7)$ là số một chính phương.

Trích đề HSG huyện Thái Bình năm 2014 -2015

Lời giải

$$\text{Ta có: } 4n^2 + 14n + 7 = 4n^2 + 12n + 2n + 6 + 1$$

$$= 4n(n + 3) + 2(n + 3)$$

$$= (n + 3)(4n + 2) + 1$$



Và n là số nguyên dương nên $n+3$ và $4n^2+14n+7$ là nguyên tố cùng nhau. Vì vậy, để A là số chính phương thì $4n^2+14n+7$ và $n+3$ phải là số chính phương.

Do $n \in \mathbb{Z}^+$ nên ta có $(2n+3)^2 \leq 4n^2+14n+7 < (2n+4)^2$.

$4n^2+14n+7 = (2n+3)^2 \Rightarrow n=1$. Khi đó $n+3=4$ là số chính phương.

Thử lại, với $n=1$, ta có $A=10^2$.

Vậy số nguyên dương cần tìm là $n=1$.

Bài 18: Cho biểu thức: $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$. Chứng tỏ rằng:

- M chia hết cho 6.
- M không phải là số chính phương.

Trích đề HSG trường Quỳnh Giang năm 2010 -2011

Lời giải

a) Ta có :

$$\begin{aligned} M &= 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80} \\ &= (5 + 5^2) + (5^3 + 5^4) + (5^5 + 5^6) + \dots + (5^{79} + 5^{80}) \\ &= (5 + 5^2) + 5^2 \cdot (5 + 5^2) + 5^4 (5 + 5^2) + \dots + 5^{78} (5 + 5^2) \\ &= 30 + 30 \cdot 5^2 + 30 \cdot 5^4 + \dots + 30 \cdot 5^{78} \\ &= 30 \cdot (1 + 5^2 + 5^4 + \dots + 5^{78}) : 30 \end{aligned}$$

Vậy M chia hết cho 6.

b) Ta thấy : $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$ chia hết cho số nguyên tố 5 .

Mặt khác, do: $5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$ chia hết cho 5^2 (vì tất cả các số hạng đều chia hết cho 5^2).

$M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$ không chia hết cho 5^2 (do 5 không chia hết cho 5^2).

M chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 5^2 .

M không phải là số chính phương. (Vì số chính phương chia hết cho số nguyên tố p thì chia hết cho p^2).

Bài 19: Cho $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$.

- Chứng minh rằng A chia hết cho 24.
- Chứng minh rằng A không phải là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Hoài Đức năm 2010 -2011

Lời giải

a) Chứng minh rằng A chia hết cho 24 .

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } A &= 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8 \\ &= 10^3 (10^{2009} + 10^{2003} + 10^{2007} + 10^{2006}) + 8 \\ &= 8 \cdot 125 (10^{2009} + 10^{2008} + 10^{2007} + 10^{2008}) + 8 \\ &= 8 \cdot [125 (10^{2009} + 10^{2008} + 10^{2007} + 10^{2006}) + 1] : 8 \quad (1) \end{aligned}$$



Ta lại có các số : $10^{2012}; 10^{2011}; 10^{2010}; 10^{2009}$ có tổng tổng các chữ số bằng 1.

Nên các số $10^{2012}; 10^{2011}; 10^{2010}; 10^{2009}$ khi chia cho 3 đều có số dư bằng 1. 8 chia cho 3 dư 2.

Vậy $A = 10^8 (10^{2000} + 10^{2003} + 10^{2007} + 10^{2006}) + 8$ chia cho 3 có số dư là dư của phép chia $(1+1+1+1+2)$ chia cho 3.

Hay dư của phép chia 6 chia cho 3 (có số dư bằng 0).

A chia hết cho 3.

Vì 8 và 3 là hai số nguyên tố cùng nhau nên A chia hết cho $8.3 = 24$.

b) Chứng minh rằng A không phải là số chính phương.

Ta có các số : $10^{2012}; 10^{2011}; 10^{2010}; 10^{2009}$ đều có chữ số tận cùng là 0.

Nên $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$ có chữ số tận cùng là 8.

Vậy A không phải là số chính phương vì số chính phương là những số có chữ số tận cùng là 1;4;5;6;9.

Bài 20: Tìm số tự nhiên x để biểu thức $x^2 + 2x + 20$ có giá trị là một số chính phương.

Trích đề HSG huyện Ba Vì năm 2014 -2015

Lời giải

Giả sử $x^2 + 2x + 20 = a^2 (a \in \mathbb{N}, a > 4)$.

$$a^2 - (x+1)^2 = 19$$

$$(a-x-1)(a+x+1) = 19$$

$$\text{Vì } (a-x-1) < (a+x+1) \text{ và } 19 = 1.19 \text{ nên } \begin{cases} a-x-1=1 \\ a+x+1=19 \end{cases}$$

Do đó $x=8$.

Thử lại với $x=8$, ta có $x^2 + 2x + 20 = 8^2 + 2.8 + 20 = 10^2$ thỏa mãn.

Vậy số tự nhiên cần tìm là $x=8$.

Bài 21: Chứng minh rằng tổng các bình phương của 5 số tự nhiên liên tiếp không thể là một số chính phương.

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2014 -2015

Lời giải

Gọi 5 số tự nhiên liên tiếp đó là $n-2, n-1, n+1, n+2 (n \in \mathbb{N}, n > 2)$.

$$\text{Ta có } (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5 \cdot (n^2 + 2)$$

Vì n không thể tận cùng bởi 3 hoặc 8 do đó $n^2 + 2$ không thể chia hết cho 5.

$5 \cdot (n^2 + 2)$ không là số chính phương hay A không là số chính phương.

Bài 22: Chứng minh rằng tổng bình phương của 2 số lẻ bất kỳ không phải là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Phúc Thọ năm 2014 -2015

Lời giải

Vì a và b lẻ nên $a = 2k+1, b = 2m+1 (với k, m \in \mathbb{N})$.



$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2k+1)^2 + (2m+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 + 4m^2 + 4m + 1 \\ &= 4(k^2 + k + m^2 + m) + 2 \end{aligned}$$

$a^2 + b^2$ không thể là số chính phương.

Vậy tổng bình phương của 2 số lẻ bất kỳ không phải là số chính phương.

Bài 23: Tìm 3 số lẻ liên tiếp mà tổng bình phương là một số có 4 chữ số giống nhau.

Trích đề HSG huyện Đan Phượng năm 2016 -2017

Lời giải

Gọi 3 số lẻ liên tiếp đó là: $2n-1; 2n+1; 2n+3$ ($n \in \mathbb{N}$)

$$\text{Ta có : } A = (2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 = 12n^2 + 12n + 11$$

Theo đề bài ta đặt $12n^2 + 12n + 11 = \overline{aaaa} = 1111.a$ với a lẻ và $1 \leq a \leq 9$.

$$12n(n+1) = 11(101a-1)$$

$$101a-1 \vdots 3$$

$$2a-1 \vdots 3$$

Vì $1 \leq a \leq 9$ nên $1 \leq 2a-1 \leq 17$ và $2a-1$ lẻ nên $2a-1 \in \{3; 9; 15\}$

$$a \in \{2; 5; 8\}$$

Vì a lẻ nên $a = 5$. Do đó $n = 21$

Vậy 3 số cần tìm là: 41; 43; 45.

Bài 24: Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.

Trích đề HSG huyện Phúc Thọ năm 2018 -2019

Lời giải

Gọi số chính phương phải tìm là: $\overline{aabb} = n^2$ với $a, b \in \mathbb{N}; 1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9$.

$$\text{Ta có: } n^2 = \overline{aabb} = 11 \cdot \overline{ab} = 11 \cdot (100a + b) = 11 \cdot (99a + a + b)$$

Nhận xét thấy $\overline{aabb} : 11$ nên $a+b : 11$

Mà $1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9$ nên $1 \leq a+b \leq 18$. Do đó $a+b = 11$

Thay $a+b = 11$ vào (1) được $n^2 = 11^2(9a+1)$ do đó $9a+1$ là số chính phương.

Bằng phép thử với $a = 1; 2; \dots; 9$ ta thấy chỉ có $a = 7$ thỏa mãn. Do đó $a+b = 11$ $b = 4$

Vậy số cần tìm là: 7744.

Bài 25: Chứng minh rằng mọi số nguyên x, y thì:

$$A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4 \text{ là số chính phương.}$$

Trích đề HSG quận Bắc Từ Liêm năm 2018 -2019



Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4 \\ &= (x^2 + 5xy + 4y^2)(x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4 \end{aligned}$$

Đặt $x^2 + 5xy + 5y^2 = t$ ($t \in \mathbb{Z}$) thì

$$A = (t - y^2)(t + y^2) + y^4 = t^2 - y^4 + y^4 = t^2 = (x^2 + 5xy + 5y^2)^2$$

Vì $x, y, z \in \mathbb{Z}$ nên $x^2 \in \mathbb{Z}$; $5xy \in \mathbb{Z}$; $5y^2 \in \mathbb{Z}$. Do đó $x^2 + 5xy + 5y^2 \in \mathbb{Z}$

Vậy A là số chính phương.

Bài 26: Cho p là tích của 2016 số nguyên tố đầu tiên. Chứng minh rằng $p-1$ và $p+1$ không là số chính phương.

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá (Thanh Hoá) năm 2015 - 2016

Lời giải

Nhận xét: Một số chính phương khi chia cho 3 và 4 thì chỉ có thể dư 0 hoặc 1.

Từ giả thiết suy ra p chia hết cho 2, 3 nhưng không chia hết cho 4.

Vì $p \div 3$ nên $p-1$ chia cho 3 dư 2. Vậy $p-1$ không là số chính phương.

Vì $p \div 2$ và p không chia hết cho 4 suy ra p chia cho 4 dư 2 nên $p+1$ chia cho 4 dư 3 do đó $p+1$ cũng không là số chính phương.

Vậy $p-1$ và $p+1$ không là số chính phương.

Bài 27: Với $a, b \in \mathbb{N}$ và $(a-b)(a+b+1) = b^2$. Hãy chứng tỏ rằng $a-b$ và $a+b+1$ là các số chính phương.

Trích đề HSG Quận Hoàng Mai (Hà Nội) năm 2016 - 2017

Lời giải

Vì $b \in \mathbb{N}^*$ và $(a-b)(a+b+1) = b^2$ (*)

nên tích $(a-b)(a+b+1)$ là một số chính phương (1)

Gọi d là ước chung lớn nhất của $a-b$ và $a+b+1$.

Ta có $a-b \div d$ và $a+b+1 \div d$

Suy ra $(a+b+1) - (a-b) \div d$ hay $2b+1 \div d$

Mặt khác, từ (*) ta có: $b^2 \div d^2$ suy ra $b \div d$

Từ $2b+1$ chia hết cho d và b chia hết cho d nên ta có 1 chia hết cho d hay $d=1$.

Vậy $a-b$ và $a+b+1$ là các số tự nhiên nguyên tố cùng nhau (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a-b$ và $a+b+1$ đều là các số chính phương.

Bài 28: Chứng minh số $n = 2004^2 + 2003^2 + 2002^2 - 2001^2$ không phải là số chính phương

**Lời giải**

Ta có: 2004^2 có chữ số tận cùng là 6 .

2003^2 có chữ số tận cùng là 9 .

2002^2 có chữ số tận cùng là 4 .

2001^2 có chữ số tận cùng là 1 .

Suy ra: $2004^2 + 2003^2 + 2002^2 - 2001^2$ có chữ số tận cùng là 8 .

Do đó : $n = 2004^2 + 2003^2 + 2002^2 - 2001^2$ không phải là số chính phương.

Bài 29: Tổng $A = 10^{100} + 10^{50} + 1$ là số chính phương không?

Lời giải

$A = 10^{100} + 10^{50} + 1$ có tổng các chữ số bằng 3 nên chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9 nên không là số chính phương.

Bài 30: Cho $A = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2019}$. Hỏi $4A + 5$ có phải là số chính phương không.

Lời giải

$$5.A = 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2020}.$$

$$\text{Suy ra: } 5.A - A = (5^2 - 5^2) + (5^3 - 5^3) + \dots + (5^{2019} - 5^{2019}) + 5^{2020} - 5.$$

$$4.A = 5^{2020} - 5$$

Suy ra: $4.A + 5 = 5^{2020}$ là một số chính phương.

Bài 31: Cho $S = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2020}$. Chứng minh S không phải là số chính phương.

Lời giải

Ta có: với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì $3^n : 9$, suy ra $3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2020}$ chia hết cho 9 .

Do đó: $3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2020}$ chia cho 9 dư 3 hay S không chia hết cho 9

Mặt khác: S chia hết cho 3, do đó S không phải là số chính phương.

Bài 32: Cho $B = 1.3.5.7 \dots 2017.2019$, hỏi trong các số $2B - 1, 2B, 2B + 1$ số nào là số chính phương?

Lời giải

Ta có : $2B - 1 = 2.1.3.5 \dots 2017.2019 - 1$, vì $2B : 3$ nên $2B - 1 = 3k + 2 (k \in \mathbb{N})$ Vậy $2B - 1$ không là số chính phương.

Ta có : $2B = 2.1.3.5 \dots 2017.2019$ vậy $2B$ là số chẵn, mà B lẻ nên $B \not\equiv 2$ suy ra $B \not\equiv 2$ nhưng $2B \not\equiv 4$

Và $2B$ chẵn nên $2B$ chia cho 4 dư 1 hoặc dư 3, vậy $2B$ không là số chính phương.

Ta có : $2B + 1 = 2.1.3.5 \dots 2017.2019 + 1$ vậy $2B + 1$ là số lẻ, nên $2B + 1 \not\equiv 4$

và $2B \not\equiv 4$ suy ra $2B + 1$ chia 4 dư 1, vậy $2B + 1$ không là số chính phương.

Bài 33: Số $m = 1992^2 + 1993^2 + 1994^2$ có phải là số chính phương không?

Lời giải

Ta có: $1992^2, 1994^2$ chia cho 3 dư 1, còn 1993^2 chia hết cho 3 .



suy ra $1992^2 + 1993^2 + 1994^2$ chia cho 3 dư 2.

Mà số chính phương chia cho 3 không bao giờ có số dư là 2.

Do đó $m = 1992^2 + 1993^2 + 1994^2$ không là số chính phương.

Bài 34: Chứng minh rằng tổng của bốn số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương?

Lời giải

Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là: $a, a+1, a+2, a+3$ $a \in \mathbb{N}$

Xét tổng ta có: $S = 4a + 6$, thấy tổng chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên không là số chính phương

Bài 35: Cho $M = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$. Chứng tỏ rằng M không là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $M = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111a + 111b + 111c = 111(a + b + c) = 3 \cdot 37 \cdot (a + b + c)$

Ta có: $1 \leq b \leq 9, 1 \leq c \leq 9, 1 \leq a \leq 9$, suy ra: $3 \leq a + b + c \leq 27$

Mà số chính phương chứa thừa số nguyên tố với số mũ chẵn, do đó

$a + b + c = 37k^2$ ($k \in \mathbb{N}$), vô lí vì $a + b + c \leq 27$

Vậy M không là số chính phương.

Bài 36: Tìm số nguyên tố \overline{ab} ($a > b > 0$) sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương

Trích đề HSG huyện Tam Nông năm 2018-2019

Lời giải

Ta có:

$$\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - 10b - a = 9a - 9b = 9(a - b)$$

Suy ra: $\overline{ab} \in \{43; 73\}$.

Bài 37: Tìm n để $n^2 + 2006$ là một số chính phương

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Giả sử $n^2 + 2006$ là số chính phương khi đó ta đặt $n^2 + 2006 = a^2$ ($a \in \mathbb{Z}$) $\Rightarrow a^2 - n^2 = 2006$

$$\Rightarrow (a - n)(a + n) = 2006 \quad (*)$$

Thấy a, n khác tính chất chẵn lẻ thì vế trái (*) là số lẻ nên không thỏa mãn (*)

Nếu a, n cùng tính chẵn hoặc lẻ thì $(a - n):2, (a + n):2$ nên vế trái chia hết cho 4 và vế phải không chia hết cho 4.

Vậy không tồn tại n để $n^2 + 2006$ là số chính phương.

Bài 38: Số $A = 10^{10} + 8$ là số chính phương không?

Lời giải $A = 10^{10} + 8$ có chữ số tận cùng là 8 nên không là số chính phương.

Bài 39: Tổng $B = 11 + 11^2 + 11^3$ là số chính phương không?

Lời giải

Tổng B có chữ số tận cùng là 3 nên không là số chính phương.

Bài 40: Tổng $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{20}$ là số chính phương không.

Lời giải

Tổng A chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9.

Nên A không là số chính phương.



Bài 41: Cho $A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$. Chứng minh rằng $A + 4$ không là số chính phương?

Lời giải

$$2.A = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{21}$$

$$\Rightarrow 2.A - A = (2^3 - 2^2) + (2^4 - 2^3) + \dots + (2^{20} - 2^{19}) + 2^{21} - 2^2$$

$$\Rightarrow A = 2^{21} - 2^2$$

$\Rightarrow A + 4 = 2^{21}$ không là số chính phương vì có mũ lẻ.

Bài 42: Cho $B = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$. Chứng minh rằng $2B + 3$ không là số chính phương?

Lời giải

$$3.B = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{101}$$

$$\Rightarrow 3.B - B = (3^2 - 3^1) + (3^3 - 3^2) + \dots + (3^{100} - 3^{99}) + 3^{101} - 3$$

$$\Rightarrow 2.B = 3^{101} - 3$$

$\Rightarrow 2.B + 3 = 3^{101}$ không là số chính phương vì mũ lẻ.

Bài 43: Tìm số tự nhiên n có hai chữ số biết $2n + 1$ và $3n + 1$ đều là số chính phương.

Lời giải

Vì n là số tự nhiên có 2 chữ số nên $10 \leq n \leq 99 \Rightarrow 21 \leq 2n + 1 \leq 199$.

Mà $2n + 1$ là số chính phương lẻ nên $2n + 1 \in \{25; 49; 81; 121; 169\}$

$$\Rightarrow 2n \in \{24; 48; 80; 120; 168\} \Rightarrow n \in \{12; 24; 40; 60; 84\}$$

Khi đó $3n + 1 \in \{37; 73; 121; 181; 253\}$

Thấy chỉ có 121 là số chính phương.

Vậy $n = 40$.

Bài 44: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $C = 2n^2 + 2n + 3$ không là số chính phương.

Lời giải:

Nếu $n = 0$ thì $C = 2n^2 + 2n + 3 = 3$ không là số chính phương.

Giả sử với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, C là số chính phương.

Suy ra: $C = k^2$ suy ra: $2n^2 + 2n + 3 = k^2$.

Hay $2n(n + 1) + 3 = k^2$ (*)

Mà $n(n + 1) : 2$ nên $2n(n + 1) : 4$.

Nên (*) mâu thuẫn hay vô lý hay không xảy ra.

Vậy với mọi số tự nhiên n thì $C = 2n^2 + 2n + 3$ không là số chính phương.

Bài 45: Tìm số tự nhiên n có hai chữ số để $3n + 1$ và $4n + 1$ đều là các số chính phương.

Lời giải

Vì n là số tự nhiên có 2 chữ số nên $10 \leq n \leq 99 \Rightarrow 41 \leq 4n + 1 \leq 397$.

Mặt khác $4n + 1$ là số chính phương lẻ nên $4n + 1 \in \{49; 81; 121; 169; 225; 289; 361\}$

$$\Rightarrow 4n \in \{48; 80; 120; 168; 224; 288; 360\}$$



$\Rightarrow n \in \{12; 20; 30; 42; 56; 72; 90\}$.

Khi đó $3n + 1 \in \{37; 61; 91; 127; 169; 217; 271\}$.

Nhận thấy chỉ có số 56 là số chính phương.

Vậy $n = 56$.

Bài 46: Chứng minh rằng $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n .

(Đề thi vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh 2015 - 2016)

Lời giải

Ta có

$$2012^{4n} : 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$2014^{4n} : 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$2013^{4n} = (2013^{4n} - 1) + 1 \text{ chia cho } 4 \text{ dư } 1$$

$$2015^{4n} = (2015^{4n} - 1) + 1 \text{ chia cho } 4 \text{ dư } 1$$

Do đó $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ chia cho 4 dư 2

Ta có $A : 2$ nhưng A không chia hết cho 2^2 , mà 2 là số nguyên tố nên A không là số chính phương.

Vậy A không là số chính phương.

Bài 47: Chứng minh rằng $n^5 + 1999n + 2017 (n \in \mathbb{N})$ không phải là số chính phương.

(Trích đề thi HSG tỉnh Quảng Ngãi 2017 - 2018)

Lời giải

Ta có

$$A = n^5 + 1999n + 2017 = n^5 - n + 2000n + 2015 + 2$$

$$A = n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) + 5n(n-1)(n+2) + 2000n + 2015 + 2$$

Ta thấy

$$n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) : 5$$

$$5n(n-1)(n+2) : 5$$

$$2000.n : 5$$

$$2015 : 5$$

Nên A chia 5 dư 2, mà không có số chính phương nào chia 5 dư 2.

Vậy $n^5 + 1999n + 2017 (n \in \mathbb{N})$ không là số chính phương.

Bài 48: Chứng minh rằng tổng bốn số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương.

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Nguyễn Huy Tưởng năm học 2004-2005)

Lời giải

Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là $a, a+1, a+2, a+3 (a \in \mathbb{N}^*)$

Ta xét $S = a + (a+1) + (a+2) + (a+3) = 4a + 6$

Vì $4a : 2$ và $6 : 2$ nên $S : 2$

Mặt khác $4a : 4$ và 6 không chia hết cho 4 nên S không chia hết cho 4.



Vậy S chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên S không là số chính phương.

Bài 49: Cho $B = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n-1)(n-2)$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng B không là số chính phương.

(Trích đề thi HSG Bắc Ninh 2018-2019)

Lời giải

Ta có

$$4B = 1.2.3.4 + 2.3.4.(5-1) + 3.4.5.(6-2) + \dots + n(n-1)(n-2).[(n+3)-(n-1)]$$

$$4B = n(n+1)(n+2)(n+3) = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$$

Ta có: $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n < n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$

$$n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n > n^4 + 6n^3 + 9n^2 = (n^2 + 3n)^2$$

Suy ra $(n^2 + 3n)^2 < n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n < (n^2 + 3n + 1)^2$

Vậy B không là số chính phương.

Bài 50: Chứng tỏ tổng sau không là số chính phương $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ không là số chính phương.

(Trích đề thi Olympic lớp 6 THCS Cầu Giấy năm học 2011-2012)

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S &= \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111a + 111b + 111c \\ &= 111(a+b+c) = 3.37.(a+b+c) \end{aligned}$$

Để S là số chính phương thì $a+b+c = 3.37.k^2 (k \in \mathbb{N})$

Điều này vô lí vì $a+b+c \leq 27 < 37$

Vậy S không là số chính phương.

Bài 51: Cho $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$

a) Chứng minh M chia hết cho 6.

b) Chứng minh M không là số chính phương.

(Trích đề thi HSG lớp 6 Đa Phúc 2010-2011)

Lời giải

a) Ta có: $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$

$$M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$$

$$M = (5 + 5^2) + (5^3 + 5^4) + \dots + (5^{79} + 5^{80})$$

$$M = 5.(1+5) + 5^3.(1+5) + \dots + 5^{79}.(1+5)$$

$$M = 6.(5 + 5^3 + \dots + 5^{79})$$

$$\Rightarrow M : 6$$

b) Ta có:



$$5:5$$

$$5^2:5$$

$$5^3:5$$

...

$$5^{80}:5$$

$$\Rightarrow M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80} : 5$$

Mặt khác:

5 không chia hết cho 25

$$5^2:25$$

$$5^3:25$$

...

$$5^{80}:25$$

$$\Rightarrow M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80} \text{ không chia hết cho } 25.$$

Ta có $M:5$ nhưng M không chia hết cho 5^2 nên M không là số chính phương.

Bài 52: Cho $E = 125.(1 + 6 + 6^2 + \dots + 6^{2021})$ Chứng minh $E + 25$ là một số chính phương.

(Trích đề thi Olympic lớp 6 Nghĩa Đô 2010-2011)

Lời giải

$$\text{Ta có: } a^0 + a^1 + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - a^0}{a - 1}$$

Nên

$$1 + 6 + 6^2 + \dots + 6^{2021} = \frac{6^{2022} - 1}{5}$$

$$\Rightarrow E + 25 = 125 \cdot \frac{6^{2022} - 1}{5} + 25 = 25 \cdot (6^{2022} - 1) + 25 = 25 \cdot 6^{2022} = 5^2 \cdot (6^{1011})^2 = (5 \cdot 6^{1011})^2$$

Nên $E + 25$ là số chính phương.

Bài 53: Cho $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$

a) Chứng minh A chia hết cho 24.

b) Chứng minh A không là số chính phương.

(Trích đề thi HSG lớp 6 huyện Anh Sơn 2011-2012)

Lời giải

a) Ta có:

$$A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$$

$$A = 10^3 \cdot (10^{2009} + 10^{2008} + 10^{2007} + 10^{2006}) + 8$$

$$A = 8 \cdot 125 \cdot (10^{2009} + 10^{2008} + 10^{2007} + 10^{2006}) + 8$$

$$A = 8 \cdot [125 \cdot (10^{2009} + 10^{2008} + 10^{2007} + 10^{2006}) + 1]$$

$$\Rightarrow A : 8$$

Ta lại có $10^{2012}, 10^{2011}, 10^{2010}, 10^{2009}$ có tổng các chữ số bằng 1 nên khi chia $10^{2012}, 10^{2011}, 10^{2010}, 10^{2009}$ cho 3 đều dư 1.



Ta có 8 chia 3 dư 2.

Vậy A chia 3 có số dư là dư của phép chia $(1+1+1+1+2)$

$$\Rightarrow A:3$$

Vì 8 và 3 là hai số nguyên tố nguyên cùng nhau, $A:3$, $A:8$ nên $A:24$

b) Ta có $10^{2012}, 10^{2011}, 10^{2010}, 10^{2009}$ có chữ số tận cùng là 0 nên:

$$A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8 \text{ có chữ số tận cùng là } 8$$

Vậy A không là số chính phương vì số chính phương có tận cùng là 1; 4; 5; 6; 9

Bài 54: Tìm số chính phương có bốn chữ số, được viết bởi các chữ số: 3; 6; 6; 8

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Sơn Đông 2011-2012)

Lời giải

Gọi số chính phương phải tìm là n^2

- Vì số chính phương không có chữ số tận cùng là 3; 8 do đó phải có tận cùng là 6.

- Số có tận cùng bằng 86 thì chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên không là số chính phương.

$$\Rightarrow n^2 \text{ có tận cùng là } 36.$$

Vậy số chính phương đó là 8836 (với $8836 = 94^2$).

Bài 55: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu nhân nó với 135 thì ta được một số chính phương?

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Sơn Đông 2013-2014)

Lời giải

Gọi số phải tìm là n ($n \in \mathbb{N}$, $10 < n < 99$)

$$\text{Ta có: } 135.n = a^2 \text{ (} a \in \mathbb{N} \text{) hay } \Rightarrow 3^3.5.n = a^2$$

Vì số chính phương chỉ có các thừa số nguyên tố với mũ chẵn nên $\Rightarrow n = 3.5.k^2$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$\text{+) Với } k=1 \Rightarrow n = 3.5.1^2 = 15$$

$$\text{+) Với } k=2 \Rightarrow n = 3.5.2^2 = 60$$

$$\text{+) Với } k \geq 3 \Rightarrow n \geq 3.5.3^2 \geq 135 \text{ (loại vì } n \text{ có nhiều hơn hai chữ số)}$$

Vậy số cần tìm là 15; 60.

Bài 56: Cho tổng $S = 1+3+5+\dots+2009+2011$. Chứng tỏ S là một số chính phương.

(Trích đề HSG toán 6 THCS Hồng Hà năm 2013 - 2014)

Lời giải

$$\text{Ta có: } S = 1+3+5+\dots+2009+2011 = \left(\frac{2011+1}{2}\right)\left(\frac{2011-1}{2}+1\right) = \left(\frac{2011+1}{2}\right)\left(\frac{2011+1}{2}\right) = 1006^2$$

Vậy S là một số chính phương.

Bài 57: Chứng minh rằng với $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $3^n + 4$ không là số chính phương.

Lời giải:

- Với $n=0$ suy ra: $3^n + 4 = 5$ không là số chính phương.

- Với $n=1$ suy ra: $3^n + 4 = 7$ không là số chính phương.

- Với $n \geq 2$.

Giả sử là số chính phương.



Suy ra: $3^n + 4 = m^2$ ($m \in \mathbb{N}, m > 3$).

$$m^2 - 4 = 3^n.$$

$$(m-2)(m+2) = 3^n.$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} m-2 = 3^k \\ m+2 = 3^q \end{cases} \cdot (k, q \in \mathbb{N}; k+q=n)$$

Suy ra:

$$(m+2) - (m-2) = 3^q - 3^k$$

$$4 = 3^q - 3^k \quad (*).$$

Ta thấy $\begin{cases} 4 \not\vdots 3 \\ (3^q - 3^k) : 3 \end{cases}$ là điều mâu thuẫn với nhau so với đẳng thức (*).

Vậy $3^n + 4$ không là số chính phương với mọi số tự nhiên n .

Bài 58: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $n^2 + 2$ không là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử $n^2 + 2$ là số chính phương.

Khi đó đặt $n^2 + 2 = m^2$ ($m \in \mathbb{N}^*$).

$$m^2 - n^2 = 2 \quad (1).$$

$$(m+n).(m-n) = 2 \quad (1).$$

Như vậy, trong hai số $m+n$ và $m-n$ phải có ít nhất một số chẵn (2).

Mặt khác $m+n+m-n = 2m$ chẵn.

Suy ra hai số $m+n$ và $m-n$ cùng tính chẵn lẻ (3).

Từ (1) và (2) suy ra $m+n$ và $m-n$ là hai số chẵn.

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} (m+n):2 \\ (m-n):2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } [(m+n).(m-n)]:4$$

Suy ra: $(m^2 - n^2):4$ mà $2 \not\vdots 4$, so sánh điều này với (1), ta thấy đây là điều vô lý.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì $n^2 + 2$ không là số chính phương.

Bài 59: Chứng minh rằng tích của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

Lời giải:

Gọi bốn số nguyên dương liên tiếp lần lượt là $n, n+1, n+2, n+3$ và $n+4$ ($n \in \mathbb{N}^*$)



Đặt $S = n(n+1)(n+2)(n+3)$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Ta đi chứng minh S không là số chính phương.

Giả sử $S = m^2 > 0$ ($m \in \mathbb{N}^*$) (1)

Suy ra: $n(n+1)(n+2)(n+3) = m^2$.

$(n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) = m^2$.

Đặt $n^2 + 3n = a$ ($a \in \mathbb{N}^*$).

Suy ra: $a(a+2) = m^2$.

$a^2 + 2a = m^2$.

$a^2 + 2a + 1 = m^2 + 1$.

$(a+1)^2 = m^2 + 1$.

$(a+1+m)(a+1-m) = 1$

Suy ra: $\begin{cases} a+1-m=1 \\ a+1+m=1 \end{cases}$

Suy ra: $m=0$ (2)

Ta thấy (2) mâu thuẫn với (1)

Vậy S không là số chính phương hay tích của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

Bài 60: Chứng minh rằng với tổng của $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ không là số chính phương.

Lời giải:

Đặt $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111(a+b+c) = 3.37(a+b+c)$ ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$; $a, b, c \leq 9$).

Giả sử S là số chính phương.

Suy ra: $S : 37$.

Suy ra: $S : 37^2$.

Suy ra: $(a+b+c) : 37$.

Mà $(a+b+c) \leq 37$.

Đây là điều vô lý.

Vậy S không là số chính phương.

Bài 61: Chứng minh rằng với n lẻ và $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ thì $7^n + 24$ không là số chính phương.

Lời giải:

Đặt $7^n + 24 = a^2$ ($a \in \mathbb{N}^*$).

Khi n lẻ: Đặt $n = 2k + 1$.



Suy ra : $7^n + 24 = 7^{2k+1} + 24 = 7^{2k} \cdot 7 + 24 = (7^2)^k \cdot 7 + 24 = 49^k \cdot 7 + 24 = a^2$.

Có 49 chia 4 dư 1 suy ra: 49^k chia 4 dư 1 ; $7 \cdot 49^k$ chia 4 dư 3 suy ra: a^2 chia 4 dư 3 (vô lý).

Vậy với n lẻ và $n \in \mathbb{N}^*$ thì $7^n + 24$ không là số chính phương.

Bài 62: Chứng minh rằng nếu số tự nhiên \overline{abc} là số nguyên tố thì $b^2 - 4ac$ không là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử $b^2 - 4ac$ là số chính phương m^2 ($m \in \mathbb{N}$).

Xét

$$4a \cdot \overline{abc} = 4a(100a + 10b + c) = (20a + b)^2 - (b^2 - 4ac) = (20a + b)^2 - m^2 = (20a + b + m)(20a + b - m).$$

Tồn tại một trong hai thừa số $20a + b + m$, $20a + b - m$ chia hết cho số nguyên tố.

Điều này không xảy ra vì cả hai thừa số trên đều nhỏ hơn \overline{abc} .

Thật vậy, do $m < b$ (vì $m^2 - b^2 = -4ac < 0$).

Nên $20a + b - m \leq 20a + b + m < 100a + 10b + c = \overline{abc}$.

Vậy nếu số tự nhiên \overline{abc} là số nguyên tố thì $b^2 - 4ac$ không là số chính phương.

Bài 63: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì $2^n - 1$ không là số chính phương.

Lời giải:

Với $n = 2$ suy ra : $2^n - 1 = 3$ không là số chính phương.

Với $n > 2$:

Giả sử $2^n - 1$ là số chính phương.

Mà $2^n - 1$ là số lẻ nên $2^n - 1 = (2k + 1)^2$ suy ra : $2^n - 1 = 4k^2 + 4k + 1$.

suy ra: $2^n = 4k^2 + 4k + 2$ (*).

Vì $n \geq 2$ nên $2^n : 4$ (1)

Mà $4k^2 + 4k = 4k(k + 1) : 4$.

Nên $4k^2 + 4k + 2 \not\equiv 4$ (2)

So sánh (1) và (2) với (*), ta thấy mâu thuẫn với nhau.

Vậy với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì $2^n - 1$ không là số chính phương.

Bài 64: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ thì $A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ không là số chính phương.

Lời giải:

Với $n \geq 1$:

Giả sử A là số chính phương.



Suy ra: $A = k^2$ suy ra: $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 = k^2$.

Suy ra: $n^2(n^2 + 2n + 1) + (n^2 + 2n + 1) = k^2$.

Suy ra: $n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 = k^2$ suy ra: $(n^2 + 1)(n+1)^2 = k^2$.

Suy ra: $(n^2 + 1)$ là số chính phương với mọi $n \geq 1$ (vô lí).

Vậy với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ thì $A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ không là số chính phương.

Bài 65: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên thì $B = n^3 - n + 2$ không là số chính phương.

Lời giải:

Với $n = 0$ thì $B = n^3 - n + 2 = 2$ không là số chính phương.

Giả sử với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, B là số chính phương.

Suy ra: $B = k^2$ suy ra: .

$$n^3 - n + 2 = k^2 \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$n(n^2 - 1) + 2 = k^2 .$$

$$n(n-1)(n+1) + 2 = k^2 \quad (*)$$

Mà $n(n-1)(n+1) \div 3$ $n(n-1)(n+1) + 2 = k^2$ chia 3 dư 2

Nên (*) mâu thuẫn hay vô lí hay không xảy ra.

Vậy với mọi số tự nhiên thì $B = n^3 - n + 2$ không là số chính phương.

CHỦ ĐỀ: XÁC SUẤT THỐNG KÊ**A. PHẦN NỘI DUNG****Dạng toán xác suất**

Bài 1: Cho lần lượt vào hộp bắt đầu các viên bi xanh, đỏ, tím vàng rồi lại xanh, đỏ, tím vàng. Cứ như thế cho đến hết 2020 viên bi. Hỏi viên bi thứ 2017 màu gì ?

A. Xanh

B. đỏ

C. tím

D. vàng

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019

Bài 2: Cho lần lượt vào hộp bắt đầu bằng các viên bi xanh, đỏ, tím, vàng, rồi lại xanh, đỏ, tím, vàng. Cứ tiếp tục như thế cho đến viên bi thứ 2018. Hỏi viên bi cuối cùng màu gì?

A. xanh.

B. đỏ.

C. tím.

D. vàng.

*Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022***Lời giải****Đáp án:** B. đỏ.

Bài 3: Tại một nhà máy sản xuất bút bi, trước khi đóng gói cần kiểm tra chất lượng. Kiểm tra 1000 chiếc bút bi có 5 chiếc không đảm bảo chất lượng.

a) Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện "bút bi kiểm tra đảm bảo chất lượng".

b) Lợi nhuận khi bán ra mỗi chiếc bút bi đảm bảo chất lượng là 1000 đồng. Với lô hàng gồm 10000 chiếc bút cùng loại mới sản xuất, ước tính khi bán ra sẽ thu được lợi nhuận là bao nhiêu?

*Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021 - 2022***Lời giải**

a) Số bút kiểm tra đảm bảo chất lượng là: $1000 - 5 = 995$ (chiếc).

Xác suất thực nghiệm của sự kiện "bút bi kiểm tra đảm bảo chất lượng" là: $\frac{995}{1000} = 99,5\%$

b) Số bút kiểm tra đảm bảo chất lượng là: $10000 - 5.10 = 9950$ (chiếc).

Ước tính khi bán ra sẽ thu được lợi nhuận là: $9950.1000 = 9950000$ (đồng).

Bài 4: Điểm kiểm tra giữa kỳ môn Toán của lớp 6A và lớp 6B như sau:

Lớp 6A			Lớp 6B								
TT	Tên	Điểm	TT	Tên	Điểm	TT	Tên	Điểm	TT	Tên	Điểm
1	An	8	14	Hải	8	1	An	9	14	Hiếu	9
2	Anh	9	15	Hạnh	6	2	Bách	7	15	Huy	6
3	Ánh	6	16	Nam	7	3	Ban	5	16	Hùng	8
4	Bình	8	17	Minh	5	4	Cúc	9	17	Mạnh	4
5	Châu	4	18	Oanh	9	5	Cầm	5	18	Mận	8
6	Cảnh	5	19	Phong	6	6	Chân	4	19	Pha	8
7	Dung	9	20	Phú	8	7	Dân	8	20	Phú	7
8	Dũng	7	21	Phương	4	8	Diễn	10	21	Phương	5
9	Đức	6	22	Phượng	5	9	Đại	6	22	Vân	4
12	Đạt	6	23	Quân	7	12	Đạt	7	23	Việt	8
11	Đạo	4	24	Quỳnh	8	11	Đình	5	24	Vinh	10

12	Giang	8
13	Hà	5

25	Quý	5
26	Vân	9

12	Giang	8
13	Hà	4

25	Vũ	6
26	Yến	10

a) Em hãy đề xuất một phương án lập bảng số liệu thống kê để so sánh học lực môn Toán của 2 lớp. Từ đó hãy lập bảng số liệu thống kê và vẽ biểu đồ biểu diễn học lực của lớp 6A và lớp 6B theo phương án trên.

b) Có nhận xét gì về học lực môn Toán của lớp 6A và lớp 6B

Trích đề HSG huyện Kỳ Anh năm 2021-2022

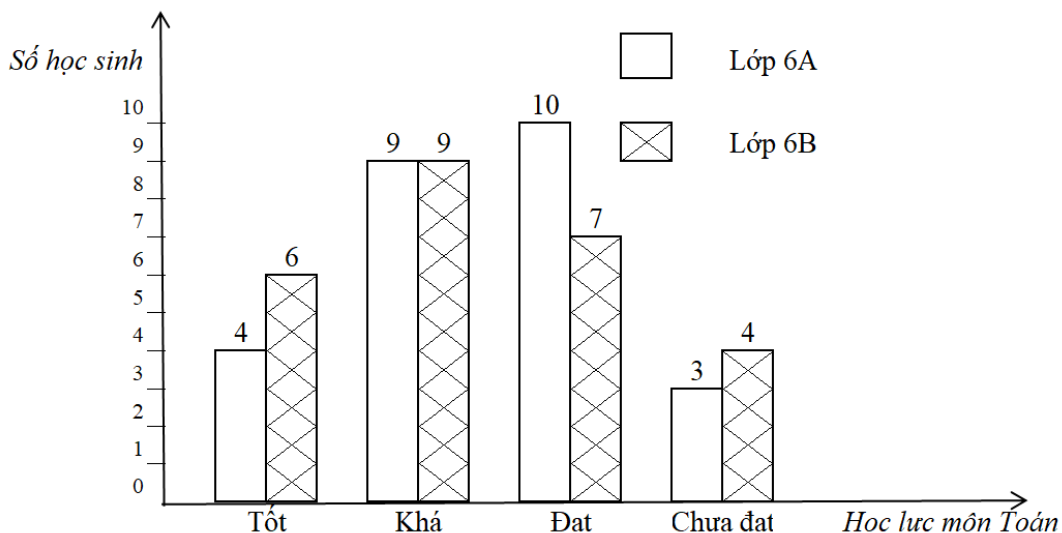
Lời giải

Phương án lập bảng thống kê học lực theo 4 mức tương ứng với điểm số như sau: Tốt: 9–10 điểm; Khá: 7–8 điểm; Đạt: 5–6 điểm; Chưa đạt: dưới 5 điểm.

Bảng số liệu:

Học lực môn Toán \ Lớp	Tốt (9-10 điểm)	Khá (7-8 điểm)	Đạt (5-6 điểm)	Chưa đạt (dưới 5 điểm)
6A	4	9	10	3
6B	6	9	7	4

Biểu đồ:



b) Nhận xét: (1 điểm)

- Số học sinh có học lực Khá môn Toán của 2 lớp bằng nhau
- Lớp 6B có nhiều học sinh học tốt môn toán hơn lớp 6A
- Số học sinh chưa đạt môn Toán của lớp 6B nhiều hơn lớp 6A
- Học sinh Lớp 6A và lớp 6B có học lực môn Toán ở mức Khá và mức Đạt là chủ yếu

Bài 5: Hùng tập ném bóng vào rổ. Khi thực hiện ném 100 lần thì có 35 lần bóng vào rổ.

- 1) Lập bảng thống kê;
- 2) Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ;

Lời giải

Xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ là: $\frac{35}{100} = 0,35$

Bài 6: Tổng hợp kết quả xét nghiệm nhiễm Covid-19 ở một phòng khám trong năm 2021, ta được bảng sau:

Quý	Số ca xét nghiệm	Số ca dương tính
I	150	15
II	200	21
III	180	17
IV	220	24

Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính.

- a) Theo từng quý trong năm.
b) Sau lần lượt từng quý tính từ đầu năm.

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Lời giải

a) Xác suất thực nghiệm một ca xét nghiệm có kết quả dương tính theo từng quý là:

$$\text{Quý I: } \frac{15}{150} = 10\%$$

$$\text{Quý II: } \frac{21}{200} = 10,5\%$$

$$\text{Quý III: } \frac{17}{180} = 9,4\%$$

$$\text{Quý IV: } \frac{24}{220} = 10,9\%$$

b) Tổng số ca xét nghiệm của cả năm là: $150 + 200 + 180 + 220 = 750$ (ca)

Xác suất thực nghiệm một ca xét nghiệm có kết quả dương tính từng quý tính từ đầu năm là:

$$\text{Quý I: } \frac{15}{750} = 2\%$$

$$\text{Quý II: } \frac{21}{750} = 2,8\%$$

$$\text{Quý III: } \frac{17}{750} = 2,3\%$$

$$\text{Quý IV: } \frac{24}{750} = 3,2\%$$

Bài 7: Tổ 1 của lớp 6A có 9 học sinh, mỗi học sinh được tung đồng xu 4 lần. Tổng số lần xuất hiện mặt S là 25. Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng bao nhiêu?

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

Tổ 1 của lớp 6A có 9 học sinh, mỗi học sinh được tung đồng xu 4 lần. Tổng số lần xuất hiện mặt S là 25.

Số lần tung đồng xu là $9 \cdot 4 = 36$.

Số lần xuất hiện mặt N là $36 - 25 = 11$.

Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N là $\frac{11}{36}$.

Bài 8:

a) Minh gieo một con xúc sắc. Hãy liệt kê các kết quả có thể của sự kiện “số chấm xuất hiện là số nguyên tố lớn hơn 2”.

b) Minh gieo một con xúc sắc đó 100 lần và ghi lại số chấm xuất hiện ở mỗi lần gieo được kết quả như sau:

Số chấm xuất hiện	1	2	3	4	5	6
Số lần	19	20	18	22	10	11

Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện “số chấm xuất hiện khi chia cho 3 dư 2”

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021-2022

Lời giải

a) Khi gieo con xúc sắc, các kết quả số chấm xuất hiện có thể là: 1;2;3;4;5;6 chấm.

Vậy các kết quả có thể của của sự kiện “số chấm xuất hiện là số nguyên tố lớn hơn 2 ” xảy ra là: 3 ; 5 chấm.

b)

Số chấm xuất hiện	1	2	3	4	5	6
Số lần	19	20	18	22	10	11

Số chấm xuất hiện khi chia cho 3 dư 2 là các số 2, 5.

Nên số lần gieo được mặt có số chấm chia cho 3 dư 2 là: $20 + 10 = 30$ (lần).

Xác suất thực nghiệm của sự kiện “số chấm xuất hiện khi chia cho 3 dư 2” là: $\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$.

B. PHẢN PHIẾU BÀI TẬP**Dạng toán xác suất**

Bài 1: Cho lần lượt vào hộp bắt đầu các viên bi xanh, đỏ, tím vàng rồi lại xanh, đỏ, tím vàng. Cứ như thế cho đến hết 2020 viên bi. Hỏi viên bi thứ 2017 màu gì ?

A. Xanh

B. đỏ

C. tím

D. vàng

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019

Bài 2: Cho lần lượt vào hộp bắt đầu bằng các viên bi xanh, đỏ, tím, vàng, rồi lại xanh, đỏ, tím, vàng. Cứ tiếp tục như thế cho đến viên bi thứ 2018. Hỏi viên bi cuối cùng màu gì?

A. xanh.

B. đỏ.

C. tím.

D. vàng.

*Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022***Lời giải**

Bài 3: Tại một nhà máy sản xuất bút bi, trước khi đóng gói cần kiểm tra chất lượng. Kiểm tra 1000 chiếc bút bi có 5 chiếc không đảm bảo chất lượng.

a) Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện "bút bi kiểm tra đảm bảo chất lượng".

b) Lợi nhuận khi bán ra mỗi chiếc bút bi đảm bảo chất lượng là 1000 đồng. Với lô hàng gồm 10000 chiếc bút cùng loại mới sản xuất, ước tính khi bán ra sẽ thu được lợi nhuận là bao nhiêu?

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021 - 2022

Bài 4: Điểm kiểm tra giữa kỳ môn Toán của lớp 6A và lớp 6B như sau:

Lớp 6A						Lớp 6B					
TT	Tên	Điểm	TT	Tên	Điểm	TT	Tên	Điểm	TT	Tên	Điểm
1	An	8	14	Hải	8	1	An	9	14	Hiếu	9
2	Anh	9	15	Hạnh	6	2	Bách	7	15	Huy	6
3	Ánh	6	16	Nam	7	3	Ban	5	16	Hùng	8
4	Bình	8	17	Minh	5	4	Cúc	9	17	Mạnh	4
5	Châu	4	18	Oanh	9	5	Cầm	5	18	Mận	8
6	Cảnh	5	19	Phong	6	6	Chân	4	19	Pha	8
7	Dung	9	20	Phú	8	7	Dân	8	20	Phú	7
8	Dũng	7	21	Phương	4	8	Diễn	10	21	Phương	5
9	Đức	6	22	Phượng	5	9	Đại	6	22	Vân	4
12	Đạt	6	23	Quân	7	12	Đạt	7	23	Việt	8
11	Đạo	4	24	Quỳnh	8	11	Đình	5	24	Vinh	10
12	Giang	8	25	Quý	5	12	Giang	8	25	Vũ	6
13	Hà	5	26	Vân	9	13	Hà	4	26	Yên	10

a) Em hãy đề xuất một phương án lập bảng số liệu thống kê để so sánh học lực môn Toán của 2 lớp. Từ đó hãy lập bảng số liệu thống kê và vẽ biểu đồ biểu diễn học lực của lớp 6A và lớp 6B theo phương án trên.

b) Có nhận xét gì về học lực môn Toán của lớp 6A và lớp 6B

Trích đề HSG huyện Kỳ Anh năm 2021-2022

Bài 5: Hùng tập ném bóng vào rổ. Khi thực hiện ném 100 lần thì có 35 lần bóng vào rổ.

- 1) Lập bảng thống kê;
- 2) Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ;

Trích đề HSG huyện Chí Linh năm 2021 - 2022

Bài 6: Tổng hợp kết quả xét nghiệm nhiễm Covid-19 ở một phòng khám trong năm 2021, ta được bảng sau:

Quý	Số ca xét nghiệm	Số ca dương tính
I	150	15
II	200	21
III	180	17
IV	220	24

Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính.

- a) Theo từng quý trong năm.
- b) Sau lần lượt từng quý tính từ đầu năm.

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Bài 7: Tổ 1 của lớp 6A có 9 học sinh, mỗi học sinh được tung đồng xu 4 lần. Tổng số lần xuất hiện mặt S là 25. Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng bao nhiêu?

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2021 - 2022

Bài 8:

- a) Minh gieo một con xúc sắc. Hãy liệt kê các kết quả có thể của sự kiện “số chấm xuất hiện là số nguyên tố lớn hơn 2”.
- b) Minh gieo một con xúc sắc đó 100 lần và ghi lại số chấm xuất hiện ở mỗi lần gieo được kết quả như sau:

Số chấm xuất hiện	1	2	3	4	5	6
Số lần	19	20	18	22	10	11

Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện “số chấm xuất hiện khi chia cho 3 dư 2”

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021-2022

C. SỬU TÂM CÁC BÀI TƯƠNG TỰ

Bài 1. Số lượng khách hàng đến một cửa hàng mỗi ngày trong quý IV của năm 2020 được ghi lại ở bảng sau:

Số khách hàng	0 - 10	11-20	21 -30	31 - 40	41 - 50	51 -60
Số ngày	4	6	27	28	17	10

Chọn ngẫu nhiên một ngày trong quý IV. Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện “Trong ngày được chọn có không quá 30 khách hàng”.

Lời giải

Số ngày mà trong ngày đó có không quá 30 khách hàng (số khách hàng ≤ 30) đến cửa hàng là:
 $4 + 6 + 27 = 37$ (ngày).

Tổng số ngày của quý IV là: $4 + 6 + 27 + 28 + 17 + 10 = 92$ (ngày)

Xác suất thực nghiệm của sự kiện “Trong ngày được chọn có không quá 30 khách hàng” là: $\frac{37}{92}$.

Bài 2: Tổng hợp kết quả xét nghiệm bệnh viêm gan ở một phòng khám trong một năm, ta được bảng sau:

Quý	Số ca xét nghiệm	Số ca dương tính
I	150	15
II	200	21
III	180	17
IV	220	24

Hãy tính xác suất thực hiện của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính

- Theo từng quý trong năm
- Sau lần lượt từng quý tính từ đầu năm

Lời giải

a) Xác suất thực hiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính theo từng quý là:

$$\text{Quý I: } \frac{15}{150} = 10\%$$

$$\text{Quý II: } \frac{21}{200} = 10,5\%$$

$$\text{Quý III: } \frac{17}{180} = 9,4\%$$

$$\text{Quý IV: } \frac{24}{220} = 10,9\%$$

b) Tổng số ca xét nghiệm của cả năm là:

$$150 + 200 + 180 + 220 = 750 \text{ (ca)}$$

Xác suất thực hiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính từ đầu năm là:

$$\text{Quý I: } \frac{15}{750} = 2\%$$

$$\text{Quý II: } \frac{21}{750} = 2,8\%$$

$$\text{Quý III: } \frac{17}{750} = 2,3\%$$

$$\text{Quý IV: } \frac{24}{750} = 3,2\%$$

Bài 3: Có 15 quyển sách trong đó có 7 quyển sách Toán, 5 quyển sách Văn và 3 quyển sách Lý. Tính xác suất để lấy được:

- Hai quyển sách Toán.
- Hai quyển sách trong đó có 1 quyển Văn và 1 quyển Lý.
- Hai quyển sách trong đó có ít nhất 1 quyển Văn.

Lời giải

a) Có 15 quyển sách, mỗi lần lấy ra 2 quyển. Vậy tổng số lần có thể lấy ra là:

$$n = 15 \cdot 14 : 2 = 105$$

Xác suất để lấy được hai quyển sách Toán là: $\frac{7 \cdot 6 : 2}{105} = \frac{1}{5}$

b) Xác suất để lấy được hai quyển sách trong đó có 1 quyển Văn và 1 quyển Lý là: $\frac{5 \cdot 3}{105} = \frac{1}{7}$

c) Số cách chọn hai quyển Văn là: $5 \cdot 4 : 2 = 10$

Số cách chọn một quyển Văn và một quyển toán hoặc một quyển Lý là: $5 \cdot (7 + 3) = 50$

Xác suất để lấy được hai quyển sách trong đó có ít nhất 1 quyển Văn là: $\frac{10 + 50}{105} = \frac{4}{7}$

Bài 4. Tung hai đồng xu cân đối 50 lần ta được kết quả như sau:

Sự kiện	Hai đồng sấp	Một đồng sấp, một đồng ngửa	Hai đồng ngửa
Số lần	12	24	14

Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện:

- Có một đồng xu sấp, một đồng xu ngửa;
- Hai đồng xu đều ngửa.

Lời giải

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện có một đồng xu sấp, một đồng xu ngửa trong 50 lần tung là:

$$\frac{24}{50} = 0,48$$

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện cả hai đồng xu đều ngửa trong 50 lần tung là: $\frac{14}{50} = 0,28$

Bài 5: An gieo một con xúc xắc 100 lần và ghi lại số chấm xuất hiện ở mỗi lần gieo được kết quả như sau:

Số chấm xuất hiện	1	2	3	4	5	6
Số lần	20	15	22	18	15	10

Tính xác suất thực nghiệm của các sự kiện sau:

- Số chấm xuất hiện là số lẻ;
- Số chấm xuất hiện là lớn hơn 3.

Lời giải

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện số chấm xuất hiện là số lẻ là:

$$\frac{20+22+15}{100} = 0,57$$

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện số chấm xuất hiện lớn hơn 3 là:

$$\frac{18+10+15}{100} = 0,43$$

Bài 6. Trong hộp có một số bút xanh và một số bút đỏ. Lấy ngẫu nhiên 1 bút từ hộp, xem màu rồi trả lại. Lặp lại hoạt động trên 50 lần, ta được kết quả như sau:

Loại bút	Bút xanh	Bút đỏ
Số lần	42	8

- Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện lấy được bút xanh.
- Em hãy dự đoán xem trong hộp loại bút nào có nhiều hơn.

Lời giải

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện lấy được bút xanh là: $\frac{42}{50} = 0,84$

b) Không dự đoán được trong hộp bút loại bút nào nhiều hơn.

Bài 7. Bảng sau là tổng hợp kết quả xét nghiệm người nhiễm Covid 19 ở một bệnh viện trong một năm:

Quý	Số ca xét nghiệm	Số ca dương tính
I	120	10
II	180	12
III	250	18
IV	100	9

Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính:

- Theo từng quý trong năm.
- Theo năm.

Lời giải

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính trong quý I là:

$$\frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

+ Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính trong quý II là:

$$\frac{12}{180} = \frac{1}{15}$$

+ Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính trong quý III là:

$$\frac{18}{250} = \frac{9}{125}$$

+ Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính trong quý IV là: $\frac{9}{100}$

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính trong 1 năm là:

$$\frac{10+12+18+9}{120+180+250+100} = \frac{49}{650}$$

Bài 8. Kết quả kiểm tra môn Toán và Ngữ văn của một số học sinh được lựa chọn ngẫu nhiên cho ở bảng sau:

Toán \ Ngữ văn	Ngữ văn		
	Giỏi	Khá	Trung bình
Giỏi	40	20	15
Khá	15	30	10
Trung bình	5	15	20

(Ví dụ: Số học sinh có kết quả Toán — giỏi, Ngữ văn — khá là 20)

Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện một học sinh được chọn ra một cách ngẫu nhiên có kết quả:

- Môn Toán đạt loại giỏi.
- Loại khá trở lên ở cả hai môn.
- Loại trung bình ở ít nhất một môn.

Lời giải

Tổng số học sinh được lựa chọn ngẫu nhiên là: $n = 40 + 20 + 15 + 15 + 30 + 10 + 5 + 15 + 20 = 170$

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một học sinh Môn Toán đạt loại giỏi là:

$$\frac{40+20+15}{170} = \frac{75}{170} = \frac{15}{34}$$

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một học sinh đạt loại khá trở lên ở cả hai môn là::

$$\frac{40+20+15+30}{170} = \frac{105}{170} = \frac{21}{34}$$

c) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một học sinh đạt loại trung bình ít nhất một môn là:

$$\frac{15+10+20+5+15}{170} = \frac{65}{170} = \frac{13}{34}$$

Bài 9.

Một lồng quay số xổ có chứa 10 quả bóng có cùng kích thước được đánh số từ 0 đến 9. Sau mỗi lần quay chỉ có đúng 1 quả bóng lọt xuống lỗ. Sau khi ghi lại số của quả bóng này, bóng được trả lại lồng để thực hiện lần quay tiếp theo. Nếu lần quay đầu nhận được số 0, Sự kiện “Hai lần quay hai số giống nhau” có xảy ra không.

Lời giải

Các kết quả có thể xảy ra sau lần quay thứ hai là:

Số bóng sau 2 lần quay là: 0; 0

Số bóng sau 2 lần quay là: 0; 1

Số bóng sau 2 lần quay là: 0; 2

Số bóng sau 2 lần quay là: 0; 3

Số bóng sau 2 lần quay là: 0; 4

Số bóng sau 2 lần quay là: 0; 5

Số bóng sau 2 lần quay là: 0; 6

Số bóng sau 2 lần quay là: 0; 7

Số bóng sau 2 lần quay là: 0; 8

Số bóng sau 2 lần quay là: 0; 9

⇒ Xảy ra sự kiện quay 2 lần đều được số 0

⇒ Sự kiện “Hai lần quay hai số giống nhau” có xảy ra.

Bài 10: Bảng sau là tổng hợp kết quả xét nghiệm người nhiễm Covid 19 ở một bệnh viện trong một năm:

Quý	Số ca xét nghiệm	Số ca dương tính
I	120	10
II	180	12
III	250	18
IV	100	9

Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính trong 1 năm.

Lời giải

Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính trong 1 năm là:

$$\frac{10+12+18+9}{120+180+250+100} = \frac{49}{650}$$

Bài 11: Trong một cửa hàng có tổ chức chương trình “Rút thăm trúng thưởng” cho các khách hàng. Cửa hàng chuẩn bị một hộp đựng 60 phiếu rút thăm giống nhau, Trong đó 45 phiếu có nội dung “Chúc bạn may mắn lần sau” và số phiếu còn lại có nội dung “Quà tặng”. Các khách hàng tham gia chương trình sẽ thực hiện rút ngẫu nhiên một phiếu trong hộp và nhận được quà tặng của cửa hàng nếu rút thăm vào phiếu có nội dung “Quà tặng”. Tính xác suất để khách hàng đầu tiên tham gia chương trình nhận được quà tặng của cửa hàng.

Lời giải

Các kết quả có thể xảy ra khi khách hàng đầu tiên rút thẻ là:

Khách hàng đầu tiên bốc được phiếu: “chúc bạn may mắn lần sau”

Khách hàng bốc được phiếu: “Quà tặng”

Do có 15 phiếu có nội dung “quà tặng”

Do đó xác suất để người đầu tiên bốc được phiếu quà tặng là: $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$

Bài 12: Cô Lan bán thức ăn sáng là các loại xôi, vào một buổi sáng cô nhận ra rằng: Xôi mặn, xôi đậu phộng, xôi khúc được bán cho một nhóm khách hàng với số phần lần lượt là: x, y, z . Em hãy giúp cô Lan lập bảng thống kê tương ứng. Biết rằng $x + y = 50$; $y + z = 30$; $z + x = 56$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x + y = 50 \\ y + z = 30 \\ z + x = 56 \end{cases} \Rightarrow (x + y) + (y + z) + (z + x) = 50 + 30 + 56.$$

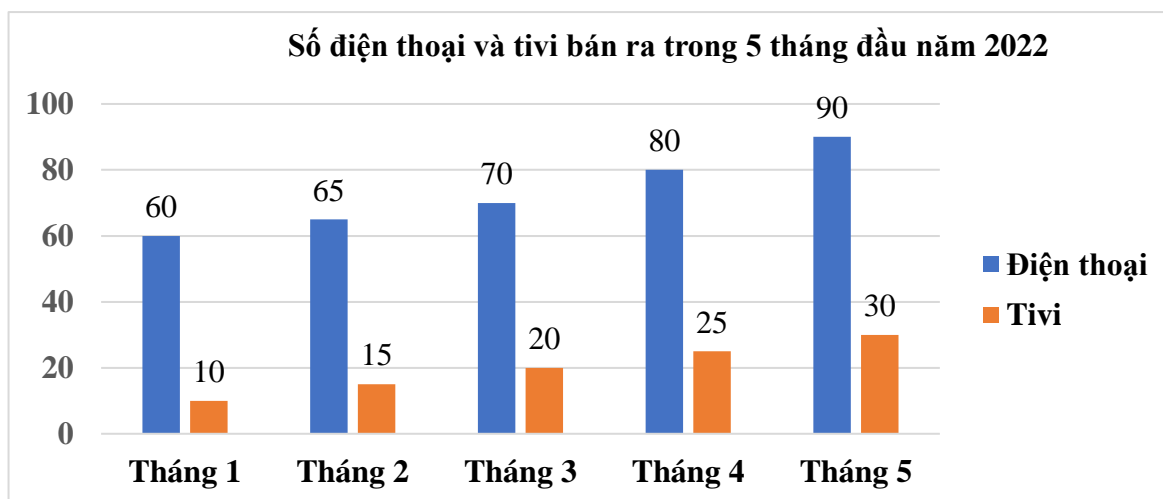
$$\text{Suy ra } 2(x + y + z) = 136 \Rightarrow x + y + z = 68$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} (x + y + z) - (x + y) = 68 - 50 \\ (x + y + z) - (y + z) = 68 - 30 \\ (x + y + z) - (z + x) = 68 - 56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 18 \\ x = 38 \\ z = 12 \end{cases}$$

Bảng thống kê:

Loại xôi	Xôi mặn	Xôi đậu phộng	Xôi khúc
Số lượng bán	38	12	18

Bài 13: Biểu đồ cột kép dưới đây diễn tả số lượng điện thoại và tivi của một cửa hàng bán được trong 5 tháng đầu năm 2022.



Nếu mỗi chiếc điện thoại bán ra cửa hàng được lãi 800.000 đồng và một chiếc tivi bán ra cửa hàng được lãi 1000.000 đồng. Hỏi sau 5 tháng đầu năm 2022, cửa hàng trên thu được số tiền lãi là bao nhiêu?

Lời giải

Trong 5 tháng đầu năm, cửa hàng trên thu được số tiền lãi là:

$$(60 + 65 + 70 + 80 + 90) \cdot 800000 + (10 + 15 + 20 + 25 + 30) \cdot 1000000 = 392.000.000 \text{ (đồng)}$$

Bài 14: Gieo một xúc xắc 14 lần liên tiếp, có 3 lần xuất hiện mặt 1 chấm, 4 lần xuất hiện mặt 2 chấm, 1 lần xuất hiện mặt 3 chấm, không có lần nào xuất hiện mặt 4 chấm và 5 chấm. Hỏi xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt 6 chấm là bao nhiêu?

Lời giải

Số lần xuất hiện mặt 6 chấm là $14 - (3 + 4 + 1) = 6$

Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt 6 chấm là $\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$

Bài 15:

Điểm số trung bình của một vận động viên bắn súng sau 100 lần bắn là 8,35 điểm. Kết quả cụ thể về điểm số và số lần bắn được ghi trong bảng dưới đây, trong đó có ba ô bị mờ ở chữ số hàng đơn vị và không đọc được (tại các vị trí được đánh dấu *).

Điểm số mỗi lần bắn	10	9	8	7	6	5
Số lần bắn	2*	40	1*	1*	9	7

Lời giải

Gọi số lần bắn ứng với 10 điểm là $\overline{2a}$

Gọi số lần bắn ứng với 8 điểm là $\overline{1b}$

Gọi số lần bắn ứng với 7 điểm là $\overline{1c}$

$$a, b, c \in \mathbb{N}; 0 \leq a, b, c \leq 9$$

Theo bài ra ta có: $\frac{10 \cdot \overline{2a} + 9 \cdot 40 + 8 \cdot \overline{1b} + 7 \cdot \overline{1c} + 6 \cdot 9 + 5 \cdot 7}{100} = 8,35$

$$10 \cdot \overline{2a} + 8 \cdot \overline{1b} + 7 \cdot \overline{1c} = 386 \Rightarrow 10a + 8b + 7c = 36 \quad (1)$$

Từ (1) $\Rightarrow c:2 \Rightarrow c \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$, c không thể bằng 6 hoặc 8 vì nếu thế tổng số lần bắn sẽ vượt quá 100 $\Rightarrow c \in \{0; 2; 4\}$

$$c = 0 \Rightarrow 10a + 8b = 36 \Rightarrow 5a + 4b = 18 \Rightarrow a = b = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$c = 2 \Rightarrow 10a + 8b = 22 \Rightarrow 5a + 4b = 11 \text{ (Không có giá trị } a, b \text{ thỏa mãn)}$$

$$c = 4 \Rightarrow 10a + 8b = 8 \Rightarrow 5a + 4b = 4 \text{ (Không có giá trị } a, b \text{ thỏa mãn)}$$

Thử lại $a = b = 2$ (thỏa mãn). Vậy $a = b = 2, c = 0$ là các chữ số cần tìm

Bài 16: Một hộp có 1 viên bi xanh (X), 1 viên bi đỏ (Đ) và 1 viên bi vàng (V). Hà lấy ngẫu nhiên 1 viên bi, ghi màu rồi trả lại hộp. Thực hiện hoạt động trên 10 lần và Hà thu được kết quả như bảng sau:

Lần lấy thứ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Màu viên bi	V	Đ	V	Đ	X	X	V	Đ	X	Đ

a) Hãy kiểm đếm số lần xuất hiện viên bi màu xanh, viên bi màu đỏ, viên bi màu vàng sau 10 lần lấy bi.

b) Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện “Hà lấy được viên bi đỏ”.

c) Hãy tính xác suất thực nghiệm xuất hiện bi màu xanh.

Lời giải

a) Số lần xuất hiện viên bi màu xanh là 3 lần, số lần xuất hiện viên bi màu đỏ là 4 lần, số lần xuất hiện viên bi màu vàng là 3 lần.

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện “Hà lấy được viên bi đỏ” là: $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

c) Xác suất thực nghiệm xuất hiện viên bi màu xanh là: $\frac{3}{10}$.

Bài 17: Trong hộp có một số viên bi màu xanh, đỏ, vàng có kích thước giống nhau. Lấy ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp, xem màu rồi trả lại. Lặp lại hoạt động đó 50 lần. Biết xác suất thực nghiệm xuất hiện viên bi đỏ là 0,4.

a) Hãy tính xem viên bi đỏ đã xuất hiện bao nhiêu lần?

b) Số lần bi vàng xuất hiện là 15 lần. Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện “Lấy được bi xanh”.

Lời giải

a) Số lần viên bi đỏ xuất hiện là: $50 \cdot 0,4 = 20$ (lần)

b) Số lần xuất hiện bi xanh là: $50 - 20 - 15 = 15$ (lần)

Loại bi	Bi xanh	Bi đỏ	Bi vàng
Số lần	15	20	15

Xác suất thực nghiệm của sự kiện “Lấy được bi xanh” là: $\frac{15}{50} = 0,3$.

Bài 18: Trong hộp có chứa nhiều bóng màu xanh (X), đỏ (Đ) và hồng (H). My nhắm mắt trộn đều hộp rồi chọn từ đó một quả bóng, ghi lại màu bóng, rồi trả lại hộp. Lặp lại các bước trên 20 lần, My được bảng kết quả như sau:

X	Đ	Đ	X	X	Đ	X	H	X	X
X	Đ	X	X	Đ	X	Đ	X	X	H

Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện:

a) My lấy được bóng màu xanh.

b) My lấy được bóng màu đỏ.

c) My lấy được bóng màu hồng.

Em hãy dự đoán xem trong hộp bóng màu nào là nhiều nhất, bóng màu nào là ít nhất?

Lời giải

a) Số lần My lấy được bóng màu xanh là 12 lần. Vậy xác suất thực nghiệm của sự kiện “My lấy được bóng màu xanh” là $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

b) Số lần My lấy được bóng màu đỏ là 6 lần. Vậy xác suất thực nghiệm của sự kiện “My lấy được bóng màu đỏ” là $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

c) Số lần My lấy được bóng màu hồng là 2 lần. Vậy xác suất thực nghiệm của sự kiện “My lấy được bóng màu hồng” là $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

Vì trong phần lớn các lần lấy được bóng màu xanh nên có thể số bóng xanh trong hộp là nhiều nhất. Số lần lấy được bóng màu hồng là ít hơn nhiều so với số lần lấy được bóng màu xanh và màu đỏ nên có thể số bóng màu hồng trong hộp là ít nhất.

Bài 19: Gieo một con xúc xắc 6 mặt 100 lần ta được kết quả như sau:

Mặt	1 chấm	2 chấm	3 chấm	4 chấm	5 chấm	6 chấm
Số lần xuất hiện	17	18	15	14	16	20

a) Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện gieo được mặt có số lẻ chấm trong 100 lần gieo trên

- b) Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện gieo được mặt có số chấm lớn hơn 4
 c) Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện gieo được mặt có số chấm là một số nguyên tố
 d) Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện gieo được mặt có số chấm là một số chính phương

Lời giải

a) Số lần xuất hiện các mặt lẻ chấm là: $17+15+16=48$ (lần).

Xác suất thực nghiệm của sự kiện gieo được mặt có số lẻ chấm trong 100 lần gieo trên là: $\frac{48}{100} = \frac{12}{25}$.

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện gieo được mặt có số chấm lớn hơn 4 là: $\frac{16+20}{100} = \frac{9}{25}$.

c) Xác suất thực nghiệm của sự kiện gieo được mặt có số chấm là một số nguyên tố là:

$$\frac{18+15+16}{100} = \frac{49}{100}$$

d) Số chính phương là: 1;4 nên số lần mặt trên của con xúc xắc có số chấm là 1 và 4 là: $17+14=31$ (lần).

Xác suất của sự kiện gieo được mặt có số chấm là một số chính phương là: $\frac{31}{100}$.

Bài 20: Trong buổi thực hành môn Khoa học tự nhiên đo thể tích của vật thể không xác định được hình dạng, lớp 6A có 40 học sinh thực hiện phép đo thì có 35 học sinh thực hiện thành công. Em hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện “Phép đo được thực hiện thành công”.

Lời giải

Số lần thực hiện phép đo là $n = 40$

Số lần đo thành công là $k = 35$

Xác suất thực nghiệm của sự kiện “Phép đo được thực hiện thành công” là: $\frac{k}{n} = \frac{35}{40} = 87,5\%$

Bài 21: Tung một đồng xu 20 lần liên tiếp. Hãy ghi kết quả thống kê theo mẫu sau:

Lần tung	Kết quả tung	Số lần xuất hiện mặt N	Số lần xuất hiện mặt S
1	?	k	s
...	?		

Tính xác suất thực nghiệm:

a) Xuất hiện mặt N;

b) Xuất hiện mặt S;

Lời giải

Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N khi tung đồng xu 20 lần là: $\frac{k}{n} = \frac{k}{20}$

Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S khi tung đồng xu 20 lần là: $\frac{s}{n} = \frac{s}{20}$

Bài 22:

a) Nếu tung một đồng xu 22 lần liên tiếp; có 13 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng bao nhiêu?

b) Nếu tung một đồng xu 25 lần liên tiếp; có 11 lần xuất hiện mặt S thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng bao nhiêu?

c) Nếu tung một đồng xu 30 lần liên tiếp; có 14 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng bao nhiêu?

Lời giải

a) Nếu tung một đồng xu 22 lần liên tiếp; có 13 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng: $\frac{13}{22}$

b) Nếu tung một đồng xu 25 lần liên tiếp; có 11 lần xuất hiện mặt S thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng: $\frac{11}{25}$

c) Nếu tung một đồng xu 30 lần liên tiếp; có 14 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng: $\frac{30-14}{30} = \frac{3}{15}$

Bài 23: Một hộp có 10 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1,2,3,...,10 ; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau.

Rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ từ trong hộp, ghi lại số của thẻ rút được và bỏ lại thẻ đó vào hộp. Sau 25 lần rút thẻ liên tiếp, hãy ghi kết quả thống kê theo mẫu sau:

Lần rút	Kết quả rút	Tổng số lần xuất hiện									
		Số 1	Số 2	Số 3	Số 4	Số 5	Số 6	Số 7	Số 8	Số 9	Số 10
1	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
...	?										

Tính xác suất thực nghiệm:

- a) Xuất hiện số 1;
- b) Xuất hiện số 5;
- c) Xuất hiện số 10.

Lời giải

a) Gọi số lần xuất hiện số 1 là k thì xác suất thực nghiệm xuất hiện số 1: $\frac{k}{25}$

b) Gọi số lần xuất hiện số 5 là p thì xác suất thực nghiệm xuất hiện số 5: $\frac{p}{25}$

c) Gọi số lần xuất hiện số 10 là q thì xác suất thực nghiệm xuất hiện số 10: $\frac{q}{25}$

Bài 24: Số cuộc điện thoại một người nhận được trong một ngày của tháng 6 được ghi lại ở bảng sau:

Số cuộc điện thoại	1	2	3	4	5	8
--------------------	---	---	---	---	---	---

Số ngày	2	4	12	7	4	1
---------	---	---	----	---	---	---

Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện “Một ngày trong tháng có ít nhất 5 cuộc gọi”.

Lời giải

Một ngày trong tháng có ít nhất 5 cuộc gọi nghĩa là ngày đó sẽ có 5 cuộc gọi hoặc 8 cuộc gọi. Vậy số ngày trong tháng có ít nhất 5 cuộc gọi là: $4+1=5$ (ngày).

Tổng số ngày của tháng 6 là: $2+4+12+7+4+1=30$ (ngày)

Xác suất thực nghiệm của sự kiện “Một ngày trong tháng có ít nhất 5 cuộc gọi” là: $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

Bài 25: Minh gieo một con xúc xắc 100 lần và ghi lại số chấm xuất hiện ở mỗi lần gieo được kết quả như sau:

Số chấm xuất hiện	1	2	3	4	5	6
Số lần	15	20	18	22	10	15

Xác suất thực nghiệm của sự kiện “Số chấm xuất hiện chia cho 3 dư 2” là

Lời giải

Số chấm xuất hiện chia cho 3 dư 2 là các số 2, 5.

Nên số lần gieo được mặt có số chấm chia cho 3 dư 2 là: $20+10=30$ (lần)

Xác suất thực nghiệm của sự kiện “Số chấm xuất hiện chia cho 3 dư 2” là: $\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$.

Bài 26: Một túi gồm 4 loại bóng: xanh, đỏ, vàng, tím. Lấy ngẫu nhiên hai quả bóng. Liệt kê các kết quả có thể của sự kiện hai quả bóng cùng màu với nhau.

Lời giải:

Các kết quả có thể xảy ra là:

- 2 bóng đều màu xanh.
- 2 bóng đều màu đỏ.
- 2 bóng đều màu tím.
- 2 bóng đều màu vàng.

Bài 27: Một cái hộp chứa 3 màu bóng: xanh, đỏ, vàng với 2 kích cỡ: lớn, nhỏ cho mỗi màu. Lấy ngẫu nhiên hai quả bóng. Liệt kê các kết quả sự kiện hai quả bóng khác màu và khác kích cỡ với nhau.

Lời giải:

Các kết quả có thể xảy ra là:

- 1 bóng màu xanh lớn, 1 bóng màu đỏ nhỏ.
- 1 bóng màu xanh nhỏ, 1 bóng màu đỏ lớn.
- 1 bóng màu xanh lớn, 1 bóng màu vàng nhỏ.
- 1 bóng màu xanh nhỏ, 1 bóng màu vàng lớn.
- 1 bóng màu đỏ lớn, 1 bóng màu vàng nhỏ.
- 1 bóng màu đỏ nhỏ, 1 bóng màu vàng lớn.

Bài 28: Một lồng quay xô xố có chứa 10 quả bóng có cùng kích thước được đánh số từ 0 đến 9. Sau mỗi lần quay chỉ có đúng 1 quả bóng lọt xuống lỗ. Sau khi ghi lại số của quả bóng này, bóng được trả lại lồng để thực hiện lần quay tiếp theo. Giả sử lần quay thứ nhất bóng số 0 đã rơi xuống. Liệt kê sự kiện sự kiện “Hai lần quay đều xuất hiện hai số không giống nhau”.

Lời giải:

Các kết quả có thể xảy ra của sự kiện “Hai lần quay đều xuất hiện hai số không giống nhau” là:

- Số bóng sau 2 lần quay là: 0 ; 1
- Số bóng sau 2 lần quay là: 0 ; 2
- Số bóng sau 2 lần quay là: 0 ; 3
- Số bóng sau 2 lần quay là: 0 ; 4
- Số bóng sau 2 lần quay là: 0 ; 5

- Số bóng sau 2 lần quay là: 0 ; 6
 Số bóng sau 2 lần quay là: 0 ; 7
 Số bóng sau 2 lần quay là: 0 ; 8
 Số bóng sau 2 lần quay là: 0 ; 9.

Bài 29: Hùng tập ném bóng vào rổ. Khi thực hiện ném 100 lần thì có 35 lần bóng vào rổ.

- a) Lập bảng thống kê;
 b) Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ;
 c) Theo em Hùng có thể tăng xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ không?

Lời giải:

a) Số lần ném bóng không vào rổ là: $100 - 35 = 65$ (lần).

Bảng thống kê:

Kết quả	Bóng vào rổ	Bóng không vào rổ
Số lần	35	65

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ là: $\frac{35}{100} = 0,35$.

c) Hùng có thể tăng xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ nếu Hùng chăm chỉ luyện tập.

Bài 30:

- a) Nếu tung một đồng xu 22 lần liên tiếp; có 13 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng bao nhiêu?
 b) Nếu tung một đồng xu 25 lần liên tiếp; có 11 lần xuất hiện mặt S thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng bao nhiêu?
 c) Nếu tung một đồng xu 30 lần liên tiếp; có 14 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng bao nhiêu?

Lời giải:

a) Nếu tung một đồng xu 22 lần liên tiếp; có 13 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng: $\frac{13}{22}$.

b) Nếu tung một đồng xu 25 lần liên tiếp; có 11 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng: $\frac{11}{25}$.

c) Nếu tung một đồng xu 30 lần liên tiếp; có 14 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng: $\frac{30-14}{30} = \frac{3}{15}$.

Bài 31: Một hộp có 10 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 10; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ từ trong hộp, ghi lại số của thẻ rút được và bỏ lại thẻ đó vào hộp. Sau 25 lần rút thẻ liên tiếp, hãy ghi kết quả thống kê theo mẫu sau:

Lần rút	Kết quả rút	Tổng số lần xuất hiện									
		Số 1	Số 2	Số 3	Số 4	Số 5	Số 6	Số 7	Số 8	Số 9	Số 10
1	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
...	?										

Tính xác suất thực nghiệm:

- a) Xuất hiện số 1;
 b) Xuất hiện số 5;
 c) Xuất hiện số 10.

Lời giải:

a) Gọi số lần xuất hiện số 1 là k thì xác suất thực nghiệm xuất hiện số 1: $\frac{k}{25}$.

- b) Gọi số lần xuất hiện số 1 là k thì xác suất thực nghiệm xuất hiện số 5: $\frac{k}{25}$.
- c) Gọi số lần xuất hiện số 1 là k thì xác suất thực nghiệm xuất hiện số 10: $\frac{k}{25}$.

Bài 32: Số lượng khách hàng đến một cửa hàng mỗi ngày trong quý IV của năm 2020 được ghi lại ở bảng sau:

Số khách hàng	0–10	11–20	21–30	31–40	41–50	51–60
Số ngày	4	6	27	28	17	10

Chọn ngẫu nhiên một ngày trong quý IV. Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện “Trong ngày được chọn có không quá 30 khách hàng”.

Lời giải:

Số ngày mà trong ngày đó có không quá 30 khách hàng (số khách hàng ≤ 30) đến cửa hàng là: $4+6+27=37$ (ngày).

Tổng số ngày của quý IV là: $4+6+27+28+17+10=92$ (ngày).

Xác suất thực nghiệm của sự kiện “Trong ngày được chọn có không quá 30 khách hàng” là: $\frac{37}{92}$.

Bài 33: Một vận động viên nhảy xa thực hiện các lượt nhảy có kết quả như sau (đơn vị tính là mét):

Số mét	2,3	2,4
Số lần nhảy	7	3

- a) Vận động viên trên thực hiện nhảy bao nhiêu lần?
 b) Có bao nhiêu lần nhảy được 2,3 mét, bao nhiêu lần nhảy được 2,4 mét?
 c) Tính xác suất thực nghiệm của các sự kiện thực hiện lần nhảy được 2,3 mét.

Lời giải:

Số mét	2,3	2,4
Số lần nhảy	7	3

- a) Vận động viên trên thực hiện 10 lần nhảy.
 b) Có 7 lần nhảy được 2,3 mét, có 3 lần nhảy được 2,4 mét.
 c) Xác suất thực nghiệm của sự kiện thực hiện lần nhảy được 2,3 mét là: $\frac{7}{10}=0,7$.

Bài 34: Sau đợt kiểm tra sức khỏe răng miệng của các em trong một lớp 6. Thống kê số lần đánh răng trong một ngày của các em được ghi lại ở bảng sau:

Số lần đánh răng	1	2	3
Số học sinh	8	21	11

Hãy tính xác suất thực nghiệm của các sự kiện:

- a) Thực hiện đánh răng một lần;
 b) Thực hiện đánh răng từ hai lần trở lên.

Lời giải:

Số lần đánh răng	1	2	3
Số học sinh	8	21	11

- a) Tổng số học sinh: 40

Xác suất thực nghiệm của sự kiện đánh răng một lần là: $\frac{8}{40}=0,2$.

- b) Số học sinh thực hiện đánh răng từ hai lần trở lên là: $21+11=32$ (Học sinh).

Xác suất thực nghiệm của sự kiện đánh răng một lần là: $\frac{32}{40}=0,8$.

Bài 35: Minh gieo một con xúc xắc 100 lần và ghi lại số chấm xuất hiện ở mỗi lần gieo được kết quả như sau:

Số chấm xuất hiện	1	2	3	4	5	6
Số lần	15	20	18	22	10	15

Tính xác suất thực nghiệm của các sự kiện sau:

- a) Số chấm xuất hiện là số chẵn.
b) Số chấm xuất hiện lớn hơn 2.

Lời giải:

a) Số chấm xuất hiện là số chẵn là: $20 + 22 + 15 = 57$.

Xác suất thực nghiệm của số chấm xuất hiện là số chẵn là: $\frac{57}{100} = 57\%$.

b) Số chấm xuất hiện lớn hơn 2 là: $18 + 10 + 22 + 15 = 65$.

Xác suất thực nghiệm của số chấm xuất hiện lớn hơn 2 là: $\frac{65}{100} = 65\%$.

Bài 36: Có 15 quyển sách trong đó có 7 quyển sách Toán, 5 quyển sách Văn và 3 quyển sách Lý. Tính xác suất để lấy được:

- a) Hai quyển sách Toán.
b) Hai quyển sách trong đó có 1 quyển Văn và 1 quyển Lý.
c) Hai quyển sách trong đó có ít nhất 1 quyển Văn.

Lời giải

a) Có 15 quyển sách, mỗi lần lấy ra 2 quyển. Vậy tổng số lần có thể lấy ra là:

$$n = 15 \cdot 14 : 2 = 105$$

Xác suất để lấy được hai quyển sách Toán là: $\frac{7 \cdot 6 : 2}{105} = \frac{1}{5}$

b) Xác suất để lấy được hai quyển sách trong đó có 1 quyển Văn và 1 quyển Lý là: $\frac{5 \cdot 3}{105} = \frac{1}{7}$

c) Số cách chọn hai quyển Văn là: $5 \cdot 4 : 2 = 10$

Số cách chọn một quyển Văn và một quyển toán hoặc một quyển Lý là: $5 \cdot (7 + 3) = 50$

Xác suất để lấy được hai quyển sách trong đó có ít nhất 1 quyển Văn là: $\frac{10 + 50}{105} = \frac{4}{7}$

Bài 37. Tung hai đồng xu cân đối 50 lần ta được kết quả như sau:

Sự kiện	Hai đồng sấp	Một đồng sấp, một đồng ngửa	Hai đồng ngửa
Số lần	12	24	14

Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện:

- a) Có một đồng xu sấp, một đồng xu ngửa;
b) Hai đồng xu đều ngửa.

Lời giải

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện có một đồng xu sấp, một đồng xu ngửa trong 50 lần tung là:

$$\frac{24}{50} = 0,48$$

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện cả hai đồng xu đều ngửa trong 50 lần tung là: $\frac{14}{50} = 0,28$

Bài 38: An gieo một con xúc xắc 100 lần và ghi lại số chấm xuất hiện ở mỗi lần gieo được kết quả như sau:

Số chấm xuất hiện	1	2	3	4	5	6
Số lần	20	15	22	18	15	10

Tính xác suất thực nghiệm của các sự kiện sau:

- Số chấm xuất hiện là số lẻ;
- Số chấm xuất hiện là lớn hơn 3.

Lời giải

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện số chấm xuất hiện là số lẻ là:

$$\frac{20+22+15}{100} = 0,57$$

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện số chấm xuất hiện lớn hơn 3 là:

$$\frac{18+10+15}{100} = 0,43$$

Bài 39. Trong hộp có một số bút xanh và một số bút đỏ. Lấy ngẫu nhiên 1 bút từ hộp, xem màu rồi trả lại. Lặp lại hoạt động trên 50 lần, ta được kết quả như sau:

Loại bút	Bút xanh	Bút đỏ
Số lần	42	8

- Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện lấy được bút xanh.
- Em hãy dự đoán xem trong hộp loại bút nào có nhiều hơn.

Lời giải

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện lấy được bút xanh là: $\frac{42}{50} = 0,84$

b) Không dự đoán được trong hộp bút loại bút nào nhiều hơn.

Bài 40. Bảng sau là tổng hợp kết quả xét nghiệm người nhiễm Covid 19 ở một bệnh viện trong một năm:

Quý	Số ca xét nghiệm	Số ca dương tính
<i>I</i>	120	10
<i>II</i>	180	12
<i>III</i>	250	18
<i>IV</i>	100	9

Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính:

- Theo từng quý trong năm.
- Theo năm.

Lời giải

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính trong quý I là:

$$\frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

+ Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính trong quý II là:

$$\frac{12}{180} = \frac{1}{15}$$

+ Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính trong quý III là:

$$\frac{18}{250} = \frac{9}{125}$$

+ Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính trong quý IV là: $\frac{9}{100}$

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính trong 1 năm là:

$$\frac{10+12+18+9}{120+180+250+100} = \frac{49}{650}$$

Bài 41. Kết quả kiểm tra môn Toán và Ngữ văn của một số học sinh được lựa chọn ngẫu nhiên cho ở bảng sau:

Ngữ văn \ Toán	Giỏi	Khá	Trung bình
Giỏi	40	20	15
Khá	15	30	10
Trung bình	5	15	20

(Ví dụ: Số học sinh có kết quả Toán — giỏi, Ngữ văn — khá là 20)

Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện một học sinh được chọn ra một cách ngẫu nhiên có kết quả:

- Môn Toán đạt loại giỏi.
- Loại khá trở lên ở cả hai môn.
- Loại trung bình ở ít nhất một môn.

Lời giải

Tổng số học sinh được lựa chọn ngẫu nhiên là: $n = 40 + 20 + 15 + 15 + 30 + 10 + 5 + 15 + 20 = 170$

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một học sinh Môn Toán đạt loại giỏi là:

$$\frac{40+20+15}{170} = \frac{75}{170} = \frac{15}{34}$$

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một học sinh đạt loại khá trở lên ở cả hai môn là:

$$\frac{40+20+15+30}{170} = \frac{105}{170} = \frac{21}{34}$$

c) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một học sinh đạt loại trung bình ít nhất một môn là:

$$\frac{15+10+20+5+15}{170} = \frac{65}{170} = \frac{13}{34}$$

Bài 42: Một cái hộp chứa 3 màu bóng: xanh, đỏ, vàng và 2 kích cỡ: lớn, nhỏ. Lấy ngẫu nhiên hai quả bóng. Nếu lấy ra được 2 quả bóng màu đỏ thì sự kiện hai quả bóng không phải cùng kích cỡ có xảy ra không?

Lời giải:

Các kết quả có thể xảy ra là:

2 bóng màu đỏ, cùng cỡ nhỏ;

2 bóng đều màu đỏ, cùng cỡ lớn;

2 bóng đều màu đỏ, 1 cỡ nhỏ và 1 cỡ lớn.

⇒ Xảy ra ba sự kiện: 2 bóng màu đỏ cùng cỡ nhỏ, 2 bóng màu đỏ cùng cỡ lớn và 2 bóng màu đỏ không cùng kích cỡ.

⇒ Sự kiện hai quả bóng không phải cùng kích cỡ xảy ra.

Bài 43: Trò chơi dành cho hai người chơi. Mỗi người chơi chọn một trong sáu số 1;2;3;4;5;6 rồi gieo con xúc xắc năm lần liên tiếp. Mỗi lần gieo, nếu xuất hiện mặt có số chấm bằng số đã chọn thì được mười điểm, ngược lại bị trừ năm điểm. Ai được nhiều điểm hơn sẽ thắng.

An và Bình cùng chơi, An chọn số 3 và Bình chọn số 4. Kết quả gieo của An và Bình lần lượt 2, 3, 6, 4, 3 và 4, 3, 4, 5, 4. Hỏi An và Bình, ai là người thắng.

Lời giải:

Muốn xem An và Bình ai là người thắng cuộc thì ta phải tính số điểm của An và Bình rồi so sánh để tìm người thắng cuộc.

An chọn số 3, kết quả gieo của An là 2, 3, 6, 4, 3 nên An được số điểm là:

$$-5 + 10 - 5 - (-5) + 10 = 5 \text{ (điểm)}$$

Bình chọn số 4, kết quả gieo của Bình là 4, 3, 4, 5, 4 nên Bình được số điểm là:

$$10 - 5 + 10 - 5 + 10 = 20 \text{ (điểm)}$$

Số điểm của Bình nhiều hơn so với điểm của An. Vậy Bình thắng cuộc.

Bài 44: Mai (Viết tắt: M) và Linh (Viết tắt: L) cùng chơi, mỗi người gieo một đồng xu liên tiếp 30 lần được kết quả như sau (S : xấp, N : ngửa):

M	S	N	N	S	S	N	S	N	S	N	S	N	N	S	S	N	N	S	S	N	N	N	S	S	S	N	N	N	S	S
L	N	S	S	N	N	S	N	S	N	S	S	S	S	N	S	N	N	S	S	S	N	N	N	S	S	S	N	N	S	S

Người chơi được một điểm khi có đúng ba lần liên tiếp đồng xu ra mặt ngửa. Người nào được nhiều điểm hơn là người thắng. Sự kiện Mai thắng có xảy ra hay không?

Lời giải:

Mai gieo đồng xu có đúng ba lần liên tiếp đồng xu ra mặt ngửa được 2 lần nên được 2 điểm.

Linh gieo đồng xu có đúng ba lần liên tiếp đồng xu ra mặt ngửa được 1 lần nên được 1 điểm.

Mai được nhiều điểm hơn Linh nên Mai là người thắng cuộc.

Vậy sự kiện Mai thắng có xảy ra.

Bài 45: Hà (Viết tắt: H - dòng trên ở bảng) và Hằng (Viết tắt: H - dòng dưới ở bảng) cùng chơi, mỗi người gieo một đồng xu liên tiếp 36 lần được kết quả như sau (S : sấp, N : ngửa).

H	S	N	N	S	S	S	N	S	N	S	N	S	N	N	S	S	S	N	N	S	S	N	N	N	S	N	S	S	N	N	N	S	S	S	N	S
H	S	N	S	S	N	N	S	S	S	N	S	N	N	S	S	S	N	S	N	N	S	S	S	N	N	N	S	N	S	N	S	N	S	N	S	

Người chơi được một điểm khi có đúng ba lần liên tiếp đồng xu ra mặt sấp. Người nào được điểm nhiều hơn là người thắng. Sự kiện Hà thắng có xảy ra hay không?

Lời giải:

Hà gieo đồng xu có đúng ba lần liên tiếp đồng xu ra mặt sấp được 3 lần nên được 3 điểm.

Hằng gieo đồng xu có đúng bốn lần liên tiếp đồng xu ra mặt sấp được 4 lần nên được 4 điểm. Hằng được nhiều điểm hơn Hà nên Hằng là người thắng cuộc.

Vậy sự kiện Hà thắng không xảy ra.

Bài 46: Bình lấy ngẫu nhiên một chiếc bút từ hộp bút màu gồm: 2 bút xanh, 3 bút đỏ, 4 bút vàng để tô. Nếu Bình lấy được bút màu đỏ thì sự kiện Bình không lấy được bút màu xanh có xảy ra hay không?

Lời giải:

Nếu Bình lấy được bút màu đỏ

Nên xảy ra sự kiện Bình lấy được bút màu đỏ.

Vậy sự kiện Bình không lấy được bút màu xanh có xảy ra.

Bài 47: Cuối năm, ban phụ huynh có 45 gói quà cho 45 bạn trong lớp. Trong số đó có 20 gói quà là truyện cười, 15 gói quà là sách hướng dẫn kỹ năng sống và 10 gói quà là hộp bút. An được tặng ngẫu nhiên một món quà. Nếu món quà An nhận được là 1 quyển sách kỹ năng sống, Sự kiện “Món quà An nhận được không phải là hộp bút” có xảy ra không.

Lời giải:

An nhận được 1 quyển sách kỹ năng sống

⇒ Xảy ra sự kiện “An nhận được một quyển sách kỹ năng sống”

⇒ Xảy ra sự kiện “Món quà An nhận được không phải là hộp bút”

Bài 48: Một lồng quay số xổ có chứa 10 quả bóng có cùng kích thước được đánh số từ 0 đến 9. Sau mỗi lần quay chỉ có đúng 1 quả bóng lọt xuống lỗ. Sau khi ghi lại số của quả bóng này, bóng được trả

lại lòng để thực hiện lần quay tiếp theo. Nếu lần quay đầu nhận được số 0, Sự kiện “Hai lần quay hai số giống nhau” có xảy ra không.

Lời giải:

Các kết quả có thể xảy ra sau lần quay thứ hai là:

Số bóng sau 2 lần quay là: 0;0

Số bóng sau 2 lần quay là: 0;1

Số bóng sau 2 lần quay là: 0;2

Số bóng sau 2 lần quay là: 0;3

Số bóng sau 2 lần quay là: 0;4

Số bóng sau 2 lần quay là: 0;5

Số bóng sau 2 lần quay là: 0;6

Số bóng sau 2 lần quay là: 0;7

Số bóng sau 2 lần quay là: 0;8

Số bóng sau 2 lần quay là: 0;9

⇒ Sự kiện “Hai lần quay hai số giống nhau” có xảy ra.

Bài 49: Một hộp có chứa 45 phiếu bốc thăm cùng loại. Trong đó có 36 phiếu có nội dung “Chúc bạn may mắn lần sau”, 9 phiếu có nội dung “Quà tặng”. Bạn Việt thực hiện bốc thăm lấy ngẫu nhiên một phiếu trong hộp.

- a) Liệt kê các kết quả có thể;
- b) Lập bảng thống kê số lượng phiếu ở trên;
- c) Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện lấy được phiếu “Quà tặng”.

Lời giải

- a) Các kết quả có thể là: Chúc bạn may mắn lần sau, Quà tặng.
- b) Bảng thống kê:

Loại phiếu	Chúc bạn may mắn lần sau	Quà tặng
Số lượng	36	9

- c) Xác suất thực nghiệm của sự kiện lấy được phiếu “Quà tặng”: $\frac{9}{45} = 0,2$

Bài 50: Hùng tập ném bóng vào rổ. Khi thực hiện ném 100 lần thì có 35 lần bóng vào rổ.

- a) Lập bảng thống kê;
- b) Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ;
- c) Theo em Hùng có thể tăng xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ không?

Lời giải

a) Số lần ném bóng không vào rổ là: $100 - 35 = 65$ (lần).

Bảng thống kê:

Kết quả	Bóng vào rổ	Bóng không vào rổ
Số lần	35	65

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ là: $\frac{35}{100} = 0,35$.

c) Hùng có thể tăng xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ nếu Hùng chăm chỉ luyện tập.

Bài 51: Trong buổi thực hành môn Khoa học tự nhiên đo thể tích của vật thể không xác định được hình dạng, lớp 6A có 40 học sinh thực hiện phép đo thì có 35 học sinh thực hiện thành công. Em hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện phép đo được thực hiện thành công.

Lời giải

Số lần thực hiện phép đo là $n = 40$

Số lần đo thành công là $k = 35$

Xác suất thực nghiệm của sự kiện Phép đo được thực hiện thành công là: $\frac{k}{n} = \frac{35}{40} = 87,5\%$

Bài 52: Tung một đồng xu 20 lần liên tiếp. Hãy ghi kết quả thống kê theo mẫu sau:

Lần tung	Kết quả tung	Số lần xuất hiện mặt N	Số lần xuất hiện mặt S
1	?	k	s
...	?		

Tính xác suất thực nghiệm:

a) Xuất hiện mặt N ;

b) Xuất hiện mặt S ;

Lời giải

Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N khi tung đồng xu 20 lần là: $\frac{k}{n} = \frac{k}{20}$

Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S khi tung đồng xu 20 lần là: $\frac{s}{n} = \frac{s}{20}$

Bài 53.

a) Nếu tung một đồng xu 22 lần liên tiếp; có 13 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng bao nhiêu?

b) Nếu tung một đồng xu 25 lần liên tiếp; có 11 lần xuất hiện mặt S thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng bao nhiêu?

c) Nếu tung một đồng xu 30 lần liên tiếp; có 14 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng bao nhiêu?

Lời giải

a) Nếu tung một đồng xu 22 lần liên tiếp; có 13 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng: $\frac{13}{22}$

b) Nếu tung một đồng xu 25 lần liên tiếp; có 11 lần xuất hiện mặt S thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng: $\frac{11}{25}$

c) Nếu tung một đồng xu 30 lần liên tiếp; có 14 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng: $\frac{30-14}{30} = \frac{3}{15}$

Bài 54: Một hộp có 10 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 10; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau.

Rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ từ trong hộp, ghi lại số của thẻ rút được và bỏ lại thẻ đó vào hộp. Sau 25 lần rút thẻ liên tiếp, hãy ghi kết quả thống kê theo mẫu sau:

Lần rút	Kết quả rút	Tổng số lần xuất hiện									
		Số 1	Số 2	Số 3	Số 4	Số 5	Số 6	Số 7	Số 8	Số 9	Số 10
1	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
...	?										

Tính xác suất thực nghiệm:

- Xuất hiện số 1 ;
- Xuất hiện số 5 ;
- Xuất hiện số 10 .

Lời giải

a) Gọi số lần xuất hiện số 1 là k thì xác suất thực nghiệm xuất hiện số 1 : $\frac{k}{25}$

b) Gọi số lần xuất hiện số 5 là k thì xác suất thực nghiệm xuất hiện số 5 : $\frac{k}{25}$

c) Gọi số lần xuất hiện số 10 là k thì xác suất thực nghiệm xuất hiện số 10 : $\frac{k}{25}$

Bài 55. Gieo một xúc xắc 10 lần liên tiếp, bạn Cường có kết quả như sau:

Lần gieo	Kết quả gieo
1	Xuất hiện mặt 2 chấm
2	Xuất hiện mặt 1 chấm
3	Xuất hiện mặt 6 chấm

4	Xuất hiện mặt 4 chấm
5	Xuất hiện mặt 4 chấm
6	Xuất hiện mặt 5 chấm
7	Xuất hiện mặt 3 chấm
8	Xuất hiện mặt 5 chấm
9	Xuất hiện mặt 1 chấm
10	Xuất hiện mặt 1 chấm

- a) Hãy kiểm đếm số lần xuất hiện mặt 1 chấm và số lần xuất hiện mặt 6 chấm sau 10 lần gieo. Xác suất thực nghiệm xuất hiện
- b) Tính xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt 1 chấm.
- c) Tính xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt 6 chấm.

Lời giải

- a) Số lần xuất hiện mặt 1 chấm: 3 lần
Số lần xuất hiện mặt 6 chấm: 1 lần
- b) Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt 1 chấm là: $\frac{3}{10}$
- c) Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt 6 chấm là: $\frac{1}{10}$

Bài 56

- a) Nếu gieo một xúc xắc 11 lần liên tiếp, có 5 lần xuất hiện mặt 2 chấm thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt 2 chấm bằng bao nhiêu?
- b) Nếu gieo một xúc xắc 14 lần liên tiếp, có 3 lần xuất hiện mặt 6 chấm thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt 6 chấm bằng bao nhiêu?

Lời giải

- a) Nếu gieo một xúc xắc 11 lần liên tiếp, có 5 lần xuất hiện mặt 2 chấm thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt 2 chấm bằng: $\frac{5}{11}$
- b) Nếu gieo một xúc xắc 14 lần liên tiếp, có 3 lần xuất hiện mặt 6 chấm thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt 6 chấm bằng: $\frac{3}{14}$

Bài 57. Số lượng khách hàng đến một cửa hàng mỗi ngày trong quý IV của năm 2020 được ghi lại ở bảng sau:

Số khách hàng	0 – 10	11 – 20	21 – 30	31 – 40	41 – 50	51 – 60
Số ngày	4	6	27	28	17	10

Chọn ngẫu nhiên một ngày trong quý IV. Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện “Trong ngày được chọn có không quá 30 khách hàng”.

Lời giải

Số ngày mà trong ngày đó có không quá 30 khách hàng (số khách hàng ≤ 30) đến cửa hàng là:
 $4+6+27=37$ (ngày).

Tổng số ngày của quý IV là: $4+6+27+28+17+10=92$ (ngày)

Xác suất thực nghiệm của sự kiện “Trong ngày được chọn có không quá 30 khách hàng” là: $\frac{37}{92}$.

Bài 58. Số cuộc điện thoại một người nhận được trong một ngày của tháng 6 được ghi lại ở bảng sau:

Số cuộc điện thoại	1	2	3	4	5	8
Số ngày	2	4	12	7	4	1

Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện “Một ngày trong tháng có ít nhất 5 cuộc gọi”.

Lời giải

Một ngày trong tháng có ít nhất 5 cuộc gọi nghĩa là ngày đó sẽ có 5 cuộc gọi hoặc 8 cuộc gọi. Vậy số ngày trong tháng có ít nhất 5 cuộc gọi là: $4+1=5$ (ngày).

Tổng số ngày của tháng 6 là: $2+4+12+7+4+1=30$ (ngày)

Xác suất thực nghiệm của sự kiện “Một ngày trong tháng có ít nhất 5 cuộc gọi” là: $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

Bài 59: Trong hộp có 4 thẻ được đánh số 1, 2, 3, 4. An lấy ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp, ghi số lại rồi trả lại hộp. Lặp lại hoạt động trên 20 lần, An được kết quả như sau:

2	3	2	1	4	4	3	1	3	2
1	1	1	3	2	4	3	2	1	4

Xác suất thực nghiệm của sự kiện An lấy được thẻ ghi số nguyên tố là bao nhiêu?

Lời giải

Hoạt động rút thẻ là 20 lần, tổng số lần lấy được thẻ ghi số nguyên tố là 10 lần.

Xác suất thực nghiệm của sự kiện An lấy được thẻ ghi số nguyên tố là: $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

Bài 60: Bình tập ném bóng vào rổ. Khi thực hiện ném 50 lần thì có 28 lần bóng vào rổ.

a) Lập bảng thống kê.

b) Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ.

Lời giải

a) Bảng thống kê.

1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0	1

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ là: $\frac{28}{50} = \frac{14}{25}$.

Bài 61: Trả lời các câu hỏi sau:

a) Nếu tung một đồng xu 22 lần liên tiếp, có 13 lần xuất hiện mặt ngửa N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng bao nhiêu?

b) Nếu tung một đồng xu 25 lần liên tiếp, có 11 lần xuất hiện mặt sấp S thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng bao nhiêu?

c) Nếu tung một đồng xu 30 lần liên tiếp, có 11 lần xuất hiện mặt ngửa N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng bao nhiêu?

Lời giải

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện xuất hiện mặt N là $\frac{11}{30}$.

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện xuất hiện mặt S là $\frac{19}{30}$.

c) Trong tổng số 30 lần tung thì có 11 lần xuất hiện mặt N vì vậy số lần xuất hiện của mặt S là $30 - 11 = 19$.

Vậy xác suất thực nghiệm của sự kiện xuất hiện mặt S là $\frac{19}{30}$.

Bài 62: Trong một hộp kín có một số quả bóng màu **xanh, màu đỏ, màu tím, vàng**. Trong một trò chơi, người chơi được lấy ngẫu nhiên một quả bóng, ghi lại màu rồi trả lại bóng vào thùng. Bình thực hiện 100 lần và được kết quả sau:

Màu	Số lần
Xanh	43
Đỏ	22
Tím	18
Vàng	17

Hãy tìm xác suất của thực nghiệm của các sự kiện sau:

a) Bình lấy được quả bóng màu xanh.

b) Quả bóng được lấy ra không là màu đỏ.

Lời giải

a) Xác suất của thực nghiệm của các sự kiện lấy được bóng xanh là: $\frac{43}{100} = 0,43$.

b) Tổng số lần lấy ra không là màu đỏ là $43 + 18 + 17 = 78$.

Vậy xác suất quả bóng được lấy ra không là màu đỏ là: $\frac{78}{100} = 0,78$.

Bài 63: Một xạ thủ bắn 40 phát đạn, kết quả được ghi lại dưới đây :

8	10	10	10	8	9	9	9	10	8
10	10	9	10	9	9	9	10	10	10
10	10	8	8	9	9	9	10	10	10
10	10	7	10	6	6	10	9	10	10

Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện sau trong mỗi lần bắn:

a) Xạ thủ bắn được 10 điểm

b) Xạ thủ bắn được ít nhất 7 điểm.

Lời giải

Ta xét bảng thống kê:

Điểm	6	7	8	9	10
Số lần	2	1	5	11	21

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện sau trong mỗi lần bắn xạ thủ bắn được 10 điểm là $\frac{21}{40}$.

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện sau trong mỗi lần bắn xạ thủ bắn được ít nhất 7 điểm là:

$$\frac{40 - 2}{40} = \frac{38}{40} = \frac{19}{20}$$

Bài 64: Trong hộp có một số bút xanh và một số bút đỏ, lấy ngẫu nhiên 1 bút từ hộp, xem màu rồi trả lại. Lặp lại hoạt động trên 50 lần, ta được kết quả theo bảng sau:

Loại bút	Bút xanh	Bút đỏ
Số lần	42	8

- a) Hãy tìm xác suất của thực nghiệm của các sự kiện lấy được bút xanh.
b) Em hãy dự đoán xem trong hộp loại bút nào nhiều hơn.

Lời giải

- a) Xác suất của thực nghiệm của các sự kiện lấy được bút xanh là $\frac{42}{50} = 0,84$.
b) Để dự đoán xem trong hộp loại bút nào nhiều hơn ta tính thêm xác suất của thực nghiệm của sự kiện lấy được bút đỏ $\frac{8}{50} = 0,16$.

Vậy xác suất của thực nghiệm của các sự kiện lấy được bút xanh lớn hơn bút đỏ lên trong hộp bút xanh có nhiều hơn.

Bài 65: Kết quả kiểm tra môn Toán và ngữ văn của một số học sinh được lựa chọn ngẫu nhiên cho bảng

sau:

Ngữ văn Toán	Giỏi	Khá	Trung bình
Giỏi	40	20	15
Khá	15	30	10
Trung bình	5	15	20

(Ví dụ số học sinh có kết quả Toán – giỏi, Ngữ văn – khá là 20)

Hãy tìm xác suất thực nghiệm của sự kiện một học sinh được chọn ra từ một cách ngẫu nhiên có kết quả:

- a) Môn toán đạt loại giỏi.
b) Loại khá trở lên ở cả hai môn.
c) Loại trung bình ở ít nhất một môn.

Lời giải

Tổng số học sinh được lựa chọn ngẫu nhiên là:

$$n = 40 + 20 + 15 + 15 + 30 + 10 + 5 + 15 + 20 = 170$$

- a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một học sinh Môn Toán đạt loại giỏi là:

$$\frac{40+20+15}{170} = \frac{75}{170} = \frac{15}{34}$$

- b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một học sinh đạt loại khá trở lên ở cả hai môn là:

$$\frac{40+20+15+30}{170} = \frac{105}{170} = \frac{21}{34}$$

- c) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một học sinh đạt loại trung bình ít nhất một môn là:

$$\frac{15+10+20+5+15}{170} = \frac{65}{170} = \frac{13}{34}$$

Bài 66: Tung hai đồng xu cân đối 50 lần ta được kết quả sau:

Sự kiện	Hai đồng sấp	Một đồng sấp một đồng ngửa	Hai đồng ngửa
Số lần	12	24	14

Hãy tìm xác suất của thực nghiệm của các sự kiện

- Có một đồng xu sấp một đồng ngửa.
- Hai đồng xu ngửa.
- Hai đồng xu đều sấp.

Lời giải

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện có một đồng xu sấp một đồng ngửa trong 50 lần tung là:

$$\frac{24}{50} = 0,48.$$

b) Xác suất của thực nghiệm của các sự kiện có Hai đồng xu ngửa là $\frac{14}{50} = 0,28$.

c) Xác suất của thực nghiệm của các sự kiện có Hai đồng xu đều sấp là $\frac{12}{50} = \frac{6}{25}$.

Bài 67: Linh ghi lại số lần đi học muộn của lớp trong 30 ngày liên tiếp. Kết quả cho bởi bảng sau:

1	0	2	0	1	0	0	0	0	1
0	0	3	0	0	1	0	1	2	0
2	1	0	0	1	2	1	0	2	0

Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện:

- Một ngày có đúng 3 bạn đi học muộn.
- Một ngày không có bạn đi học muộn.
- Một ngày có bạn đi học muộn.

Lời giải

Số lần đi học muộn/1 ngày	0	1	2	3
Số lần xuất hiện	16	8	5	1

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ngày có đúng 3 bạn đi học muộn: $\frac{1}{30}$.

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ngày không có bạn đi học muộn: $\frac{16}{30} = \frac{8}{15}$.

c) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ngày có bạn đi học muộn: $\frac{8+5+1}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$.

Bài 68: Quan sát xúc xắc:

Mỗi xúc xắc có sáu mặt, số chấm ở mỗi mặt là một trong các số nguyên dương 1;2;3;4;5;6

Gieo xúc xắc một lần.

- Nêu những kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc.
- Mặt xuất hiện của xúc xắc có phải là phần tử của tập hợp {mặt 1 chấm; mặt 2 chấm; mặt 3 chấm; mặt 4 chấm; mặt 5 chấm; mặt 6 chấm} hay không?
- Viết tập hợp các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc.

d) Nêu hai điều cần chú ý trong mô hình xác suất của trò chơi trên.

Lời giải

a) Có 6 kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc tương ứng với 6 mặt của xúc xắc.

b) Mặt xuất hiện của xúc xắc có là phần tử của tập hợp {mặt 1 chấm; mặt 2 chấm; mặt 3 chấm; mặt 4 chấm; mặt 5 chấm; mặt 6 chấm}.

c) Tập hợp các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Trong đó 1 là kí hiệu cho kết quả xuất hiện mặt 1 chấm; 2 là kí hiệu cho kết quả xuất hiện mặt 2 chấm; 3 là kí hiệu cho kết quả xuất hiện mặt 3 chấm; 4 là kí hiệu cho kết quả xuất hiện mặt 4 chấm; 5 là kí hiệu cho kết quả xuất hiện mặt 5 chấm; 6 là kí hiệu cho kết quả xuất hiện mặt 6 chấm.

d) Nêu hai điều cần chú ý trong mô hình xác suất của trò chơi trên.

* Gieo xúc xắc một lần và mặt xúc xắc xuất hiện ngẫu nhiên.

* Tập hợp các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Trong đó 1 là kí hiệu cho kết quả xuất hiện mặt 1 chấm; 2 là kí hiệu cho kết quả xuất hiện mặt 2 chấm; 3 là kí hiệu cho kết quả xuất hiện mặt 3 chấm; 4 là kí hiệu cho kết quả xuất hiện mặt 4 chấm; 5 là kí hiệu cho kết quả xuất hiện mặt 5 chấm; 6 là kí hiệu cho kết quả xuất hiện mặt 6 chấm.

Bài 69: Bạn Nam chơi trò chơi ném bi. Đích ném là một cái hộp có 25 ô. Điểm tính cho mỗi lần ném bi được quy định như sau:

5	3	3	3	5
3	-2	-1	-2	3
3	-1	5	-1	3
3	-2	-1	-2	3
5	3	3	3	5

+) Ném ra ngoài hộp thì được tính là -5 điểm

+ Nếu ném vào một trong 25 ô trong hộp thì điểm tính được ghi như hình bên

Trong 19 lần đầu Nam ném 5 lần vào ô 5 điểm, 9 lần vào ô 3 điểm, 1 lần vào ô -2 điểm và 5 lần vào ô -1 điểm.

a) Tính số điểm Nam có được sau lần ném thứ 19.

b) Nam còn một lần ném nữa. Hỏi Nam có cơ hội đạt được 50 điểm không? Nếu được thì lần cuối cùng Nam phải ném vào ô bao nhiêu điểm.

Trích đề HSG huyện Quốc Oai năm 2021 - 2022

Lời giải

a) Số điểm Nam có được sau lần ném thứ 19 là : $5.5 + 9.3 + 1.(-2) + 5.(-1) = 45$

b) Để đạt 50 điểm, Nam cần thêm $50 - 45 = 5$ điểm nữa. Do đó Nam vẫn còn cơ hội đạt được 50 điểm. Muốn vậy Nam cần phải ném bi vào ô 5 điểm ở lần cuối cùng.

- Bài 70:** a) Hải gieo một con xúc sắc. Hãy liệt kê các kết quả có thể của sự kiện “số chấm xuất hiện là số nguyên tố lớn hơn 3”.
- b) Hải gieo một con xúc sắc đó 140 lần và ghi lại số chấm xuất hiện ở mỗi lần gieo được kết quả như sau:

Số chấm xuất hiện	1	2	3	4	5	6
Số lần	25	30	27	18	16	14

Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện “số chấm xuất hiện khi chia cho 2 dư 1”

Trích đề HSG huyện Lang Chánh năm 2021-2022

Lời giải

- a) Khi gieo con xúc sắc, các kết quả số chấm xuất hiện có thể là: 1; 2; 3; 4; 5; 6 chấm.

Vậy các kết quả có thể của của sự kiện “số chấm xuất hiện là số nguyên tố lớn hơn 3” xảy ra là: 5 chấm.

b)

Số chấm xuất hiện	1	2	3	4	5	6
Số lần	25	30	27	18	16	14

Số chấm xuất hiện khi chia cho 2 dư 1 là các số 1; 2; 5.

Nên số lần gieo được mặt có số chấm chia cho 2 dư 1 là: $25 + 27 + 16 = 68$ (lần).

Xác suất thực nghiệm của sự kiện “số chấm xuất hiện khi chia cho 2 dư 1” là: $\frac{68}{140} = \frac{17}{35}$

CHỦ ĐỀ: XÁC SUẤT THÔNG KÊ**A. PHẦN NỘI DUNG****Trắc nghiệm**

Bài 1: Cho lần lượt vào hộp bắt đầu bằng các viên bi xanh, đỏ, tím, vàng, rồi lại xanh, đỏ, tím, vàng. Cứ tiếp tục như thế cho đến viên bi thứ 2018. Hỏi viên bi cuối cùng màu gì?

- A. xanh. B. đỏ. C. tím. D. vàng.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022
Lời giải

Đáp án: B. đỏ.

Bài 1: Cho lần lượt vào hộp bắt đầu các viên bi xanh, đỏ, tím vàng rồi lại xanh, đỏ, tím vàng. Cứ như thế cho đến hết 2020 viên bi. Hỏi viên bi thứ 2017 màu gì ?

- A. Xanh B. đỏ C. tím D. vàng

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019

Tự luận

Bài 1: Tại một nhà máy sản xuất bút bi, trước khi đóng gói cần kiểm tra chất lượng. Kiểm tra 1000 chiếc bút bi có 5 chiếc không đảm bảo chất lượng.

a) Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện "bút bi kiểm tra đảm bảo chất lượng".

b) Lợi nhuận khi bán ra mỗi chiếc bút bi đảm bảo chất lượng là 1000 đồng. Với lô hàng gồm 10000 chiếc bút cùng loại mới sản xuất, ước tính khi bán ra sẽ thu được lợi nhuận là bao nhiêu?

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021 - 2022

Lời giải

a) Số bút kiểm tra đảm bảo chất lượng là: $1000 - 5 = 995$ (chiếc).

Xác suất thực nghiệm của sự kiện "bút bi kiểm tra đảm bảo chất lượng" là: $\frac{995}{1000} = 99,5\%$

b) Số bút kiểm tra đảm bảo chất lượng là: $10000 - 5.10 = 9950$ (chiếc).

Ước tính khi bán ra sẽ thu được lợi nhuận là: $9950.1000 = 9950000$ (đồng).

Bài 2: Điểm kiểm tra giữa kỳ môn Toán của lớp 6A và lớp 6B như sau:

Lớp 6A						Lớp 6B					
TT	Tên	Điểm	TT	Tên	Điểm	TT	Tên	Điểm	TT	Tên	Điểm
1	An	8	14	Hải	8	1	An	9	14	Hiếu	9
2	Anh	9	15	Hạnh	6	2	Bách	7	15	Huy	6
3	Ánh	6	16	Nam	7	3	Ban	5	16	Hùng	8
4	Bình	8	17	Minh	5	4	Cúc	9	17	Mạnh	4
5	Châu	4	18	Oanh	9	5	Cầm	5	18	Mận	8
6	Cảnh	5	19	Phong	6	6	Chân	4	19	Pha	8
7	Dung	9	20	Phú	8	7	Dân	8	20	Phú	7
8	Dũng	7	21	Phương	4	8	Diễn	10	21	Phương	5
9	Đức	6	22	Phượng	5	9	Đại	6	22	Vân	4
12	Đạt	6	23	Quân	7	12	Đạt	7	23	Việt	8
11	Đạo	4	24	Quỳnh	8	11	Đình	5	24	Vinh	10

12	Giang	8
13	Hà	5

25	Quý	5
26	Vân	9

12	Giang	8
13	Hà	4

25	Vũ	6
26	Yên	10

a) Em hãy đề xuất một phương án lập bảng số liệu thống kê để so sánh học lực môn Toán của 2 lớp. Từ đó hãy lập bảng số liệu thống kê và vẽ biểu đồ biểu diễn học lực của lớp 6A và lớp 6B theo phương án trên.

b) Có nhận xét gì về học lực môn Toán của lớp 6A và lớp 6B.

Trích đề HSG huyện Kỳ Anh năm 2021-2022

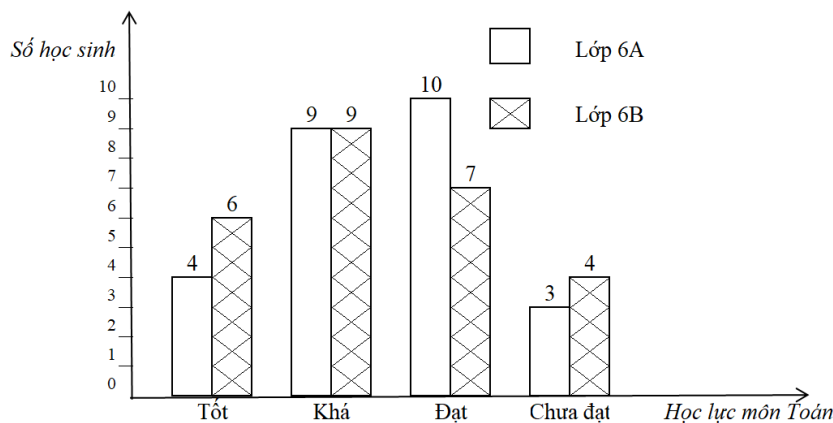
Lời giải

Phương án lập bảng thống kê học lực theo 4 mức tương ứng với điểm số như sau: Tốt: 9–10 điểm; Khá: 7–8 điểm; Đạt: 5–6 điểm; Chưa đạt: dưới 5 điểm.

Bảng số liệu:

Học lực môn Toán \ Lớp	Tốt (9-10 điểm)	Khá (7-8 điểm)	Đạt (5-6 điểm)	Chưa đạt (dưới 5 điểm)
6A	4	9	10	3
6B	6	9	7	4

Biểu đồ:



b) Nhận xét: (1 điểm)

- Số học sinh có học lực Khá môn Toán của 2 lớp bằng nhau
- Lớp 6B có nhiều học sinh học tốt môn toán hơn lớp 6A
- Số học sinh chưa đạt môn Toán của lớp 6B nhiều hơn lớp 6A
- Học sinh Lớp 6A và lớp 6B có học lực môn Toán ở mức Khá và mức Đạt là chủ yếu

Bài 3: Hùng tập ném bóng vào rổ. Khi thực hiện ném 100 lần thì có 35 lần bóng vào rổ.

- 1) Lập bảng thống kê;
- 2) Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ;

Trích đề HSG huyện Chí Linh năm 2021 - 2022

Lời giải

Xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ là: $\frac{35}{100} = 0,35$

Bài 4: Tổng hợp kết quả xét nghiệm nhiễm Covid-19 ở một phòng khám trong năm 2021, ta được bảng sau:

Quý	Số ca xét nghiệm	Số ca dương tính
I	150	15
II	200	21
III	180	17
IV	220	24

Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính.

- a) Theo từng quý trong năm.
b) Sau lần lượt từng quý tính từ đầu năm.

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Lời giải

a) Xác suất thực nghiệm một ca xét nghiệm có kết quả dương tính theo từng quý là:

$$\text{Quý I: } \frac{15}{150} = 10\%$$

$$\text{Quý II: } \frac{21}{200} = 10,5\%$$

$$\text{Quý III: } \frac{17}{180} = 9,4\%$$

$$\text{Quý IV: } \frac{24}{220} = 10,9\%$$

b) Tổng số ca xét nghiệm của cả năm là: $150 + 200 + 180 + 220 = 750$ (ca)

Xác suất thực nghiệm một ca xét nghiệm có kết quả dương tính từng quý tính từ đầu năm là:

$$\text{Quý I: } \frac{15}{750} = 2\%$$

$$\text{Quý II: } \frac{21}{750} = 2,8\%$$

$$\text{Quý III: } \frac{17}{750} = 2,3\%$$

$$\text{Quý IV: } \frac{24}{750} = 3,2\%$$

Bài 5: Tổ 1 của lớp 6A có 9 học sinh, mỗi học sinh được tung đồng xu 4 lần. Tổng số lần xuất hiện mặt S là 25. Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng bao nhiêu?

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

Tổ 1 của lớp 6A có 9 học sinh, mỗi học sinh được tung đồng xu 4 lần. Tổng số lần xuất hiện mặt S là 25.

Số lần tung đồng xu là $9 \cdot 4 = 36$.

Số lần xuất hiện mặt N là $36 - 25 = 11$.

Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N là $\frac{11}{36}$.

Bài 6:

a) Minh gieo một con xúc sắc. Hãy liệt kê các kết quả có thể của sự kiện “số chấm xuất hiện là số nguyên tố lớn hơn 2”.

b) Minh gieo một con xúc sắc đó 100 lần và ghi lại số chấm xuất hiện ở mỗi lần gieo được kết quả như sau:

Số chấm xuất hiện	1	2	3	4	5	6
Số lần	19	20	18	22	10	11

Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện “số chấm xuất hiện khi chia cho 3 dư 2”

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021-2022

Lời giải

a) Khi gieo con xúc sắc, các kết quả số chấm xuất hiện có thể là: 1; 2; 3; 4; 5; 6 chấm.

Vậy các kết quả có thể của của sự kiện “số chấm xuất hiện là số nguyên tố lớn hơn 2 ” xảy ra là: 3 ; 5 chấm.

b)

Số chấm xuất hiện	1	2	3	4	5	6
Số lần	19	20	18	22	10	11

Số chấm xuất hiện khi chia cho 3 dư 2 là các số 2, 5.

Nên số lần gieo được mặt có số chấm chia cho 3 dư 2 là: $20 + 10 = 30$ (lần).

Xác suất thực nghiệm của sự kiện “số chấm xuất hiện khi chia cho 3 dư 2” là: $\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

Trắc nghiệm

Bài 1: Cho lần lượt vào hộp bắt đầu bằng các viên bi xanh, đỏ, tím, vàng, rồi lại xanh, đỏ, tím, vàng. Cứ tiếp tục như thế cho đến viên bi thứ 2018. Hỏi viên bi cuối cùng màu gì?

- A. xanh. B. đỏ. C. tím. D. vàng.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 1: Cho lần lượt vào hộp bắt đầu các viên bi xanh, đỏ, tím vàng rồi lại xanh, đỏ, tím vàng. Cứ như thế cho đến hết 2020 viên bi. Hỏi viên bi thứ 2017 màu gì ?

- A. Xanh B. đỏ C. tím D. vàng

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018 - 2019

Tự luận

Bài 1: Tại một nhà máy sản xuất bút bi, trước khi đóng gói cần kiểm tra chất lượng. Kiểm tra 1000 chiếc bút bi có 5 chiếc không đảm bảo chất lượng.

a) Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện "bút bi kiểm tra đảm bảo chất lượng".

b) Lợi nhuận khi bán ra mỗi chiếc bút bi đảm bảo chất lượng là 1000 đồng. Với lô hàng gồm 10000 chiếc bút cùng loại mới sản xuất, ước tính khi bán ra sẽ thu được lợi nhuận là bao nhiêu?

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021 - 2022

Bài 2: Điểm kiểm tra giữa kỳ môn Toán của lớp 6A và lớp 6B như sau:

Lớp 6A						Lớp 6B					
TT	Tên	Điểm	TT	Tên	Điểm	TT	Tên	Điểm	TT	Tên	Điểm
1	An	8	14	Hải	8	1	An	9	14	Hiếu	9
2	Anh	9	15	Hạnh	6	2	Bách	7	15	Huy	6
3	Ánh	6	16	Nam	7	3	Ban	5	16	Hùng	8
4	Bình	8	17	Minh	5	4	Cúc	9	17	Mạnh	4
5	Châu	4	18	Oanh	9	5	Cầm	5	18	Mận	8
6	Cảnh	5	19	Phong	6	6	Chân	4	19	Pha	8
7	Dung	9	20	Phú	8	7	Dân	8	20	Phú	7
8	Dũng	7	21	Phương	4	8	Diễn	10	21	Phương	5
9	Đức	6	22	Phượng	5	9	Đại	6	22	Vân	4

12	Đạt	6
11	Đạo	4
12	Giang	8
13	Hà	5

23	Quân	7
24	Quỳnh	8
25	Quý	5
26	Vân	9

12	Đạt	7
11	Đình	5
12	Giang	8
13	Hà	4

23	Việt	8
24	Vinh	10
25	Vũ	6
26	Yên	10

a) Em hãy đề xuất một phương án lập bảng số liệu thống kê để so sánh học lực môn Toán của 2 lớp. Từ đó hãy lập bảng số liệu thống kê và vẽ biểu đồ biểu diễn học lực của lớp 6A và lớp 6B theo phương án trên.

b) Có nhận xét gì về học lực môn Toán của lớp 6A và lớp 6B

Trích đề HSG huyện Kỳ Anh năm 2021-2022

Bài 3: Hùng tập ném bóng vào rổ. Khi thực hiện ném 100 lần thì có 35 lần bóng vào rổ.

1) Lập bảng thống kê;

2) Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ;

Trích đề HSG huyện Chí Linh năm 2021 - 2022

Bài 4: Tổng hợp kết quả xét nghiệm nhiễm Covid-19 ở một phòng khám trong năm 2021, ta được bảng sau:

Quý	Số ca xét nghiệm	Số ca dương tính
I	150	15
II	200	21
III	180	17
IV	220	24

Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính.

a) Theo từng quý trong năm.

b) Sau lần lượt từng quý tính từ đầu năm.

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Bài 5: Tổ 1 của lớp 6A có 9 học sinh, mỗi học sinh được tung đồng xu 4 lần. Tổng số lần xuất hiện mặt S là 25. Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng bao nhiêu?

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2021 – 2022

Bài 6:

a) Minh gieo một con xúc sắc. Hãy liệt kê các kết quả có thể của sự kiện “số chấm xuất hiện là số nguyên tố lớn hơn 2”.

b) Minh gieo một con xúc sắc đó 100 lần và ghi lại số chấm xuất hiện ở mỗi lần gieo được kết quả như sau:

Số chấm xuất hiện	1	2	3	4	5	6
Số lần	19	20	18	22	10	11

Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện “số chấm xuất hiện khi chia cho 3 dư 2”

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021-2022

C. SỬU TÂM CÁC BÀI TRONG CÁC ĐỀ CỦA NHỮNG NĂM TRƯỚC ĐÓ

(Phần này lấy các câu từ những năm trước, trước năm 2020-2021, tối thiểu 10 bài)

Bài 1: Một hộp có 1 viên bi xanh (X), 1 viên bi đỏ (Đ) và 1 viên bi vàng (V). Hà lấy ngẫu nhiên 1 viên bi, ghi màu rồi trả lại hộp. Thực hiện hoạt động trên 10 lần và Hà thu được kết quả như bảng sau:

Lần lấy thứ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Màu viên bi	V	Đ	V	Đ	X	X	V	Đ	X	Đ

a) Hãy kiểm đếm số lần xuất hiện viên bi màu xanh, viên bi màu đỏ, viên bi màu vàng sau 10 lần lấy bi.

b) Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện “Hà lấy được viên bi đỏ”.

c) Hãy tính xác suất thực nghiệm xuất hiện bi màu xanh.

Lời giải

a) Số lần xuất hiện viên bi màu xanh là 3 lần, số lần xuất hiện viên bi màu đỏ là 4 lần, số lần xuất hiện viên bi màu vàng là 3 lần.

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện “Hà lấy được viên bi đỏ” là: $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

c) Xác suất thực nghiệm xuất hiện viên bi màu xanh là: $\frac{3}{10}$.

Bài 2: Trong hộp có một số viên bi màu xanh, đỏ, vàng có kích thước giống nhau. Lấy ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp, xem màu rồi trả lại. Lặp lại hoạt động đó 50 lần. Biết xác suất thực nghiệm xuất hiện viên bi đỏ là 0,4.

a) Hãy tính xem viên bi đỏ đã xuất hiện bao nhiêu lần?

b) Số lần bi vàng xuất hiện là 15 lần. Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện “Lấy được bi xanh”.

Lời giải

a) Số lần viên bi đỏ xuất hiện là: $50 \cdot 0,4 = 20$ (lần)

b) Số lần xuất hiện bi xanh là: $50 - 20 - 15 = 15$ (lần)

Loại bi	Bi xanh	Bi đỏ	Bi vàng
Số lần	15	20	15

Xác suất thực nghiệm của sự kiện “Lấy được bi xanh” là: $\frac{15}{50} = 0,3$.

Bài 3: Trong hộp có chứa nhiều bóng màu xanh (X), đỏ (Đ) và hồng (H). My nhắm mắt trộn đều hộp rồi chọn từ đó một quả bóng, ghi lại màu bóng, rồi trả lại hộp. Lặp lại các bước trên 20 lần, My được bảng kết quả như sau:

X	Đ	Đ	X	X	Đ	X	H	X	X
X	Đ	X	X	Đ	X	Đ	X	X	H

Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện:

a) My lấy được bóng màu xanh.

b) My lấy được bóng màu đỏ.

c) My lấy được bóng màu hồng.

Em hãy dự đoán xem trong hộp bóng màu nào là nhiều nhất, bóng màu nào là ít nhất?

Lời giải

a) Số lần My lấy được bóng màu xanh là 12 lần. Vậy xác suất thực nghiệm của sự kiện “My lấy được bóng màu xanh” là $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

b) Số lần My lấy được bóng màu đỏ là 6 lần. Vậy xác suất thực nghiệm của sự kiện “My lấy được bóng màu đỏ” là $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

c) Số lần My lấy được bóng màu hồng là 2 lần. Vậy xác suất thực nghiệm của sự kiện “My lấy được bóng màu hồng” là $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

Vì trong phần lớn các lần lấy được bóng màu xanh nên có thể số bóng xanh trong hộp là nhiều nhất. Số lần lấy được bóng màu hồng là ít hơn nhiều so với số lần lấy được bóng màu xanh và màu đỏ nên có thể số bóng màu hồng trong hộp là ít nhất.

Bài 4: Gieo một con xúc xắc 6 mặt 100 lần ta được kết quả như sau:

Mặt	1 chấm	2 chấm	3 chấm	4 chấm	5 chấm	6 chấm
Số lần xuất hiện	17	18	15	14	16	20

- Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện gieo được mặt có số lẻ chấm trong 100 lần gieo trên
- Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện gieo được mặt có số chấm lớn hơn 4
- Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện gieo được mặt có số chấm là một số nguyên tố
- Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện gieo được mặt có số chấm là một số chính phương

Lời giải

a) Số lần xuất hiện các mặt lẻ chấm là: $17 + 15 + 16 = 48$ (lần).

Xác suất thực nghiệm của sự kiện gieo được mặt có số lẻ chấm trong 100 lần gieo trên là: $\frac{48}{100} = \frac{12}{25}$.

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện gieo được mặt có số chấm lớn hơn 4 là: $\frac{16 + 20}{100} = \frac{9}{25}$.

c) Xác suất thực nghiệm của sự kiện gieo được mặt có số chấm là một số nguyên tố là:

$$\frac{18 + 15 + 16}{100} = \frac{49}{100}$$

d) Số chính phương là: 1; 4 nên số lần mặt trên của con xúc xắc có số chấm là 1 và 4 là: $17 + 14 = 31$ (lần).

Xác suất của sự kiện gieo được mặt có số chấm là một số chính phương là: $\frac{31}{100}$.

Bài 5: Trong buổi thực hành môn Khoa học tự nhiên đo thể tích của vật thể không xác định được hình dạng, lớp 6A có 40 học sinh thực hiện phép đo thì có 35 học sinh thực hiện thành công. Em hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện “Phép đo được thực hiện thành công”.

Lời giải

Số lần thực hiện phép đo là $n = 40$

Số lần đo thành công là $k = 35$

Xác suất thực nghiệm của sự kiện “Phép đo được thực hiện thành công” là: $\frac{k}{n} = \frac{35}{40} = 87,5\%$

Bài 6: Tung một đồng xu 20 lần liên tiếp. Hãy ghi kết quả thống kê theo mẫu sau:

Lần tung	Kết quả tung	Số lần xuất hiện mặt N	Số lần xuất hiện mặt S
1	?	k	s
...	?		

Tính xác suất thực nghiệm:

- Xuất hiện mặt N;
- Xuất hiện mặt S ;

Lời giải

Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N khi tung đồng xu 20 lần là: $\frac{k}{n} = \frac{k}{20}$

Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S khi tung đồng xu 20 lần là: $\frac{s}{n} = \frac{s}{20}$

Bài 7:

- a) Nếu tung một đồng xu 22 lần liên tiếp; có 13 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng bao nhiêu?
- b) Nếu tung một đồng xu 25 lần liên tiếp; có 11 lần xuất hiện mặt S thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng bao nhiêu?
- c) Nếu tung một đồng xu 30 lần liên tiếp; có 14 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng bao nhiêu?

Lời giải

a) Nếu tung một đồng xu 22 lần liên tiếp; có 13 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng: $\frac{13}{22}$

b) Nếu tung một đồng xu 25 lần liên tiếp; có 11 lần xuất hiện mặt S thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng: $\frac{11}{25}$

c) Nếu tung một đồng xu 30 lần liên tiếp; có 14 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng: $\frac{30-14}{30} = \frac{3}{15}$

Bài 8: Một hộp có 10 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1,2,3,...,10 ; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau.

Rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ từ trong hộp, ghi lại số của thẻ rút được và bỏ lại thẻ đó vào hộp. Sau 25 lần rút thẻ liên tiếp, hãy ghi kết quả thống kê theo mẫu sau:

Lần rút	Kết quả rút	Tổng số lần xuất hiện									
		Số 1	Số 2	Số 3	Số 4	Số 5	Số 6	Số 7	Số 8	Số 9	Số 10
1	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
...	?										

Tính xác suất thực nghiệm:

- a) Xuất hiện số 1;
- b) Xuất hiện số 5;
- c) Xuất hiện số 10.

Lời giải

a) Gọi số lần xuất hiện số 1 là k thì xác suất thực nghiệm xuất hiện số 1: $\frac{k}{25}$

b) Gọi số lần xuất hiện số 5 là p thì xác suất thực nghiệm xuất hiện số 5: $\frac{p}{25}$

c) Gọi số lần xuất hiện số 10 là q thì xác suất thực nghiệm xuất hiện số 10: $\frac{q}{25}$

Bài 9: Số cuộc điện thoại một người nhận được trong một ngày của tháng 6 được ghi lại ở bảng sau:

Số cuộc điện thoại	1	2	3	4	5	8
Số ngày	2	4	12	7	4	1

Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện “Một ngày trong tháng có ít nhất 5 cuộc gọi”.

Lời giải

Một ngày trong tháng có ít nhất 5 cuộc gọi nghĩa là ngày đó sẽ có 5 cuộc gọi hoặc 8 cuộc gọi. Vậy số ngày trong tháng có ít nhất 5 cuộc gọi là: $4+1=5$ (ngày).

Tổng số ngày của tháng 6 là: $2+4+12+7+4+1=30$ (ngày)

Xác suất thực nghiệm của sự kiện “Một ngày trong tháng có ít nhất 5 cuộc gọi” là: $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

Bài 10: Minh gieo một con xúc xắc 100 lần và ghi lại số chấm xuất hiện ở mỗi lần gieo được kết quả như sau:

Số chấm xuất hiện	1	2	3	4	5	6
Số lần	15	20	18	22	10	15

Xác suất thực nghiệm của sự kiện “Số chấm xuất hiện chia cho 3 dư 2” là

Lời giải

Số chấm xuất hiện chia cho 3 dư 2 là các số 2, 5.

Nên số lần gieo được mặt có số chấm chia cho 3 dư 2 là: $20+10=30$ (lần)

Xác suất thực nghiệm của sự kiện “Số chấm xuất hiện chia cho 3 dư 2” là: $\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$.

Bài 11: Một túi gồm 4 loại bóng: xanh, đỏ, vàng, tím. Lấy ngẫu nhiên hai quả bóng. Liệt kê các kết quả có thể của sự kiện hai quả bóng cùng màu với nhau.

Lời giải:

Các kết quả có thể xảy ra là:

- 2 bóng đều màu xanh.
- 2 bóng đều màu đỏ.
- 2 bóng đều màu tím.
- 2 bóng đều màu vàng.

Bài 12: Một cái hộp chứa 3 màu bóng: xanh, đỏ, vàng với 2 kích cỡ: lớn, nhỏ cho mỗi màu. Lấy ngẫu nhiên hai quả bóng. Liệt kê các kết quả sự kiện hai quả bóng khác màu và khác kích cỡ với nhau.

Lời giải:

Các kết quả có thể xảy ra là:

- 1 bóng màu xanh lớn, 1 bóng màu đỏ nhỏ.
- 1 bóng màu xanh nhỏ, 1 bóng màu đỏ lớn.
- 1 bóng màu xanh lớn, 1 bóng màu vàng nhỏ.
- 1 bóng màu xanh nhỏ, 1 bóng màu vàng lớn.
- 1 bóng màu đỏ lớn, 1 bóng màu vàng nhỏ.

1 bóng màu đỏ nhỏ, 1 bóng màu vàng lớn.

Bài 13: Một lồng quay xô xổ có chứa 10 quả bóng có cùng kích thước được đánh số từ 0 đến 9. Sau mỗi lần quay chỉ có đúng 1 quả bóng lọt xuống lỗ. Sau khi ghi lại số của quả bóng này, bóng được trả lại lồng để thực hiện lần quay tiếp theo. Giả sử lần quay thứ nhất bóng số 0 đã rơi xuống. Liệt kê sự kiện sự kiện “Hai lần quay đều xuất hiện hai số không giống nhau”.

Lời giải:

Các kết quả có thể xảy ra của sự kiện “Hai lần quay đều xuất hiện hai số không giống nhau” là:

Số bóng sau 2 lần quay là: 0 ; 1

Số bóng sau 2 lần quay là: 0 ; 2

Số bóng sau 2 lần quay là: 0 ; 3

Số bóng sau 2 lần quay là: 0 ; 4

Số bóng sau 2 lần quay là: 0 ; 5

Số bóng sau 2 lần quay là: 0 ; 6

Số bóng sau 2 lần quay là: 0 ; 7

Số bóng sau 2 lần quay là: 0 ; 8

Số bóng sau 2 lần quay là: 0 ; 9.

Bài 14: Hùng tập ném bóng vào rổ. Khi thực hiện ném 100 lần thì có 35 lần bóng vào rổ.

a) Lập bảng thống kê;

b) Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ;

c) Theo em Hùng có thể tăng xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ không?

Lời giải:

a) Số lần ném bóng không vào rổ là: $100 - 35 = 65$ (lần).

Bảng thống kê:

Kết quả	Bóng vào rổ	Bóng không vào rổ
Số lần	35	65

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ là: $\frac{35}{100} = 0,35$.

c) Hùng có thể tăng xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ nếu Hùng chăm chỉ luyện tập.

Bài 15:

a) Nếu tung một đồng xu 22 lần liên tiếp; có 13 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng bao nhiêu?

b) Nếu tung một đồng xu 25 lần liên tiếp; có 11 lần xuất hiện mặt S thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng bao nhiêu?

c) Nếu tung một đồng xu 30 lần liên tiếp; có 14 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng bao nhiêu?

Lời giải:

a) Nếu tung một đồng xu 22 lần liên tiếp; có 13 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng: $\frac{13}{22}$.

b) Nếu tung một đồng xu 25 lần liên tiếp; có 11 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng: $\frac{11}{25}$.

c) Nếu tung một đồng xu 30 lần liên tiếp; có 14 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng: $\frac{30-14}{30} = \frac{3}{15}$.

Bài 16: Một hộp có 10 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 10; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ từ trong hộp, ghi lại số của thẻ rút được và bỏ lại thẻ đó vào hộp. Sau 25 lần rút thẻ liên tiếp, hãy ghi kết quả thống kê theo mẫu sau:

Lần rút	Kết quả	Tổng số lần xuất hiện

	rút	Số 1	Số 2	Số 3	Số 4	Số 5	Số 6	Số 7	Số 8	Số 9	Số 10
1	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
...	?										

Tính xác suất thực nghiệm:

- Xuất hiện số 1;
- Xuất hiện số 5;
- Xuất hiện số 10.

Lời giải:

- Gọi số lần xuất hiện số 1 là k thì xác suất thực nghiệm xuất hiện số 1: $\frac{k}{25}$.
- Gọi số lần xuất hiện số 1 là k thì xác suất thực nghiệm xuất hiện số 5: $\frac{k}{25}$.
- Gọi số lần xuất hiện số 1 là k thì xác suất thực nghiệm xuất hiện số 10: $\frac{k}{25}$.

Bài 17: Số lượng khách hàng đến một cửa hàng mỗi ngày trong quý IV của năm 2020 được ghi lại ở bảng sau:

Số khách hàng	0–10	11–20	21–30	31–40	41–50	51–60
Số ngày	4	6	27	28	17	10

Chọn ngẫu nhiên một ngày trong quý IV. Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện “Trong ngày được chọn có không quá 30 khách hàng”.

Lời giải:

Số ngày mà trong ngày đó có không quá 30 khách hàng (số khách hàng ≤ 30) đến cửa hàng là: $4+6+27=37$ (ngày).

Tổng số ngày của quý IV là: $4+6+27+28+17+10=92$ (ngày).

Xác suất thực nghiệm của sự kiện “Trong ngày được chọn có không quá 30 khách hàng” là: $\frac{37}{92}$.

Bài 18: Một vận động viên nhảy xa thực hiện các lượt nhảy có kết quả như sau (đơn vị tính là mét):

Số mét	2,3	2,4
Số lần nhảy	7	3

- Vận động viên trên thực hiện nhảy bao nhiêu lần?
- Có bao nhiêu lần nhảy được 2,3 mét, bao nhiêu lần nhảy được 2,4 mét?
- Tính xác suất thực nghiệm của các sự kiện thực hiện lần nhảy được 2,3 mét.

Lời giải:

Số mét	2,3	2,4
Số lần nhảy	7	3

- Vận động viên trên thực hiện 10 lần nhảy.
- Có 7 lần nhảy được 2,3 mét, có 3 lần nhảy được 2,4 mét.
- Xác suất thực nghiệm của sự kiện thực hiện lần nhảy được 2,3 mét là: $\frac{7}{10}=0,7$.

Bài 19: Sau đợt kiểm tra sức khỏe răng miệng của các em trong một lớp 6. Thống kê số lần đánh răng trong một ngày của các em được ghi lại ở bảng sau:

Số lần đánh răng	1	2	3
Số học sinh	8	21	11

Hãy tính xác suất thực nghiệm của các sự kiện:

- Thực hiện đánh răng một lần;
- Thực hiện đánh răng từ hai lần trở lên.

Lời giải:

Số lần đánh răng	1	2	3
------------------	---	---	---

Số học sinh	8	21	11
-------------	---	----	----

a) Tổng số học sinh: 40

Xác suất thực nghiệm của sự kiện đánh răng một lần là: $\frac{8}{40} = 0,2$.

b) Số học sinh thực hiện đánh răng từ hai lần trở lên là: $21+11=32$ (Học sinh).

Xác suất thực nghiệm của sự kiện đánh răng một lần là: $\frac{32}{40} = 0,8$.

Bài 20: Minh gieo một con xúc xắc 100 lần và ghi lại số chấm xuất hiện ở mỗi lần gieo được kết quả như sau:

Số chấm xuất hiện	1	2	3	4	5	6
Số lần	15	20	18	22	10	15

Tính xác suất thực nghiệm của các sự kiện sau:

a) Số chấm xuất hiện là số chẵn.

b) Số chấm xuất hiện lớn hơn 2.

Lời giải:

a) Số chấm xuất hiện là số chẵn là: $20+22+15=57$.

Xác suất thực nghiệm của số chấm xuất hiện là số chẵn là: $\frac{57}{100} = 57\%$.

b) Số chấm xuất hiện lớn hơn 2 là: $18+10+22+15=65$.

Xác suất thực nghiệm của số chấm xuất hiện lớn hơn 2 là: $\frac{65}{100} = 65\%$.

Bài 21: Có 15 quyển sách trong đó có 7 quyển sách Toán, 5 quyển sách Văn và 3 quyển sách Lý. Tính xác suất để lấy được:

a) Hai quyển sách Toán.

b) Hai quyển sách trong đó có 1 quyển Văn và 1 quyển Lý.

c) Hai quyển sách trong đó có ít nhất 1 quyển Văn.

Lời giải

a) Có 15 quyển sách, mỗi lần lấy ra 2 quyển. Vậy tổng số lần có thể lấy ra là:

$$n = 15 \cdot 14 : 2 = 105$$

Xác suất để lấy được hai quyển sách Toán là: $\frac{7 \cdot 6 : 2}{105} = \frac{1}{5}$

b) Xác suất để lấy được hai quyển sách trong đó có 1 quyển Văn và 1 quyển Lý là: $\frac{5 \cdot 3}{105} = \frac{1}{7}$

c) Số cách chọn hai quyển Văn là: $5 \cdot 4 : 2 = 10$

Số cách chọn một quyển Văn và một quyển toán hoặc một quyển Lý là: $5 \cdot (7 + 3) = 50$

Xác suất để lấy được hai quyển sách trong đó có ít nhất 1 quyển Văn là: $\frac{10 + 50}{105} = \frac{4}{7}$

Bài 22. Tung hai đồng xu cân đối 50 lần ta được kết quả như sau:

Sự kiện	Hai đồng sấp	Một đồng sấp, một đồng ngửa	Hai đồng ngửa
Số lần	12	24	14

Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện:

a) Có một đồng xu sấp, một đồng xu ngửa;

b) Hai đồng xu đều ngửa.

Lời giải

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện có một đồng xu sấp, một đồng xu ngửa trong 50 lần tung là:

$$\frac{24}{50} = 0,48$$

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện cả hai đồng xu đều ngửa trong 50 lần tung là: $\frac{14}{50} = 0,28$

Bài 23: An gieo một con xúc xắc 100 lần và ghi lại số chấm xuất hiện ở mỗi lần gieo được kết quả như sau:

Số chấm xuất hiện	1	2	3	4	5	6
Số lần	20	15	22	18	15	10

Tính xác suất thực nghiệm của các sự kiện sau:

- a) Số chấm xuất hiện là số lẻ;
b) Số chấm xuất hiện là lớn hơn 3.

Lời giải

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện số chấm xuất hiện là số lẻ là:

$$\frac{20+22+15}{100} = 0,57$$

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện số chấm xuất hiện lớn hơn 3 là:

$$\frac{18+10+15}{100} = 0,43$$

Bài 24. Trong hộp có một số bút xanh và một số bút đỏ. Lấy ngẫu nhiên 1 bút từ hộp, xem màu rồi trả lại. Lặp lại hoạt động trên 50 lần, ta được kết quả như sau:

Loại bút	Bút xanh	Bút đỏ
Số lần	42	8

- a) Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện lấy được bút xanh.
b) Em hãy dự đoán xem trong hộp loại bút nào có nhiều hơn.

Lời giải

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện lấy được bút xanh là: $\frac{42}{50} = 0,84$

b) Không dự đoán được trong hộp bút loại bút nào nhiều hơn.

Bài 25. Bảng sau là tổng hợp kết quả xét nghiệm người nhiễm Covid 19 ở một bệnh viện trong một năm:

Quý	Số ca xét nghiệm	Số ca dương tính
I	120	10
II	180	12

III	250	18
IV	100	9

Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính:

- Theo từng quý trong năm.
- Theo năm.

Lời giải

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính trong quý I là:

$$\frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

+ Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính trong quý II là:

$$\frac{12}{180} = \frac{1}{15}$$

+ Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính trong quý III là:

$$\frac{18}{250} = \frac{9}{125}$$

+ Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính trong quý IV là: $\frac{9}{100}$

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính trong 1 năm là:

$$\frac{10+12+18+9}{120+180+250+100} = \frac{49}{650}$$

Bài 26. Kết quả kiểm tra môn Toán và Ngữ văn của một số học sinh được lựa chọn ngẫu nhiên cho ở bảng sau:

Ngữ văn \ Toán	Giỏi	Khá	Trung bình
Giỏi	40	20	15
Khá	15	30	10
Trung bình	5	15	20

(Ví dụ: Số học sinh có kết quả Toán — giỏi, Ngữ văn — khá là 20)

Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện một học sinh được chọn ra một cách ngẫu nhiên có kết quả:

- Môn Toán đạt loại giỏi.
- Loại khá trở lên ở cả hai môn.
- Loại trung bình ở ít nhất một môn.

Lời giải

Tổng số học sinh được lựa chọn ngẫu nhiên là: $n = 40 + 20 + 15 + 15 + 30 + 10 + 5 + 15 + 20 = 170$

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một học sinh Môn Toán đạt loại giỏi là:

$$\frac{40+20+15}{170} = \frac{75}{170} = \frac{15}{34}$$

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một học sinh đạt loại khá trở lên ở cả hai môn là:

$$\frac{40+20+15+30}{170} = \frac{105}{170} = \frac{21}{34}$$

c) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một học sinh đạt loại trung bình ít nhất một môn là:

$$\frac{15+10+20+5+15}{170} = \frac{65}{170} = \frac{13}{34}$$

Bài 27: Một cái hộp chứa 3 màu bóng: xanh, đỏ, vàng và 2 kích cỡ: lớn, nhỏ. Lấy ngẫu nhiên hai quả bóng. Nếu lấy ra được 2 quả bóng màu đỏ thì sự kiện hai quả bóng không phải cùng kích cỡ có xảy ra không?

Lời giải:

Các kết quả có thể xảy ra là:

2 bóng màu đỏ, cùng cỡ nhỏ;

2 bóng đều màu đỏ, cùng cỡ lớn;

2 bóng đều màu đỏ, 1 cỡ nhỏ và 1 cỡ lớn.

⇒ Xảy ra ba sự kiện: 2 bóng màu đỏ cùng cỡ nhỏ, 2 bóng màu đỏ cùng cỡ lớn và 2 bóng màu đỏ không cùng kích cỡ.

⇒ Sự kiện hai quả bóng không phải cùng kích cỡ xảy ra.

Bài 28: Trò chơi dành cho hai người chơi. Mỗi người chơi chọn một trong sáu số 1;2;3;4;5;6 rồi gieo con xúc xắc năm lần liên tiếp. Mỗi lần gieo, nếu xuất hiện mặt có số chấm bằng số đã chọn thì được mười điểm, ngược lại bị trừ năm điểm. Ai được nhiều điểm hơn sẽ thắng.

An và Bình cùng chơi, An chọn số 3 và Bình chọn số 4. Kết quả gieo của An và Bình lần lượt 2, 3, 6, 4, 3 và 4, 3, 4, 5, 4. Hỏi An và Bình, ai là người thắng.

Lời giải:

Muốn xem An và Bình ai là người thắng cuộc thì ta phải tính số điểm của An và Bình rồi so sánh để tìm người thắng cuộc.

An chọn số 3, kết quả gieo của An là 2, 3, 6, 4, 3 nên An được số điểm là:

$$-5+10-5-(-5)+10=5 \text{ (điểm)}$$

Bình chọn số 4, kết quả gieo của Bình là 4, 3, 4, 5, 4 nên Bình được số điểm là:

$$10-5+10-5+10=20 \text{ (điểm)}$$

Số điểm của Bình nhiều hơn so với điểm của An. Vậy Bình thắng cuộc.

Bài 29: Mai (Viết tắt: M) và Linh (Viết tắt: L) cùng chơi, mỗi người gieo một đồng xu liên tiếp 30 lần được kết quả như sau (S : sấp, N : ngửa):

M	S	N	N	S	S	N	S	N	S	N	S	N	N	S	S	N	N	S	S	N	N	N	S	S	S	N	N	N	S	S
L	N	S	S	N	N	S	N	S	N	S	S	S	S	N	S	N	N	S	S	S	N	N	N	S	S	S	N	N	S	S

Người chơi được một điểm khi có đúng ba lần liên tiếp đồng xu ra mặt ngửa. Người nào được nhiều điểm hơn là người thắng. Sự kiện Mai thắng có xảy ra hay không?

Lời giải:

Mai gieo đồng xu có đúng ba lần liên tiếp đồng xu ra mặt ngửa được 2 lần nên được 2 điểm.

Linh gieo đồng xu có đúng ba lần liên tiếp đồng xu ra mặt ngửa được 1 lần nên được 1 điểm.

Mai được nhiều điểm hơn Linh nên Mai là người thắng cuộc.

Vậy sự kiện Mai thắng có xảy ra.

Bài 30: Hà (Viết tắt: H - dòng trên ở bảng) và Hằng (Viết tắt: H - dòng dưới ở bảng) cùng chơi, mỗi người gieo một đồng xu liên tiếp 36 lần được kết quả như sau (S : sấp, N : ngửa).

H	S	N	N	S	S	S	N	S	N	S	N	S	N	N	S	S	S	N	N	S	S	N	N	N	S	N	S	S	N	N	N	S	S	S	N	S
H	S	N	S	S	N	N	S	S	S	N	S	S	S	S	N	S	N	N	S	S	S	N	S	N	N	S	S	S	N	N	N	S	N	S	N	S

Người chơi được một điểm khi có đúng ba lần liên tiếp đồng xu ra mặt sấp. Người nào được điểm nhiều hơn là người thắng. Sự kiện Hà thắng có xảy ra hay không?

Lời giải:

Hà gieo đồng xu có đúng ba lần liên tiếp đồng xu ra mặt sấp được 3 lần nên được 3 điểm.

Hằng gieo đồng xu có đúng bốn lần liên tiếp đồng xu ra mặt sấp được 4 lần nên được 4 điểm. Hằng được nhiều điểm hơn Hà nên Hằng là người thắng cuộc.

Vậy sự kiện Hà thắng không xảy ra.

Bài 31: Bình lấy ngẫu nhiên một chiếc bút từ hộp bút màu gồm: 2 bút xanh, 3 bút đỏ, 4 bút vàng để tô. Nếu Bình lấy được bút màu đỏ thì sự kiện Bình không lấy được bút màu xanh có xảy ra hay không?

Lời giải:

Nếu Bình lấy được bút màu đỏ

Nên xảy ra sự kiện Bình lấy được bút màu đỏ.

Vậy sự kiện Bình không lấy được bút màu xanh có xảy ra.

Bài 32: Cuối năm, ban phụ huynh có 45 gói quà cho 45 bạn trong lớp. Trong số đó có 20 gói quà là truyện cười, 15 gói quà là sách hướng dẫn kỹ năng sống và 10 gói quà là hộp bút. An được tặng ngẫu nhiên một món quà. Nếu món quà An nhận được là 1 quyển sách kỹ năng sống, Sự kiện “Món quà An nhận được không phải là hộp bút” có xảy ra không.

Lời giải:

An nhận được 1 quyển sách kỹ năng sống

⇒ Xảy ra sự kiện “An nhận được một quyển sách kỹ năng sống”

⇒ Xảy ra sự kiện “Món quà An nhận được không phải là hộp bút”

Bài 33: Một lồng quay số xổ có chứa 10 quả bóng có cùng kích thước được đánh số từ 0 đến 9. Sau mỗi lần quay chỉ có đúng 1 quả bóng lọt xuống lỗ. Sau khi ghi lại số của quả bóng này, bóng được trả lại lồng để thực hiện lần quay tiếp theo. Nếu lần quay đầu nhận được số 0, Sự kiện “Hai lần quay hai số giống nhau” có xảy ra không.

Lời giải:

Các kết quả có thể xảy ra sau lần quay thứ hai là:

Số bóng sau 2 lần quay là: 0;0

Số bóng sau 2 lần quay là: 0;1

Số bóng sau 2 lần quay là: 0;2

Số bóng sau 2 lần quay là: 0;3

Số bóng sau 2 lần quay là: 0;4

Số bóng sau 2 lần quay là: 0;5

Số bóng sau 2 lần quay là: 0;6

Số bóng sau 2 lần quay là: 0;7

Số bóng sau 2 lần quay là: 0;8

Số bóng sau 2 lần quay là: 0;9

⇒ Sự kiện “Hai lần quay hai số giống nhau” có xảy ra.

Bài 34: Một hộp có chứa 45 phiếu bốc thăm cùng loại. Trong đó có 36 phiếu có nội dung “Chúc bạn may mắn lần sau”, 9 phiếu có nội dung “Quà tặng”. Bạn Việt thực hiện bốc thăm lấy ngẫu nhiên một phiếu trong hộp.

a) Liệt kê các kết quả có thể;

b) Lập bảng thống kê số lượng phiếu ở trên;

c) Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện lấy được phiếu “Quà tặng”.

Lời giải

a) Các kết quả có thể là: Chúc bạn may mắn lần sau, Quà tặng.

b) Bảng thống kê:

Loại phiếu	Chúc bạn may mắn lần sau	Quà tặng
Số lượng	36	9

c) Xác suất thực nghiệm của sự kiện lấy được phiếu “Quà tặng”: $\frac{9}{45} = 0,2$

Bài 35: Hùng tập ném bóng vào rổ. Khi thực hiện ném 100 lần thì có 35 lần bóng vào rổ.

a) Lập bảng thống kê;

b) Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ;

c) Theo em Hùng có thể tăng xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ không?

Lời giải

a) Số lần ném bóng không vào rổ là: $100 - 35 = 65$ (lần).

Bảng thống kê:

Kết quả	Bóng vào rổ	Bóng không vào rổ
Số lần	35	65

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ là: $\frac{35}{100} = 0,35$.

c) Hùng có thể tăng xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ nếu Hùng chăm chỉ luyện tập.

Bài 36: Trong buổi thực hành môn Khoa học tự nhiên đo thể tích của vật thể không xác định được hình dạng, lớp 6A có 40 học sinh thực hiện phép đo thì có 35 học sinh thực hiện thành công. Em hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện phép đo được thực hiện thành công.

Lời giải

Số lần thực hiện phép đo là $n = 40$

Số lần đo thành công là $k = 35$

Xác suất thực nghiệm của sự kiện Phép đo được thực hiện thành công là: $\frac{k}{n} = \frac{35}{40} = 87,5\%$

Bài 37: Tung một đồng xu 20 lần liên tiếp. Hãy ghi kết quả thống kê theo mẫu sau:

Lần tung	Kết quả tung	Số lần xuất hiện mặt N	Số lần xuất hiện mặt S
1	?	k	s
...	?		

Tính xác suất thực nghiệm:

a) Xuất hiện mặt N ;

b) Xuất hiện mặt S ;

Lời giải

Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N khi tung đồng xu 20 lần là: $\frac{k}{n} = \frac{k}{20}$

Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S khi tung đồng xu 20 lần là: $\frac{s}{n} = \frac{s}{20}$

Bài 38.

- a) Nếu tung một đồng xu 22 lần liên tiếp; có 13 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng bao nhiêu?
- b) Nếu tung một đồng xu 25 lần liên tiếp; có 11 lần xuất hiện mặt S thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng bao nhiêu?
- c) Nếu tung một đồng xu 30 lần liên tiếp; có 14 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng bao nhiêu?

Lời giải

- a) Nếu tung một đồng xu 22 lần liên tiếp; có 13 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng: $\frac{13}{22}$
- b) Nếu tung một đồng xu 25 lần liên tiếp; có 11 lần xuất hiện mặt S thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng: $\frac{11}{25}$
- c) Nếu tung một đồng xu 30 lần liên tiếp; có 14 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng: $\frac{30-14}{30} = \frac{3}{15}$

Bài 39: Một hộp có 10 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 10; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau.

Rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ từ trong hộp, ghi lại số của thẻ rút được và bỏ lại thẻ đó vào hộp. Sau 25 lần rút thẻ liên tiếp, hãy ghi kết quả thống kê theo mẫu sau:

Lần rút	Kết quả rút	Tổng số lần xuất hiện									
		Số 1	Số 2	Số 3	Số 4	Số 5	Số 6	Số 7	Số 8	Số 9	Số 10
1	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
...	?										

Tính xác suất thực nghiệm:

- a) Xuất hiện số 1 ;
- b) Xuất hiện số 5 ;
- c) Xuất hiện số 10 .

Lời giải

- a) Gọi số lần xuất hiện số 1 là k thì xác suất thực nghiệm xuất hiện số 1 : $\frac{k}{25}$
- b) Gọi số lần xuất hiện số 5 là k thì xác suất thực nghiệm xuất hiện số 5 : $\frac{k}{25}$
- c) Gọi số lần xuất hiện số 10 là k thì xác suất thực nghiệm xuất hiện số 10 : $\frac{k}{25}$

Bài 40. Gieo một xúc xắc 10 lần liên tiếp, bạn Cường có kết quả như sau:

Lần gieo	Kết quả gieo
1	Xuất hiện mặt 2 chấm
2	Xuất hiện mặt 1 chấm
3	Xuất hiện mặt 6 chấm
4	Xuất hiện mặt 4 chấm
5	Xuất hiện mặt 4 chấm
6	Xuất hiện mặt 5 chấm
7	Xuất hiện mặt 3 chấm
8	Xuất hiện mặt 5 chấm
9	Xuất hiện mặt 1 chấm
10	Xuất hiện mặt 1 chấm

- a) Hãy kiểm đếm số lần xuất hiện mặt 1 chấm và số lần xuất hiện mặt 6 chấm sau 10 lần gieo. Xác suất thực nghiệm xuất hiện
- b) Tính xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt 1 chấm.
- c) Tính xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt 6 chấm.

Lời giải

- a) Số lần xuất hiện mặt 1 chấm: 3 lần
Số lần xuất hiện mặt 6 chấm: 1 lần
- b) Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt 1 chấm là: $\frac{3}{10}$
- c) Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt 6 chấm là: $\frac{1}{10}$

Bài 41.

- a) Nếu gieo một xúc xắc 11 lần liên tiếp, có 5 lần xuất hiện mặt 2 chấm thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt 2 chấm bằng bao nhiêu?
- b) Nếu gieo một xúc xắc 14 lần liên tiếp, có 3 lần xuất hiện mặt 6 chấm thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt 6 chấm bằng bao nhiêu?

Lời giải

a) Nếu gieo một xúc xắc 11 lần liên tiếp, có 5 lần xuất hiện mặt 2 chấm thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt 2 chấm bằng: $\frac{5}{11}$

b) Nếu gieo một xúc xắc 14 lần liên tiếp, có 3 lần xuất hiện mặt 6 chấm thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt 6 chấm bằng: $\frac{3}{14}$

Bài 42. Số lượng khách hàng đến một cửa hàng mỗi ngày trong quý IV của năm 2020 được ghi lại ở bảng sau:

Số khách hàng	0 – 10	11 – 20	21 – 30	31 – 40	41 – 50	51 – 60
Số ngày	4	6	27	28	17	10

Chọn ngẫu nhiên một ngày trong quý IV. Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện “Trong ngày được chọn có không quá 30 khách hàng”.

Lời giải

Số ngày mà trong ngày đó có không quá 30 khách hàng (số khách hàng ≤ 30) đến cửa hàng là:
 $4 + 6 + 27 = 37$ (ngày).

Tổng số ngày của quý IV là: $4 + 6 + 27 + 28 + 17 + 10 = 92$ (ngày)

Xác suất thực nghiệm của sự kiện “Trong ngày được chọn có không quá 30 khách hàng” là: $\frac{37}{92}$.

Bài 43. Số cuộc điện thoại một người nhận được trong một ngày của tháng 6 được ghi lại ở bảng sau:

Số cuộc điện thoại	1	2	3	4	5	8
Số ngày	2	4	12	7	4	1

Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện “Một ngày trong tháng có ít nhất 5 cuộc gọi”.

Lời giải

Một ngày trong tháng có ít nhất 5 cuộc gọi nghĩa là ngày đó sẽ có 5 cuộc gọi hoặc 8 cuộc gọi. Vậy số ngày trong tháng có ít nhất 5 cuộc gọi là: $4 + 1 = 5$ (ngày).

Tổng số ngày của tháng 6 là: $2 + 4 + 12 + 7 + 4 + 1 = 30$ (ngày)

Xác suất thực nghiệm của sự kiện “Một ngày trong tháng có ít nhất 5 cuộc gọi” là: $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

Bài 44:

Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau có chữ số tận cùng là 5.

Lời giải

Chữ số hàng đơn vị có 1 cách chọn là chữ số 5.

Chữ số hàng chục có 9 cách chọn (Trừ chữ số 5 đã chọn).

Chữ số hàng trăm có 8 cách chọn (Từ 2 chữ số đã chọn ở hàng đơn vị và hàng chục)

Vậy có tất cả: $1.9.8 = 72$ số.

Bài 45:

Bình gieo hai con xúc xắc cùng lúc 50 lần. Ở mỗi lần gieo, Bình cộng số chấm xuất hiện hai con xúc xắc và ghi lại kết quả như bảng sau:

Tổng số chấm	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số lần	2	5	4	7	8	7	5	4	3	3	2

Tính xác suất thực nghiệm số lần xuất hiện tổng số chấm ở hai con xúc xắc lớn hơn 6.

Trích đề HSG huyện Tiên Hải năm 2021-2022

Lời giải

Số lần Bình gieo được tổng số chấm lớn hơn 6 là:

$$7 + 5 + 4 + 3 + 3 + 2 = 24 \text{ (lần)}$$

Xác suất thực nghiệm số lần xuất hiện tổng số chấm ở hai con xúc xắc lớn hơn 6

là:

$$25 : 50 = \frac{24}{50}.$$

Bài 46: Trong một cuộc thi có 22 câu hỏi, mỗi câu trả lời đúng được 15 điểm, còn sai thì bị trừ 10 điểm. Một học sinh được tất cả 155 điểm. Hỏi bạn đó trả lời đúng mấy câu?

Trích đề HSG huyện Hải Hậu năm 2021-2022

Lời giải

Giả sử bạn học sinh đó trả lời đúng cả 22 câu. Như vậy tổng số điểm bạn đó đạt được là:

$$22 \cdot 15 = 330 \text{ (điểm)}$$

Nhưng thực tế chỉ được 155 điểm nghĩa là còn thiếu:

$$330 - 155 = 175 \text{ (điểm)}$$

Sở dĩ hụt đi 175 điểm vì trong số 22 câu có một số câu bạn ấy trả lời sai, giữa 1 câu trả lời sai và 1 câu trả lời đúng chênh lệch là:

$$15 + 10 = 25 \text{ (điểm)}$$

Do đó số câu trả lời sai là: $175 : 25 = 7$ (câu)

Số câu trả lời đúng là: $22 - 7 = 15$ (câu).

Bài 47: Gieo đồng thời hai con xúc xắc.

- Có bao nhiêu kết quả có thể mà số chấm xuất hiện trên mặt của hai xúc xắc là số chẵn.
- Giả sử sau 6 lần gieo mỗi mặt của mỗi xúc xắc xuất hiện đúng một lần. Tính tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc của người chơi sau 6 lần chơi.

Trích đề HSG huyện Hương Khê năm 2021-2022

Lời giải

a) Có 9 kết quả có thể: 2,2; 2,4; 2,6; 4,2; 4,4; 4,6; 6,2; 6,4; 6,6.

b) Tổng 42: sau 6 lần tổng số điểm trên mỗi xúc xắc xuất hiện là: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$;

Tổng số điểm xuất hiện là $21.2 = 42$.

Bài 48: Có 3 hộp trái cây. Hộp thứ nhất chỉ toàn táo, hộp thứ hai chỉ toàn cam, hộp thứ ba lẫn lộn cam và táo. Không nhìn thấy trong mỗi hộp có loại trái cây gì. Mỗi hộp đều có ghi nhãn nhưng các nhãn đều ghi sai. Được phép nhắm mắt thò tay vào một hộp bất kỳ để lấy ra một trái và mở mắt nhìn trái đó. Làm thế nào với một lần lấy duy nhất có thể xác định được trong mỗi hộp chứa loại trái cây nào?

Trích đề HSG TP Thủ Đức năm 2022-2023

Lời giải

Giả sử nhãn hộp 1 ghi táo, nhãn hộp 2 ghi cam và nhãn hộp 3 ghi táo cam thì rõ ràng hộp đựng cam là ở hộp 1 hoặc hộp 3. Lấy 1 quả ở hộp 3 (nhãn ghi táo và cam).

T/h1: Nếu lấy được trái cam thì hộp 3 chứa toàn trái cam, hộp 1 chứa trái táo và trái cam, hộp 2 chứa toàn trái táo.

T/h2: Nếu lấy được trái táo thì hộp 3 chứa toàn trái táo, hộp 1 chứa toàn trái cam và hộp 2 chứa táo và cam.

Tổng số điểm xuất hiện là $21.2 = 42$.

Bài 49: Gieo một con xúc xắc 40 lần thu được kết quả ở bảng dưới đây:

Mặt	1 chấm	2 chấm	3 chấm	4 chấm	5 chấm	6 chấm
Số lần xuất hiện	4	6	7	9	8	6

Tính xác suất thực nghiệm để gieo được mặt xuất hiện có số chấm là số lẻ.

Trích đề HSG huyện Cam Lộc năm 2022-2023

Lời giải

Xác suất thực nghiệm để gieo được mặt xuất hiện có số chấm là số lẻ là

$$19 : 40 = \frac{19}{40}$$

Bài 50: Trong một buổi giao lưu toán học, ngoại trừ Bình, hai người bất kì đều bắt tay nhau, Bình chỉ bắt tay với những người mình quen. Biết rằng mỗi cặp hai người chỉ bắt tay nhau không quá một lần và có tổng cộng 420 lần bắt tay. Hỏi Bình có bao nhiêu người quen trong buổi giao lưu đó.

Trích đề HSG huyện Tam Dương năm 2018-2019

Lời giải

Giả sử trong buổi giao lưu, ngoài Bình còn có n người nữa, và Bình có k người quen. (ĐK: $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$)

Số lần bắt tay giữa n người khác (không kể Bình) là: $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$

(lần) Số lần bắt tay giữa Bình và những người quen của Bình là k (lần) Vì có tổng cộng 420 lần bắt tay nên: $\frac{n \cdot (n-1)}{2} + k = 420$

$$\text{Hay: } n \cdot (n-1) + 2k = 840 (*)$$

Vì $k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$ nên $n^2 - n \leq n \cdot (n-1) + 2k \leq n^2 - n + 2n$

$$\text{Hay } n^2 - n \leq n \cdot (n-1) + 2k \leq n^2 + n$$

$$\text{Kết hợp với (*) suy ra } n^2 - n \leq 840 \leq n^2 + n \Leftrightarrow (n-1)n \leq 840 \leq n(n+1)$$

Ta có: $28.29 \leq 840 \leq 29.30$ nên $n = 29$

Thay vào (*) tính được $k = 14$

Vậy Bình có 14 người quen.

Bài 51: Có 15 quyển sách trong đó có 7 quyển sách Toán, 5 quyển sách Văn và 3 quyển sách Lý. Tính xác suất để lấy được:

- Hai quyển sách Toán.
- Hai quyển sách trong đó có 1 quyển Văn và 1 quyển Lý.
- Hai quyển sách trong đó có ít nhất 1 quyển Văn.

Trích đề HSG huyện Ý Yên năm 2019-2020

Lời giải

a) Có 15 quyển sách, mỗi lần lấy ra 2 quyển. Vậy tổng số lần có thể lấy ra là:
 $n = 15.14 : 2 = 105$

Xác suất để lấy được hai quyển sách Toán là: $\frac{7.6 : 2}{105} = \frac{1}{5}$

b) Xác suất để lấy được hai quyển sách trong đó có quyển Văn và quyển Lý là: $\frac{5.3}{105} = \frac{1}{7}$

c) Số cách chọn hai quyển Văn là: $5.4 : 2 = 10$

Số cách chọn một quyển Văn và một quyển toán hoặc một quyển Lý là: $5 \cdot (7 + 3) = 50$

Xác suất để lấy được hai quyển sách trong đó có ít nhất 1 quyển Văn là: $\frac{10 + 50}{105} = \frac{4}{7}$.

Bài 52: Trong một cửa hàng có tổ chức chương trình "Rút thăm trúng thưởng" cho các khách hàng. Cửa hàng chuẩn bị một hộp đựng 60 phiếu rút thăm giống nhau, trong đó 45 phiếu có nội dung "Chúc bạn may mắn lần sau" và số phiếu còn lại có nội dung "Quà tặng". Các khách hàng tham gia chương trình sẽ thực hiện rút thăm ngẫu nhiên một phiếu trong hộp và nhận được quà tặng của cửa hàng nếu rút thăm vào phiếu có nội dung "Quà tặng". Tính xác suất để khách hàng đầu tiên tham gia chương trình nhận được quà tặng của cửa hàng.

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2022-2023

Lời giải

Xác suất để khách hàng đầu tiên tham gia chương trình nhận được quà tặng của cửa hàng là: $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$.

Bài 53: Một hộp bi có 2022 viên. Hai bạn ngồi bốc bi ra khỏi hộp, mỗi lần chỉ được lấy từ 2 đến 8 viên bi. Hai bạn lần lượt thay nhau bốc, ai bốc được viên bi cuối cùng thì người đó thắng cuộc. Chứng minh rằng có cách chơi để bạn bốc trước bao giờ cũng thắng cuộc?

Trích đề HSG huyện Nghi Lộc năm 2021-2022

Lời giải

Muốn thắng thì lần cuối cùng người bốc đầu phải để lại: $2 + 8 = 10$ viên bi.

Do đó sau lần bốc đầu tiên và những lần bốc sau bạn đó phải để lại trong hộp một số bi bằng bội của 10.

Ta có : $2022 = 202 \cdot 10 + 2$.

Do đó người bốc đầu tiên phải bốc 2 viên bi. Sau đó bạn thứ 2 cứ bốc a viên sau đó người 1 bốc $10 - a$ viên.

Cứ như thế ở các lần bốc sau thì người bốc đầu tiên bao giờ cũng thắng.

Bài 54. Số lượng khách hàng đến một cửa hàng mỗi ngày trong quý IV của năm 2020 được ghi lại ở bảng sau:

Số khách hàng	0 -10	11-20	21 -30	31 - 40	41 - 50	51 -60
Số ngày	4	6	27	28	17	10

Chọn ngẫu nhiên một ngày trong quý IV. Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện “Trong ngày được chọn có không quá 30 khách hàng”.

Lời giải

Số ngày mà trong ngày đó có không quá 30 khách hàng (số khách hàng ≤ 30) đến cửa hàng là:
 $4 + 6 + 27 = 37$ (ngày).

Tổng số ngày của quý IV là: $4 + 6 + 27 + 28 + 17 + 10 = 92$ (ngày)

Xác suất thực nghiệm của sự kiện “Trong ngày được chọn có không quá 30 khách hàng” là: $\frac{37}{92}$.

Bài 55: Tổng hợp kết quả xét nghiệm bệnh viêm gan ở một phòng khám trong một năm, ta được bảng sau:

Quý	Số ca xét nghiệm	Số ca dương tính
I	150	15
II	200	21
III	180	17
IV	220	24

Hãy tính xác suất thực hiện của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính

- Theo từng quý trong năm
- Sau lần lượt từng quý tính từ đầu năm

Lời giải

a) Xác suất thực hiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính theo từng quý là:

$$\text{Quý I: } \frac{15}{150} = 10\%$$

$$\text{Quý II: } \frac{21}{200} = 10,5\%$$

$$\text{Quý III: } \frac{17}{180} = 9,4\%$$

$$\text{Quý IV: } \frac{24}{220} = 10,9\%$$

b) Tổng số ca xét nghiệm của cả năm là:

$$150 + 200 + 180 + 220 = 750 \text{ (ca)}$$

Xác suất thực hiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính từ đầu năm là:

$$\text{Quý I: } \frac{15}{750} = 2\%$$

$$\text{Quý II: } \frac{21}{750} = 2,8\%$$

$$\text{Quý III: } \frac{17}{750} = 2,3\%$$

$$\text{Quý IV: } \frac{24}{750} = 3,2\%$$

Bài 56: Có 15 quyển sách trong đó có 7 quyển sách Toán, 5 quyển sách Văn và 3 quyển sách Lý. Tính xác suất để lấy được:

- Hai quyển sách Toán.
- Hai quyển sách trong đó có 1 quyển Văn và 1 quyển Lý.
- Hai quyển sách trong đó có ít nhất 1 quyển Văn.

Lời giải

a) Có 15 quyển sách, mỗi lần lấy ra 2 quyển. Vậy tổng số lần có thể lấy ra là:

$$n = 15 \cdot 14 : 2 = 105$$

Xác suất để lấy được hai quyển sách Toán là: $\frac{7 \cdot 6 : 2}{105} = \frac{1}{5}$

b) Xác suất để lấy được hai quyển sách trong đó có 1 quyển Văn và 1 quyển Lý là: $\frac{5 \cdot 3}{105} = \frac{1}{7}$

c) Số cách chọn hai quyển Văn là : $5 \cdot 4 : 2 = 10$

Số cách chọn một quyển Văn và một quyển toán hoặc một quyển Lý là : $5 \cdot (7 + 3) = 50$

Xác suất để lấy được hai quyển sách trong đó có ít nhất 1 quyển Văn là: $\frac{10 + 50}{105} = \frac{4}{7}$

Bài 57. Tung hai đồng xu cân đối 50 lần ta được kết quả như sau:

Sự kiện	Hai đồng sấp	Một đồng sấp, một đồng ngửa	Hai đồng ngửa
Số lần	12	24	14

Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện:

- Có một đồng xu sấp, một đồng xu ngửa;
- Hai đồng xu đều ngửa.

Lời giải

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện có một đồng xu sấp, một đồng xu ngửa trong 50 lần tung là:

$$\frac{24}{50} = 0,48$$

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện cả hai đồng xu đều ngửa trong 50 lần tung là: $\frac{14}{50} = 0,28$

Bài 58: An gieo một con xúc xắc 100 lần và ghi lại số chấm xuất hiện ở mỗi lần gieo được kết quả như sau:

Số chấm xuất hiện	1	2	3	4	5	6
Số lần	20	15	22	18	15	10

Tính xác suất thực nghiệm của các sự kiện sau:

- Số chấm xuất hiện là số lẻ;
- Số chấm xuất hiện là lớn hơn 3.

Lời giải

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện số chấm xuất hiện là số lẻ là:

$$\frac{20+22+15}{100} = 0,57$$

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện số chấm xuất hiện lớn hơn 3 là:

$$\frac{18+10+15}{100} = 0,43$$

Bài 59. Trong hộp có một số bút xanh và một số bút đỏ. Lấy ngẫu nhiên 1 bút từ hộp, xem màu rồi trả lại. Lặp lại hoạt động trên 50 lần, ta được kết quả như sau:

Loại bút	Bút xanh	Bút đỏ
Số lần	42	8

- Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện lấy được bút xanh.
- Em hãy dự đoán xem trong hộp loại bút nào có nhiều hơn.

Lời giải

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện lấy được bút xanh là: $\frac{42}{50} = 0,84$

b) Không dự đoán được trong hộp bút loại bút nào nhiều hơn.

Bài 60. Bảng sau là tổng hợp kết quả xét nghiệm người nhiễm Covid 19 ở một bệnh viện trong một năm:

Quý	Số ca xét nghiệm	Số ca dương tính
I	120	10
II	180	12
III	250	18

IV	100	9
----	-----	---

Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính:

- c) Theo từng quý trong năm.
d) Theo năm.

Lời giải

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính trong quý I là:

$$\frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

+ Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính trong quý II là:

$$\frac{12}{180} = \frac{1}{15}$$

+ Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính trong quý III là:

$$\frac{18}{250} = \frac{9}{125}$$

+ Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính trong quý IV là: $\frac{9}{100}$

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính trong 1 năm là:

$$\frac{10+12+18+9}{120+180+250+100} = \frac{49}{650}$$

Bài 61. Kết quả kiểm tra môn Toán và Ngữ văn của một số học sinh được lựa chọn ngẫu nhiên cho ở bảng sau:

Toán \ Ngữ văn	Ngữ văn		
	Giỏi	Khá	Trung bình
Giỏi	40	20	15
Khá	15	30	10
Trung bình	5	15	20

(Ví dụ: Số học sinh có kết quả Toán — giỏi, Ngữ văn — khá là 20)

Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện một học sinh được chọn ra một cách ngẫu nhiên có kết quả:

- a) Môn Toán đạt loại giỏi.
b) Loại khá trở lên ở cả hai môn.
c) Loại trung bình ở ít nhất một môn.

Lời giải

Tổng số học sinh được lựa chọn ngẫu nhiên là: $n = 40 + 20 + 15 + 15 + 30 + 10 + 5 + 15 + 20 = 170$

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một học sinh Môn Toán đạt loại giỏi là:

$$\frac{40+20+15}{170} = \frac{75}{170} = \frac{15}{34}$$

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một học sinh đạt loại khá trở lên ở cả hai môn là:

$$\frac{40+20+15+30}{170} = \frac{105}{170} = \frac{21}{34}$$

c) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một học sinh đạt loại trung bình ít nhất một môn là:

$$\frac{15+10+20+5+15}{170} = \frac{65}{170} = \frac{13}{34}$$

Bài 62.

Một lồng quay số xổ có chứa 10 quả bóng có cùng kích thước được đánh số từ 0 đến 9. Sau mỗi lần quay chỉ có đúng 1 quả bóng lọt xuống lỗ. Sau khi ghi lại số của quả bóng này, bóng được trả lại lồng để thực hiện lần quay tiếp theo. Nếu lần quay đầu nhận được số 0, Sự kiện “Hai lần quay hai số giống nhau” có xảy ra không.

Lời giải

Các kết quả có thể xảy ra sau lần quay thứ hai là:

Số bóng sau 2 lần quay là: 0; 0

Số bóng sau 2 lần quay là: 0; 1

Số bóng sau 2 lần quay là: 0; 2

Số bóng sau 2 lần quay là: 0; 3

Số bóng sau 2 lần quay là: 0; 4

Số bóng sau 2 lần quay là: 0; 5

Số bóng sau 2 lần quay là: 0; 6

Số bóng sau 2 lần quay là: 0; 7

Số bóng sau 2 lần quay là: 0; 8

Số bóng sau 2 lần quay là: 0; 9

⇒ Xảy ra sự kiện quay 2 lần đều được số 0

⇒ Sự kiện “Hai lần quay hai số giống nhau” có xảy ra.

Bài 63: Bảng sau là tổng hợp kết quả xét nghiệm người nhiễm Covid 19 ở một bệnh viện trong một năm:

Quý	Số ca xét nghiệm	Số ca dương tính
I	120	10
II	180	12
III	250	18
IV	100	9

Hãy tính xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính trong 1 năm.

Lời giải

Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ca xét nghiệm có kết quả dương tính trong 1 năm là:

$$\frac{10+12+18+9}{120+180+250+100} = \frac{49}{650}$$

Bài 64: Trong một cửa hàng có tổ chức chương trình “Rút thăm trúng thưởng” cho các khách hàng. Cửa hàng chuẩn bị một hộp đựng 60 phiếu rút thăm giống nhau, Trong đó 45 phiếu có nội dung “Chúc bạn may mắn lần sau” và số phiếu còn lại có nội dung “Quà tặng”. Các khách hàng tham gia chương trình sẽ thực hiện rút ngẫu nhiên một phiếu trong hộp và nhận được quà tặng của cửa hàng nếu rút thăm vào phiếu có nội dung “Quà tặng”. Tính xác suất để khách hàng đầu tiên tham gia chương trình nhận được quà tặng của cửa hàng.

Lời giải

Các kết quả có thể xảy ra khi khách hàng đầu tiên rút thẻ là:

Khách hàng đầu tiên bốc được phiếu: “chúc bạn may mắn lần sau”

Khách hàng bốc được phiếu: “Quà tặng”

Do có 15 phiếu có nội dung “quà tặng”

Do đó xác suất để người đầu tiên bốc được phiếu quà tặng là: $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$

Bài 65: Cô Lan bán thức ăn sáng là các loại xôi, vào một buổi sáng cô nhận ra rằng: Xôi mặn, xôi đậu phộng, xôi khúc được bán cho một nhóm khách hàng với số phần lần lượt là: x, y, z . Em hãy giúp cô Lan lập bảng thống kê tương ứng. Biết rằng $x + y = 50$; $y + z = 30$; $z + x = 56$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x + y = 50 \\ y + z = 30 \\ z + x = 56 \end{cases} \Rightarrow (x + y) + (y + z) + (z + x) = 50 + 30 + 56.$$

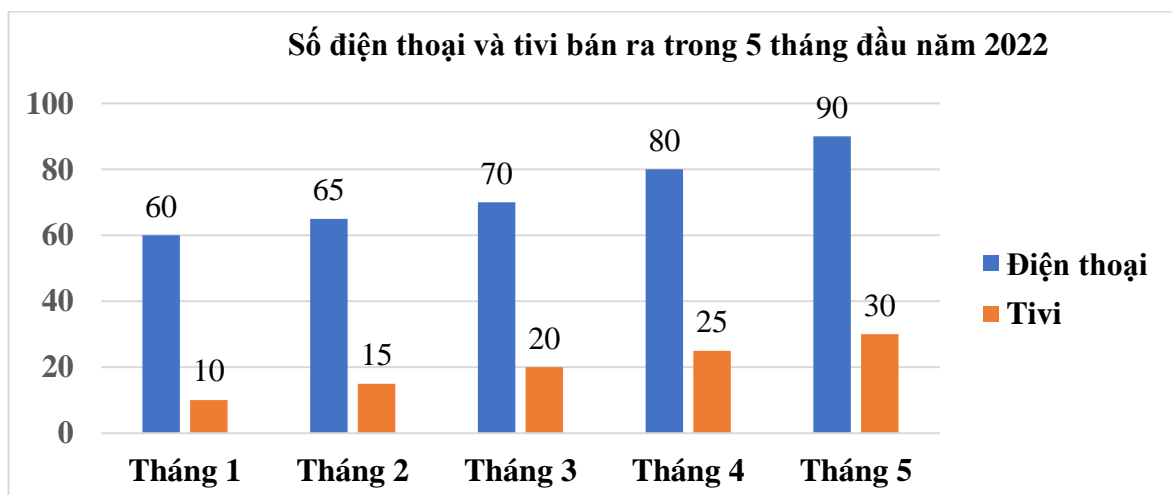
Suy ra $2(x + y + z) = 136 \Rightarrow x + y + z = 68$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} (x + y + z) - (x + y) = 68 - 50 \\ (x + y + z) - (y + z) = 68 - 30 \\ (x + y + z) - (x + z) = 68 - 56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 18 \\ x = 38 \\ z = 12 \end{cases}$$

Bảng thống kê:

Loại xôi	Xôi mặn	Xôi đậu phộng	Xôi khúc
Số lượng bán	38	12	18

Bài 66: Biểu đồ cột kép dưới đây diễn tả số lượng điện thoại và tivi của một cửa hàng bán được trong 5 tháng đầu năm 2022.



Nếu mỗi chiếc điện thoại bán ra cửa hàng được lãi 800.000 đồng và một chiếc tivi bán ra cửa hàng được lãi 1000.000 đồng. Hỏi sau 5 tháng đầu năm 2022, cửa hàng trên thu được số tiền lãi là bao nhiêu?

Lời giải

Trong 5 tháng đầu năm, cửa hàng trên thu được số tiền lãi là:

$$(60 + 65 + 70 + 80 + 90) \cdot 800000 + (10 + 15 + 20 + 25 + 30) \cdot 1000000 = 392.000.000 \text{ (đồng)}$$

Bài 67: Gieo một xúc xắc 14 lần liên tiếp, có 3 lần xuất hiện mặt 1 chấm, 4 lần xuất hiện mặt 2 chấm, 1 lần xuất hiện mặt 3 chấm, không có lần nào xuất hiện mặt 4 chấm và 5 chấm. Hỏi xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt 6 chấm là bao nhiêu?

Lời giải

Số lần xuất hiện mặt 6 chấm là $14 - (3 + 4 + 1) = 6$

Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt 6 chấm là $\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$

Bài 68:

Điểm số trung bình của một vận động viên bắn súng sau 100 lần bắn là 8,35 điểm. Kết quả cụ thể về điểm số và số lần bắn được ghi trong bảng dưới đây, trong đó có ba ô bị mờ ở chữ số hàng đơn vị và không đọc được (tại các vị trí được đánh dấu *).

Điểm số mỗi lần bắn	10	9	8	7	6	5
Số lần bắn	2*	40	1*	1*	9	7

Lời giải

Gọi số lần bắn ứng với 10 điểm là $\overline{2a}$

Gọi số lần bắn ứng với 8 điểm là $\overline{1b}$

Gọi số lần bắn ứng với 7 điểm là $\overline{1c}$

$$a, b, c \in \mathbb{N}; 0 \leq a, b, c \leq 9$$

Theo bài ra ta có: $\frac{10 \cdot \overline{2a} + 9 \cdot 40 + 8 \cdot \overline{1b} + 7 \cdot \overline{1c} + 6 \cdot 9 + 5 \cdot 7}{100} = 8,35$

$$10 \cdot \overline{2a} + 8 \cdot \overline{1b} + 7 \cdot \overline{1c} = 386 \Rightarrow 10a + 8b + 7c = 36 \quad (1)$$

Từ (1) $\Rightarrow c: 2 \Rightarrow c \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$, c không thể bằng 6 hoặc 8 vì nếu thế tổng số lần bắn sẽ vượt quá 100 $\Rightarrow c \in \{0; 2; 4\}$

$$c = 0 \Rightarrow 10a + 8b = 36 \Rightarrow 5a + 4b = 18 \Rightarrow a = b = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$c = 2 \Rightarrow 10a + 8b = 22 \Rightarrow 5a + 4b = 11 \text{ (Không có giá trị } a, b \text{ thỏa mãn)}$$

$$c = 4 \Rightarrow 10a + 8b = 8 \Rightarrow 5a + 4b = 4 \text{ (Không có giá trị } a, b \text{ thỏa mãn)}$$

Thử lại $a = b = 2$ (thỏa mãn). Vậy $a = b = 2, c = 0$ là các chữ số cần tìm

Bài 69: Trong hộp có 4 thẻ được đánh số 1, 2, 3, 4. An lấy ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp, ghi số lại rồi trả lại hộp. Lặp lại hoạt động trên 20 lần, An được kết quả như sau:

2	3	2	1	4	4	3	1	3	2
1	1	1	3	2	4	3	2	1	4

Xác suất thực nghiệm của sự kiện An lấy được thẻ ghi số nguyên tố là bao nhiêu?

Lời giải

Hoạt động rút thẻ là 20 lần, tổng số lần lấy được thẻ ghi số nguyên tố là 10 lần.

Xác suất thực nghiệm của sự kiện An lấy được thẻ ghi số nguyên tố là: $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

Bài 70: Bình tập ném bóng vào rổ. Khi thực hiện ném 50 lần thì có 28 lần bóng vào rổ.

a) Lập bảng thống kê.

b) Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ.

Lời giải

a) Bảng thống kê.

1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0	1

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện ném bóng vào rổ là: $\frac{28}{50} = \frac{14}{25}$.

Bài 71: Trả lời các câu hỏi sau:

a) Nếu tung một đồng xu 22 lần liên tiếp, có 13 lần xuất hiện mặt ngửa N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng bao nhiêu?

b) Nếu tung một đồng xu 25 lần liên tiếp, có 11 lần xuất hiện mặt sấp S thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng bao nhiêu?

c) Nếu tung một đồng xu 30 lần liên tiếp, có 11 lần xuất hiện mặt ngửa N thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng bao nhiêu?

Lời giải

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện xuất hiện mặt N là $\frac{13}{22}$.

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện xuất hiện mặt S là $\frac{11}{25}$.

c) Trong tổng số 30 lần tung thì có 11 lần xuất hiện mặt N vì vậy số lần xuất hiện của mặt S là $30 - 11 = 19$.

Vậy xác suất thực nghiệm của sự kiện xuất hiện mặt S là $\frac{19}{30}$.

Bài 72: Trong một hộp kín có một số quả bóng màu **xanh, màu đỏ, màu tím, vàng**. Trong một trò chơi, người chơi được lấy ngẫu nhiên một quả bóng, ghi lại màu rồi trả lại bóng vào thùng. Bình thực hiện 100 lần và được kết quả sau:

Màu	Số lần
Xanh	43
Đỏ	22
Tím	18
Vàng	17

Hãy tìm xác suất của thực nghiệm của các sự kiện sau:

a) Bình lấy được quả bóng màu xanh.

b) Quả bóng được lấy ra không là màu đỏ.

Lời giải

a) Xác suất của thực nghiệm của các sự kiện lấy được bóng xanh là: $\frac{43}{100} = 0,43$.

b) Tổng số lần lấy ra không là màu đỏ là $43 + 18 + 17 = 78$.

Vậy xác suất quả bóng được lấy ra không là màu đỏ là: $\frac{78}{100} = 0,78$.

Bài 73: Một xạ thủ bắn 40 phát đạn, kết quả được ghi lại dưới đây :

8	10	10	10	8	9	9	9	10	8
10	10	9	10	9	9	9	10	10	10
10	10	8	8	9	9	9	10	10	10
10	10	7	10	6	6	10	9	10	10

Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện sau trong mỗi lần bắn:

a) Xạ thủ bắn được 10 điểm

b) Xạ thủ bắn được ít nhất 7 điểm.

Lời giải

Ta xét bảng thống kê:

Điểm	6	7	8	9	10
Số lần	2	1	5	11	21

a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện sau trong mỗi lần bắn xạ thủ bắn được 10 điểm là $\frac{21}{40}$.

b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện sau trong mỗi lần bắn xạ thủ bắn được ít nhất 7 điểm là:

$$\frac{40 - 2}{40} = \frac{38}{40} = \frac{19}{20}$$

Bài 74: Trong hộp có một số bút xanh và một số bút đỏ , lấy ngẫu nhiên 1 bút từ hộp, xem màu rồi trả lại. Lặp lại hoạt động trên 50 lần, ta được kết quả theo bảng sau:

Loại bút	Bút xanh	Bút đỏ
Số lần	42	8

a) Hãy tìm xác suất của thực nghiệm của các sự kiện lấy được bút xanh.

b) Em hãy dự đoán xem trong hộp loại bút nào nhiều hơn.

Lời giải

a) Xác suất của thực nghiệm của các sự kiện lấy được bút xanh là $\frac{42}{50} = 0,84$.

b) Để dự đoán xem trong hộp loại bút nào nhiều hơn ta tính thêm xác suất của thực nghiệm của sự kiện lấy được bút đỏ $\frac{8}{50} = 0,16$.

Vậy xác suất của thực nghiệm của các sự kiện lấy được bút xanh lớn hơn bút đỏ lên trong hộp bút xanh có nhiều hơn.

Bài 75: Kết quả kiểm tra môn Toán và ngữ văn của một số học sinh được lựa chọn ngẫu nhiên cho bảng

sau:

Toán	Ngữ văn	Giỏi	Khá	Trung bình

Giỏi	40	20	15
Khá	15	30	10
Trung bình	5	15	20

(Ví dụ số học sinh có kết quả Toán – giỏi, Ngữ văn – khá là 20)

Hãy tìm xác suất thực nghiệm của sự kiện một học sinh được chọn ra từ một cách ngẫu nhiên có kết quả:

- Môn toán đạt loại giỏi.
- Loại khá trở lên ở cả hai môn.
- Loại trung bình ở ít nhất một môn.

Lời giải

Tổng số học sinh được lựa chọn ngẫu nhiên là:

$$n = 40 + 20 + 15 + 15 + 30 + 10 + 5 + 15 + 20 = 170$$

- Xác suất thực nghiệm của sự kiện một học sinh Môn Toán đạt loại giỏi là:

$$\frac{40+20+15}{170} = \frac{75}{170} = \frac{15}{34}$$

- Xác suất thực nghiệm của sự kiện một học sinh đạt loại khá trở lên ở cả hai môn là:

$$\frac{40+20+15+30}{170} = \frac{105}{170} = \frac{21}{34}$$

- Xác suất thực nghiệm của sự kiện một học sinh đạt loại trung bình ít nhất một môn là:

$$\frac{15+10+20+5+15}{170} = \frac{65}{170} = \frac{13}{34}$$

Bài 76: Tung hai đồng xu cân đối 50 lần ta được kết quả sau:

Sự kiện	Hai đồng sấp	Một đồng sấp một đồng ngửa	Hai đồng ngửa
Số lần	12	24	14

Hãy tìm xác suất của thực nghiệm của các sự kiện

- Có một đồng xu sấp một đồng ngửa.
- Hai đồng xu ngửa.
- Hai đồng xu đều sấp.

Lời giải

- Xác suất thực nghiệm của sự kiện có một đồng xu sấp một đồng ngửa trong 50 lần tung là:

$$\frac{24}{50} = 0,48.$$

- Xác suất của thực nghiệm của các sự kiện có Hai đồng xu ngửa là $\frac{14}{50} = 0,28$.

- Xác suất của thực nghiệm của các sự kiện có Hai đồng xu đều sấp là $\frac{12}{50} = \frac{6}{25}$.

Bài 77: Linh ghi lại số lần đi học muộn của lớp trong 30 ngày liên tiếp. Kết quả cho bởi bảng sau:

1	0	2	0	1	0	0	0	0	1
0	0	3	0	0	1	0	1	2	0
2	1	0	0	1	2	1	0	2	0

Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện:

- Một ngày có đúng 3 bạn đi học muộn.

- b) Một ngày không có bạn đi học muộn.
c) Một ngày có bạn đi học muộn.

Lời giải

Số lần đi học muộn/1 ngày	0	1	2	3
Số lần xuất hiện	16	8	5	1

- a) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ngày có đúng 3 bạn đi học muộn: $\frac{1}{30}$.
b) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ngày không có bạn đi học muộn: $\frac{16}{30} = \frac{8}{15}$.
c) Xác suất thực nghiệm của sự kiện một ngày có bạn đi học muộn: $\frac{8+5+1}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$.

Bài 78: Quan sát xúc xắc:

Mỗi xúc xắc có sáu mặt, số chấm ở mỗi mặt là một trong các số nguyên dương 1; 2; 3; 4; 5; 6
Gieo xúc xắc một lần.

- a) Nêu những kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc.
b) Mặt xuất hiện của xúc xắc có phải là phần tử của tập hợp {mặt 1 chấm; mặt 2 chấm; mặt 3 chấm; mặt 4 chấm; mặt 5 chấm; mặt 6 chấm} hay không?
c) Viết tập hợp các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc.
d) Nêu hai điều cần chú ý trong mô hình xác suất của trò chơi trên.

Lời giải

- a) Có 6 kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc tương ứng với 6 mặt của xúc xắc.
b) Mặt xuất hiện của xúc xắc có là phần tử của tập hợp {mặt 1 chấm; mặt 2 chấm; mặt 3 chấm; mặt 4 chấm; mặt 5 chấm; mặt 6 chấm}.
c) Tập hợp các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc {1; 2; 3; 4; 5; 6}.

Trong đó 1 là kí hiệu cho kết quả xuất hiện mặt 1 chấm; 2 là kí hiệu cho kết quả xuất hiện mặt 2 chấm; 3 là kí hiệu cho kết quả xuất hiện mặt 3 chấm; 4 là kí hiệu cho kết quả xuất hiện mặt 4 chấm; 5 là kí hiệu cho kết quả xuất hiện mặt 5 chấm; 6 là kí hiệu cho kết quả xuất hiện mặt 6 chấm.

- d) Nêu hai điều cần chú ý trong mô hình xác suất của trò chơi trên.
- Gieo xúc xắc một lần và mặt xúc xắc xuất hiện ngẫu nhiên.
 - Tập hợp các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc {1; 2; 3; 4; 5; 6}.

Trong đó 1 là kí hiệu cho kết quả xuất hiện mặt 1 chấm; 2 là kí hiệu cho kết quả xuất hiện mặt 2 chấm; 3 là kí hiệu cho kết quả xuất hiện mặt 3 chấm; 4 là kí hiệu cho kết quả xuất hiện mặt 4 chấm; 5 là kí hiệu cho kết quả xuất hiện mặt 5 chấm; 6 là kí hiệu cho kết quả xuất hiện mặt 6 chấm.

Bài 79: Bạn Nam chơi trò chơi ném bi. Đích ném là một cái hộp có 25 ô. Điểm tính cho mỗi lần ném bi được quy định như sau:

5	3	3	3	5
3	-2	-1	-2	3
3	-1	5	-1	3
3	-2	-1	-2	3
5	3	3	3	5

+ Ném ra ngoài hộp thì được tính là -5 điểm
 + Nếu ném vào một trong 25 ô trong hộp thì điểm tính được ghi như hình bên
 Trong 19 lần đầu Nam ném 5 lần vào ô 5 điểm, 9 lần vào ô 3 điểm, 1 lần vào ô -2 điểm và 5 lần vào ô -1 điểm.

- a) Tính số điểm Nam có được sau lần ném thứ 19.
 b) Nam còn một lần ném nữa. Hỏi Nam có cơ hội đạt được 50 điểm không? Nếu được thì lần cuối cùng Nam phải ném vào ô bao nhiêu điểm.

Trích đề HSG huyện Quốc Oai năm 2021 - 2022

Lời giải

- a) Số điểm Nam có được sau lần ném thứ 19 là : $5.5 + 9.3 + 1.(-2) + 5.(-1) = 45$
 b) Để đạt 50 điểm, Nam cần thêm $50 - 45 = 5$ điểm nữa. Do đó Nam vẫn còn cơ hội đạt được 50 điểm. Muốn vậy Nam cần phải ném bi vào ô 5 điểm ở lần cuối cùng.

Bài 80: a) Hải gieo một con xúc sắc. Hãy liệt kê các kết quả có thể của sự kiện “số chấm xuất hiện là số nguyên tố lớn hơn 3”.

b) Hải gieo một con xúc sắc đó 140 lần và ghi lại số chấm xuất hiện ở mỗi lần gieo được kết quả như sau:

Số chấm xuất hiện	1	2	3	4	5	6
Số lần	25	30	27	18	16	14

Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện “số chấm xuất hiện khi chia cho 2 dư 1”

Trích đề HSG huyện Lang Chánh năm 2021-2022

Lời giải

a) Khi gieo con xúc sắc, các kết quả số chấm xuất hiện có thể là: 1; 2; 3; 4; 5; 6 chấm.

Vậy các kết quả có thể của của sự kiện “số chấm xuất hiện là số nguyên tố lớn hơn 3” xảy ra là: 5 chấm.

b)

Số chấm xuất hiện	1	2	3	4	5	6
Số lần	25	30	27	18	16	14

Số chấm xuất hiện khi chia cho 2 dư 1 là các số 1; 2; 5.

Nên số lần gieo được mặt có số chấm chia cho 2 dư 1 là: $25 + 27 + 16 = 68$ (lần).

Xác suất thực nghiệm của sự kiện “số chấm xuất hiện khi chia cho 2 dư 1” là: $\frac{68}{140} = \frac{17}{35}$



CHỦ ĐỀ: SUY LUẬN LOGIC, SƠ ĐỒ VEN

A. PHẦN NỘI DUNG

Dạng toán: Suy luận logic nhưng không dùng nguyên lý Dirichlet

Bài 1: Có 9 miếng bánh chưng cần rán vàng cả hai mặt. Thời gian rán mỗi mặt cần 3 phút. Nếu dùng một chiếc chảo mỗi lần chỉ rán được nhiều nhất 6 miếng thì cần thời gian ít nhất là bao lâu để rán xong 9 miếng bánh chưng đó.

- A. 9 phút B. 12 phút C. 18 phút D. 27 phút

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: A. 9 phút

Bài 2: Trong một cuộc thi có 22 câu hỏi, mỗi câu trả lời đúng được 15 điểm, còn sai thì bị trừ 10 điểm. Một học sinh được tất cả 155 điểm. Hỏi bạn đó trả lời đúng mấy câu?

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Lời giải

Giả sử bạn học sinh đó trả lời đúng cả 22 câu. Như vậy tổng số điểm bạn đó đạt được là:

$$22 \cdot 15 = 330 \text{ (điểm)}$$

Nhưng thực tế chỉ được 155 điểm nghĩa là còn thiếu:

$$330 - 155 = 175 \text{ (điểm)}$$

Sở dĩ hụt đi 175 điểm vì trong số 22 câu có một số câu bạn ấy trả lời sai, giữa 1 câu trả lời sai và 1 câu trả lời đúng chênh lệch là:

$$15 + 10 = 25 \text{ (điểm)}$$

Do đó số câu trả lời sai là: $175 : 25 = 7$ (câu)

Số câu trả lời đúng là: $22 - 7 = 15$ (câu)

Bài 3: Hãy viết số lớn nhất bằng cách dùng 3 chữ số 1; 2; 3 với điều kiện mỗi chữ số dùng một lần và chỉ một lần

Trích đề HSG THCS Trần Phú Gia Lai năm 2018-2019

Lời giải

Trường hợp không dùng lũy thừa, số lớn nhất có thể viết được là 321

*Trường hợp dùng lũy thừa: (Ta bỏ qua lũy thừa có cơ số và số mũ là 1)

- Xét các lũy thừa mà số mũ có một chữ số: $13^2; 31^2; 12^3; 21^3$

So sánh 21^3 và 31^2 ta có $21^3 > 31^2$ (vì $21^3 = 9261; 31^2 = 961$)

Xét các lũy thừa mà số mũ có hai chữ số: $2^{13}; 2^{31}; 3^{12}; 3^{21}$

So sánh 3^{21} với 2^{31} ta có

$$3^{21} = 3 \cdot 3^{20} = 3 \cdot (3^2)^{10} = 3 \cdot 9^{10}$$

$$2^{31} = 2 \cdot 2^{30} = 2 \cdot (2^3)^{10} = 2 \cdot 8^{10}$$

Từ đó suy ra $3^{21} > 2^{31}$. So sánh 3^{21} với 21^3 ta có: $3^{21} > 3^9 = (3^3)^3 = 27^3 > 21^3$

Vậy số lớn nhất là: 3^{21}

Bài 4. Có hai chiếc bình, một chiếc loại 5 lít và một chiếc loại 7 lít. Người ta có thể đóng để lấy 1 lít, 2 lít, 4 lít, 6 lít dầu từ một thùng đựng bằng cách chỉ sử dụng hai chiếc bình trên. Em hãy nêu cách đóng để lấy:

- a) 3 lít dầu
b) 1 lít dầu.

Trích đề HSG THCS Quế Phú năm 2018-2019

Lời giải



a) Để đong 3 lít ta thực hiện đong, thùng 5 lít trước, 7 lít sau:

$$(5;0) \rightarrow (0;5) \rightarrow (5;5) \rightarrow (3;7)$$

Vậy ta có 3 lít ở thùng 5 lít

b) Để đong 1 lít, ta thực hiện đong, thùng 5 lít trước, 7 lít sau:

$$(5;0) \rightarrow (0;5) \rightarrow (5;5) \rightarrow (3;7) \rightarrow (0;3) \rightarrow (5;3) \rightarrow (1;7)$$

Vậy ta có 1 lít ở thùng 5 lít.

Bài 5: Một hộp bi có 219 viên bi. Hai bạn chơi bốc bi ra khỏi hộp, mỗi lần chỉ được lấy từ 2 đến 7 viên bi. Hai bạn lần lượt thay nhau bốc, ai bốc được những viên bi cuối cùng thì người đó thắng cuộc. Chứng tỏ rằng có cách chơi để bạn bốc trước bao giờ cũng thắng?

Trích đề HSG THCS Quỳnh Thiện năm 2022 - 2023

Lời giải

Có $2+7=9$; $219:9=24$ (dư 3) nên

Nếu tổng số bi bốc được của 2 người nhiều nhất là 9 thì vẫn còn dư sau khi người thứ 2 bốc lượt thứ 24, do đó người bốc trước sẽ là người bốc được những viên bi cuối cùng nếu người thứ nhất bốc như sau:

n lần đầu tiên, người thứ nhất bốc 3 viên bi. Tiếp theo người thứ 2 bốc k viên bi thì người thứ nhất lại bốc $9-k$ viên bi. Cứ như vậy, số bi cuối cùng sẽ được người đầu tiên bốc nên người bốc trước luôn thắng.

Bài 6: Cho số $n = \overline{155*710*4*16}$ có 12 chữ số. Chứng minh rằng nếu thay các dấu "*" bởi các chữ số khác nhau trong chữ số 1; 2; 3 một cách tùy ý thì số đó luôn chia hết cho 396.

Trích đề HSG huyện Cẩm Thủy năm 2022 - 2023

Lời giải

Ta thấy, vị trí của các chữ số thay thế ba dấu sao trong số trên đều ở hàng chẵn và vì ba chữ số đó đôi một khác nhau, lấy từ tập hợp $\{1; 2; 3\}$ nên tổng của chúng luôn bằng 6.

Mặt khác: $396 = 4.9.11$

Do $(4; 9; 11) = 1$, nên ta chứng minh: $n:4, n:9, n:11$

Thật vậy:

+) $n:4$ (vì số tạo bởi 2 chữ số tận cùng của n là 16 chia hết cho 4)

+) $n:9$ (vì tổng các chữ số của n là: $1+5+5+7+1+4+1+6+(***)=36:9$)

+) $n:11$ (Vì hiệu số giữa tổng các chữ số hàng chẵn và tổng các chữ số hàng lẻ là 0 nên chia hết cho 11.

$$(1+5+7+4+1) - (5+1+6+***) = 18 - (12+6) = 0$$

Vậy $n = \overline{155*710*4*16}:396$

Bài 7: Trong một cuộc thi có 50 câu hỏi. Mỗi câu trả lời đúng được 20 điểm, còn trả lời sai bị trừ 15 điểm. Một học sinh được tất cả 650 điểm. Hỏi bạn đó trả lời được mấy câu đúng?

Trích đề 059, năm 2017 - 2018

Lời giải

Giả sử bạn đó trả lời đúng tất cả các câu. Vậy số điểm bạn ấy nhận được là

$$50.20 = 1000 \text{ (điểm)}$$

Vậy số điểm này hơn số điểm thực tế là



$$1000 - 650 = 350$$

Số điểm thừa ra này sẽ bằng $20 - (-15) = 35$ lần số câu trả lời sai do đã giả sử tất cả các câu trả lời đúng.

Vậy số câu trả lời sai là

$$350 : 35 = 10 \text{ (câu)}$$

Số câu trả lời đúng là

$$50 - 10 = 40 \text{ (câu)}$$

Đáp số: 40 câu.

B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

(copy đề bài ở các dạng trên để làm phiếu phô tô cho HS)

Dạng toán: Suy luận logic nhưng không dùng nguyên lý Dirichlet

Bài 1: Có 9 miếng bánh chưng cần rán vàng cả hai mặt. Thời gian rán mỗi mặt cần 3 phút. Nếu dùng một chiếc chảo mỗi lần chỉ rán được nhiều nhất 6 miếng thì cần thời gian ít nhất là bao lâu để rán xong 9 miếng bánh chưng đó.

- A. 9 phút B. 12 phút C. 18 phút D. 27 phút

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Bài 2: Trong một cuộc thi có 22 câu hỏi, mỗi câu trả lời đúng được 15 điểm, còn sai thì bị trừ 10 điểm. Một học sinh được tất cả 155 điểm. Hỏi bạn đó trả lời đúng mấy câu?

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Bài 3: Hãy viết số lớn nhất bằng cách dùng 3 chữ số 1; 2; 3 với điều kiện mỗi chữ số dùng một lần và chỉ một lần

Trích đề HSG THCS Trần Phú Gia Lai năm 2018-2019

Bài 4. Có hai chiếc bình, một chiếc loại 5 lít và một chiếc loại 7 lít. Người ta có thể đong để lấy 1 lít, 2 lít, 4 lít, 6 lít dầu từ một thùng đựng bằng cách chỉ sử dụng hai chiếc bình trên. Em hãy nêu cách đong để lấy:

- a) 3 lít dầu
b) 1 lít dầu.

Trích đề HSG THCS Quế Phú năm 2018-2019

Bài 5: Một hộp bi có 219 viên bi. Hai bạn chơi bốc bi ra khỏi hộp, mỗi lần chỉ được lấy từ 2 đến 7 viên bi. Hai bạn lần lượt thay nhau bốc, ai bốc được những viên bi cuối cùng thì người đó thắng cuộc. Chứng tỏ rằng có cách chơi để bạn bốc trước bao giờ cũng thắng?

Trích đề HSG THCS Quỳnh Thiện năm 2022 - 2023

Bài 6: Cho số $n = \overline{155*710*4*16}$ có 12 chữ số. Chứng minh rằng nếu thay các dấu "*" bởi các chữ số khác nhau trong chữ số 1; 2; 3 một cách tùy ý thì số đó luôn chia hết cho 396.

Trích đề HSG huyện Cẩm Thủy năm 2022 - 2023

Bài 7: Trong một cuộc thi có 50 câu hỏi. Mỗi câu trả lời đúng được 20 điểm, còn trả lời sai bị trừ 15 điểm. Một học sinh được tất cả 650 điểm. Hỏi bạn đó trả lời được mấy câu đúng ?

Trích đề 059, năm 2017 - 2018



C. SỬU TÀM CÁC BÀI TRONG CÁC ĐỀ CỦA NHỮNG NĂM TRƯỚC ĐÓ

(Phần này lấy các câu từ những năm trước, trước năm 2020-2021, tối thiểu 10 bài)

Bài 1: Có hai chiếc bình, một chiếc loại 5 lít và một chiếc loại 7 lít. Người ta có thể đong để lấy 1 lít, 2 lít, 4 lít, 6 lít dầu từ một thùng đựng bằng cách chỉ sử dụng hai chiếc bình trên. Em hãy nêu cách đong để lấy:

- 3 lít dầu.
- 1 lít dầu.

Trích đề HSG trường THCS Quế Phú (Quế Sơn) năm 2018 - 2019

Lời giải

a) Để đong 3 lít ta thực hiện đong, thùng 5 lít trước, 7 lít sau: $(5;0) \rightarrow (0;5) \rightarrow (5;5) \rightarrow (3;7)$

Vậy ta có 3 lít ở thùng 5 lít.

b) Để đong 1 lít, ta thực hiện đong, thùng 5 lít trước, 7 lít sau:

$(5;0) \rightarrow (0;5) \rightarrow (5;5) \rightarrow (3;7) \rightarrow (0;3) \rightarrow (5;3) \rightarrow (1;7)$

Vậy ta có 1 lít ở thùng 5 lít.

Bài 2: Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; có thể lập được bao nhiêu số chẵn, mỗi số có 5 chữ số đôi một khác nhau?

Lời giải

Gọi số có 5 chữ số cần tìm là \overline{abcde} trong đó $0 \leq a; b; c; d; e \leq 6; a \neq 0$.

Ta chia làm hai trường hợp như sau:

Trường hợp 1: $e = 0$ khi đó số cần tìm có dạng là $\overline{abcd0}$

Số cách chọn $a; b; c; d$ lần lượt là 6; 5; 4; 3

Do đó số cách chọn số có dạng $\overline{abcd0}$ là $6.5.4.3 = 360$ (cách chọn).

Trường hợp 2: $e \neq 0$ khi đó ta cần chọn a và e trước, nghĩa là:

e có 3 cách chọn, $a; b; c; d$ có số cách chọn lần lượt là 5; 5; 4; 3.

Do đó số cách chọn số có dạng \overline{abcde} là $5.5.4.3.3 = 900$ (cách chọn).

Vậy tổng số có $900 + 360 = 1260$ cách chọn thoả mãn bài toán.

Bài 3: Trong số 100 học sinh có 75 học sinh thích môn Toán và 60 học sinh thích môn Văn. Nếu có 5 học sinh không thích cả Văn và Toán. Hỏi có bao nhiêu học sinh thích cả hai môn?

Lời giải

Gọi số học sinh thích cả Văn và Toán là x . (Điều kiện $x \in \mathbb{N}, 5 \leq x \leq 60$)

Thì số học sinh Toán mà không thích Văn là $75 - x$ (học sinh).

Nếu có 5 học sinh không thích cả Văn và Toán mà lại có 60 học sinh thích môn Văn và tổng số học sinh là 100.

Nên ta có: $75 - x + 60 + 5 = 100$

$$x = 75 + 60 + 5 - 100$$

$$x = 40 \text{ (thoả mãn điều kiện)}$$

Vậy có 40 học sinh thích cả hai môn.

Bài 4: Trong một cuộc thi có 50 câu hỏi. Mỗi câu trả lời đúng được 20 điểm, còn trả lời sai bị trừ 15 điểm. Một học sinh được tất cả 650 điểm. Hỏi bạn đó trả lời được mấy câu đúng?



Lời giải

Nếu bạn đó trả lời được 50 câu thì tổng số điểm là: $50 \cdot 20 = 1000$ (điểm).
 Nhưng bạn chỉ được 650 điểm còn thiếu: $1000 - 650 = 350$ (điểm).
 Thiếu 350 điểm vì trong số 50 câu bạn đã trả lời sai một số câu.
 Giữa câu trả lời đúng và trả lời sai chênh lệch: $20 + 15 = 35$ (câu).
 Do đó câu trả lời sai của bạn là: $350 : 35 = 10$ (câu).
 Vậy số câu bạn trả lời đúng là: $50 - 10 = 40$ (câu).

Bài 5: Chứng minh rằng tổng các bình phương của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

Lời giải

Gọi bốn số nguyên dương liên tiếp là $n-1, n, n+1, n+2$, $n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$.
 Giả sử tổng các bình phương của bốn số nguyên dương liên tiếp trên là số chính phương, tức là $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2$ là số chính phương.
 Đặt $N = (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2$.
 Ta có: $N = (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 4n^2 + 4n + 6 = 4(n^2 + n) + 6$ (*).
 Do đó, vì $4(n^2 + n) + 6$ là số chẵn và N là số chính phương nên $N : 4$.
 Mà $[4(n^2 + n) + 6] \not\vdots 4$.
 nên điều giả sử không xảy ra.
 Vậy tổng các bình phương của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

Bài 6: Chứng minh rằng tổng bình phương của hai số tự nhiên lẻ bất kì không phải là số chính phương.

Lời giải

Gọi a, b là các số tự nhiên lẻ.
 Giả sử tổng bình phương của hai số a và b là số chính phương, tức $a^2 + b^2$ là số chính phương (1).
 Vì a và b đều lẻ nên đặt $a = 2m + 1, b = 2n + 1$ $m, n \in \mathbb{N}$
 Ta có $a^2 + b^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2$
 $= [4(m^2 + n^2 + m + n) + 2] : 2$
 $a^2 + b^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 = [4(m^2 + n^2 + m + n) + 2] : 2$ (2)
 Từ (1) và (2) Ta có $(a^2 + b^2) : 4$ (3)
 Mà $a^2 + b^2 = 4(m^2 + n^2 + m + n) + 2 \not\vdots 4$ (4)
 Vì (3) và (4) mâu thuẫn với nhau nên điều giả sử không xảy ra.
 Vậy tổng bình phương của hai số tự nhiên lẻ bất kì không phải là số chính phương.

Bài 7: Chứng minh rằng: $4^n + 5$ chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải

Đặt $A_n = 4^n + 5$
 * Với $n = 0$, ta có $A_0 = 4^0 + 5 = 6 : 3$
 * Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 0$, suy ra $A_k = 4^k + 5 : 3$
 * Với $n = k + 1$, xét $A_{k+1} = 4^{k+1} + 5 = 4^k \cdot 4 + 5$
 $= 4^k \cdot (3 + 1) + 5$



$$= 4^k \cdot 3 + 4^k + 5$$

$$\quad \quad \quad \vdots 3 \quad \quad \quad \vdots 3$$

$$\text{Suy ra } A_{k+1} \vdots 3$$

Vậy $4^n + 5$ chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài 8: Chứng minh rằng: $7^n - 1$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

$$\text{Đặt } A_n = 7^n - 1$$

$$* \text{ Với } n=1, \text{ ta có } A_1 = 7^1 - 1 = 6 \vdots 6$$

$$* \text{ Giả sử mệnh đề đúng với } n=k \geq 1, \text{ suy ra } A_k = 7^k - 1 \vdots 6$$

$$* \text{ Với } n=k+1, \text{ xét } A_{k+1} = 7^{k+1} - 1 = 7^k \cdot 7 - 1$$

$$= 7^k \cdot (6+1) - 1 = 7^k \cdot 6 + 7^k - 1$$

$$\quad \quad \quad \vdots 6 \quad \quad \quad \vdots 6$$

$$\text{Suy ra } A_{k+1} \vdots 6$$

Vậy $7^n - 1$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 9: Chứng minh rằng: $4^n + 6n + 8$ chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

$$\text{Đặt } D_n = 4^n + 6n + 8$$

$$* \text{ Với } n=1, \text{ ta có } D_1 = 4^1 + 6 \cdot 1 + 8 = 18 \vdots 9$$

$$* \text{ Giả sử mệnh đề đúng với } n=k \geq 1, \text{ suy ra } D_k = 4^k + 6k + 8 \vdots 9$$

$$* \text{ Với } n=k+1, \text{ xét } D_{k+1} = 4^{k+1} + 6(k+1) + 8$$

$$= 4 \cdot 4^k + 6k + 14$$

$$= 4 \cdot (4^k + 6k + 8) - 18k + 18$$

$$= 4 \cdot \underbrace{(4^k + 6k + 8)}_{\vdots 9} + \underbrace{18(1-k)}_{\vdots 9}$$

$$\text{Suy ra } D_{k+1} \vdots 9$$

Vậy $4^n + 6n + 8$ chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 10: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

Lời giải

$$\text{Đặt } A_n = n^3 + 11n$$

$$* \text{ Với } n=1, \text{ ta có } A_1 = 1^3 + 11 \cdot 1 = 12 \vdots 6$$

$$* \text{ Giả sử mệnh đề đúng với } n=k \geq 1, \text{ suy ra } A_k = k^3 + 11k \vdots 6$$

$$* \text{ Với } n=k+1, \text{ xét } A_{k+1} = (k+1)^3 + 11(k+1)$$

$$= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11$$

$$= (k^3 + 11k) + 3(k^2 + k + 4)$$

$$= \underbrace{(k^3 + 11k)}_{\vdots 6} + \underbrace{3(k(k+1) + 4)}_{\vdots 2}$$

$$\text{Suy ra } A_{k+1} \vdots 6$$

Vậy với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

**Bài 11:** Chứng minh rằng

a) $A = 10^{28} + 8 : 72$

b) $B = 81^7 - 27^9 - 9^{13} : 45$

Lời giảia) **Cách 1:**

Ta có: $10^{28} = 2^{28} \cdot 5^{28} = 2^3 \cdot 2^{25} \cdot 5^{28} : 8$ và $8 : 8 \Rightarrow A : 8$

Lại có $10^{28} + 8$ có tổng các chữ số là 9 nên chia hết cho 9. Vậy A chia hết cho 72

Cách 2:

$10^{28} + 8$ có ba chữ số tận cùng là 008 nên chia hết cho 8

$$10^{28} + 8 = \underbrace{10^{28} - 1}_{:9} + 9 \Rightarrow A : 9 \Rightarrow A : 72$$

b) Ta có 81^7 ; 27^9 ; 9^{13} chia hết cho 9 nên B chia hết cho 9

Lại có 81^7 có tận cùng là 1

$27^9 = 27^8 \cdot 27 = \overline{\dots 1} \cdot 27$ có tận cùng là 7

$9^{13} = 9^{12} \cdot 9 = \overline{\dots 1} \cdot 9$ có tận cùng là 9

nên B có tận cùng là 5 nên B chia hết cho 5.

Mà $(5; 9) = 1 \Rightarrow B : 5 \cdot 9 \Rightarrow B : 45$

Bài 12: Chứng minh rằng: $B = 1961^{1962} + 1963^{1964} + 1965^{1966} + 2$ chia hết cho 7.

Sử dụng tính chất: $(a+b)^n$ khi chia cho a có số dư là b

Lời giải

Ta có $B = (1960+1)^{1962} + (1960+3)^{1964} + (1965-2)^{1966} + 2$

$$B = (7m+1)^{1962} + (7n+3)^{1964} + (7p-2)^{1966} + 2$$

$$B = 7q+1+3^{1964}+2^{1966}+2$$

$$B = 7q+9 \cdot 27^{654} + 2 \cdot 2^{3 \cdot 655} + 3$$

$$B = 7r+9+2+3$$

$$B = 7r+14 : 7$$

Bài 13: Chứng minh rằng:

a) $(n+10)(n+15) : 2$

b) $n(n+1)(n+2) : 2; 3$

Lời giải

a) Ta có:

Nếu n là số lẻ thì $n+15 : 2$

Nếu n là số chẵn thì $n+10 : 2$

Như vậy với mọi n là số tự nhiên thì : $(n+10)(n+15) : 2$



b) Ta có: $n(n+1)(n+2)$ là tích ba số tự nhiên liên tiếp nên sẽ có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3.

Bài 14: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì: $A = n(2n+1)(7n+1) \div 6$

Lời giải

Ta có: $n + 7n + 1 = 8n + 1$ là số lẻ nên n chẵn hoặc $7n$ chẵn,

$$\Rightarrow n(2n+1)(7n+1) \div 2 \quad (1)$$

Xét các trường hợp :

$$n = 3k \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) \div 3$$

$$n = 3k + 1 \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) \div 3 \quad (\text{do } 2n+1 \div 3)$$

$$n = 3k + 2 \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) \div 3 \quad (\text{do } 7n+1 \div 3)$$

$$\Rightarrow n(2n+1)(7n+1) \div 3 \quad \text{với mọi số tự nhiên } n \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow n(2n+1)(7n+1) \div 2.3$ (Do 2; 3 là hai số nguyên tố cùng nhau)

$$\Rightarrow n(2n+1)(7n+1) \div 6$$

Bài 15: Chứng minh rằng tổng của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3.

Lời giải

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là: $a, a+1, a+2$

Tổng của ba số tự nhiên liên tiếp là

$$a + a + 1 + a + 2 = (a + a + a) + (1 + 2) = (3a + 3) \div 3 \quad (\text{Tính chất chia hết của một tổng}).$$

Bài 16: Chứng minh rằng tích của hai số chẵn liên tiếp luôn chia hết cho 8.

Lời giải

Gọi hai số chẵn liên tiếp là $2n, 2n+2$.

$$\text{Tích của hai số chẵn liên tiếp là: } 2n.(2n+2) = 4n.(n+1)$$

Vì $n, n+1$ không cùng tính chẵn lẻ nên $n, n+1$ chia hết cho 2.

Mà 4 chia hết cho 4 nên $4n.(n+1)$ chia hết cho (4.2)

$$\Rightarrow 4n.(n+1) \text{ chia hết cho } 8.$$

$$\Rightarrow 2n.(2n+2) \text{ chia hết cho } 8.$$

Bài 17: Chứng minh rằng: Tích của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3.

Lời giải

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là $n, n+1, n+2$.

$$\text{Tích của ba số tự nhiên liên tiếp là: } n.(n+1).(n+2).$$

Một số tự nhiên khi chia cho 3 có thể nhận một trong các số dư 0; 1; 2.

+) Nếu $r = 0$ thì n chia hết cho 3 $\Rightarrow n.(n+1).(n+2)$ chia hết cho 3.

+) Nếu $r = 1$ thì $n = 3k + 1$ (k là số tự nhiên).



$$\Rightarrow n+2 = 3k+1+2 = (3k+3) \text{ chia hết cho } 3.$$

$$\Rightarrow n.(n+1).(n+2) \text{ chia hết cho } 3.$$

+) Nếu $r = 2$ thì $n = 3k+2$ (k là số tự nhiên).

$$\Rightarrow n+1 = 3k+2+1 = (3k+3) \text{ chia hết cho } 3.$$

$$\Rightarrow n.(n+1).(n+2) \text{ chia hết cho } 3.$$

Tóm lại: $n.(n+1).(n+2)$ chia hết cho 3 với mọi n là số tự nhiên.

Bài 18: a) Chứng minh rằng một số chính phương khi chia cho 3 chỉ có số dư là 0 hoặc 1.

b) Chứng minh rằng một số chính phương khi chia cho 4 chỉ có số dư là 0 hoặc 1.

Lời giải

Gọi $A = n^2$ ($n \in \mathbb{N}$)

a) Xét:

$$n = 3k \text{ (} k \in \mathbb{N} \text{)} \Rightarrow A = 9k^2 \text{ nên } A : 3$$

$$n = 3k+1 \text{ (} k \in \mathbb{N} \text{)} \Rightarrow A = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 \text{ nên } A \text{ chia cho } 3 \text{ dư } 1$$

$$n = 3k+2 \text{ (} k \in \mathbb{N} \text{)} \Rightarrow A = 9k^2 + 12k + 4 = 9k^2 + 12k + 3 + 1 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \text{ nên } A \text{ chia cho } 3 \text{ dư } 1.$$

Vậy: Một số chính phương chia cho 3 chỉ có số dư là 0 hoặc 1

b) Xét:

$$n = 2k \text{ (} k \in \mathbb{N} \text{)} \Rightarrow A = 4k^2 \text{ nên } A : 4$$

$$n = 2k+1 \text{ (} k \in \mathbb{N} \text{)} \Rightarrow A = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1 \text{ nên } A \text{ chia cho } 4 \text{ dư } 1$$

Vậy: Một số chính phương chia cho 4 chỉ có số dư là 0 hoặc 1.

Bài 19: Có hay không số tự nhiên n để $2010 + n^2$ là số chính phương.

Lời giải

Giả sử $2010 + n^2$ là số chính phương thì $2010 + n^2 = m^2$ ($m \in \mathbb{N}$)

Từ đó suy ra $m^2 - n^2 = 2010$

$$m^2 - mn + mn - n^2 = 2010$$

$$m(m-n) + n(m-n) = 2010$$

$$(m-n)(m+n) = 2010$$

Như vậy trong 2 số $m+n$ và $m-n$ phải có ít nhất 1 số chẵn (1)

Mặt khác $(m+n)$ và $(m-n)$ có cùng tính chẵn lẻ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (m+n)$ và $(m-n)$ là 2 số chẵn.

$$\Rightarrow (m+n) : 2 \text{ và } (m-n) : 2$$

$$\Rightarrow (m+n)(m-n) : 4 \text{ nhưng } 2010 \text{ không chia hết cho } 4$$

$$\Rightarrow \text{Điều giả sử sai.}$$

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để $2010 + n^2$ là số chính phương.



Bài 20: Tìm số có bốn chữ số khác nhau, biết rằng nếu viết thêm một chữ số 0 vào giữa hàng nghìn và hàng trăm thì được số mới gấp 9 lần số phải tìm.

Lời giải:

Gọi số cần tìm là \overline{abcd} ($a, b, c, d \in \mathbb{N}; a \neq 0; a, b, c, d < 10$)

Số mới là $\overline{a0bcd}$

Ta có $\overline{a0bcd} = \overline{abcd} \cdot 9$

Hay $\overline{a0bcd} = \overline{abcd} \cdot 10 - \overline{abcd}$

Hay $\overline{a0bcd} + \overline{abcd} = \overline{abcd0}$

Vì $d + d$ có tận cùng bằng 0 suy ra $d = 0$ hoặc 5

Nếu $d = 5$ ta có $c + c + 1 = 0$ có tận cùng là 5 nên $c = 2$ hoặc $c = 7$.

Nếu $c = 2$ thì $b + b = 2$ nên $b = 1$, do đó $0 + a$ có tận cùng bằng 1 nên $a = 1$ (loại vì a khác b)

Nếu $c = 7$ thì $b + b + 1$ có tận cùng là 7 nên $b = 3$ hoặc $b = 8$.

Nếu $b = 3$ thì $0 + a = 3$ nên $a = 3$ (loại).

Nếu $b = 8$ thì $0 + a + 1 = 8$ nên $a = 7$ (loại vì a khác c).

Nếu $d = 0$ suy ra c khác 0 mà $c + c$ có tận cùng là 0 nên $c = 5$. Khi đó $b + b + 1$ có tận cùng là 5 nên $b = 2$ hoặc $b = 7$

Nếu $b = 2$ thì $0 + a$ có tận cùng bằng 2 nên $a = 2$ (loại)

Nếu $b = 7$ thì $0 + a + 1$ có tận cùng là 7 nên $a = 6$

Vậy số cần tìm là 6750.

Bài 21: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, sao cho khi nhân số đó với 4 ta được số gồm bốn chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại.

Lời giải:

Gọi số cần tìm là \overline{abcd} ($a, b, c, d \in \mathbb{N}; a \neq 0; a, b, c, d < 10$)

$\overline{abcd} \cdot 4 = \overline{dcba}$

Ta có \overline{abcd} và \overline{dcba} là số có 4 chữ số

Nên ta có: $a \cdot 10^3 \cdot 4 = d \cdot 10^3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow d = 4$ hoặc $a = 2; d = 8$

Xét \overline{abcd} với $a = 1$ và $d = 4$

Để có được $\overline{abcd} \cdot 4 = \overline{dcba}$ thì $d \cdot 4$ trước hết phải có chữ số tận cùng là a

\Rightarrow với $d = 4$ thì $d \cdot 4 = 4 \cdot 4 = 16$ có chữ số tận cùng là $6 \neq a = 1$ (loại)

Xét \overline{abcd} với $a = 2$ và $d = 8$.

Do đó $\overline{abcd} \cdot 4 = \overline{dcba}$ ta thấy: $d \cdot 4$ đã có chữ số tận cùng là $a = 2$ (1)

Vì $a = 2 \Rightarrow b \cdot 4 < 10 \Rightarrow b \in \{0; 1; 2\}$

Với $a = 2, d = 8, b = 0 \Rightarrow \overline{20c8} \cdot 4 = \overline{8c02} \Rightarrow 60c = 30$ (không thỏa mãn)



Với $a = 2, d = 8, b = 1 \Rightarrow \overline{20c8.4} = \overline{8c12} \Rightarrow 60c = 420 \Rightarrow c = 7 \Rightarrow$ có số 2178.

Với $a = 2, d = 8, b = 2 \Rightarrow \overline{20c8.4} = \overline{8c22} \Rightarrow 60c = 810 \Rightarrow$ (không thỏa mãn)

Vậy số cần tìm là 2178.

Bài 22: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, sao cho khi nhân số đó với 9 ta được số gồm bốn chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại

Lời giải:

Gọi số cần tìm là \overline{abcd} ($a, b, c, d \in \mathbb{N}; a \neq 0; a, b, c, d < 10$)

$$\overline{abcd.9} = \overline{dcba}$$

Ta có \overline{abcd} và \overline{dcba} là số có 4 chữ số

Nên ta có: $a.10^3.9 = d.10^3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow d = 9$

Xét \overline{abcd} : vì $a = 1 \Rightarrow b.9 < 10 \Rightarrow b = 1$ hoặc $b = 0$

Với $b = 1$ thì $\overline{11c9.9} = \overline{9c11}$

Vì $b = 1 \Rightarrow \overline{11c9.9}$ có $c.9$ là số bé lớn hơn 2 chữ số $\Rightarrow c = 1$ hoặc $c = 0 \Rightarrow$ Vô lý.

Với $b = 0$ thì $\overline{10c9.9} = \overline{9c01} \Rightarrow c = 8$

$\Rightarrow \overline{1089.9} = \overline{9801}$.

Vậy số tự nhiên cần tìm là 9801.

Bài 23: Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng nếu xóa chữ số hàng trăm thì số ấy giảm 9 lần.

Lời giải:

Gọi số cần tìm là \overline{abc} ($a, b, c \in \mathbb{N}; a \neq 0; a, b, c < 10$)

Khi xóa chữ số hàng trăm ta có số \overline{bc}

Ta có: $\overline{abc} = 9\overline{bc} \Rightarrow 100a + \overline{bc} = 9\overline{bc} \Rightarrow 8\overline{bc} = 100a : 8 \Rightarrow a = 4$ hoặc $a = 8$

Vì \overline{bc} có hai chữ số $\Rightarrow a = 4; \overline{bc} = 50$

Vậy số cần tìm là 450.

Bài 24: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, biết rằng nếu xóa chữ số hàng nghìn thì số ấy giảm 9 lần.

Lời giải:

Gọi số cần tìm là \overline{abcd} ($a, b, c, d \in \mathbb{N}; a \neq 0; a, b, c, d < 10$)

Xóa chữ số hàng nghìn ta có số \overline{bcd}

Ta có: $\overline{abcd} = 9\overline{bcd} \Rightarrow 1000a + \overline{bcd} = 9\overline{bcd} \Rightarrow 8\overline{bcd} = 1000a : 8 \Rightarrow a = 4$ hoặc $a = 8$

Vì \overline{bcd} có 3 chữ số $\Rightarrow a = 4$ và $\overline{bcd} = 500$

Vậy số cần tìm là 4500.



Bài 25: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, biết rằng chữ số hàng trăm bằng 0 và nếu xoá chữ số 0 đó thì số ấy giảm 9 lần.

Lời giải:

Gọi số cần tìm là $\overline{a0cd}$ ($a, c, d \in \mathbb{N}; a \neq 0; a, c, d < 10$)

Xoá chữ số hàng trăm ta có số \overline{acd}

Ta có: $\overline{a0cd} = 9\overline{acd} \Rightarrow 1000a + \overline{cd} = 9(100a + \overline{cd}) \Rightarrow 100a = 8\overline{cd} : 8 \Rightarrow a = 4$ hoặc $a = 8$

Vì \overline{cd} có 2 chữ số $\Rightarrow a = 4$ và $\overline{cd} = 50$

Vậy số cần tìm là 4050 .

Bài 26: Một số tự nhiên có hai chữ số tăng gấp 9 lần nếu viết thêm một chữ số 0 vào giữa các chữ số hàng chục và hàng đơn vị của nó . Tìm số ấy.

Lời giải

Số cần tìm là \overline{ab} ($a, b \in \mathbb{N}; a \neq 0; ab < 10$) .

Viết thêm một chữ số 0 vào giữa các chữ số hàng chục và hàng đơn vị ta có số $\overline{a0b}$

Ta có: $\overline{a0b} = 9\overline{ab} \Rightarrow 100a + b = 9(10a + b) \Rightarrow 10a = 8b : 8 \Rightarrow a = 4$ hoặc $a = 8$

Vì $0 < b \leq 9 \Rightarrow a = 4; b = 5$

Vậy số cần tìm là 45 .

Bài 27: Gọi $S(n)$ là tổng các chữ số của số tự nhiên n . Tìm số tự nhiên n sao cho $S(n) + n = 2015$.

Chú ý: Có thể thay đầu bài bởi số khác

Lời giải

Nếu n có 3 chữ số thì $n \leq 999$ suy ra $S(n) \leq 27$ suy ra $S(n) + n \leq 999 + 27 = 1026 < 2015$ (loại)

Nếu n có nhiều hơn bốn chữ số: Suy ra $n > 10000$ suy ra $S(n) + n > 2015$ (loại)

Vậy n có bốn chữ số: Đặt $n = \overline{abcd}$ ($0 < a \leq 9; 0 \leq b, c, d \leq 9$)

$\Rightarrow S(n) + n = \overline{abcd} + a + b + c + d = 2015$

Nhận thấy: $0 < a + b + c + d \leq 36 \Rightarrow 2015 - 36 \leq \overline{abcd} \leq 2015 \Leftrightarrow 1979 \leq \overline{abcd} \leq 2015$

$\Rightarrow \begin{cases} \overline{ab} = 19 \\ \overline{ab} = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 1993 \\ n = 2011 \end{cases}$

Nếu $\overline{ab} = 19$ thì $\overline{abcd} = 1993$ vì $0 < 1 + 9 + 9 + 3 = 22 < 36$ và $1979 \leq 1993 \leq 2015$

Nếu $\overline{ab} = 20$ thì $\overline{abcd} = 2011$ vì $0 < 2 + 0 + 1 + 1 = 4 < 36$ và $1979 \leq 2011 \leq 2015$

Vậy số tự nhiên n cần tìm là 1993 hoặc 2011.

Bài 28: Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên có bốn chữ số \overline{abcd} sao cho $\overline{abcd} - \overline{dcba} = 1008$.

Lời giải



Điều kiện: $0 < a, d \leq 9; 0 \leq b, c \leq 9; a > d$

Ta có:

$$\overline{abcd} - \overline{dcba} = 1008 \Leftrightarrow (1000a + 100b + 10c + d) - (1000d + 100c + 10b + a) = 1008$$

$$\Leftrightarrow 999(a - d) + 90(b - c) = 1008 \Leftrightarrow 111(a - d) + 10(b - c) = 112 = 111 + 1 \Leftrightarrow 111(a - d - 1) = 1 + 10(c - b)$$

Nếu $a - d - 1 = 0 \Rightarrow 111(a - d - 1) = 0$ mà $1 + 10(c - b)$ là số lẻ \Rightarrow vô lý

Nếu $a - d - 1 \geq 1 \Rightarrow 111(a - d - 1) \geq 111$ mà $1 + 10(c - b) \leq 1 + 10 \cdot 9 = 91 \Rightarrow$ vô lý

Vậy không tồn tại số tự nhiên có bốn chữ số \overline{abcd} sao cho $\overline{abcd} - \overline{dcba} = 1008$.

Bài 29: Tìm một số tự nhiên có ba chữ số biết rằng khi viết thêm chữ số 2 vào bên phải số đó thì nó tăng thêm 4106 đơn vị.

Lời giải

Gọi số cần tìm là \overline{abc} ($a, b, c \in \mathbb{N}; a \neq 0; a, b, c < 10$)

Viết thêm chữ số 2 vào bên phải số đó, ta được: $\overline{abc2}$

Theo đề bài ta có: $\overline{abc2} = \overline{abc} + 4106$

$$\overline{abc} \cdot 10 + 2 = \overline{abc} + 4106 \text{ (phân tích } \overline{abc2} \text{ theo cấu tạo số)}$$

$$\text{Ta có: } \overline{abc} \cdot 10 - \overline{abc} = 4106 - 2 \Leftrightarrow \overline{abc} \cdot (10 - 1) = 4106 \Leftrightarrow 9\overline{abc} = 4104 \Leftrightarrow \overline{abc} = 456$$

Thử lại: $4562 - 456 = 4106$ (đúng)

Vậy số tự nhiên cần tìm là 456.

Bài 30: Tìm số tự nhiên có 4 chữ số. Biết rằng nếu ta xóa đi chữ số hàng chục và hàng đơn vị thì số đó giảm đi 4455 đơn vị.

Lời giải

Gọi số cần tìm là \overline{abcd} ($a, b, c, d \in \mathbb{N}; a \neq 0; a, b, c, d < 10$)

Xóa đi chữ số hàng chục và hàng đơn vị của số đó, ta được \overline{ab}

Theo đề bài ta có: $\overline{abcd} - \overline{ab} = 4455$

$$\overline{ab} \cdot 100 + \overline{cd} - 5 = 4455 \text{ (phân tích } \overline{abcd} \text{ theo cấu tạo số)}$$

$$\Leftrightarrow \overline{cd} + \overline{ab} \cdot 100 - \overline{ab} = 4455 \Leftrightarrow \overline{cd} + \overline{ab} \cdot (100 - 1) = 4455 \Leftrightarrow \overline{cd} + \overline{ab} \cdot 99 = 4455 \text{ (} 4455 = 45 \cdot 99 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \overline{cd} = 99 \cdot (45 - \overline{ab})$$

Ta nhận thấy tích của 99 và 1 là một số tự nhiên bé hơn 100 nên $45 - \overline{ab}$ phải bằng 0 hoặc 1.

Nếu $45 - \overline{ab} = 0$ thì $45 = \overline{ab}$ và $\overline{cd} = 00$

Nếu $45 - \overline{ab} = 1 \Rightarrow \overline{ab} = 44; \overline{cd} = 99$

Thử lại: $4500 - 45 = 4455$; $4499 - 44 = 4455$

Vậy số cần tìm là 4500 hoặc 4499.



Bài 31. Tích của hai phân số là $\frac{8}{15}$. Thêm 4 đơn vị vào phân số thứ nhất thì tích mới là $\frac{56}{15}$. Tìm hai phân số đó.

Lời giải

Tích của hai phân số là $\frac{8}{15}$. Thêm 4 đơn vị vào phân số thứ nhất thì tích mới là $\frac{56}{15} - \frac{8}{15} = \frac{48}{15}$ đây

chính là 4 lần phân số thứ hai. Suy ra phân số thứ hai là: $\frac{48}{15} : 4 = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$. Từ đó phân số thứ nhất là:

$$\frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$$

Bài 32. Trong đợt thi đua, lớp 6A có 42 bạn được từ 1 đến 10 điểm trở lên, 39 bạn được 2 điểm 10 trở lên, 14 bạn được từ 3 điểm 10 trở lên, 5 bạn được 4 điểm 10, không có ai được trên 4 điểm 10. Tính xem trong đợt thi đua lớp 6A được bao nhiêu điểm 10 ?

Lời giải

Tổng số điểm 10 của lớp 6A là:

$$(42 - 39).1 + (39 - 14).2 + (14 - 5).3 + 5.4 = 100 \text{ (điểm 10)}$$

Bài 33. Hai xe ô tô khởi hành từ hai địa điểm A, B đi ngược chiều nhau. Xe thứ nhất khởi hành từ A lúc 7 giờ. Xe thứ hai khởi hành từ B lúc 7 giờ 10 phút. Biết rằng để đi cả quãng đường AB. Xe thứ nhất cần 2 giờ, xe thứ hai cần 3 giờ. Hỏi sau khi đi 2 xe gặp nhau lúc mấy giờ

Lời giải

1 giờ xe thứ nhất đi được $\frac{1}{2}$ quãng đường AB

1 giờ xe thứ hai đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường AB

Sau 10 phút = $\frac{1}{6}$ giờ: xe thứ nhất đi được: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ quãng đường AB

Quãng đường còn lại: $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ (quãng đường AB)

Thời gian 2 xe cùng đi quãng đường còn lại: $\frac{11}{12} : \frac{5}{6} = \frac{11}{10}$ giờ = 1 giờ 6 phút

Hai xe gặp nhau lúc: 7 giờ 10 phút + 1 giờ 6 phút = 8 giờ 16 phút

Bài 34: Tổng bình phương của ba số tự nhiên là 2596. Biết rằng tỉ số giữa số thứ nhất và số thứ hai là $\frac{2}{3}$; giữa số thứ hai và số thứ ba là $\frac{5}{6}$. Tìm ba số đó.

Lời giải

Gọi a, b, c là ba số tự nhiên phải tìm

Theo đề bài ta có: $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}; \frac{b}{c} = \frac{5}{6}$ (1) và $a^2 + b^2 + c^2 = 2596$ (2)

Từ (1) suy ra: $a = \frac{2}{3}b; c = \frac{6}{5}b$, thay vào (2) ta có:

$$\frac{4}{9}b^2 + b^2 + \frac{36}{25}b^2 = 2596 \text{ suy ra: } b^2 = 900$$

Suy ra: $b = 30; a = 20; c = 36$

Vậy ba số phải tìm là 30; 20; 36

Bài 35. Một xe tải khởi hành từ A lúc 7h và đến B lúc 12h. Một xe con khởi hành từ B lúc 7 giờ rưỡi và đến A lúc 11 giờ rưỡi



- a) Hỏi hai xe gặp nhau lúc mấy giờ
b) Biết vận tốc xe con hơn xe tải là 10km/h . Tính quãng đường AB

Lời giải

a) Chọn quãng đường AB làm đơn vị quy ước
Thời gian xe tải đi từ A đến B là 5h , xe con đi từ B đến A là 4h

Trong 1h hai xe gần nhau được: $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}(AB)$

Xe con khởi hành sau xe tải: $7h30ph - 7h = 30ph = \frac{1}{2}h$

Khi xe con khởi hành thì hai xe cách nhau: $1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{10}(AB)$

Hai xe gặp nhau sau: $\frac{9}{10} : \frac{9}{20} = 2h$

Hai xe gặp nhau lúc: $7h30ph + 2h = 9h30ph$

b) 10km chính là: $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}(AB)$

Vậy quãng đường AB dài: $10 : \frac{1}{20} = 200(km)$

Bài 36. Tìm bộ ba số nguyên dương a, b, c sao cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4}{5}$

Lời giải

Không làm mất tính tổng quát, ta giả sử $a \leq b \leq c$, khi đó ta có: $\frac{3}{a} \geq \frac{4}{5}$ suy ra $a \leq \frac{15}{4}$

Nếu $a = 1$ thì không thể được ,do đó $a = 2$ hoặc $a = 3$

Nếu $a = 2$ thì $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{10}$, suy ra $\frac{2}{b} \geq \frac{3}{10}$

Suy ra $b = 4$ hoặc $b = 5$ hoặc $b = 6$ vì $\frac{3}{10} < \frac{1}{3}$ suy ra $b \leq \frac{20}{3}$

Suy ra các số a, b, c thỏa mãn là $(a = 2, b = 4, c = 20)$ và $(a = 2, b = 5, c = 10)$

Nếu $a = 3$ thì $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{7}{15}$

Từ đó $\frac{2}{b} \geq \frac{7}{15}$ suy ra : $b \leq \frac{30}{7}$ suy ra $b = 3$ hoặc $b = 4$. Không có trường hợp nào thỏa mãn

Vậy có 12 bộ số thỏa mãn là các hoán vị của hai bộ ba số $(2, 4, 20)$ và $(2, 5, 10)$

Bài 37. Xe máy thứ nhất đi từ A đến B mất 4 giờ, xe thứ hai đi từ B đến A mất 3 giờ. Nếu hai xe khởi hành cùng một lúc từ A và B thì sau 1,5 giờ hai xe sẽ còn cách nhau 15 km (hai xe chưa gặp nhau). Tính quãng đường AB

Lời giải

Mỗi giờ xe thứ nhất đi được: $1 : 4 = \frac{1}{4}$ (quãng đường AB)

Mỗi giờ xe thứ hai đi được: $1 : 3 = \frac{1}{3}$ (quãng đường AB)

Sau 1,5 giờ cả hai xe đi được $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) \cdot 1,5 = \frac{7}{8}$ (quãng đường AB)

Phần số chỉ 15km là: $1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$ (quãng đường AB)



Quãng đường AB là: $15 : \frac{1}{8} = 120(\text{km})$

Bài 38. Một xe tải khởi hành từ A lúc 7h và đến B lúc 12h. Một xe con khởi hành từ B lúc 7 giờ rưỡi và đến A lúc 11 giờ rưỡi.

a) Hỏi hai xe gặp nhau lúc mấy giờ

b) Biết vận tốc xe con hơn xe tải là 10km/h . Tính quãng đường AB .

Lời giải

a) Chọn quãng đường AB làm đơn vị quy ước

Thời gian xe tải đi từ A đến B là 5h, xe con đi từ B đến A là 4h Trong 1h hai xe gần nhau được:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}(AB)$$

Xe con khởi hành sau xe tải: $7\text{h}30\text{ph} - 7\text{h} = 30\text{ph} = \frac{1}{2}\text{h}$

Khi xe con khởi hành thì hai xe cách nhau: $1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{10}(AB)$

Hai xe gặp nhau sau: $\frac{9}{10} : \frac{9}{20} = 2\text{h}$

Hai xe gặp nhau lúc: $7\text{h}30\text{ph} + 2\text{h} = 9\text{h}30\text{ph}$

b) 10 km chính là: $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}(AB)$

Vậy quãng đường AB dài: $10 : \frac{1}{20} = 200(\text{km})$

Bài 39. Một cô thư kí có thể đánh máy xong một tài liệu trong 5 giờ 10 phút. Một cô khác đánh xong tài liệu ấy trong 4 giờ 40 phút. Nếu cùng làm, cả hai cô đánh được 90 trang. Hỏi mỗi cô đánh được bao nhiêu trang ?

Lời giải

5 giờ 20 phút = $\frac{16}{3}$ giờ ; 4 giờ 40 phút = $\frac{14}{3}$.

Trong một giờ cô thứ nhất đánh được $\frac{3}{16}$ tài liệu, cô thứ hai đánh được $\frac{3}{14}$ tài liệu.

Năng suất của cô thứ nhất so với cô thứ hai là : $\frac{3}{16} : \frac{3}{14} = 7 : 8$.

Vì cùng làm trong một thời gian như nhau nên số trang đánh được tỉ lệ thuận với năng suất của mỗi người.

Do đó, số trang cô thứ nhất đánh được là : $\frac{90}{7+8} \cdot 7 = 42$ (trang)

Số trang cô thứ hai đánh được là : $\frac{90}{7+8} \cdot 8 = 48$ (trang)

Bài 40. Một xe lửa đi hết một cái cầu dài 12m hết 12 giây và đi hết một cái cầu dài 148m hết 20 giây. Tính chiều dài và vận tốc của xe lửa.

Lời giải

Trong 12 giây, xe lửa đi 12m cộng với chiều dài xe lửa. Trong 20 giây, xe lửa đi 148m cộng với chiều dài xe lửa.

Như vậy trong thời gian : $20 - 12 = 8(\text{s})$, xe lửa đi được quãng đường là:

$$148 - 12 = 136(\text{m})$$



Vận tốc xe lửa là :

$$136:8=17 \text{ (m/s)}$$

Chiều dài của xe lửa là :

$$17.12-12=192 \text{ (m)}$$

Bài 41: Trong 3 thúng cam có 200 quả . Ta lấy $\frac{1}{3}$ số cam của thúng thứ nhất, $\frac{2}{5}$ số cam của thúng thứ 2 , và $\frac{13}{15}$ số cam của thúng thứ 3 thì được 70 quả . Hỏi nếu lấy $\frac{1}{10}$ số cam của thúng thứ 2 và $\frac{4}{5}$ số cam của thúng thứ 3 thì được bao nhiêu quả ?

Lời giải

Theo đề bài ra ta có ($\frac{1}{3}$ số cam thúng 1) + ($\frac{2}{5}$ số cam thúng 2) + ($\frac{13}{15}$ số cam thúng 3) thì được 70 quả . Như vậy nếu lấy gấp 3 lần số cam của cả 3 thúng thì ta được $70.3=210$ (quả) số cam này bằng tất cả số cam của thúng 1 cộng với $\frac{6}{5}$ số cam của thúng 2 rồi cộng với $\frac{39}{15}$ số cam của thúng 3 .

$$\text{Ta có } \frac{6}{5}=1+\frac{1}{5}; \quad \frac{39}{15}=\frac{13}{5}=1+\frac{8}{5}$$

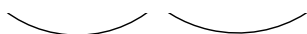
Theo bài ra ta có số cam của cả 3 thúng cam có 200 quả . Vậy $210-200=10$ chính là $\frac{1}{5}$ số cam của thúng 2 và $\frac{8}{5}$ số cam của thúng 3 . Đối chiếu với câu hỏi ta thấy $\frac{1}{10}$ số cam của thúng 2 (tức là $\frac{1}{2}$ của $\frac{1}{5}$) và $\frac{4}{5}$ số cam của thúng 3 (tức là $\frac{1}{2}$ của $\frac{8}{5}$) sẽ bằng $\frac{1}{2}$ của 10 quả cam tức là 5 quả cam.

Vậy nếu lấy $\frac{1}{10}$ số cam của thúng thứ 2 và $\frac{4}{5}$ số cam của thúng thứ 3 thì được 5 quả.

Bài 42:

Lớp 6A có 35 học sinh (HS) làm bài kiểm tra toán cuối Kỳ II . Đề bài gồm có 3 bài toán. Giáo viên chủ nhiệm lớp báo cáo với Nhà trường rằng : Cả lớp mỗi em đều làm được ít nhất một bài, trong đó 20 em giải được bài toán thứ nhất, 14 HS giải được bài toán thứ hai, 10 HS giải được bài toán thứ ba, 5 HS giải được bài toán thứ hai và thứ ba, 2 HS giải được bài toán thứ nhất và thứ hai, chỉ có một HS được 10 điểm vì đã giải được cả ba bài. Hỏi lớp học đó có bao nhiêu HS không dự kiểm tra ?

Lời giải



Áp dụng « Sơ đồ Ven »



Mỗi hình tròn ghi số HS giải đúng một bài nào đó. Vì chỉ có một HS giải đúng 3 bài nên điền số 1 vào phần chung của 3 hình tròn. Số HS giải đúng bài I và bài II là 2 nên phần chung của hai hình tròn này mà không chung với hình tròn còn lại sẽ được ghi số 1 (vì $2-1=1$). Tương tự, ta ghi được các số vào các phần còn lại.

Số học sinh có dự thi kiểm tra là tổng các số đã điền vào các phần :

$$13+5+1+1+4+8+0=32 \text{ (HS)}$$

Vậy số HS không dự kiểm tra là : $35-32=3 \text{ (HS)}$

Bài 43: Trong một Hội nghị có 100 người tham dự, trong đó có 10 người không biết tiếng Nga và tiếng Anh, có 75 người biết tiếng Nga và 83 người biết Tiếng Anh. Hỏi trong hội nghị có bao nhiêu người biết cả 2 thứ tiếng Nga và Anh ?

Lời giải

Số người biết ít nhất 1 trong 2 thứ tiếng Nga và Anh là :

$$100-10=90 \text{ (người)}$$

Số người chỉ biết tiếng Anh là :

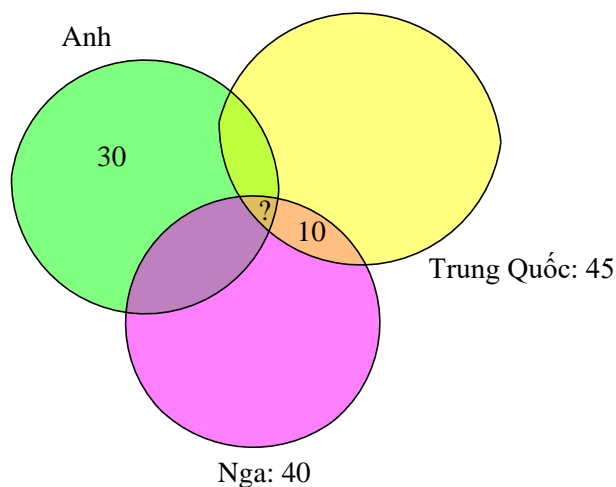
$$90-75=15 \text{ (người)}$$

Số người biết cả tiếng Nga và tiếng Anh là :

$$83-15=68 \text{ (người)}$$

Bài 44: Trong một hội nghị có 100 đại biểu tham dự. Mỗi đại biểu có thể sử dụng ít nhất một trong ba thứ tiếng: Nga, Trung Quốc và Anh. Biết rằng có 30 đại biểu chỉ nói được tiếng Anh, 40 đại biểu nói được tiếng Nga, 45 đại biểu nói được tiếng Trung Quốc và 10 đại biểu chỉ nói được hai thứ tiếng Nga và Trung Quốc. Hỏi có bao nhiêu đại biểu nói được cả ba thứ tiếng?

Lời giải



Số đại biểu nói được tiếng Nga hoặc tiếng Trung Quốc là:

$$100-30=70 \text{ (đại biểu)}$$



Số đại biểu nói được tiếng Nga nhưng không nói được tiếng Trung Quốc là:

$$70 - 45 = 25 \text{ (đại biểu)}$$

Số đại biểu nói được tiếng Trung Quốc nhưng không nói được tiếng Nga là:

$$70 - 40 = 30 \text{ (đại biểu)}$$

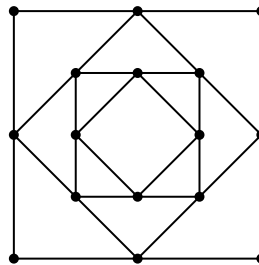
Số đại biểu nói được tiếng Nga và tiếng Trung Quốc là:

$$70 - (25 + 30) = 15 \text{ (đại biểu)}$$

Số đại biểu nói được cả ba thứ tiếng là:

$$15 - 10 = 5 \text{ (đại biểu)}$$

Bài 45: Nối điểm chính giữa cạnh hình vuông thứ nhất ta được hình vuông thứ hai. Nối điểm chính giữa các cạnh hình vuông thứ hai ta được hình vuông thứ ba và cứ tiếp tục như vậy. Hãy tìm số hình tam giác có trong hình vẽ như vậy đến hình vuông thứ 2021?



Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Lời giải

Theo đề bài ta có bảng sau:

Hình vuông thứ	Số hình tam giác có
1	$0 = 4.0$
2	$4 = 4.1$
3	$4 + 4 = 4.2$
4	$4 + 4 + 4 = 4.3$
...	...
2021	$4 + 4 + 4 + \dots + 4 = 4.2020$

Số hình tam giác được tạo thành là: $4.2020 = 8080$ (tam giác).



Bài 46: Một hiệu sách có tất cả 5 hộp bút bi và bút chì. Mỗi hộp chỉ đựng một loại bút. Hộp 1 có 78 bút, hộp 2 có 80 bút, hộp 3 có 82 bút, hộp 4 có 114 bút, hộp 5 có 128 bút. Sau đó, cô bán hàng bán đi một hộp bút chì. Hỏi lúc đầu hộp nào đựng bút bi, hộp nào đựng bút chì? Biết rằng số bút bi còn lại gấp bốn lần số bút chì còn lại.

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Lời giải

Nhắc lại, có 5 hộp bút với số bút: 78; 80; 82; 114; 128.

Sau khi bán đi một hộp bút chì thì số bút bi còn lại gấp bốn lần số bút chì còn lại, nên tổng số bút còn lại là một số chia hết cho $1+4=5$.

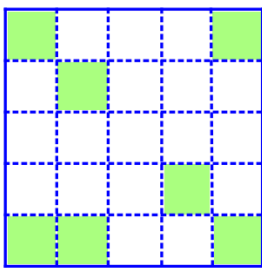
Mặt khác: tổng số bút ở 5 hộp là $78+80+82+114+128=482$ và 482 chia 5 dư 2.

Do đó hộp bút đã bán đi phải có số bút chia 5 dư 2 suy ra hộp bút đã bán là hộp có 82 bút.

Tổng số bút còn lại là: $78+80+114+128=400$ (bút).

Số bút chì còn lại là: $400:5=80$ (bút).

Vậy lúc đầu hộp đựng bút chì là: hộp 80 bút và hộp 82 bút; hộp đựng bút bi là: hộp 78 bút, hộp 114 bút và hộp 128 bút.



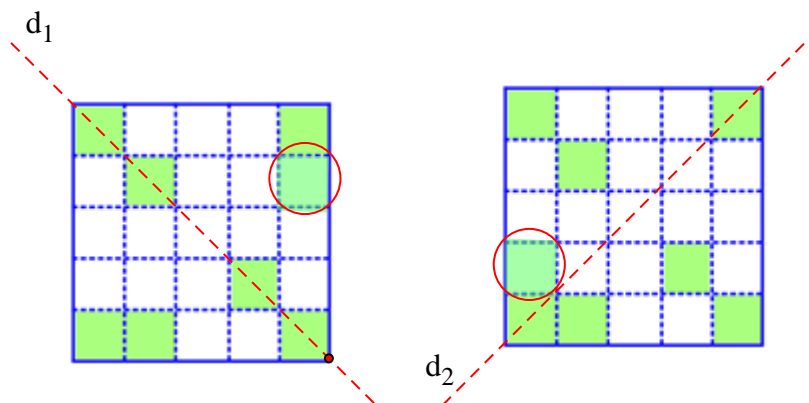
Bài 47: Bạn Nam tạo lưới gồm 25 ô vuông và tô màu như hình dưới đây. Bạn ấy có 7 ô vuông được tô màu. Em hãy sao chép thành 2 hình và thực hiện như sau:

- a) Trong hình thứ nhất, tô màu thêm 1 ô vuông sao cho hình mới có 1 trục đối xứng.
- b) Trong hình thứ hai, tô màu thêm 5 ô vuông nữa sao cho hình mới có 2 trục đối xứng.

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

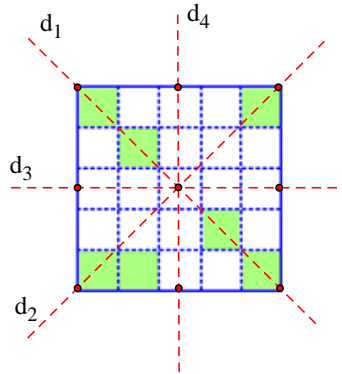
Lời giải

a) Tô màu thêm 1 ô vuông sao cho hình mới có 1 trục đối xứng.

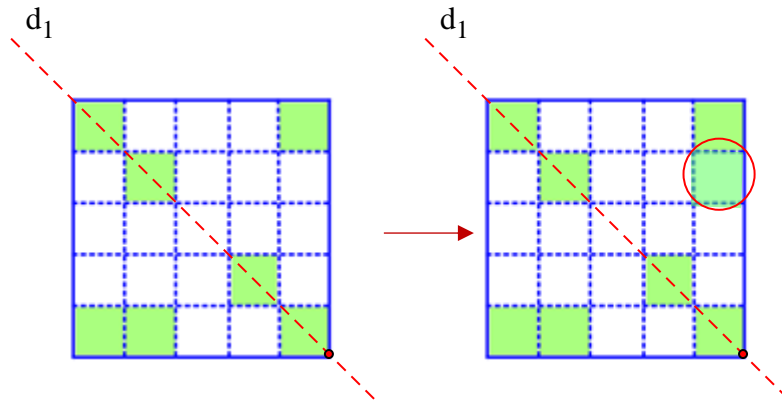




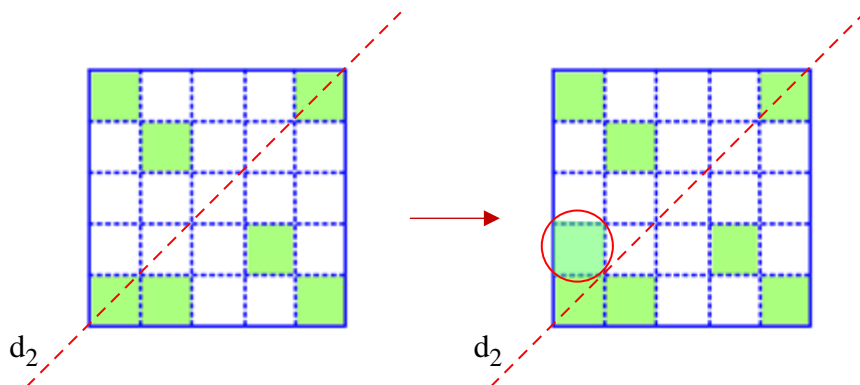
Hướng dẫn: Sau khi tô màu thêm 1 ô vuông ta được hình mới có 1 trục đối xứng suy ra trục đó cũng là trục đối xứng của lưới ô vuông ban đầu. Mà ta biết rằng hình vuông có 4 trục đối xứng, là các đường d_1 ; d_2 ; d_3 ; d_4 trong hình vẽ dưới đây:



+ Nếu trục đối xứng sau khi tô là d_1 :

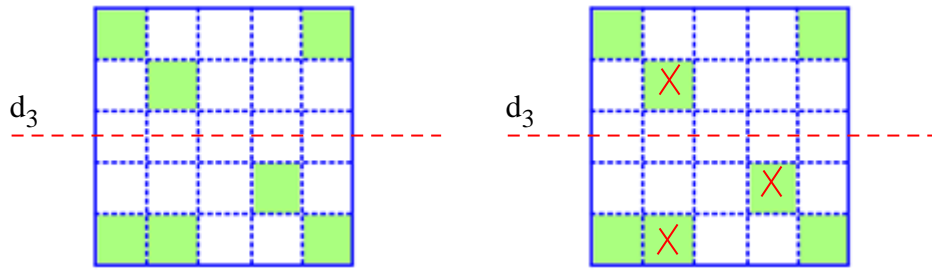


+ Nếu trục đối xứng sau khi tô là d_2 :



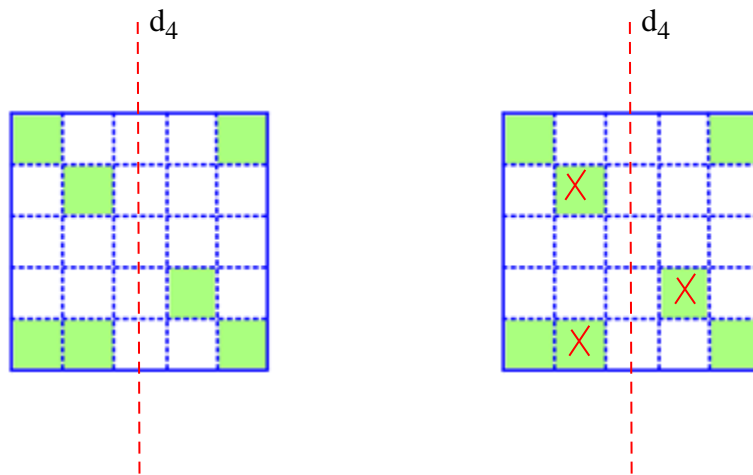
+ Nếu trục đối xứng sau khi tô là d_3 :





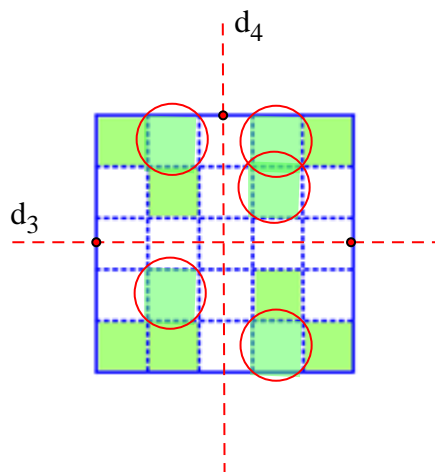
Trường hợp này không tô được do có 3 ô (đánh dấu nhân) chưa có ô tô màu đối xứng qua d_3 .

+ Nếu trục đối xứng sau khi tô là d_4 :



Trường hợp này không tô được do có 3 ô (đánh dấu nhân) chưa có ô tô màu đối xứng qua d_4 .

b) Tô màu thêm 5 ô vuông nữa sao cho hình mới có 2 trục đối xứng.



Hướng dẫn: Tương tự như câu a, ta có 4 trục đối xứng của lưới ô vuông. Ta thử với từng cặp trục đối xứng.



Bài 48: Trong số 200 học sinh có 150 học sinh thích học Toán, 120 học sinh thích Văn.

- Nếu có 5 học sinh không thích cả Toán lẫn Văn thì có bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?
- Có nhiều nhất bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?
- Có ít nhất bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?

Lời giải

Gọi số học sinh thích cả hai môn Văn và Toán là x ($0 < x \leq 150, x \in \mathbb{N}$), số học sinh thích Toán mà không thích Văn là $150 - x$.

a) Ta có: $150 - x + 120 + 5 = 200$

$\Rightarrow x = 75$

Vậy có 75 học sinh thích cả hai môn.

b) Có nhiều nhất 120 học sinh (nếu tất cả số thích văn đều thích toán)

c) Ta có: $150 - x + 120 \leq 200$

$\Rightarrow x \geq 70$

Có ít nhất 70 học sinh thích cả hai môn Văn và Toán.

Bài 49: Tổng kết đợt thi đua "100 điểm 10 dâng tặng thầy cô", lớp 6A có 43 bạn được từ 1 điểm 10 trở lên, 39 bạn được từ 2 điểm 10 trở lên, 14 bạn được từ 3 điểm 10 trở lên, 5 bạn được 4 điểm 10, không có ai được trên 4 điểm 10. Tính xem trong đợt thi đua đó, lớp 6A có bao nhiêu điểm 10?

Lời giải

Số học sinh đạt 1 điểm 10 là: $43 - 39 = 4$ (học sinh).

Số học sinh đạt 2 điểm 10 là: $39 - 14 = 25$ (học sinh).

Số học sinh đạt 3 điểm 10 là: $14 - 5 = 9$ (học sinh).

Số điểm 10 của lớp 6A đạt được là:

$1.4 + 2.25 + 3.9 + 4.5 = 101$ (điểm 10).

Bài 50: Tính đến năm 1994, dân số ở thủ đô Hà Nội là 2052116 người. Biết rằng trên đầu mỗi người có không quá 100000 sợi tóc. Chứng minh rằng ở Hà Nội ít ra cũng có 20 người có cùng một số sợi tóc.

Lời giải

Ta chia số dân ở Hà Nội theo số sợi tóc từ 0 đến 100 000 tức là thành 100 001 nhóm. Nếu mỗi nhóm có không quá 19 người thì tổng số dân chỉ là: $19.100\ 001 = 1\ 900\ 019 < 2\ 052\ 116$. Vậy ít nhất phải có một số nhóm có 20 người tức là ít ra cũng có 20 người có cùng một số sợi tóc.

Bài 51: Trong một bảng đấu loại bóng đá có 4 đội A, B, C, D . Người ta đưa ra 3 dự đoán:

- Đội A nhì, đội B nhất.
- Đội B nhì, đội D ba.
- Đội C nhì, đội D tư.

Kết quả dự đoán đều có một ý đúng, một ý sai. Hãy xác định thứ tự của mỗi đội.

Lời giải

Ta ghi ba dự đoán vào ba dòng trong bảng sau:

Thứ tự Dự đoán	1	2	3	4
a	B	A		
b		B	D	
c		C		D



Vì có nhiều dự đoán đề cập đến đội về nhì nên ta xét đội nào về nhì.

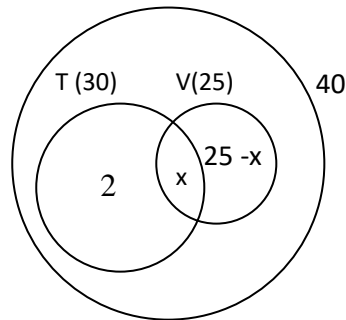
Giả sử đội A về nhì là đúng thì các đội B và C về nhì là sai, do đó D về thứ ba (theo b) và về thứ tư (theo c), vô lí.

Vậy đội A về nhì là sai, do đó theo a thì đội B về nhất. Đội B về nhì là sai nên theo b thì đội D về thứ 3. Đội D về thứ tư là sai nên theo c thì đội C về thứ nhì. Còn lại đội A về thứ tư.

Bài 52: Người ta điều tra trong một lớp học có 40 học sinh thì thấy có 30 học sinh thích Toán, 25 học sinh thích Văn, 2 học sinh không thích cả Toán lẫn Văn. Hỏi có bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?

Lời giải

Biểu thị các dữ kiện trong đề bài như trên hình vẽ. Gọi số học sinh thích cả hai môn Văn và Toán là x thì số học sinh thích Văn mà không thích Toán là $25 - x$. Ta có $30 + (25 - x) + 2 = 40$.



Do đó $x = 17$. Vậy có 17 học sinh thích cả hai môn Văn và Toán.

Bài 53: Tìm hai số tự nhiên chia hết cho 9, biết rằng: Tổng của chúng bằng $\overline{*657}$ và hiệu của chúng bằng $\overline{5*91}$.

Lời giải

Vì hai số chia hết cho 9 nên tổng của hai số là: $\overline{*657} : 9 \Leftrightarrow * = 9$ và hiệu của chúng bằng $\overline{5*91} : 9$ suy ra $* = 3$.

Vậy tổng của hai số là 9657 và hiệu của hai số là 5391.

Hai số cần tìm là: 7524 và 2133

Bài 54: Tìm chữ số a , biết rằng: $\overline{20a20a20a}$ chia hết cho 7

Lời giải

Ta có $\overline{20a20a20a} = \overline{20a20a} \cdot 1000 + \overline{20a}$

$$= (\overline{20a} \cdot 1000 + \overline{20a}) \cdot 1000 + \overline{20a}$$

$$= 1001 \cdot \overline{20a} \cdot 1000 + \overline{20a}$$

$$= 7 \cdot 143 \cdot \overline{20a} \cdot 1000 + \overline{20a} : 7$$

Mà $7 \cdot 143 \cdot \overline{20a} \cdot 1000 : 7$

$$\Rightarrow \overline{20a} : 7$$

$$\overline{20a} = 200 + a = 196 + (4 + a) : 7$$

$$\text{Mà } 196 : 7 \Rightarrow 4 + a : 7 \Rightarrow a = 3.$$



Bài 55: Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho sau khi viết tiếp số đó sau số 2014 ta được số chia hết cho 101.

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2017 - 2018

Lời giải

Giả sử n có k chữ số ($k \geq 1$).

Ta có: $2014 = 19 \cdot 101 + 95$, do đó:

$$\overline{2014n} = 2014 \cdot 10^k + n = 19 \cdot 101 \cdot 10^k + 95 \cdot 10^k + n$$

Suy ra $\overline{2014n} : 101$ khi và chỉ khi $95 \cdot 10^k + n : 101$.

Với $k = 1$ thì $95 \cdot 10^k + n = 950 + n = 101 \cdot 9 + (41 + n) : 101$ khi và chỉ khi $41 + n : 101$ nhưng n có một chữ số nên $41 + n \leq 41 + 9 < 101$, nên không có số n thỏa mãn đầu bài.

Với $k = 2$ thì $95 \cdot 10^k + n = 9500 + n = 101 \cdot 94 + (6 + n) : 101$ suy ra $6 + n : 101$, và số n nhỏ nhất được xác định bởi $6 + n = 101$ suy ra $n = 95$.

Vậy $n = 95$ thỏa mãn đề bài.

Bài 56: Tìm tất cả các số tự nhiên n , biết rằng $n + S(n) = 2014$, trong đó $S(n)$ là tổng các chữ số của n .

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018 - 2019

Lời giải

Nếu n là số có ít hơn 4 chữ số thì $n \leq 999$ và $S(n) \leq 27$

Suy ra $n + S(n) \leq 999 + 27 = 1026 < 2014$ (ktm)

Mặt khác $n \leq n + S(n) = 2014$ nên n là số có ít hơn 5 chữ số. Vậy n là số có 4 chữ số, suy ra $S(n) \leq 9 \cdot 4 = 36$.

Do vậy $n \geq 2014 - 36 = 1978$.

Vì $1978 \leq n \leq 2014$ suy ra $n = \overline{19ab}$ hoặc $n = \overline{20cd}$.

* Nếu $n = \overline{19ab}$. Ta có: $\overline{19ab} + (1 + 9 + a + b) = 2014$

$1910 + 11a + 2b = 2014$ khi và chỉ khi $11a + 2b = 104$ suy ra $a : 2$.

và $11a = 104 - 2b \geq 104 - 2 \cdot 9 = 86$

Suy ra $8 \leq 10 < a, a : 2$ suy ra $a = 8$ suy ra $b = 8$ suy ra $n = 1988$ (tm)

* Nếu $n = \overline{20cd}$ suy ra $\overline{20cd} + (2 + 0 + c + d) = 2014$.

$2002 + 11c + 2d = 2014$ suy ra $11c + 2d = 12$ suy ra $c : 2$.

Và $11c \leq 12$ suy ra:

$c = 0 \Rightarrow d = 6, n = 2006$ (tm)

Hoặc $c = 1 \Rightarrow 2d = 1$ (ktm).

Vậy $n \in \{1988; 2006\}$

Bài 57: Với q, p là số nguyên tố lớn hơn 5, chứng minh rằng: $p^4 - q^4 : 240$

Trích đề HSG huyện Sơn Tây năm 2017 - 2018

Lời giải

Ta có: $p^4 - q^4 = (p^4 - 1) - (q^4 - 1) : 240 = 8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

Chúng minh $p^4 - 1 : 240$

Do $p > 5$ nên p là số lẻ.

Mặt khác $p^4 - 1 = (p - 1)(p + 1)(p^2 + 1)$



$(p-1)$ và $(p+1)$ là hai số chẵn liên tiếp suy ra $(p-1)(p+1):8$

Do p là số lẻ nên p^2 là số lẻ suy ra $p^2+1:2$.

$p > 5$ nên p có dạng:

$p = 3k+1$ suy ra $p-1 = 3k:3$ suy ra $p^4-1:3$.

$p = 3k+2$ suy ra $p+1 = 3k+3:3$ suy ra $p^4-1:3$

Mặt khác p có thể là dạng:

$p = 5k+1$ suy ra $p-1 = 5k+1-1 = 5k:5$ suy ra $p^4-1:5$.

$p = 5k+2$ suy ra $p^2+1 = (5k+2)^2+1 = 25k^2+20k+5:5$ suy ra $p^4-1:5$.

$p = 5k+3$ suy ra $p^2+1 = 25k^2+30k+10:5$ suy ra $p^4-1:5$.

$p = 5k+4$ suy ra $p+1 = 5k+5:5$ suy ra $p^4-1:5$.

Vậy $p^4-1:8.2.3.5$ hay $p^4-1:240$.

Tương tự ta cũng có: $q^4-1:240$.

Vậy $(p^4-1)-(q^4-1) = p^4-q^4:240$.

Bài 58: Viết thêm chữ số y vào bên phải của một số có 5 chữ số thì được số lớn gấp 3 lần số có được do viết thêm chữ số y vào bên trái số đó. Tìm chữ số y và số có 5 chữ số đó.

Trích đề HSG huyện Đoàn Hùng năm 2018 -2019

Lời giải

Gọi số cần tìm là \overline{abcde} ($a \neq 0; a, b, c, d, e \in \mathbb{N}; a; b; c; d; e \leq 9$).

Ta có: $\overline{abcdey} = 3 \cdot \overline{yabcde}$

Đặt $\overline{abcde} = x$, ta có:

$$10x + y = 3 \cdot (100000y + x)$$

$$7x + y = 300000y$$

$$\text{Suy ra } 7x = 299999y$$

$$\text{Suy ra } x = 42857y.$$

Vì x là số có 5 chữ số nên y chỉ nhận hai giá trị $y = 1; y = 2$.

$$\text{Nếu } y = 1 \text{ thì } x = 42857.$$

$$\text{Nếu } y = 2 \text{ thì } x = 85714.$$

Bài 59: Ký hiệu $S_{(n)}$ là tổng các chữ số của số tự nhiên n . Tìm n sao cho $S_{(n)} = n^2 - 2013n + 6$.

Trích đề HSG huyện Tam Dương năm 2018 -2019

Lời giải

Giả sử khi biểu diễn số tự nhiên n dưới dạng số thập phân, ta có:

$$n = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \quad (\text{Với } a_i \text{ là các chữ số, } i \in \{0; 1; 2; \dots; m\}; m \in \mathbb{N})$$

$$n \geq a_m + a_{m-1} + \dots + a_1 + a_0$$

$$\text{Suy ra } n \geq S_{(n)}$$

$$\text{Suy ra } n^2 - 2013n + 6 \leq n$$

$$\text{Suy ra } n^2 + 6 \leq 2014n$$

$$\text{Suy ra } n + \frac{6}{n} \leq 2014 \text{ suy ra } n < 2014 \quad (1)$$



Mà $S_{(n)} \geq 0$ suy ra $n^2 - 2013n + 6 \geq 0$

Suy ra $n^2 + 6 \geq 2013n$ suy ra $n + \frac{6}{n} \geq 2013$ suy ra $n \geq 2013$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $n = 2013$.

Thử với $n = 2013$ ta có:

$S_{(2013)} = 2013^2 - 2013 \cdot 2013 + 6 = 6$ (thỏa mãn)

Vậy số tự nhiên n cần tìm là 2013.

PHIẾU BÀI TẬP SỐ 2

Bài 1: Có hai chiếc bình, một chiếc loại 5 lít và một chiếc loại 7 lít. Người ta có thể đong để lấy 1 lít, 2 lít, 4 lít, 6 lít dầu từ một thùng đựng bằng cách chỉ sử dụng hai chiếc bình trên. Em hãy nêu cách đong để lấy:

- 3 lít dầu.
- 1 lít dầu.

Trích đề HSG trường THCS Quế Phú (Quế Sơn) năm 2018 - 2019

Bài 2: Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; có thể lập được bao nhiêu số chẵn, mỗi số có 5 chữ số đôi một khác nhau?

Bài 3: Trong số 100 học sinh có 75 học sinh thích môn Toán và 60 học sinh thích môn Văn. Nếu có 5 học sinh không thích cả Văn và Toán. Hỏi có bao nhiêu học sinh thích cả hai môn?

Bài 4: Trong một cuộc thi có 50 câu hỏi. Mỗi câu trả lời đúng được 20 điểm, còn trả lời sai bị trừ 15 điểm. Một học sinh được tất cả 650 điểm. Hỏi bạn đó trả lời được mấy câu đúng?

Bài 5: Chứng minh rằng tổng các bình phương của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

Bài 6: Chứng minh rằng tổng bình phương của hai số tự nhiên lẻ bất kì không phải là số chính phương.

Bài 7: Chứng minh rằng: $4^n + 5$ chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài 8: Chứng minh rằng: $7^n - 1$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 9: Chứng minh rằng: $4^n + 6n + 8$ chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 10: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

Bài 11: Chứng minh rằng

a) $A = 10^{28} + 8 : 72$

b) $B = 81^7 - 27^9 - 9^{13} : 45$

Bài 12: Chứng minh rằng: $B = 1961^{1962} + 1963^{1964} + 1965^{1966} + 2$ chia hết cho 7.

Sử dụng tính chất: $(a+b)^n$ khi chia cho a có số dư là b

Bài 13: Chứng minh rằng:

a) $(n+10)(n+15) : 2$

b) $n(n+1)(n+2) : 2; 3$

Bài 14: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì: $A = n(2n+1)(7n+1) : 6$

Bài 15: Chứng minh rằng tổng của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3.

Bài 16: Chứng minh rằng tích của hai số chẵn liên tiếp luôn chia hết cho 8.

Bài 17: Chứng minh rằng: Tích của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3.

Bài 18: a) Chứng minh rằng một số chính phương khi chia cho 3 chỉ có số dư là 0 hoặc 1.

b) Chứng minh rằng một số chính phương khi chia cho 4 chỉ có số dư là 0 hoặc 1.

Bài 19: Có hay không số tự nhiên n để $2010 + n^2$ là số chính phương.



- Bài 20:** Tìm số có bốn chữ số khác nhau, biết rằng nếu viết thêm một chữ số 0 vào giữa hàng nghìn và hàng trăm thì được số mới gấp 9 lần số phải tìm.
- Bài 21:** Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, sao cho khi nhân số đó với 4 ta được số gồm bốn chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại.
- Bài 22:** Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, sao cho khi nhân số đó với 9 ta được số gồm bốn chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại
- Bài 23:** Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng nếu xoá chữ số hàng trăm thì số ấy giảm 9 lần.
- Bài 24:** Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, biết rằng nếu xoá chữ số hàng nghìn thì số ấy giảm 9 lần.
- Bài 25:** Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, biết rằng chữ số hàng trăm bằng 0 và nếu xoá chữ số 0 đó thì số ấy giảm 9 lần.
- Bài 26:** Một số tự nhiên có hai chữ số tăng gấp 9 lần nếu viết thêm một chữ số 0 vào giữa các chữ số hàng chục và hàng đơn vị của nó. Tìm số ấy.
- Bài 27:** Gọi $S(n)$ là tổng các chữ số của số tự nhiên n . Tìm số tự nhiên n sao cho $S(n) + n = 2015$.
- Chú ý: Có thể thay đầu bài bởi số khác
- Bài 28:** Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên có bốn chữ số \overline{abcd} sao cho $\overline{abcd} - \overline{dcba} = 1008$.
- Bài 29:** Tìm một số tự nhiên có ba chữ số biết rằng khi viết thêm chữ số 2 vào bên phải số đó thì nó tăng thêm 4106 đơn vị.
- Bài 30:** Tìm số tự nhiên có 4 chữ số. Biết rằng nếu ta xóa đi chữ số hàng chục và hàng đơn vị thì số đó giảm đi 4455 đơn vị.
- Bài 31.** Tích của hai phân số là $\frac{8}{15}$. Thêm 4 đơn vị vào phân số thứ nhất thì tích mới là $\frac{56}{15}$. Tìm hai phân số đó.
- Bài 32.** Trong đợt thi đua, lớp 6A có 42 bạn được từ 1 đến 10 điểm trở lên, 39 bạn được 2 điểm 10 trở lên, 14 bạn được từ 3 điểm 10 trở lên, 5 bạn được 4 điểm 10, không có ai được trên 4 điểm 10. Tính xem trong đợt thi đua lớp 6A được bao nhiêu điểm 10 ?
- Bài 33.** Hai xe ô tô khởi hành từ hai địa điểm A, B đi ngược chiều nhau. Xe thứ nhất khởi hành từ A lúc 7 giờ. Xe thứ hai khởi hành từ B lúc 7 giờ 10 phút. Biết rằng để đi cả quãng đường AB . Xe thứ nhất cần 2 giờ, xe thứ hai cần 3 giờ. Hỏi sau khi đi 2 xe gặp nhau lúc mấy giờ
- Bài 34:** Tổng bình phương của ba số tự nhiên là 2596. Biết rằng tỉ số giữa số thứ nhất và số thứ hai là $\frac{2}{3}$; giữa số thứ hai và số thứ ba là $\frac{5}{6}$. Tìm ba số đó.
- Bài 35.** Một xe tải khởi hành từ A lúc 7h và đến B lúc 12h. Một xe con khởi hành từ B lúc 7 giờ rưỡi và đến A lúc 11 giờ rưỡi
- a) Hỏi hai xe gặp nhau lúc mấy giờ
- b) Biết vận tốc xe con hơn xe tải là 10km/h. Tính quãng đường AB
- Bài 36.** Tìm bộ ba số nguyên dương a, b, c sao cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4}{5}$
- Bài 37.** Xe máy thứ nhất đi từ A đến B mất 4 giờ, xe thứ hai đi từ B đến A mất 3 giờ. Nếu hai xe khởi hành cùng một lúc từ A và B thì sau 1,5 giờ hai xe sẽ còn cách nhau 15 km (hai xe chưa gặp nhau). Tính quãng đường AB



Bài 38. Một xe tải khởi hành từ A lúc 7h và đến B lúc 12h. Một xe con khởi hành từ B lúc 7 giờ rưỡi và đến A lúc 11 giờ rưỡi.

a) Hỏi hai xe gặp nhau lúc mấy giờ

b) Biết vận tốc xe con hơn xe tải là 10km/h. Tính quãng đường AB.

Bài 39. Một cô thư kí có thể đánh máy xong một tài liệu trong 5 giờ 10 phút. Một cô khác đánh xong tài liệu ấy trong 4 giờ 40 phút. Nếu cùng làm, cả hai cô đánh được 90 trang. Hỏi mỗi cô đánh được bao nhiêu trang ?

Bài 40. Một xe lửa đi hết một cái cầu dài 12m hết 12 giây và đi hết một cái cầu dài 148m hết 20 giây. Tính chiều dài và vận tốc của xe lửa.

Bài 41: Trong 3 thúng cam có 200 quả. Ta lấy $\frac{1}{3}$ số cam của thúng thứ nhất, $\frac{2}{5}$ số cam của thúng

thứ 2, và $\frac{13}{15}$ số cam của thúng thứ 3 thì được 70 quả. Hỏi nếu lấy $\frac{1}{10}$ số cam của thúng thứ 2 và

$\frac{4}{5}$ số cam của thúng thứ 3 thì được bao nhiêu quả ?

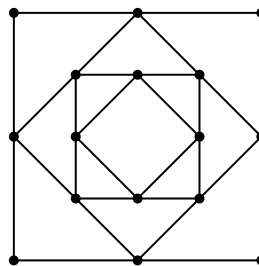
Bài 42:

Lớp 6A có 35 học sinh (HS) làm bài kiểm tra toán cuối Kỳ II. Đề bài gồm có 3 bài toán. Giáo viên chủ nhiệm lớp báo cáo với Nhà trường rằng: Cả lớp mỗi em đều làm được ít nhất một bài, trong đó 20 em giải được bài toán thứ nhất, 14 HS giải được bài toán thứ hai, 10 HS giải được bài toán thứ ba, 5 HS giải được bài toán thứ hai và thứ ba, 2 HS giải được bài toán thứ nhất và thứ hai, chỉ có một HS được 10 điểm vì đã giải được cả ba bài. Hỏi lớp học đó có bao nhiêu HS không dự kiểm tra ?

Bài 43: Trong một Hội nghị có 100 người tham dự, trong đó có 10 người không biết tiếng Nga và tiếng Anh, có 75 người biết tiếng Nga và 83 người biết Tiếng Anh. Hỏi trong hội nghị có bao nhiêu người biết cả 2 thứ tiếng Nga và Anh ?

Bài 44: Trong một hội nghị có 100 đại biểu tham dự. Mỗi đại biểu có thể sử dụng ít nhất một trong ba thứ tiếng: Nga, Trung Quốc và Anh. Biết rằng có 30 đại biểu chỉ nói được tiếng Anh, 40 đại biểu nói được tiếng Nga, 45 đại biểu nói được tiếng Trung Quốc và 10 đại biểu chỉ nói được hai thứ tiếng Nga và Trung Quốc. Hỏi có bao nhiêu đại biểu nói được cả ba thứ tiếng?

Bài 45: Nối điểm chính giữa cạnh hình vuông thứ nhất ta được hình vuông thứ hai. Nối điểm chính giữa các cạnh hình vuông thứ hai ta được hình vuông thứ ba và cứ tiếp tục như vậy. Hãy tìm số hình tam giác có trong hình vẽ như vậy đến hình vuông thứ 2021 ?

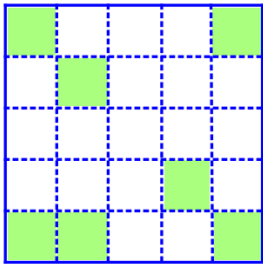


Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022



Bài 46: Một hiệu sách có tất cả 5 hộp bút bi và bút chì. Mỗi hộp chỉ đựng một loại bút. Hộp 1 có 78 bút, hộp 2 có 80 bút, hộp 3 có 82 bút, hộp 4 có 114 bút, hộp 5 có 128 bút. Sau đó, cô bán hàng bán đi một hộp bút chì. Hỏi lúc đầu hộp nào đựng bút bi, hộp nào đựng bút chì? Biết rằng số bút bi còn lại gấp bốn lần số bút chì còn lại.

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022



Bài 47: Bạn Nam tạo lưới gồm 25 ô vuông và tô màu như hình dưới đây. Bạn ấy có 7 ô vuông được tô màu. Em hãy sao chép thành 2 hình và thực hiện như sau:

- Trong hình thứ nhất, tô màu thêm 1 ô vuông sao cho hình mới có 1 trục đối xứng.
- Trong hình thứ hai, tô màu thêm 5 ô vuông nữa sao cho hình mới có 2 trục đối xứng.

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Bài 48: Trong số 200 học sinh có 150 học sinh thích học Toán, 120 học sinh thích Văn.

- Nếu có 5 học sinh không thích cả Toán lẫn Văn thì có bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?
- Có nhiều nhất bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?
- Có ít nhất bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?

Bài 49: Tổng kết đợt thi đua "100 điểm 10 dâng tặng thầy cô", lớp 6A có 43 bạn được từ 1 điểm 10 trở lên, 39 bạn được từ 2 điểm 10 trở lên, 14 bạn được từ 3 điểm 10 trở lên, 5 bạn được 4 điểm 10, không có ai được trên 4 điểm 10. Tính xem trong đợt thi đua đó, lớp 6A có bao nhiêu điểm 10?

Bài 50: Tính đến năm 1994, dân số ở thủ đô Hà Nội là 2052116 người. Biết rằng trên đầu mỗi người có không quá 100000 sợi tóc. Chứng minh rằng ở Hà Nội ít ra cũng có 20 người có cùng một số sợi tóc.

Bài 51: Trong một bảng đấu loại bóng đá có 4 đội A, B, C, D . Người ta đưa ra 3 dự đoán :

- Đội A nhì, đội B nhất.
- Đội B nhì, đội D ba.
- Đội C nhì, đội D tư.

Kết quả dự đoán đều có một ý đúng, một ý sai. Hãy xác định thứ tự của mỗi đội.

Bài 52: Người ta điều tra trong một lớp học có 40 học sinh thì thấy có 30 học sinh thích Toán, 25 học sinh thích Văn, 2 học sinh không thích cả Toán lẫn Văn. Hỏi có bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?

Bài 53: Tìm hai số tự nhiên chia hết cho 9, biết rằng: Tổng của chúng bằng $\overline{*657}$ và hiệu của chúng bằng $\overline{5*91}$.

Bài 54: Tìm chữ số a , biết rằng: $\overline{20a20a20a}$ chia hết cho 7

Bài 55: Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho sau khi viết tiếp số đó sau số 2014 ta được số chia hết cho 101.

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2017 - 2018

Bài 56: Tìm tất cả các số tự nhiên n , biết rằng $n + S(n) = 2014$, trong đó $S(n)$ là tổng các chữ số của n .



Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018 -2019

Bài 57: Với q, p là số nguyên tố lớn hơn 5, chứng minh rằng: $p^4 - q^4 : 240$

Trích đề HSG huyện Sơn Tây năm 2017 -2018

Bài 58: Viết thêm chữ số y vào bên phải của một số có 5 chữ số thì được số lớn gấp 3 lần số có được do viết thêm chữ số y vào bên trái số đó. Tìm chữ số y và số có 5 chữ số đó.

Trích đề HSG huyện Đoan Hùng năm 2018 -2019

Bài 59: Ký hiệu $S_{(n)}$ là tổng các chữ số của số tự nhiên n . Tìm n sao cho $S_{(n)} = n^2 - 2013n + 6$.

Trích đề HSG huyện Tam Dương năm 2018 -2019.



CHỦ ĐỀ: SUY LUẬN LOGIC, SƠ ĐỒ VEN

A. PHẦN NỘI DUNG

Dạng toán: Suy luận logic nhưng không dùng nguyên lý Dirichlet

Bài 1: Một hộp bi có 219 viên bi. Hai bạn chơi bốc bi ra khỏi hộp, mỗi lần chỉ được lấy từ 2 đến 7 viên bi. Hai bạn lần lượt thay nhau bốc, ai bốc được những viên bi cuối cùng thì người đó thắng cuộc. Chúng ta hãy tìm cách chơi để bạn bốc trước bao giờ cũng thắng?

Trích đề HSG THCS Quỳnh Thiện năm 2022 - 2023

Lời giải

Có $2+7=9$; $219:9=24$ (dư 3) nên

Nếu tổng số bi bốc được của 2 người nhiều nhất là 9 thì vẫn còn dư sau khi người thứ 2 bốc lượt thứ 24, do đó người bốc trước sẽ là người bốc được những viên bi cuối cùng nếu người thứ nhất bốc như sau:

n lần đầu tiên, người thứ nhất bốc 3 viên bi. Tiếp theo người thứ 2 bốc k viên bi thì người thứ nhất lại bốc $9-k$ viên bi. Cứ như vậy, số bi cuối cùng sẽ được người đầu tiên bốc nên người bốc trước luôn thắng.

Bài 2: Cho số $n = \overline{155*710*4*16}$ có 12 chữ số. Chứng minh rằng nếu thay các dấu "*" bởi các chữ số khác nhau trong chữ số 1; 2; 3 một cách tùy ý thì số đó luôn chia hết cho 396.

Trích đề HSG huyện Cẩm Thủy năm 2022 - 2023

Lời giải

Ta thấy, vị trí của các chữ số thay thế ba dấu sao trong số trên đều ở hàng chẵn và vì ba chữ số đó đôi một khác nhau, lấy từ tập hợp $\{1; 2; 3\}$ nên tổng của chúng luôn bằng 6.

Mặt khác: $396 = 4.9.11$

Do $(4; 9; 11) = 1$, nên ta chứng minh: $n:4, n:9, n:11$

Thật vậy:

+) $n:4$ (vì số tạo bởi 2 chữ số tận cùng của n là 16 chia hết cho 4)

+) $n:9$ (vì tổng các chữ số của n là: $1+5+5+7+1+4+1+6+(***)=36:9$)

+) $n:11$ (Vì hiệu số giữa tổng các chữ số hàng chẵn và tổng các chữ số hàng lẻ là 0 nên chia hết cho 11.

$$(1+5+7+4+1) - (5+1+6+***) = 18 - (12+6) = 0$$

Vậy $n = \overline{155*710*4*16}:396$

Bài 3: Trong một cuộc thi có 50 câu hỏi. Mỗi câu trả lời đúng được 20 điểm, còn trả lời sai bị trừ 15 điểm. Một học sinh được tất cả 650 điểm. Hỏi bạn đó trả lời được mấy câu đúng ?

Trích đề 059, năm 2017 - 2018

Lời giải

Giả sử bạn đó trả lời đúng tất cả các câu. Vậy số điểm bạn ấy nhận được là

$$50.20 = 1000 \text{ (điểm)}$$

Vậy số điểm này hơn số điểm thực tế là

$$1000 - 650 = 350$$

Số điểm thừa ra này sẽ bằng $20 - (-15) = 35$ lần số câu trả lời sai do đã giả sử tất cả các câu trả lời đúng.



Vậy số câu trả lời sai là

$$350 : 35 = 10(\text{câu})$$

Số câu trả lời đúng là

$$50 - 10 = 40(\text{câu})$$

Đáp số: 40 câu.

Bài 4: Cho số $n = \overline{155*710*4*16}$ có 12 chữ số. Chứng minh rằng nếu thay các dấu (*) bởi các chữ số khác nhau trong chữ số 1;2;3 một cách tùy ý thì số đó luôn chia hết cho 396.

Trích đề HSG huyện Cẩm Thủy năm 2022 - 2023

Lời giải

Ta thấy, vị trí của các chữ số thay thế ba dấu sao trong số trên đều ở hàng chẵn và vì ba chữ số đó đôi một khác nhau, lấy từ tập hợp $\{1;2;3\}$ nên tổng của chúng luôn bằng $1+2+3=6$.

Mặt khác: $396 = 4.9.11$

Do $(4; 9; 11) = 1$, nên ta chứng minh: $n:4$, $n:9$, $n:11$

Thật vậy:

+) $n:4$ (vì số tạo bởi 2 chữ số tận cùng của n là 16 chia hết cho 4)

+) $n:9$ (vì tổng các chữ số của n là:

$$1+5+5+7+1+4+1+6 + (* + * + *) = 36:9$$

+) $n:11$ (Vì hiệu số giữa tổng các chữ số hàng chẵn và tổng các chữ số hàng lẻ là 0 nên chia hết cho 11.

$$(1+5+7+4+1) - (5+1+6 + * + * + *) = 18 - (12+6) = 0$$

Vậy $n = \overline{155*710*4*16} : 396$.

Bài 5: Có 9 miếng bánh chưng cần rán vàng cả hai mặt. Thời gian rán mỗi mặt cần 3 phút. Nếu dùng một chiếc chảo mỗi lần chỉ rán được nhiều nhất 6 miếng thì cần thời gian ít nhất là bao lâu để rán xong 9 miếng bánh chưng đó.

A. 9 phút

B. 12 phút

C. 18 phút

D. 27 phút

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: A. 9 phút

Bài 6: Cho số $n = \overline{155*710*4*16}$ có 12 chữ số. Chứng minh rằng nếu thay các dấu "*" bởi các chữ số khác nhau trong chữ số 1;2;3 một cách tùy ý thì số đó luôn chia hết cho 396 .

Trích đề HSG huyện Cẩm Thủy năm 2022 - 2023

Lời giải

Ta thấy, vị trí của các chữ số thay thế ba dấu sao trong số trên đều ở hàng chẵn và vì ba chữ số đó đôi một khác nhau, lấy từ tập hợp $\{1;2;3\}$ nên tổng của chúng luôn bằng $1+2+3=6$

Mặt khác: $396 = 4.9.11$



Do $(4;9;11) = 1$, nên ta chứng minh: $n:4, n:9, n:11$

Thật vậy:

+) $n:4$ (vì số tạo bởi 2 chữ số tận cùng của n là 16 chia hết cho 4)

+) $n:9$ (vì tổng các chữ số của n là:

$$1+5+5+7+1+4+1+6+(***) = 36:9$$

+) $n:11$ (Vì hiệu số giữa tổng các chữ số hàng chẵn và tổng các chữ số hàng lẻ là 0 nên chia hết cho 11

$$(1+5+7+4+1)-(5+1+6+***) = 18-(12+6) = 0$$

Vậy $n = \overline{155*710*4*16}:396$.

Bài 7: Trong một cuộc thi có 22 câu hỏi, mỗi câu trả lời đúng được 15 điểm, còn sai thì bị trừ 10 điểm. Một học sinh được tất cả 155 điểm. Hỏi bạn đó trả lời đúng mấy câu?

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Lời giải

Giả sử bạn học sinh đó trả lời đúng cả 22 câu. Như vậy tổng số điểm bạn đó đạt được là:

$$22 \cdot 15 = 330 \text{ (điểm)}$$

Nhưng thực tế chỉ được 155 điểm nghĩa là còn thiếu:

$$330 - 155 = 175 \text{ (điểm)}$$

Sở dĩ hụt đi 175 điểm vì trong số 22 câu có một số câu bạn ấy trả lời sai, giữa 1 câu trả lời sai và 1 câu trả lời đúng chênh lệch là:

$$15 + 10 = 25 \text{ (điểm)}$$

Do đó số câu trả lời sai là: $175 : 25 = 7$ (câu)

Số câu trả lời đúng là: $22 - 7 = 15$ (câu)

Bài 8: Hãy viết số lớn nhất bằng cách dùng 3 chữ số 1;2;3 với điều kiện mỗi chữ số dùng một lần và chỉ một lần

Trích đề HSG THCS Trần Phú Gia Lai năm 2018-2019

Lời giải

Trường hợp không dùng lũy thừa, số lớn nhất có thể viết được là 321

*Trường hợp dùng lũy thừa: (Ta bỏ qua lũy thừa có cơ số và số mũ là 1)

- Xét các lũy thừa mà số mũ có một chữ số: $13^2; 31^2; 12^3; 21^3$

So sánh 21^3 và 31^2 ta có $21^3 > 31^2$ (vì $21^3 = 9261; 31^2 = 961$)

Xét các lũy thừa mà số mũ có hai chữ số: $2^{13}; 2^{31}; 3^{12}; 3^{21}$

So sánh 3^{21} với 2^{31} ta có

$$3^{21} = 3 \cdot 3^{20} = 3 \cdot (3^2)^{10} = 3 \cdot 9^{10}$$

$$2^{31} = 2 \cdot 2^{30} = 2 \cdot (2^3)^{10} = 2 \cdot 8^{10}$$

Từ đó suy ra $3^{21} > 2^{31}$. So sánh 3^{21} với 21^3 ta có: $3^{21} > 3^9 = (3^3)^3 = 27^3 > 21^3$

Vậy số lớn nhất là: 3^{21}

Bài 9. Có hai chiếc bình, một chiếc loại 5 lít và một chiếc loại 7 lít. Người ta có thể đong để lấy 1 lít, 2 lít, 4 lít, 6 lít dầu từ một thùng đựng bằng cách chỉ sử dụng hai chiếc bình trên. Em hãy nêu cách đong để lấy:

a) 3 lít dầu

b) 1 lít dầu.

Trích đề HSG THCS Quế Phú năm 2018-2019

Lời giải



a) Để đong 3 lít ta thực hiện đong, thùng 5 lít trước, 7 lít sau:

$(5;0) \rightarrow (0;5) \rightarrow (5;5) \rightarrow (3;7)$. Vậy ta có 3 lít ở thùng 5 lít

b) Để đong 1 lít, ta thực hiện đong, thùng 5 lít trước, 7 lít sau:

$(5;0) \rightarrow (0;5) \rightarrow (5;5) \rightarrow (3;7) \rightarrow (0;3) \rightarrow (5;3) \rightarrow (1;7)$

Vậy ta có 1 lít ở thùng 5 lít.

B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

Dạng toán: Suy luận logic nhưng không dùng nguyên lý Dirichlet

Bài 1: Một hộp bi có 219 viên bi. Hai bạn chơi bốc bi ra khỏi hộp, mỗi lần chỉ được lấy từ 2 đến 7 viên bi. Hai bạn lần lượt thay nhau bốc, ai bốc được những viên bi cuối cùng thì người đó thắng cuộc. Chứng tỏ rằng có cách chơi để bạn bốc trước bao giờ cũng thắng?

Trích đề HSG THCS Quỳnh Thiện năm 2022 - 2023

Bài 2: Cho số $n = \overline{155*710*4*16}$ có 12 chữ số. Chứng minh rằng nếu thay các dấu "*" bởi các chữ số khác nhau trong chữ số 1; 2; 3 một cách tùy ý thì số đó luôn chia hết cho 396.

Trích đề HSG huyện Cẩm Thủy năm 2022 - 2023

Bài 3: Trong một cuộc thi có 50 câu hỏi. Mỗi câu trả lời đúng được 20 điểm, còn trả lời sai bị trừ 15 điểm. Một học sinh được tất cả 650 điểm. Hỏi bạn đó trả lời được mấy câu đúng ?

Trích đề 059, năm 2017 – 2018

Bài 4: Cho số $n = \overline{155*710*4*16}$ có 12 chữ số. Chứng minh rằng nếu thay các dấu (*) bởi các chữ số khác nhau trong chữ số 1;2;3 một cách tùy ý thì số đó luôn chia hết cho 396.

Trích đề HSG huyện Cẩm Thủy năm 2022 - 2023

Bài 5: Có 9 miếng bánh chưng cần rán vàng cả hai mặt. Thời gian rán mỗi mặt cần 3 phút. Nếu dùng một chiếc chảo mỗi lần chỉ rán được nhiều nhất 6 miếng thì cần thời gian ít nhất là bao lâu để rán xong 9 miếng bánh chưng đó.

A. 9 phút

B. 12 phút

C. 18 phút

D. 27 phút

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 – 2022

Bài 6: Cho số $n = \overline{155*710*4*16}$ có 12 chữ số. Chứng minh rằng nếu thay các dấu "*" bởi các chữ số khác nhau trong chữ số 1;2;3 một cách tùy ý thì số đó luôn chia hết cho 396 .

Trích đề HSG huyện Cẩm Thủy năm 2022 – 2023

Bài 7: Trong một cuộc thi có 22 câu hỏi, mỗi câu trả lời đúng được 15 điểm, còn sai thì bị trừ 10 điểm. Một học sinh được tất cả 155 điểm. Hỏi bạn đó trả lời đúng mấy câu?

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Bài 8: Hãy viết số lớn nhất bằng cách dùng 3 chữ số 1;2;3 với điều kiện mỗi chữ số dùng một lần và chỉ một lần

Trích đề HSG THCS Trần Phú Gia Lai năm 2018-2019

Bài 9. Có hai chiếc bình, một chiếc loại 5 lít và một chiếc loại 7 lít. Người ta có thể đong để lấy 1 lít, 2 lít, 4 lít, 6 lít dầu từ một thùng đựng bằng cách chỉ sử dụng hai chiếc bình trên. Em hãy nêu cách đong để lấy:

a) 3 lít dầu

b) 1 lít dầu.

Trích đề HSG THCS Quế Phú năm 2018-2019



C. SỬU TÀM CÁC BÀI TƯƠNG TỰ

Bài 1: Trong số 200 học sinh có 150 học sinh thích học Toán, 120 học sinh thích Văn.

- Nếu có 5 học sinh không thích cả Toán lẫn Văn thì có bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?
- Có nhiều nhất bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?
- Có ít nhất bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?

Lời giải

Gọi số học sinh thích cả hai môn Văn và Toán là x ($0 < x \leq 150, x \in \mathbb{N}$), số học sinh thích Toán mà không thích Văn là $150 - x$.

a) Ta có: $150 - x + 120 + 5 = 200$

$$\Rightarrow x = 75$$

Vậy có 75 học sinh thích cả hai môn.

b) Có nhiều nhất 120 học sinh (nếu tất cả số thích văn đều thích toán)

c) Ta có: $150 - x + 120 \leq 200$

$$\Rightarrow x \geq 70$$

Có ít nhất 70 học sinh thích cả hai môn Văn và Toán.

Bài 2: Tổng kết đợt thi đua "100 điểm 10 dâng tặng thầy cô", lớp 6A có 43 bạn được từ 1 điểm 10 trở lên, 39 bạn được từ 2 điểm 10 trở lên, 14 bạn được từ 3 điểm 10 trở lên, 5 bạn được 4 điểm 10, không có ai được trên 4 điểm 10. Tính xem trong đợt thi đua đó, lớp 6A có bao nhiêu điểm 10?

Lời giải

Số học sinh đạt 1 điểm 10 là: $43 - 39 = 4$ (học sinh).

Số học sinh đạt 2 điểm 10 là: $39 - 14 = 25$ (học sinh).

Số học sinh đạt 3 điểm 10 là: $14 - 5 = 9$ (học sinh).

Số điểm 10 của lớp 6A đạt được là:

$$1.4 + 2.25 + 3.9 + 4.5 = 101 \text{ (điểm 10).}$$

Bài 3: Tính đến năm 1994, dân số ở thủ đô Hà Nội là 2052116 người. Biết rằng trên đầu mỗi người có không quá 100000 sợi tóc. Chứng minh rằng ở Hà Nội ít ra cũng có 20 người có cùng một số sợi tóc.

Lời giải

Ta chia số dân ở Hà Nội theo số sợi tóc từ 0 đến 100 000 tức là thành 100 001 nhóm. Nếu mỗi nhóm có không quá 19 người thì tổng số dân chỉ là: $19.100\ 001 = 1\ 900\ 019 < 2\ 052\ 116$. Vậy ít nhất phải có một số nhóm có 20 người tức là ít ra cũng có 20 người có cùng một số sợi tóc.

Bài 4: Trong một bảng đấu loại bóng đá có 4 đội A, B, C, D . Người ta đưa ra 3 dự đoán:

- Đội A nhì, đội B nhất.
- Đội B nhì, đội D ba.



c) Đội C nhì, đội D tư.

Kết quả dự đoán đều có một ý đúng, một ý sai. Hãy xác định thứ tự của mỗi đội.

Lời giải

Ta ghi ba dự đoán vào ba dòng trong bảng sau :

Thứ tự \ Dự đoán	1	2	3	4
a	B	A		
b		B	D	
c		C		D

Vì có nhiều dự đoán đề cập đến đội về nhì nên ta xét đội nào về nhì.

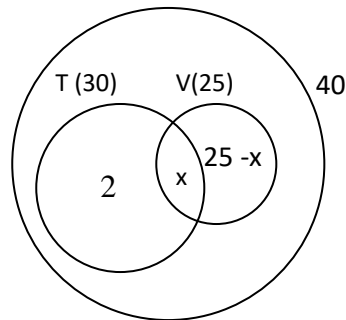
Giả sử đội A về nhì là đúng thì các đội B và C về nhì là sai, do đó D về thứ ba (theo b) và về thứ tư (theo c), vô lí.

Vậy đội A về nhì là sai, do đó theo a thì đội B về nhất. Đội B về nhì là sai nên theo b thì đội D về thứ 3. Đội D về thứ tư là sai nên theo c thì đội C về thứ nhì. Còn lại đội A về thứ tư.

Bài 5: Người ta điều tra trong một lớp học có 40 học sinh thì thấy có 30 học sinh thích Toán, 25 học sinh thích Văn, 2 học sinh không thích cả Toán lẫn Văn. Hỏi có bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?

Lời giải

Biểu thị các dữ kiện trong đề bài như trên hình vẽ. Gọi số học sinh thích cả hai môn Văn và Toán là x thì số học sinh thích Văn mà không thích Toán là $25 - x$. Ta có $30 + (25 - x) + 2 = 40$.



Do đó $x = 17$. Vậy có 17 học sinh thích cả hai môn Văn và Toán.

Bài 6: Tìm hai số tự nhiên chia hết cho 9, biết rằng: Tổng của chúng bằng $\overline{*657}$ và hiệu của chúng bằng $\overline{5*91}$.

Lời giải

Vì hai số chia hết cho 9 nên tổng của hai số là: $\overline{*657} : 9 \Leftrightarrow * = 9$ và hiệu của chúng bằng $\overline{5*91} : 9$ suy ra $* = 3$.

Vậy tổng của hai số là 9657 và hiệu của hai số là 5391.

Hai số cần tìm là: 7524 và 2133

Bài 7: Tìm chữ số a , biết rằng: $\overline{20a20a20a}$ chia hết cho 7

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overline{20a20a20a} &= \overline{20a20a} \cdot 1000 + \overline{20a} \\ &= (\overline{20a} \cdot 1000 + \overline{20a}) \cdot 1000 + \overline{20a} \end{aligned}$$

$$= 1001 \cdot \overline{20a} \cdot 1000 + \overline{20a}$$

$$= 7.143 \cdot \overline{20a} \cdot 1000 + \overline{20a} : 7$$

$$\text{Mà } 7.143 \cdot \overline{20a} \cdot 1000 : 7$$

$$\Rightarrow \overline{20a} : 7$$

$$\overline{20a} = 200 + a = 196 + (4 + a) : 7$$

$$\text{Mà } 196 : 7 \Rightarrow 4 + a : 7 \Rightarrow a = 3.$$

Bài 8: Trong 3 thúng cam có 200 quả . Ta lấy $\frac{1}{3}$ số cam của thúng thứ nhất, $\frac{2}{5}$ số cam của thúng thứ 2 , và $\frac{13}{15}$ số cam của thúng thứ 3 thì được 70 quả . Hỏi nếu lấy $\frac{1}{10}$ số cam của thúng thứ 2 và $\frac{4}{5}$ số cam của thúng thứ 3 thì được bao nhiêu quả ?

Lời giải

Theo đề bài ra ta có ($\frac{1}{3}$ số cam thúng 1) + ($\frac{2}{5}$ số cam thúng 2) + ($\frac{13}{15}$ số cam thúng 3) thì được 70 quả . Như vậy nếu lấy gấp 3 lần số cam của cả 3 thúng thì ta được $70 \cdot 3 = 210$ (quả) số cam này bằng tất cả số cam của thúng 1 cộng với $\frac{6}{5}$ số cam của thúng 2 rồi cộng với $\frac{39}{15}$ số cam của thúng 3 .

$$\text{Ta có } \frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}; \quad \frac{39}{15} = \frac{13}{5} = 1 + \frac{8}{5}$$

Theo bài ra ta có số cam của cả 3 thúng cam có 200 quả . Vậy $210 - 200 = 10$ chính là $\frac{1}{5}$ số cam của thúng 2 và $\frac{8}{5}$ số cam của thúng 3 . Đối chiếu với câu hỏi ta thấy $\frac{1}{10}$ số cam của thúng 2 (tức là $\frac{1}{2}$ của $\frac{1}{5}$) và $\frac{4}{5}$ số cam của thúng 3 (tức là $\frac{1}{2}$ của $\frac{8}{5}$) sẽ bằng $\frac{1}{2}$ của 10 quả cam tức là 5 quả cam.

Vậy nếu lấy $\frac{1}{10}$ số cam của thúng thứ 2 và $\frac{4}{5}$ số cam của thúng thứ 3 thì được 5 quả.

Bài 9:

Lớp 6A có 35 học sinh (HS) làm bài kiểm tra toán cuối Kỳ II . Đề bài gồm có 3 bài toán. Giáo viên chủ nhiệm lớp báo cáo với Nhà trường rằng : Cả lớp mỗi em đều làm được ít nhất một bài, trong đó 20



em giải được bài toán thứ nhất, 14 HS giải được bài toán thứ hai, 10 HS giải được bài toán thứ ba, 5 HS giải được bài toán thứ hai và thứ ba, 2 HS giải được bài toán thứ nhất và thứ hai, chỉ có một HS được 10 điểm vì đã giải được cả ba bài. Hỏi lớp học đó có bao nhiêu HS không dự kiểm tra ?

Lời giải

Áp dụng « Sơ đồ Ven »

Mỗi hình tròn ghi số HS giải đúng một bài nào đó. Vì chỉ có một HS giải đúng 3 bài nên điền số 1 vào phần chung của 3 hình tròn. Số HS giải đúng bài I và bài II là 2 nên phần chung của hai hình tròn này mà không chung với hình tròn còn lại sẽ được ghi số 1 (vì $2-1=1$). Tương tự, ta ghi được các số vào các phần còn lại.

Số học sinh có dự thi kiểm tra là tổng các số đã điền vào các phần :

$$13+5+1+1+4+8+0=32 \text{ (HS)}$$

Vậy số HS không dự kiểm tra là : $35-32=3$ (HS)

Bài 10: Trong một Hội nghị có 100 người tham dự, trong đó có 10 người không biết tiếng Nga và tiếng Anh, có 75 người biết tiếng Nga và 83 người biết Tiếng Anh. Hỏi trong hội nghị có bao nhiêu người biết cả 2 thứ tiếng Nga và Anh ?

Lời giải

Số người biết ít nhất 1 trong 2 thứ tiếng Nga và Anh là :

$$100-10=90 \text{ (người)}$$

Số người chỉ biết tiếng Anh là :

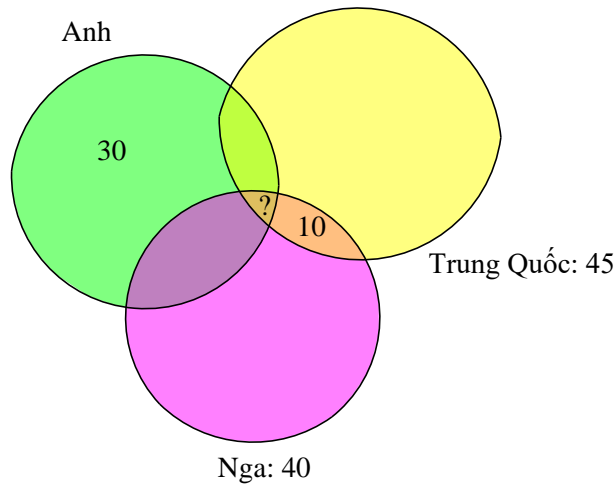
$$90-75=15 \text{ (người)}$$

Số người biết cả tiếng Nga và tiếng Anh là :

$$83-15=68 \text{ (người)}$$

Bài 11: Trong một hội nghị có 100 đại biểu tham dự. Mỗi đại biểu có thể sử dụng ít nhất một trong ba thứ tiếng: Nga, Trung Quốc và Anh. Biết rằng có 30 đại biểu chỉ nói được tiếng Anh, 40 đại biểu nói được tiếng Nga, 45 đại biểu nói được tiếng Trung Quốc và 10 đại biểu chỉ nói được hai thứ tiếng Nga và Trung Quốc. Hỏi có bao nhiêu đại biểu nói được cả ba thứ tiếng?

Lời giải



Số đại biểu nói được tiếng Nga hoặc tiếng Trung Quốc là:

$$100 - 30 = 70 \text{ (đại biểu)}$$

Số đại biểu nói được tiếng Nga nhưng không nói được tiếng Trung Quốc là:

$$70 - 45 = 25 \text{ (đại biểu)}$$

Số đại biểu nói được tiếng Trung Quốc nhưng không nói được tiếng Nga là:

$$70 - 40 = 30 \text{ (đại biểu)}$$

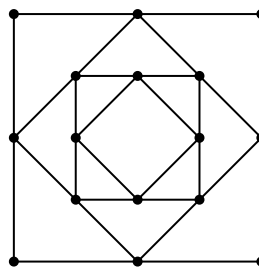
Số đại biểu nói được tiếng Nga và tiếng Trung Quốc là:

$$70 - (25 + 30) = 15 \text{ (đại biểu)}$$

Số đại biểu nói được cả ba thứ tiếng là:

$$15 - 10 = 5 \text{ (đại biểu)}$$

Bài 12: Nối điểm chính giữa cạnh hình vuông thứ nhất ta được hình vuông thứ hai. Nối điểm chính giữa các cạnh hình vuông thứ hai ta được hình vuông thứ ba và cứ tiếp tục như vậy. Hãy tìm số hình tam giác có trong hình vẽ như vậy đến hình vuông thứ 2021 ?



Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022

Lời giải

Theo đề bài ta có bảng sau:



Hình vuông thứ	Số hình tam giác có
1	$0 = 4.0$
2	$4 = 4.1$
3	$4 + 4 = 4.2$
4	$4 + 4 + 4 = 4.3$
...	...
2021	$4 + 4 + 4 + \dots + 4 = 4.2020$

Số hình tam giác được tạo thành là: $4.2020 = 8080$ (tam giác).

Bài 13: Một hiệu sách có tất cả 5 hộp bút bi và bút chì. Mỗi hộp chỉ đựng một loại bút. Hộp 1 có 78 bút, hộp 2 có 80 bút, hộp 3 có 82 bút, hộp 4 có 114 bút, hộp 5 có 128 bút. Sau đó, cô bán hàng bán đi một hộp bút chì. Hỏi lúc đầu hộp nào đựng bút bi, hộp nào đựng bút chì? Biết rằng số bút bi còn lại gấp bốn lần số bút chì còn lại.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Lời giải

Nhắc lại, có 5 hộp bút với số bút: 78; 80; 82; 114; 128.

Sau khi bán đi một hộp bút chì thì số bút bi còn lại gấp bốn lần số bút chì còn lại, nên tổng số bút còn lại là một số chia hết cho $1 + 4 = 5$.

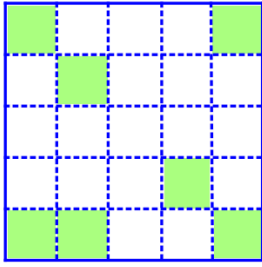
Mặt khác: tổng số bút ở 5 hộp là $78 + 80 + 82 + 114 + 128 = 482$ và 482 chia 5 dư 2.

Do đó hộp bút đã bán đi phải có số bút chia 5 dư 2 suy ra hộp bút đã bán là hộp có 82 bút.

Tổng số bút còn lại là: $78 + 80 + 114 + 128 = 400$ (bút).

Số bút chì còn lại là: $400 : 5 = 80$ (bút).

Vậy lúc đầu hộp đựng bút chì là: hộp 80 bút và hộp 82 bút; hộp đựng bút bi là: hộp 78 bút, hộp 114 bút và hộp 128 bút.



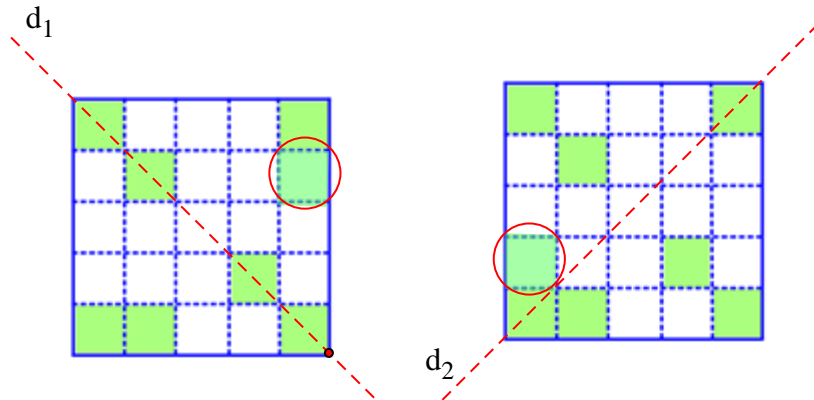
Bài 14: Bạn Nam tạo lưới gồm 25 ô vuông và tô màu như hình dưới đây. Bạn ấy có 7 ô vuông được tô màu. Em hãy sao chép thành 2 hình và thực hiện như sau:

- a) Trong hình thứ nhất, tô màu thêm 1 ô vuông sao cho hình mới có 1 trục đối xứng.
- b) Trong hình thứ hai, tô màu thêm 5 ô vuông nữa sao cho hình mới có 2 trục đối xứng.

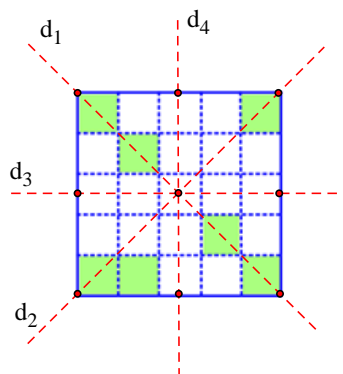
Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Lời giải

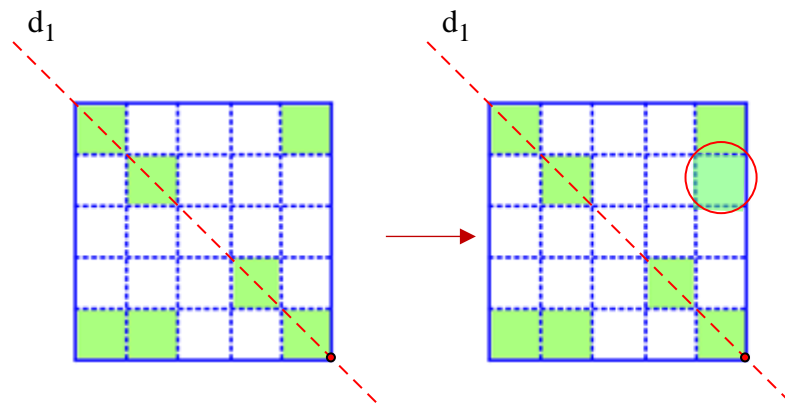
a) Tô màu thêm 1 ô vuông sao cho hình mới có 1 trục đối xứng.



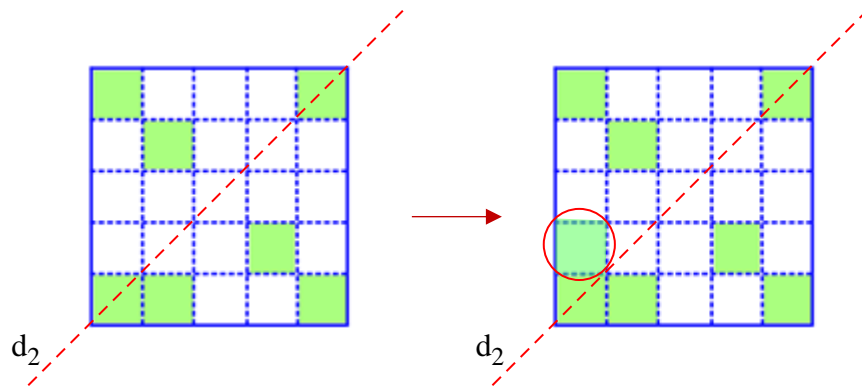
Hướng dẫn: Sau khi tô màu thêm 1 ô vuông ta được hình mới có 1 trục đối xứng suy ra trục đó cũng là trục đối xứng của lưới ô vuông ban đầu. Mà ta biết rằng hình vuông có 4 trục đối xứng, là các đường $d_1; d_2; d_3; d_4$ trong hình vẽ dưới đây:



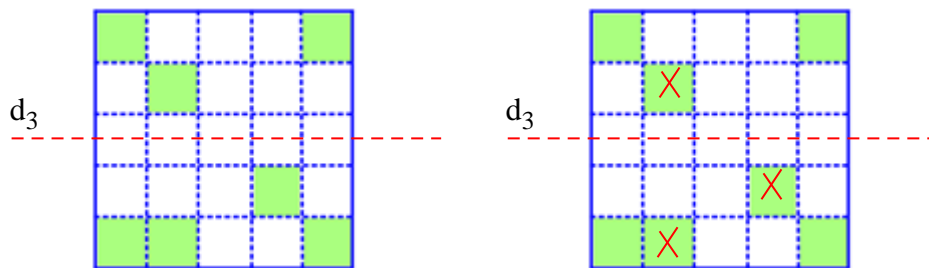
+ Nếu trục đối xứng sau khi tô là d_1 :



+ Nếu trục đối xứng sau khi tô là d_2 :



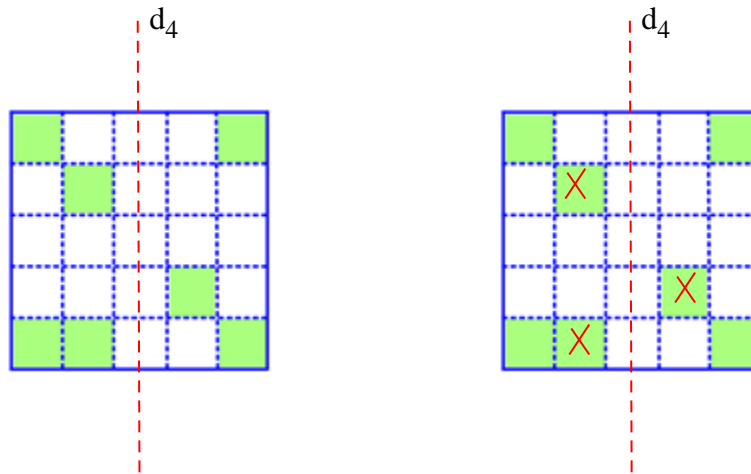
+ Nếu trục đối xứng sau khi tô là d_3 :



Trường hợp này không tô được do có 3 ô (đánh dấu nhân) chưa có ô tô màu đối xứng qua d_3 .

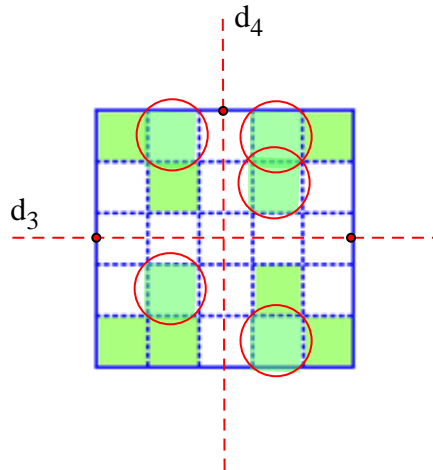
+ Nếu trục đối xứng sau khi tô là d_4 :





Trường hợp này không tô được do có 3 ô (đánh dấu nhân) chưa có ô tô màu đối xứng qua d_4 .

b) Tô màu thêm 5 ô vuông nữa sao cho hình mới có 2 trục đối xứng.



Hướng dẫn: Tương tự như câu a, ta có 4 trục đối xứng của lưới ô vuông. Ta thử với từng cặp trục đối xứng.

Bài 15: Có hai chiếc bình, một chiếc loại 5 lít và một chiếc loại 7 lít. Người ta có thể đong để lấy 1 lít, 2 lít, 4 lít, 6 lít dầu từ một thùng đựng bằng cách chỉ sử dụng hai chiếc bình trên. Em hãy nêu cách đong để lấy:

- a) 3 lít dầu.
- b) 1 lít dầu.

Trích đề HSG trường THCS Quế Phú (Quế Sơn) năm 2018 - 2019

Lời giải

a) Để đong 3 lít ta thực hiện đong, thùng 5 lít trước, 7 lít sau: $(5;0) \rightarrow (0;5) \rightarrow (5;5) \rightarrow (3;7)$

Vậy ta có 3 lít ở thùng 5 lít.

b) Để đong 1 lít, ta thực hiện đong, thùng 5 lít trước, 7 lít sau:



$$(5;0) \rightarrow (0;5) \rightarrow (5;5) \rightarrow (3;7) \rightarrow (0;3) \rightarrow (5;3) \rightarrow (1;7)$$

Vậy ta có 1 lít ở thùng 5 lít.

Bài 16: Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; có thể lập được bao nhiêu số chẵn, mỗi số có 5 chữ số đôi một khác nhau?

Lời giải

Gọi số có 5 chữ số cần tìm là \overline{abcde} trong đó $0 \leq a; b; c; d; e \leq 6; a \neq 0$.

Ta chia làm hai trường hợp như sau:

Trường hợp 1: $e = 0$ khi đó số cần tìm có dạng là $\overline{abcd0}$

Số cách chọn $a; b; c; d$ lần lượt là 6; 5; 4; 3

Do đó số cách chọn số có dạng $\overline{abcd0}$ là $6.5.4.3 = 360$ (cách chọn).

Trường hợp 2: $e \neq 0$ khi đó ta cần chọn a và e trước, nghĩa là:

e có 3 cách chọn, $a; b; c; d$ có số cách chọn lần lượt là 5; 5; 4; 3.

Do đó số cách chọn số có dạng \overline{abcde} là $5.5.4.3.3 = 900$ (cách chọn).

Vậy tổng số có $900 + 360 = 1260$ cách chọn thoả mãn bài toán.

Bài 17: Trong số 100 học sinh có 75 học sinh thích môn Toán và 60 học sinh thích môn Văn. Nếu có 5 học sinh không thích cả Văn và Toán. Hỏi có bao nhiêu học sinh thích cả hai môn?

Lời giải

Gọi số học sinh thích cả Văn và Toán là x . (Điều kiện $x \in \mathbb{N}, 5 \leq x \leq 60$)

Thì số học sinh Toán mà không thích Văn là $75 - x$ (học sinh).

Nếu có 5 học sinh không thích cả Văn và Toán mà lại có 60 học sinh thích môn Văn và tổng số học sinh là 100.

Nên ta có: $75 - x + 60 + 5 = 100$

$$x = 75 + 60 + 5 - 100$$

$$x = 40 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy có 40 học sinh thích cả hai môn.

Bài 18: Trong một cuộc thi có 50 câu hỏi. Mỗi câu trả lời đúng được 20 điểm, còn trả lời sai bị trừ 15 điểm. Một học sinh được tất cả 650 điểm. Hỏi bạn đó trả lời được mấy câu đúng?

Lời giải

Nếu bạn đó trả lời được 50 câu thì tổng số điểm là: $50.20 = 1000$ (điểm).

Nhưng bạn chỉ được 650 điểm còn thiếu: $1000 - 650 = 350$ (điểm).

Thiếu 350 điểm vì trong số 50 câu bạn đã trả lời sai một số câu.

Giữa câu trả lời đúng và trả lời sai chênh lệch: $20 + 15 = 35$ (câu).

Do đó câu trả lời sai của bạn là: $350 : 35 = 10$ (câu).

Vậy số câu bạn trả lời đúng là: $50 - 10 = 40$ (câu).

Bài 19: Chứng minh rằng tổng các bình phương của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

Lời giải

Gọi bốn số nguyên dương liên tiếp là $n-1, n, n+1, n+2, n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$.



Giả sử tổng các bình phương của bốn số nguyên dương liên tiếp trên là số chính phương, tức là $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2$ là số chính phương.

$$\text{Đặt } N = (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2.$$

$$\text{Ta có: } N = (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 4n^2 + 4n + 6 = 4(n^2 + n) + 6 \quad (*).$$

Do đó, vì $4(n^2 + n) + 6$ là số chẵn và N là số chính phương nên $N \div 4$.

$$\text{Mà } [4(n^2 + n) + 6] \not\div 4.$$

nên điều giả sử không xảy ra.

Vậy tổng các bình phương của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

Bài 20: Chứng minh rằng tổng bình phương của hai số tự nhiên lẻ bất kì không phải là số chính phương.

Lời giải

Gọi a, b là các số tự nhiên lẻ.

Giả sử tổng bình phương của hai số a và b là số chính phương, tức $a^2 + b^2$ là số chính phương (1).

Vì a và b đều lẻ nên đặt $a = 2m + 1, b = 2n + 1 \quad m, n \in \mathbb{N}$

$$\text{Ta có } a^2 + b^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2$$

$$= [4(m^2 + n^2 + m + n) + 2] \div 2$$

$$a^2 + b^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 = [4(m^2 + n^2 + m + n) + 2] \div 2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) Ta có } (a^2 + b^2) \div 4 \quad (3)$$

$$\text{Mà } a^2 + b^2 = 4(m^2 + n^2 + m + n) + 2 \not\div 4 \quad (4)$$

Vì (3) và (4) mâu thuẫn với nhau nên điều giả sử không xảy ra.

Vậy tổng bình phương của hai số tự nhiên lẻ bất kì không phải là số chính phương.

Bài 21: Chứng minh rằng: $4^n + 5$ chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } A_n = 4^n + 5$$

$$* \text{ Với } n = 0, \text{ ta có } A_0 = 4^0 + 5 = 6 \div 3$$

$$* \text{ Giả sử mệnh đề đúng với } n = k \geq 0, \text{ suy ra } A_k = 4^k + 5 \div 3$$

$$* \text{ Với } n = k + 1, \text{ xét } A_{k+1} = 4^{k+1} + 5 = 4^k \cdot 4 + 5$$

$$= 4^k \cdot (3 + 1) + 5$$

$$= 4^k \cdot 3 + 4^k + 5$$

$$\quad \quad \quad \div 3 \quad \quad \quad \div 3$$

$$\text{Suy ra } A_{k+1} \div 3$$

Vậy $4^n + 5$ chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài 22: Chứng minh rằng: $7^n - 1$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

$$\text{Đặt } A_n = 7^n - 1$$

$$* \text{ Với } n = 1, \text{ ta có } A_1 = 7^1 - 1 = 6 \div 6$$



* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $A_k = 7^k - 1 \vdots 6$

* Với $n = k + 1$, xét $A_{k+1} = 7^{k+1} - 1 = 7^k \cdot 7 - 1$

$$= 7^k \cdot (6+1) - 1 = 7^k \cdot 6 + 7^k - 1$$

$\vdots 6 \qquad \qquad \vdots 6$

Suy ra $A_{k+1} \vdots 6$

Vậy $7^n - 1$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 23: Chứng minh rằng: $4^n + 6n + 8$ chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

Đặt $D_n = 4^n + 6n + 8$

* Với $n = 1$, ta có $D_1 = 4^1 + 6 \cdot 1 + 8 = 18 \vdots 9$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $D_k = 4^k + 6k + 8 \vdots 9$

* Với $n = k + 1$, xét $D_{k+1} = 4^{k+1} + 6(k+1) + 8$

$$\begin{aligned} &= 4 \cdot 4^k + 6k + 14 \\ &= 4 \cdot (4^k + 6k + 8) - 18k + 18 \\ &= 4 \cdot \underbrace{(4^k + 6k + 8)}_{\vdots 9} + \underbrace{18(1-k)}_{\vdots 9} \end{aligned}$$

Suy ra $D_{k+1} \vdots 9$

Vậy $4^n + 6n + 8$ chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 24: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

Lời giải

Đặt $A_n = n^3 + 11n$

* Với $n = 1$, ta có $A_1 = 1^3 + 11 \cdot 1 = 12 \vdots 6$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $A_k = k^3 + 11k \vdots 6$

* Với $n = k + 1$, xét $A_{k+1} = (k+1)^3 + 11(k+1)$

$$\begin{aligned} &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11 \\ &= (k^3 + 11k) + 3(k^2 + k + 4) \\ &= \underbrace{(k^3 + 11k)}_{\vdots 6} + \underbrace{3(k(k+1) + 4)}_{\vdots 2} \end{aligned}$$

Suy ra $A_{k+1} \vdots 6$

Vậy với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

Bài 25: Chứng minh rằng

a) $A = 10^{28} + 8 \vdots 72$

b) $B = 81^7 - 27^9 - 9^{13} \vdots 45$

Lời giải

a) **Cách 1:**

Ta có: $10^{28} = 2^{28} \cdot 5^{28} = 2^3 \cdot 2^{25} \cdot 5^{28} \vdots 8$ và $8 \vdots 8 \Rightarrow A \vdots 8$

Lại có $10^{28} + 8$ có tổng các chữ số là 9 nên chia hết cho 9. Vậy A chia hết cho 72

Cách 2:



$10^{28} + 8$ có ba chữ số tận cùng là 008 nên chia hết cho 8

$$10^{28} + 8 = \underbrace{10^{28} - 1}_{:9} + 9 \Rightarrow A:9 \Rightarrow A:72$$

b) Ta có 81^7 ; 27^9 ; 9^{13} chia hết cho 9 nên B chia hết cho 9

Lại có 81^7 có tận cùng là 1

$$27^9 = 27^8 \cdot 27 = \overline{\dots}1.27 \text{ có tận cùng là } 7$$

$$9^{13} = 9^{12} \cdot 9 = \overline{\dots}1.9 \text{ có tận cùng là } 9$$

nên B có tận cùng là 5 nên B chia hết cho 5.

$$\text{Mà } (5;9) = 1 \Rightarrow B:5.9 \Rightarrow B:45$$

Bài 26: Chứng minh rằng: $B = 1961^{1962} + 1963^{1964} + 1965^{1966} + 2$ chia hết cho 7.

Sử dụng tính chất: $(a+b)^n$ khi chia cho a có số dư là b

Lời giải

$$\text{Ta có } B = (1960+1)^{1962} + (1960+3)^{1964} + (1965-2)^{1966} + 2$$

$$B = (7m+1)^{1962} + (7n+3)^{1964} + (7p-2)^{1966} + 2$$

$$B = 7q+1+3^{1964}+2^{1966}+2$$

$$B = 7q+9.27^{654}+2.2^{3.655}+3$$

$$B = 7r+9+2+3$$

$$B = 7r+14:7$$

Bài 27: Chứng minh rằng:

a) $(n+10)(n+15):2$

b) $n(n+1)(n+2):2;3$

Lời giải

a) Ta có:

Nếu n là số lẻ thì $n+15:2$

Nếu n là số chẵn thì $n+10:2$

Như vậy với mọi n là số tự nhiên thì: $(n+10)(n+15):2$

b) Ta có: $n(n+1)(n+2)$ là tích ba số tự nhiên liên tiếp nên sẽ có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3.

Bài 28: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì: $A = n(2n+1)(7n+1):6$

Lời giải

Ta có: $n+7n+1=8n+1$ là số lẻ nên n chẵn hoặc $7n$ chẵn,

$$\Rightarrow n(2n+1)(7n+1):2 \quad (1)$$

Xét các trường hợp :



$$n = 3k \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 3$$

$$n = 3k + 1 \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 3 \text{ (do } 2n+1 : 3)$$

$$n = 3k + 2 \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 3 \text{ (do } 7n+1 : 3)$$

$$\Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 3 \text{ với mọi số tự nhiên } n \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 2.3$ (Do 2; 3 là hai số nguyên tố cùng nhau)

$$\Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 6$$

Bài 29: Chứng minh rằng tổng của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3.

Lời giải

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là: $a, a+1, a+2$

Tổng của ba số tự nhiên liên tiếp là

$$a + a + 1 + a + 2 = (a + a + a) + (1 + 2) = (3a + 3) : 3 \text{ (Tính chất chia hết của một tổng).}$$

Bài 30: Chứng minh rằng tích của hai số chẵn liên tiếp luôn chia hết cho 8.

Lời giải

Gọi hai số chẵn liên tiếp là $2n, 2n+2$.

$$\text{Tích của hai số chẵn liên tiếp là: } 2n.(2n+2) = 4n.(n+1)$$

Vì $n, n+1$ không cùng tính chẵn lẻ nên $n, n+1$ chia hết cho 2.

Mà 4 chia hết cho 4 nên $4n.(n+1)$ chia hết cho (4.2)

$$\Rightarrow 4n.(n+1) \text{ chia hết cho } 8.$$

$$\Rightarrow 2n.(2n+2) \text{ chia hết cho } 8.$$

Bài 31: Chứng minh rằng: Tích của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3.

Lời giải

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là $n, n+1, n+2$.

$$\text{Tích của ba số tự nhiên liên tiếp là: } n.(n+1).(n+2).$$

Một số tự nhiên khi chia cho 3 có thể nhận một trong các số dư 0; 1; 2.

+) Nếu $r = 0$ thì n chia hết cho 3 $\Rightarrow n.(n+1).(n+2)$ chia hết cho 3.

+) Nếu $r = 1$ thì $n = 3k + 1$ (k là số tự nhiên).

$$\Rightarrow n + 2 = 3k + 1 + 2 = (3k + 3) \text{ chia hết cho } 3.$$

$$\Rightarrow n.(n+1).(n+2) \text{ chia hết cho } 3.$$

+) Nếu $r = 2$ thì $n = 3k + 2$ (k là số tự nhiên).

$$\Rightarrow n + 1 = 3k + 2 + 1 = (3k + 3) \text{ chia hết cho } 3.$$

$$\Rightarrow n.(n+1).(n+2) \text{ chia hết cho } 3.$$



Tóm lại: $n.(n+1).(n+2)$ chia hết cho 3 với mọi n là số tự nhiên.

Bài 32: a) Chứng minh rằng một số chính phương khi chia cho 3 chỉ có số dư là 0 hoặc 1.

b) Chứng minh rằng một số chính phương khi chia cho 4 chỉ có số dư là 0 hoặc 1.

Lời giải

Gọi $A = n^2$ ($n \in \mathbb{N}$)

a) Xét:

$$n = 3k \quad (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow A = 9k^2 \text{ nên } A : 3$$

$$n = 3k + 1 \quad (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow A = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 \text{ nên } A \text{ chia cho 3 dư 1}$$

$$n = 3k + 2 \quad (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow A = 9k^2 + 12k + 4 = 9k^2 + 12k + 3 + 1 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \text{ nên } A \text{ chia cho 3 dư 1.}$$

Vậy: Một số chính phương chia cho 3 chỉ có số dư là 0 hoặc 1

b) Xét:

$$n = 2k \quad (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow A = 4k^2 \text{ nên } A : 4$$

$$n = 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow A = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1 \text{ nên } A \text{ chia cho 4 dư 1}$$

Vậy: Một số chính phương chia cho 4 chỉ có số dư là 0 hoặc 1.

Bài 33: Có hay không số tự nhiên n để $2010 + n^2$ là số chính phương.

Lời giải

Giả sử $2010 + n^2$ là số chính phương thì $2010 + n^2 = m^2$ ($m \in \mathbb{N}$)

Từ đó suy ra $m^2 - n^2 = 2010$

$$m^2 - mn + mn - n^2 = 2010$$

$$m(m-n) + n(m-n) = 2010$$

$$(m-n)(m+n) = 2010$$

Như vậy trong 2 số $m+n$ và $m-n$ phải có ít nhất 1 số chẵn (1)

Mặt khác $(m+n)$ và $(m-n)$ có cùng tính chẵn lẻ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (m+n)$ và $(m-n)$ là 2 số chẵn.

$$\Rightarrow (m+n) : 2 \text{ và } (m-n) : 2$$

$$\Rightarrow (m+n)(m-n) : 4 \text{ nhưng } 2010 \text{ không chia hết cho 4}$$

$$\Rightarrow \text{Điều giả sử sai.}$$

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để $2010 + n^2$ là số chính phương.

Bài 34: Tìm số có bốn chữ số khác nhau, biết rằng nếu viết thêm một chữ số 0 vào giữa hàng nghìn và hàng trăm thì được số mới gấp 9 lần số phải tìm.

Lời giải:

Gọi số cần tìm là \overline{abcd} ($a, b, c, d \in \mathbb{N}; a \neq 0; a, b, c, d < 10$)

Số mới là $\overline{a0bcd}$

Ta có $\overline{a0bcd} = \overline{abcd} \cdot 9$



$$\text{Hay } \overline{a0bcd} = \overline{abcd} \cdot 10 - \overline{abcd}$$

$$\text{Hay } \overline{a0bcd} + \overline{abcd} = \overline{abcd0}$$

Vì $d+d$ có tận cùng bằng 0 suy ra $d=0$ hoặc 5

Nếu $d=5$ ta có $c+c+1=0$ có tận cùng là 5 nên $c=2$ hoặc $c=7$.

Nếu $c=2$ thì $b+b=2$ nên $b=1$, do đó $0+a$ có tận cùng bằng 1 nên $a=1$ (loại vì a khác b)

Nếu $c=7$ thì $b+b+1$ có tận cùng là 7 nên $b=3$ hoặc $b=8$.

Nếu $b=3$ thì $0+a=3$ nên $a=3$ (loại).

Nếu $b=8$ thì $0+a+1=8$ nên $a=7$ (loại vì a khác c).

Nếu $d=0$ suy ra c khác 0 mà $c+c$ có tận cùng là 0 nên $c=5$. Khi đó $b+b+1$ có tận cùng là 5 nên $b=2$ hoặc $b=7$

Nếu $b=2$ thì $0+a$ có tận cùng bằng 2 nên $a=2$ (loại)

Nếu $b=7$ thì $0+a+1$ có tận cùng là 7 nên $a=6$

Vậy số cần tìm là 6750.

Bài 35: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, sao cho khi nhân số đó với 4 ta được số gồm bốn chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại.

Lời giải:

Gọi số cần tìm là \overline{abcd} ($a, b, c, d \in \mathbb{N}; a \neq 0; a, b, c, d < 10$)

$$\overline{abcd} \cdot 4 = \overline{dcba}$$

Ta có \overline{abcd} và \overline{dcba} là số có 4 chữ số

Nên ta có: $a \cdot 10^3 \cdot 4 = d \cdot 10^3 \Rightarrow a=1 \Rightarrow d=4$ hoặc $a=2; d=8$

Xét \overline{abcd} với $a=1$ và $d=4$

Để có được $\overline{abcd} \cdot 4 = \overline{dcba}$ thì $d \cdot 4$ trước hết phải có chữ số tận cùng là a
 \Rightarrow với $d=4$ thì $d \cdot 4 = 4 \cdot 4 = 16$ có chữ số tận cùng là $6 \neq a=1$ (loại)

Xét \overline{abcd} với $a=2$ và $d=8$.

Do đó $\overline{abcd} \cdot 4 = \overline{dcba}$ ta thấy: $d \cdot 4$ đã có chữ số tận cùng là $a=2$ (1)

Vì $a=2 \Rightarrow b \cdot 4 < 10 \Rightarrow b \in \{0; 1; 2\}$

Với $a=2, d=8, b=0 \Rightarrow \overline{20c8} \cdot 4 = \overline{8c02} \Rightarrow 60c = 30$ (không thỏa mãn)

Với $a=2, d=8, b=1 \Rightarrow \overline{20c8} \cdot 4 = \overline{8c12} \Rightarrow 60c = 420 \Rightarrow c=7 \Rightarrow$ có số 2178.

Với $a=2, d=8, b=2 \Rightarrow \overline{20c8} \cdot 4 = \overline{8c22} \Rightarrow 60c = 810 \Rightarrow$ (không thỏa mãn)

Vậy số cần tìm là 2178.

Bài 36: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, sao cho khi nhân số đó với 9 ta được số gồm bốn chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại



Lời giải:

Gọi số cần tìm là \overline{abcd} ($a, b, c, d \in \mathbb{N}; a \neq 0; a, b, c, d < 10$)

$$\overline{abcd}.9 = \overline{dcba}$$

Ta có \overline{abcd} và \overline{dcba} là số có 4 chữ số

Nên ta có: $a.10^3.9 = d.10^3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow d = 9$

Xét \overline{abcd} : vì $a = 1 \Rightarrow b.9 < 10 \Rightarrow b = 1$ hoặc $b = 0$

Với $b = 1$ thì $\overline{11c9}.9 = \overline{9c11}$

Vì $b = 1 \Rightarrow \overline{11c9}.9$ có $c.9$ là số bé lớn hơn 2 chữ số $\Rightarrow c = 1$ hoặc $c = 0 \Rightarrow$ Vô lý.

Với $b = 0$ thì $\overline{10c9}.9 = \overline{9c01} \Rightarrow c = 8$

$$\Rightarrow \overline{1089}.9 = \overline{9801}.$$

Vậy số tự nhiên cần tìm là 9801.

Bài 37: Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng nếu xoá chữ số hàng trăm thì số ấy giảm 9 lần.

Lời giải:

Gọi số cần tìm là \overline{abc} ($a, b, c \in \mathbb{N}; a \neq 0; a, b, c < 10$)

Khi xoá chữ số hàng trăm ta có số \overline{bc}

Ta có: $\overline{abc} = 9\overline{bc} \Rightarrow 100a + \overline{bc} = 9\overline{bc} \Rightarrow 8\overline{bc} = 100a : 8 \Rightarrow a = 4$ hoặc $a = 8$

Vì \overline{bc} có hai chữ số $\Rightarrow a = 4; \overline{bc} = 50$

Vậy số cần tìm là 450.

Bài 38: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, biết rằng nếu xoá chữ số hàng nghìn thì số ấy giảm 9 lần.

Lời giải:

Gọi số cần tìm là \overline{abcd} ($a, b, c, d \in \mathbb{N}; a \neq 0; a, b, c, d < 10$)

Xoá chữ số hàng trăm ta có số \overline{bcd}

Ta có: $\overline{abcd} = 9\overline{bcd} \Rightarrow 1000a + \overline{bcd} = 9\overline{bcd} \Rightarrow 8\overline{bcd} = 1000a : 8 \Rightarrow a = 4$ hoặc $a = 8$

Vì \overline{bcd} có 3 chữ số $\Rightarrow a = 4$ và $\overline{bcd} = 500$

Vậy số cần tìm là 4500.

Bài 39: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, biết rằng chữ số hàng trăm bằng 0 và nếu xoá chữ số 0 đó thì số ấy giảm 9 lần.

Lời giải:

Gọi số cần tìm là $\overline{a0cd}$ ($a, c, d \in \mathbb{N}; a \neq 0; a, c, d < 10$)

Xoá chữ số hàng trăm ta có số \overline{acd}



Ta có: $\overline{a0cd} = 9\overline{acd} \Rightarrow 1000a + \overline{cd} = 9(100a + \overline{cd}) \Rightarrow 100a = 8\overline{cd} : 8 \Rightarrow a = 4$ hoặc $a = 8$

Vì \overline{cd} có 2 chữ số $\Rightarrow a = 4$ và $\overline{cd} = 50$

Vậy số cần tìm là 4050 .

Bài 40: Một số tự nhiên có hai chữ số tăng gấp 9 lần nếu viết thêm một chữ số 0 vào giữa các chữ số hàng chục và hàng đơn vị của nó . Tìm số ấy.

Lời giải

Số cần tìm là \overline{ab} ($a, b \in \mathbb{N}; a \neq 0; ab < 10$).

Viết thêm một chữ số 0 vào giữa các chữ số hàng chục và hàng đơn vị ta có số $\overline{a0b}$

Ta có: $\overline{a0b} = 9\overline{ab} \Rightarrow 100a + b = 9(10a + b) \Rightarrow 10a = 8b : 8 \Rightarrow a = 4$ hoặc $a = 8$

Vì $0 < b \leq 9 \Rightarrow a = 4; b = 5$

Vậy số cần tìm là 45 .

Bài 41: Gọi $S(n)$ là tổng các chữ số của số tự nhiên n . Tìm số tự nhiên n sao cho $S(n) + n = 2015$.

Chú ý: Có thể thay đầu bài bởi số khác

Lời giải

Nếu n có 3 chữ số thì $n \leq 999$ suy ra $S(n) \leq 27$ suy ra $S(n) + n \leq 999 + 27 = 1026 < 2015$ (loại)

Nếu n có nhiều hơn bốn chữ số: Suy ra $n > 10000$ suy ra $S(n) + n > 2015$ (loại)

Vậy n có bốn chữ số: Đặt $n = \overline{abcd}$ ($0 < a \leq 9; 0 \leq b, c, d \leq 9$)

$\Rightarrow S(n) + n = \overline{abcd} + a + b + c + d = 2015$

Nhận thấy: $0 < a + b + c + d \leq 36 \Rightarrow 2015 - 36 \leq \overline{abcd} \leq 2015 \Leftrightarrow 1979 \leq \overline{abcd} \leq 2015$

$\Rightarrow \begin{cases} \overline{ab} = 19 \\ \overline{ab} = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 1993 \\ n = 2011 \end{cases}$

Nếu $\overline{ab} = 19$ thì $\overline{abcd} = 1993$ vì $0 < 1 + 9 + 9 + 3 = 22 < 36$ và $1979 \leq 1993 \leq 2015$

Nếu $\overline{ab} = 20$ thì $\overline{abcd} = 2011$ vì $0 < 2 + 0 + 1 + 1 = 4 < 36$ và $1979 \leq 2011 \leq 2015$

Vậy số tự nhiên n cần tìm là 1993 hoặc 2011.

Bài 42: Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên có bốn chữ số \overline{abcd} sao cho $\overline{abcd} - \overline{dcba} = 1008$.

Lời giải

Điều kiện: $0 < a, d \leq 9; 0 \leq b, c \leq 9; a > d$

Ta có:

$\overline{abcd} - \overline{dcba} = 1008 \Leftrightarrow (1000a + 100b + 10c + d) - (1000d + 100c + 10b + a) = 1008$

$\Leftrightarrow 999(a - d) + 90(b - c) = 1008 \Leftrightarrow 111(a - d) + 10(b - c) = 112 = 111 + 1 \Leftrightarrow 111(a - d - 1) = 1 + 10(c - b)$



Nếu $a-d-1=0 \Rightarrow 111(a-d-1)=0$ mà $1+10(c-b)$ là số lẻ \Rightarrow vô lý

Nếu $a-d-1 \geq 1 \Rightarrow 111(a-d-1) \geq 111$ mà $1+10(c-b) \leq 1+10.9=91 \Rightarrow$ vô lý

Vậy không tồn tại số tự nhiên có bốn chữ số \overline{abcd} sao cho $\overline{abcd} - \overline{dcba} = 1008$.

Bài 43: Tìm một số tự nhiên có ba chữ số biết rằng khi viết thêm chữ số 2 vào bên phải số đó thì nó tăng thêm 4106 đơn vị.

Lời giải

Gọi số cần tìm là \overline{abc} ($a, b, c \in \mathbb{N}; a \neq 0; a, b, c < 10$)

Viết thêm chữ số 2 vào bên phải số đó, ta được: $\overline{abc2}$

Theo đề bài ta có: $\overline{abc2} = \overline{abc} + 4106$

$\overline{abc}.10 + 2 = \overline{abc} + 4106$ (phân tích $\overline{abc2}$ theo cấu tạo số)

Ta có: $\overline{abc}.10 - \overline{abc} = 4106 - 2 \Leftrightarrow \overline{abc}.(10-1) = 4106 \Leftrightarrow 9\overline{abc} = 4104 \Leftrightarrow \overline{abc} = 456$

Thử lại: $4562 - 456 = 4106$ (đúng)

Vậy số tự nhiên cần tìm là 456.

Bài 44: Tìm số tự nhiên có 4 chữ số. Biết rằng nếu ta xóa đi chữ số hàng chục và hàng đơn vị thì số đó giảm đi 4455 đơn vị.

Lời giải

Gọi số cần tìm là \overline{abcd} ($a, b, c, d \in \mathbb{N}; a \neq 0; a, b, c, d < 10$)

Xóa đi chữ số hàng chục và hàng đơn vị của số đó, ta được \overline{ab}

Theo đề bài ta có: $\overline{abcd} - \overline{ab} = 4455$

$\overline{ab}.100 + \overline{cd} - 5 = 4455$ (phân tích \overline{abcd} theo cấu tạo số)

$\Leftrightarrow \overline{cd} + \overline{ab}.100 - \overline{ab} = 4455 \Leftrightarrow \overline{cd} + \overline{ab}.(100-1) = 4455 \Leftrightarrow \overline{cd} + \overline{ab}.99 = 45.99$ ($4455 = 45.99$)

$\Leftrightarrow \overline{cd} = 99.(45 - \overline{ab})$

Ta nhận thấy tích của 99 và 1 là một số tự nhiên bé hơn 100 nên $45 - \overline{ab}$ phải bằng 0 hoặc 1.

Nếu $45 - \overline{ab} = 0$ thì $45 = \overline{ab}$ và $\overline{cd} = 00$

Nếu $45 - \overline{ab} = 1 \Rightarrow \overline{ab} = 44; \overline{cd} = 99$

Thử lại: $4500 - 45 = 4455$; $4499 - 44 = 4455$

Vậy số cần tìm là 4500 hoặc 4499.

Bài 45. Tích của hai phân số là $\frac{8}{15}$. Thêm 4 đơn vị vào phân số thứ nhất thì tích mới là $\frac{56}{15}$. Tìm hai phân số đó.

Lời giải



Tích của hai phân số là $\frac{8}{15}$. Thêm 4 đơn vị vào phân số thứ nhất thì tích mới là $\frac{56}{15} - \frac{8}{15} = \frac{48}{15}$ đây

chính là 4 lần phân số thứ hai. Suy ra phân số thứ hai là: $\frac{48}{15} : 4 = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$. Từ đó phân số thứ nhất là:

$$\frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$$

Bài 46. Trong đợt thi đua, lớp 6A có 42 bạn được từ 1 đến 10 điểm trở lên, 39 bạn được 2 điểm 10 trở lên, 14 bạn được từ 3 điểm 10 trở lên, 5 bạn được 4 điểm 10, không có ai được trên 4 điểm 10. Tính xem trong đợt thi đua lớp 6A được bao nhiêu điểm 10 ?

Lời giải

Tổng số điểm 10 của lớp 6A là:

$$(42 - 39).1 + (39 - 14).2 + (14 - 5).3 + 5.4 = 100 \text{ (điểm 10)}$$

Bài 47. Hai xe ô tô khởi hành từ hai địa điểm A, B đi ngược chiều nhau. Xe thứ nhất khởi hành từ A lúc 7 giờ. Xe thứ hai khởi hành từ B lúc 7 giờ 10 phút. Biết rằng để đi cả quãng đường AB . Xe thứ nhất cần 2 giờ, xe thứ hai cần 3 giờ. Hỏi sau khi đi 2 xe gặp nhau lúc mấy giờ

Lời giải

1 giờ xe thứ nhất đi được $\frac{1}{2}$ quãng đường AB

1 giờ xe thứ hai đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường AB

Sau 10 phút = $\frac{1}{6}$ giờ: xe thứ nhất đi được: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ quãng đường AB

Quãng đường còn lại: $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ (quãng đường AB)

Thời gian 2 xe cùng đi quãng đường còn lại: $\frac{11}{12} : \frac{5}{6} = \frac{11}{10}$ giờ = 1 giờ 6 phút

Hai xe gặp nhau lúc: 7 giờ 10 phút + 1 giờ 6 phút = 8 giờ 16 phút

Bài 48: Tổng bình phương của ba số tự nhiên là 2596. Biết rằng tỉ số giữa số thứ nhất và số thứ hai là $\frac{2}{3}$; giữa số thứ hai và số thứ ba là $\frac{5}{6}$. Tìm ba số đó.

Lời giải

Gọi a, b, c là ba số tự nhiên phải tìm

Theo đề bài ta có: $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}; \frac{b}{c} = \frac{5}{6}$ (1) và $a^2 + b^2 + c^2 = 2596$ (2)

Từ (1) suy ra: $a = \frac{2}{3}b; c = \frac{6}{5}b$, thay vào (2) ta có:

$$\frac{4}{9}b^2 + b^2 + \frac{36}{25}b^2 = 2596 \text{ suy ra: } b^2 = 900$$

Suy ra: $b = 30; a = 20; c = 36$

Vậy ba số phải tìm là 30; 20; 36

Bài 49. Một xe tải khởi hành từ A lúc 7h và đến B lúc 12h. Một xe con khởi hành từ B lúc 7 giờ rưỡi và đến A lúc 11 giờ rưỡi

a) Hỏi hai xe gặp nhau lúc mấy giờ

b) Biết vận tốc xe con hơn xe tải là 10km/h. Tính quãng đường AB

Lời giải



a) Chọn quãng đường AB làm đơn vị quy ước

Thời gian xe tải đi từ A đến B là $5h$, xe con đi từ B đến A là $4h$

Trong $1h$ hai xe gần nhau được: $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}(AB)$

Xe con khởi hành sau xe tải: $7h30ph - 7h = 30ph = \frac{1}{2}h$

Khi xe con khởi hành thì hai xe cách nhau: $1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{10}(AB)$

Hai xe gặp nhau sau: $\frac{9}{10} : \frac{9}{20} = 2h$

Hai xe gặp nhau lúc: $7h30ph + 2h = 9h30ph$

b) $10km$ chính là: $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}(AB)$

Vậy quãng đường AB dài: $10 : \frac{1}{20} = 200(km)$

Bài 50. Tìm bộ ba số nguyên dương a, b, c sao cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4}{5}$

Lời giải

Không làm mất tính tổng quát, ta giả sử $a \leq b \leq c$, khi đó ta có: $\frac{3}{a} \geq \frac{4}{5}$ suy ra $a \leq \frac{15}{4}$

Nếu $a = 1$ thì không thể được, do đó $a = 2$ hoặc $a = 3$

Nếu $a = 2$ thì $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{10}$, suy ra $\frac{2}{b} \geq \frac{3}{10}$

Suy ra $b = 4$ hoặc $b = 5$ hoặc $b = 6$ vì $\frac{3}{10} < \frac{1}{3}$ suy ra $b \leq \frac{20}{3}$

Suy ra các số a, b, c thỏa mãn là $(a = 2, b = 4, c = 20)$ và $(a = 2, b = 5, c = 10)$

Nếu $a = 3$ thì $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{7}{15}$

Từ đó $\frac{2}{b} \geq \frac{7}{15}$ suy ra: $b \leq \frac{30}{7}$ suy ra $b = 3$ hoặc $b = 4$. Không có trường hợp nào thỏa mãn

Vậy có 12 bộ số thỏa mãn là các hoán vị của hai bộ ba số $(2, 4, 20)$ và $(2, 5, 10)$

Bài 51. Xe máy thứ nhất đi từ A đến B mất 4 giờ, xe thứ hai đi từ B đến A mất 3 giờ. Nếu hai xe khởi hành cùng một lúc từ A và B thì sau 1,5 giờ hai xe sẽ còn cách nhau $15 km$ (hai xe chưa gặp nhau). Tính quãng đường AB

Lời giải

Mỗi giờ xe thứ nhất đi được: $1 : 4 = \frac{1}{4}$ (quãng đường AB)

Mỗi giờ xe thứ hai đi được: $1 : 3 = \frac{1}{3}$ (quãng đường AB)

Sau 1,5 giờ cả hai xe đi được $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) \cdot 1,5 = \frac{7}{8}$ (quãng đường AB)

Phần số chỉ $15km$ là: $1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$ (quãng đường AB)

Quãng đường AB là: $15 : \frac{1}{8} = 120(km)$



Bài 52. Một xe tải khởi hành từ A lúc 7h và đến B lúc 12h. Một xe con khởi hành từ B lúc 7 giờ rưỡi và đến A lúc 11 giờ rưỡi.

a) Hỏi hai xe gặp nhau lúc mấy giờ

b) Biết vận tốc xe con hơn xe tải là 10km/h. Tính quãng đường AB.

Lời giải

a) Chọn quãng đường AB làm đơn vị quy ước

Thời gian xe tải đi từ A đến B là 5h, xe con đi từ B đến A là 4h Trong 1h hai xe gần nhau được:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}(AB)$$

$$\text{Xe con khởi hành sau xe tải: } 7\text{h}30\text{ph} - 7\text{h} = 30\text{ph} = \frac{1}{2}\text{h}$$

$$\text{Khi xe con khởi hành thì hai xe cách nhau: } 1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{10}(AB)$$

$$\text{Hai xe gặp nhau sau: } \frac{9}{10} : \frac{9}{20} = 2\text{h}$$

$$\text{Hai xe gặp nhau lúc: } 7\text{h}30\text{ph} + 2\text{h} = 9\text{h}30\text{ph}$$

$$\text{b) } 10\text{ km chính là: } \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}(AB)$$

$$\text{Vậy quãng đường AB dài: } 10 : \frac{1}{20} = 200 \text{ (km)}$$

Bài 53. Một cô thư kí có thể đánh máy xong một tài liệu trong 5 giờ 10 phút. Một cô khác đánh xong tài liệu ấy trong 4 giờ 40 phút. Nếu cùng làm, cả hai cô đánh được 90 trang. Hỏi mỗi cô đánh được bao nhiêu trang ?

Lời giải

$$5\text{ giờ } 20\text{ phút} = \frac{16}{3}\text{ giờ}; 4\text{ giờ } 40\text{ phút} = \frac{14}{3}$$

Trong một giờ cô thứ nhất đánh được $\frac{3}{16}$ tài liệu, cô thứ hai đánh được $\frac{3}{14}$ tài liệu.

$$\text{Năng suất của cô thứ nhất so với cô thứ hai là: } \frac{3}{16} : \frac{3}{14} = 7 : 8.$$

Vì cùng làm trong một thời gian như nhau nên số trang đánh được tỉ lệ thuận với năng suất của mỗi người.

$$\text{Do đó, số trang cô thứ nhất đánh được là: } \frac{90}{7+8} \cdot 7 = 42 \text{ (trang)}$$

$$\text{Số trang cô thứ hai đánh được là: } \frac{90}{7+8} \cdot 8 = 48 \text{ (trang)}$$

Bài 54. Một xe lửa đi hết một cái cầu dài 12m hết 12 giây và đi hết một cái cầu dài 148m hết 20 giây. Tính chiều dài và vận tốc của xe lửa.

Lời giải

Trong 12 giây, xe lửa đi 12m cộng với chiều dài xe lửa. Trong 20 giây, xe lửa đi 148m cộng với chiều dài xe lửa.

Như vậy trong thời gian : $20 - 12 = 8$ (s), xe lửa đi được quãng đường là:

$$148 - 12 = 136 \text{ (m)}$$

Vận tốc xe lửa là :



$$136:8=17 \text{ (m/s)}$$

Chiều dài của xe lửa là :

$$17.12-12=192 \text{ (m)}$$

Bài 55: Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho sau khi viết tiếp số đó sau số 2014 ta được số chia hết cho 101.

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2017 - 2018

Lời giải

Giả sử n có k chữ số ($k \geq 1$).

Ta có: $2014 = 19 \cdot 101 + 95$, do đó:

$$\overline{2014n} = 2014 \cdot 10^k + n = 19 \cdot 101 \cdot 10^k + 95 \cdot 10^k + n$$

Suy ra $\overline{2014n} : 101$ khi và chỉ khi $95 \cdot 10^k + n : 101$.

Với $k=1$ thì $95 \cdot 10^k + n = 950 + n = 101 \cdot 9 + (41 + n) : 101$ khi và chỉ khi $41 + n : 101$ nhưng n có một chữ số nên $41 + n \leq 41 + 9 < 101$, nên không có số n thỏa mãn đầu bài.

Với $k=2$ thì $95 \cdot 10^k + n = 9500 + n = 101 \cdot 94 + (6 + n) : 101$ suy ra $6 + n : 101$, và số n nhỏ nhất được xác định bởi $6 + n = 101$ suy ra $n = 95$.

Vậy $n = 95$ thỏa mãn đề bài.

Bài 56: Tìm tất cả các số tự nhiên n , biết rằng $n + S(n) = 2014$, trong đó $S(n)$ là tổng các chữ số của n .

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2018 - 2019

Lời giải

Nếu n là số có ít hơn 4 chữ số thì $n \leq 999$ và $S(n) \leq 27$

Suy ra $n + S(n) \leq 999 + 27 = 1026 < 2014$ (ktm)

Mặt khác $n \leq n + S(n) = 2014$ nên n là số có ít hơn 5 chữ số. Vậy n là số có 4 chữ số, suy ra $S(n) \leq 9 \cdot 4 = 36$.

Do vậy $n \geq 2014 - 36 = 1978$.

Vì $1978 \leq n \leq 2014$ suy ra $n = \overline{19ab}$ hoặc $n = \overline{20cd}$.

* Nếu $n = \overline{19ab}$. Ta có: $\overline{19ab} + (1 + 9 + a + b) = 2014$

$1910 + 11a + 2b = 2014$ khi và chỉ khi $11a + 2b = 104$ suy ra $a : 2$.

và $11a = 104 - 2b \geq 104 - 2 \cdot 9 = 86$

Suy ra $8 \leq 10 < a, a : 2$ suy ra $a = 8$ suy ra $b = 8$ suy ra $n = 1988$ (tm)

* Nếu $n = \overline{20cd}$ suy ra $\overline{20cd} + (2 + 0 + c + d) = 2014$.

$2002 + 11c + 2d = 2014$ suy ra $11c + 2d = 12$ suy ra $c : 2$.

Và $11c \leq 12$ suy ra:

$c = 0 \Rightarrow d = 6, n = 2006$ (tm)

Hoặc $c = 1 \Rightarrow 2d = 1$ (ktm).

Vậy $n \in \{1988; 2006\}$

Bài 57: Với q, p là số nguyên tố lớn hơn 5, chứng minh rằng: $p^4 - q^4 : 240$

Trích đề HSG huyện Sơn Tây năm 2017 - 2018

Lời giải

Ta có: $p^4 - q^4 = (p^4 - 1) - (q^4 - 1) : 240 = 8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

Chứng minh $p^4 - 1 : 240$



Do $p > 5$ nên p là số lẻ.

$$\text{Mặt khác } p^4 - 1 = (p-1)(p+1)(p^2+1)$$

$(p-1)$ và $(p+1)$ là hai số chẵn liên tiếp suy ra $(p-1)(p+1) : 8$

Do p là số lẻ nên p^2 là số lẻ suy ra $p^2 + 1 : 2$.

$p > 5$ nên p có dạng:

$$p = 3k + 1 \text{ suy ra } p - 1 = 3k : 3 \text{ suy ra } p^4 - 1 : 3.$$

$$p = 3k + 2 \text{ suy ra } p + 1 = 3k + 3 : 3 \text{ suy ra } p^4 - 1 : 3$$

Mặt khác p có thể là dạng:

$$p = 5k + 1 \text{ suy ra } p - 1 = 5k + 1 - 1 = 5k : 5 \text{ suy ra } p^4 - 1 : 5.$$

$$p = 5k + 2 \text{ suy ra } p^2 + 1 = (5k + 2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5 : 5 \text{ suy ra } p^4 - 1 : 5.$$

$$p = 5k + 3 \text{ suy ra } p^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10 : 5 \text{ suy ra } p^4 - 1 : 5.$$

$$p = 5k + 4 \text{ suy ra } p + 1 = 5k + 5 : 5 \text{ suy ra } p^4 - 1 : 5.$$

Vậy $p^4 - 1 : 8.2.3.5$ hay $p^4 - 1 : 240$.

Tương tự ta cũng có: $q^4 - 1 : 240$.

$$\text{Vậy } (p^4 - 1) - (q^4 - 1) = p^4 - q^4 : 240.$$

Bài 58: Viết thêm chữ số y vào bên phải của một số có 5 chữ số thì được số lớn gấp 3 lần số có được do viết thêm chữ số y vào bên trái số đó. Tìm chữ số y và số có 5 chữ số đó.

Trích đề HSG huyện Đoàn Hùng năm 2018 -2019

Lời giải

Gọi số cần tìm là \overline{abcde} ($a \neq 0; a, b, c, d, e \in \mathbb{N}; a; b; c; d; e \leq 9$).

$$\text{Ta có: } \overline{abcdey} = 3 \cdot \overline{yabcde}$$

Đặt $\overline{abcde} = x$, ta có:

$$10x + y = 3 \cdot (100000y + x)$$

$$7x + y = 300000y$$

$$\text{Suy ra } 7x = 299999y$$

$$\text{Suy ra } x = 42857y.$$

Vì x là số có 5 chữ số nên y chỉ nhận hai giá trị $y = 1; y = 2$.

$$\text{Nếu } y = 1 \text{ thì } x = 42857.$$

$$\text{Nếu } y = 2 \text{ thì } x = 85714.$$

Bài 59: Ký hiệu $S_{(n)}$ là tổng các chữ số của số tự nhiên n . Tìm n sao cho $S_{(n)} = n^2 - 2013n + 6$.

Trích đề HSG huyện Tam Dương năm 2018 -2019

Lời giải

Giả sử khi biểu diễn số tự nhiên n dưới dạng số thập phân, ta có:

$$n = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \quad (\text{Với } a_i \text{ là các chữ số, } i \in \{0; 1; 2; \dots; m\}; m \in \mathbb{N})$$

$$n \geq a_m + a_{m-1} + \dots + a_1 + a_0$$

$$\text{Suy ra } n \geq S_{(n)}$$



$$\text{Suy ra } n^2 - 2013n + 6 \leq n$$

$$\text{Suy ra } n^2 + 6 \leq 2014n$$

$$\text{Suy ra } n + \frac{6}{n} \leq 2014 \text{ suy ra } n < 2014 \quad (1)$$

$$\text{Mà } S_{(n)} \geq 0 \text{ suy ra } n^2 - 2013n + 6 \geq 0$$

$$\text{Suy ra } n^2 + 6 \geq 2013n \text{ suy ra } n + \frac{6}{n} \geq 2013 \text{ suy ra } n \geq 2013 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $n = 2013$.

Thử với $n = 2013$ ta có:

$$S_{(2013)} = 2013^2 - 2013 \cdot 2013 + 6 = 6 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy số tự nhiên n cần tìm là 2013.

Bài 60: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , ta có $n^2 + n + 2$ không chia hết cho 5.

Lời giải

$$\text{Ta có: } n^2 + n + 2 = n(n+1) + 2$$

Do $n(n+1)$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2

$$\Rightarrow n(n+1) \text{ có tận cùng là } 0, 2, 6$$

$$\Rightarrow n(n+1) + 2 \text{ có tận cùng là } 2, 4, 8 \text{ không chia hết cho } 5$$

Bài 61: Chứng tỏ rằng mọi số tự nhiên có ba chữ số giống nhau đều chia hết cho 37

Lời giải

Chứng tỏ rằng mọi số tự nhiên có ba chữ số giống nhau đều chia hết cho 37

Gọi số tự nhiên có ba chữ số giống nhau có dạng \overline{aaa}

(a là chữ số khác 0)

$$\text{Ta có: } \overline{aaa} = 111 \cdot a = 37 \cdot 3 \cdot a$$

$$\Rightarrow \overline{aaa} : 37$$

Vậy mọi số tự nhiên có ba chữ số giống nhau đều chia hết cho 37

CHỦ ĐỀ: BẤT ĐẲNG THỨC**A. PHẦN NỘI DUNG****Dạng 1: So sánh hai số, so sánh một biểu thức với một số**

Bài 1: Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{100}-1}$. Chứng tỏ rằng: $50 < A < 100$

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021-2022

Lời giải

$$A = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{90}} + \frac{1}{2^{93}+1} + \dots + \frac{1}{2^{100}-1}\right)$$

$$< 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{90}} + \frac{1}{2^{99}} + \dots + \frac{1}{2^{99}}\right)$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + 2^{99} \cdot \frac{1}{2^{99}} = 1 + 1 + \dots + 1 \text{ (Có 100 số hạng 1)}$$

$$= 100$$

$$A < 100.$$

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2^4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{90}+1} + \frac{1}{2^{90}+2} + \dots + \frac{1}{2^{100}}\right) - \frac{1}{2^{100}}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{100}} \text{ (Có 100 số hạng } \frac{1}{2} \text{)}$$

$$= 100 \cdot \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^{100}}\right) > 50 \text{ (Vì } 1 - \frac{1}{2^{100}} > 0 \text{)}$$

$$A > 50.$$

$$\text{Vậy } 100 > A > 50.$$

Bài 2: Cho tổng : $S = \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{60}$. Chứng minh rằng : $\frac{3}{5} < S < \frac{4}{5}$.

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015 - 2016

Lời giải

$$\text{Ta có : } S = \left(\frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{40}\right) + \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{50}\right) + \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{60}\right)$$

$$S < \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40}\right) + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \dots + \frac{1}{50}\right)$$

$$\text{hay } S < \frac{10}{30} + \frac{10}{40} + \frac{10}{50}$$

$$\text{tức là: } S < \frac{47}{60} < \frac{48}{60} \text{ Vậy } S < \frac{4}{5} \text{ (1)}$$

$$\text{Mặt khác: } S > \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40}\right) + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \dots + \frac{1}{50}\right) + \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60}\right)$$

$$S > \frac{10}{40} + \frac{10}{50} + \frac{10}{60} \text{ tức là : } S > \frac{37}{60} > \frac{36}{60}$$

$$\text{Vậy } S > \frac{3}{5} \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{3}{5} < S < \frac{4}{5}$ đpcm.

Bài 3: Cho $A = \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \dots + \frac{11}{5^{12}}$. Chứng minh rằng $A < \frac{1}{16}$.

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015 -2016

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \dots + \frac{11}{5^{12}}.$$

$$5A = \frac{1}{5^1} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{11}{5^{11}}.$$

$$5A - A = \frac{1}{5^1} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{11}{5^{11}} - \frac{1}{5^2} - \frac{2}{5^3} - \frac{3}{5^4} - \dots - \frac{11}{5^{12}}.$$

$$4A = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{11}} - \frac{11}{5^{12}}.$$

$$4A = B - \frac{11}{5^{12}}.$$

$$B = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{11}}$$

$$5B = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{10}}$$

$$5B - B = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{10}} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} - \dots - \frac{1}{5^{11}}$$

$$4B = 1 - \frac{1}{5^{11}} = \frac{5^{11} - 1}{5^{11}}$$

$$B = \frac{5^{11} - 1}{4 \cdot 5^{11}}$$

$$4A = B - \frac{11}{5^{12}} = \frac{5^{11} - 1}{4 \cdot 5^{11}} - \frac{11}{5^{12}} = \frac{5^{12} - 5 - 44}{4 \cdot 5^{12}} = \frac{5^{12} - 49}{4 \cdot 5^{12}}$$

$$A = \frac{5^{12} - 49}{4 \cdot 4 \cdot 5^{12}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{5^{12} - 49}{5^{12}} = \frac{1}{16} \cdot \left(1 - \frac{49}{5^{12}}\right) < \frac{1}{16}$$

Vậy $A < \frac{1}{16}$.

Bài 4: $M = \frac{1}{1.4} + \frac{2}{4.10} + \frac{3}{10.19} + \frac{4}{19.31}$ và $N = \frac{2}{1.5} + \frac{3}{5.11} + \frac{4}{11.19} + \frac{5}{19.29} + \frac{6}{29.41}$

So sánh M và N .

Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có:

$$M = \frac{1}{1.4} + \frac{2}{4.10} + \frac{3}{10.19} + \frac{4}{19.31}$$

$$\Rightarrow 3M = \frac{3}{1.4} + \frac{6}{4.10} + \frac{9}{10.19} + \frac{12}{19.31} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{19} + \frac{1}{19} - \frac{1}{31} = 1 - \frac{1}{31} = \frac{30}{31}$$

$$\Rightarrow M = \frac{10}{31} = \frac{20}{62}$$

$$N = \frac{2}{1.5} + \frac{3}{5.11} + \frac{4}{11.19} + \frac{5}{19.29} + \frac{6}{29.41}$$

$$\Rightarrow 2N = \frac{4}{1.5} + \frac{6}{5.11} + \frac{8}{11.19} + \frac{10}{19.29} + \frac{12}{29.41} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{19} + \frac{1}{19} - \frac{1}{29} + \frac{1}{29} - \frac{1}{41}$$

$$\Rightarrow 2N = 1 - \frac{1}{41} = \frac{40}{41}$$

$$\Rightarrow N = \frac{20}{41}$$

$$\text{Vì } \frac{20}{62} < \frac{20}{41} \text{ nên } M < N$$

Vậy $M < N$

Bài 5: So sánh tổng $S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots + \frac{2007}{2^{2007}}$ với 2. ($n \in \mathbb{N}^*$)

Trích đề HSG cấp huyện 2016-2017

Lời giải

Với mọi $n \geq 2$, ta có: $\frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n+2}{2^n}$. Từ đó ta có:

$$S = \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{2^2} \right) + \left(\frac{4}{2^2} - \frac{5}{2^3} \right) + \dots + \left(\frac{2008}{2^{2006}} - \frac{2009}{2^{2007}} \right) = 2 - \frac{2009}{2^{2007}} < 2. \text{ Vậy } S < 2$$

Bài 6: Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2001} + 2^{2002}$; $B = 2^{2003}$

So sánh A và B

Trích đề HSG huyện năm 2019 - 2020

Lời giải

$$\text{Có } 2A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2002} + 2^{2003} \Rightarrow 2A - A = 2^{2003} - 1$$

$$\Rightarrow A = B - 1 \Rightarrow A < B$$

Bài 7: Cho $P = 1 + 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{72}$ và $Q = 2012^{73} - 1$.

So sánh P và Q .

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2012.P = 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{72} + 2012^{73}$$

$$\text{Xét: } 2012.P - P = 2012^{73} - 1$$

$$2011.P = 2012^{73} - 1 \text{ mà } Q = 2012^{73} - 1 \text{ nên } 2011.P = Q. \text{ Vậy } Q > P \text{ (vì } P > 0)$$

Bài 8: Cho tổng $A = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2008}$.

So sánh giá trị biểu thức: $B = 8A - 3^{2010}$ với -1 .

Trích đề HSG huyện Sóc Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2008}$$

$$9A = 3^2 + 3^4 + 3^6 + 3^8 + \dots + 3^{2010}$$

$$9A - A = 3^{2010} - 1$$

$$8A = 3^{2010} - 1$$

$$8A - 3^{2010} = 1$$

$$\text{Mà } B = 8A - 3^{2010}.$$

$$\text{Vậy } B = -1.$$

Bài 9: So sánh $A = \frac{10^{2016} + 1}{10^{2017} + 1}$ và $B = \frac{10^{2017} + 1}{10^{2018} + 1}$.

Trích đề HSG huyện Kim Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

Nhân hai vế của A và B với 10 ta có:

$$10 \cdot A = \frac{10^{2017} + 10}{10^{2017} + 1} = \frac{10^{2017} + 1 + 9}{10^{2017} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2017} + 1}$$

$$10 \cdot B = \frac{10^{2018} + 10}{10^{2018} + 1} = \frac{10^{2018} + 1 + 9}{10^{2018} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2018} + 1}$$

$$\text{Vì } 10^{2017} < 10^{2018} \text{ nên } \frac{9}{10^{2017} + 1} > \frac{9}{10^{2018} + 1}.$$

Vậy $A > B$.

Bài 10: Cho $M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \dots + \frac{1}{13.16}$. So sánh M với $\frac{1}{3}$

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2022 - 2023

Lời giải

Ta có:

$$M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \frac{1}{13.16}$$

$$M = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{16} \right)$$

$$M = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{16} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{16} = \frac{15}{48}$$

$$\text{Lại có: } \frac{1}{3} = \frac{16}{48}$$

$$\text{Vì } 16 > 15 \text{ do đó } \frac{16}{48} > \frac{15}{48} \text{ hay } M < \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } M < \frac{1}{3}$$

Bài 11: Cho $A = \frac{3}{2^2} + \frac{8}{3^2} + \frac{15}{4^2} + \dots + \frac{2023^2 - 1}{2023^2}$. Chứng minh rằng giá trị của A không phải là một tự nhiên.

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \frac{3}{2^2} + \frac{8}{3^2} + \frac{15}{4^2} + \dots + \frac{2023^2 - 1}{2023^2}$$

$$A = \frac{2^2 - 1}{2^2} + \frac{3^2 - 1}{3^2} + \frac{4^2 - 1}{4^2} + \dots + \frac{2023^2 - 1}{2023^2}$$

$$A = 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + 1 - \frac{1}{4^2} + \dots + 1 - \frac{1}{2023^2}$$

$$A = 2022 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} \right)$$

$$\text{Mà } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} > 0 \Rightarrow A < 2022 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2}$$

Ta có:

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \quad \dots;$$

$$\frac{1}{2023^2} < \frac{1}{2022.2023} = \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}$$

$$\Rightarrow B < 1 - \frac{1}{2023} \text{ mà } 1 - \frac{1}{2023} < 1 \Rightarrow B < 1$$

$$\Rightarrow 2022 - B > 2022 - 1 \Rightarrow A > 2021 \quad (1)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2021 < A < 2022 \Rightarrow$ Giá trị của A không là số tự nhiên.

Bài 12: Cho $S = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2022^2}$. Chứng tỏ rằng S không là số tự nhiên.

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021-2022

Lời giải

$$S < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2021.2022} = 1 - \frac{1}{2022} < 1$$

Mà $S > 0$ nên ta có $0 < S < 1$

Vậy, S không phải số tự nhiên.

Bài 13: Cho $M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \dots + \frac{1}{13.16}$. So sánh M với $\frac{1}{3}$

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2022 - 2023

Lời giải

Ta có:

$$M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \frac{1}{13.16}$$

$$M = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{16} \right)$$

$$M = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{16} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{16} = \frac{15}{48}$$

$$\text{Lại có: } \frac{1}{3} = \frac{16}{48}$$

$$\text{Vì } 16 > 15 \text{ do đó } \frac{16}{48} > \frac{15}{48} \text{ hay } M < \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } M < \frac{1}{3}$$

Bài 14: Cho $S = \frac{1}{7^2} + \frac{2}{7^3} + \frac{3}{7^4} + \dots + \frac{69}{7^{70}}$. Chứng tỏ $S < \frac{1}{36}$

Trích đề HSG huyện Tiền Hải năm 2021-2022

Lời giải

$$7S = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \dots + \frac{69}{7^{69}}$$

$$6S = 7S - S = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{7^{69}} - \frac{69}{7^{70}}$$

$$42S = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{7^{68}} - \frac{69}{7^{69}}$$

$$36S = 42S - 6S = 1 - \frac{70}{7^{69}} + \frac{69}{7^{70}}$$

$$\text{Vì } \frac{70}{7^{69}} > \frac{69}{7^{70}} \Rightarrow 36S < 1 \Rightarrow S < \frac{1}{36}$$

Dạng 2: Chứng minh bất đẳng thức

Bài 1: Cho $A = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{70}$ Chứng minh rằng: $\frac{4}{3} < A < \frac{5}{2}$

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Lời giải

Thấy rằng tổng A có 60 số hạng

TH1: Ta chứng minh $A > \frac{4}{3}$ bằng cách nhóm hai số một ngoặc thông thường

$$\text{Ta có: } A = \underbrace{\left(\frac{1}{11} + \frac{1}{70}\right) + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{69}\right) + \dots + \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{41}\right)}_{30 \text{ ngoặc}} = \underbrace{\frac{81}{11 \cdot 70} + \frac{81}{12 \cdot 69} + \dots + \frac{81}{40 \cdot 41}}_{30 \text{ số hạng}}$$

$$A > \frac{81}{40 \cdot 41} + \frac{81}{40 \cdot 41} + \dots + \frac{81}{40 \cdot 41} = \frac{81 \cdot 30}{40 \cdot 41} = \frac{243}{164} > \frac{240}{164} > \frac{240}{180} = \frac{4}{3}$$

TH2: Chứng minh $A < \frac{5}{2}$

$$A = \left(\frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{20}\right) + \left(\frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{31} + \dots + \frac{1}{40}\right) + \left(\frac{1}{41} + \dots + \frac{1}{50}\right) + \left(\frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{60}\right) + \left(\frac{1}{61} + \dots + \frac{1}{70}\right)$$

$$A < \left(\frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{21}\right) + \left(\frac{1}{31} + \dots + \frac{1}{31}\right) + \left(\frac{1}{41} + \dots + \frac{1}{41}\right) + \left(\frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{51}\right) + \left(\frac{1}{61} + \dots + \frac{1}{61}\right)$$

$$A < \frac{10}{11} + \frac{10}{21} + \frac{10}{31} + \frac{10}{41} + \frac{10}{51} + \frac{10}{61} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = 2 + 0,5 = \frac{5}{2}$$

Vậy $\frac{4}{3} < A < \frac{5}{2}$.

Bài 2: Cho $A = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{98} + 4^{99}$, $B = 4^{100}$

Chứng minh rằng: $A < \frac{B}{3}$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Ta có: $4A = 4 \cdot (1 + 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^{98} + 4^{99}) = 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^{98} + 4^{99} + 4^{100}$

Suy ra $4A - A = 4^{100} - 1$ suy ra $A = \frac{4^{100} - 1}{3}$

Vì $4^{100} - 1 < 4^{100}$ suy ra $\frac{4^{100} - 1}{3} < \frac{4^{100}}{3}$

Vậy $A < \frac{B}{3}$

Bài 3: Tính tổng $S = \frac{6}{2.5} + \frac{6}{5.8} + \frac{6}{8.11} + \dots + \frac{6}{29.32}$ và chứng tỏ $S < 1$

Trích đề HSG THCS Phan Đình Phùng năm 2018-2019

Lời giải

$$S = 2 \cdot \left(\frac{3}{2.5} + \frac{3}{5.8} + \dots + \frac{3}{29.32} \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{29} - \frac{1}{32} \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{32} \right) = \frac{30}{32} < 1$$

suy ra $S < 1$

Bài 4: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{2.1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

...

$$\frac{1}{100^2} < \frac{1}{99.100} = \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} < 1$$

Vậy $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

Bài 5: Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{28} + \frac{1}{30} + \frac{1}{32} + \frac{1}{34} + \dots + \frac{1}{52} = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{5.12} + \frac{1}{7.16} + \dots + \frac{1}{25.52}$$

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } & \frac{1}{1.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{5.12} + \dots + \frac{1}{25.52} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{25.26} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{25} - \frac{1}{26} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{25} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{26} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{25} + \frac{1}{26} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{26} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{25} + \frac{1}{26} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{13} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{26} \right) \\
 &= \frac{1}{28} + \frac{1}{30} + \frac{1}{32} + \frac{1}{34} + \dots + \frac{1}{52}
 \end{aligned}$$

Bài 6: Cho $A = \frac{457}{1} + \frac{456}{2} + \frac{455}{3} + \dots + \frac{1}{457}$. Chứng minh: $A > 2016$.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2012-2022

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{457}{1} + 1 + \frac{456}{2} + 1 + \frac{455}{3} + 1 + \dots + \frac{1}{457} + 1 - 457$$

$$A = 458 + \frac{458}{2} + \dots + \frac{458}{456} + \frac{458}{457} - 457$$

$$A = 458 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{457} \right) - 457$$

Nhận xét:

$$1 = 1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{32} > \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{32} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{33} + \dots + \frac{1}{64} > \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{64} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{65} + \dots + \frac{1}{128} > \frac{1}{128} + \dots + \frac{1}{128} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{129} + \dots + \frac{1}{256} > \frac{1}{256} + \dots + \frac{1}{256} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{257} + \dots + \frac{1}{457} > \frac{1}{457} + \dots + \frac{1}{457} = \frac{201}{457} \approx 0,4$$

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{456} + \frac{1}{457} > 1 + \frac{1}{2} \cdot 8 + 0,4 = 5,4$$

$$A > 458 \cdot 5,4 - 457 = 2016,2$$

$$A > 2016$$

Bài 7: Cho $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{100}}$. Chứng tỏ rằng $A < \frac{3}{4}$.

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{100}}$$

$$3A = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{99}}$$

$$3A - A = 1 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{3^2} - \frac{2}{3^2}\right) + \left(\frac{4}{3^3} - \frac{3}{3^3}\right) + \dots + \left(\frac{100}{3^{99}} - \frac{99}{3^{99}}\right) - \frac{100}{3^{100}}$$

$$2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\text{Đặt } B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}}$$

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}}$$

$$3B - B = 1 - \frac{1}{3^{99}}$$

$$2B = 1 - \frac{1}{3^{99}}$$

$$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{99}}$$

$$\text{Như vậy: } 2A = 1 + B - \frac{100}{3^{100}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} > \frac{3}{2}$$

$$A > \frac{3}{4}. \text{ Điều phải chứng minh.}$$

Bài 8: Cho tổng: $S = \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{60}$. Chứng minh rằng: $\frac{3}{5} < S < \frac{4}{5}$

Trích đề HSG Trường THCS Ái Thượng năm 2021-2022

Lời giải

$$S = \left(\frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{40}\right) + \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{50}\right) + \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{60}\right)$$

$$S < \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40}\right) + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \dots + \frac{1}{50}\right)$$

$$\text{hay } S < \frac{10}{30} + \frac{10}{40} + \frac{10}{50} \text{ tức là: } S < \frac{47}{60} < \frac{48}{60} \text{ Vậy } S < \frac{4}{5} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } S > \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40} \right) + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \dots + \frac{1}{50} \right) + \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60} \right)$$

$$S > \frac{10}{40} + \frac{10}{50} + \frac{10}{60} \text{ tức là: } S > \frac{37}{60} > \frac{36}{60} \text{ Vậy } S > \frac{3}{5} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Bài 9: Cho $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{50^2}$. Chứng minh rằng: $A < 2$.

Trích đề HSG THCS Lý Tự Trọng năm 2015-2016

Lời giải

Ta có

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

.....

$$\frac{1}{50^2} < \frac{1}{49.50} = \frac{1}{49} - \frac{1}{50}$$

$$\text{Suy ra } A < \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} = 2 - \frac{1}{50} < 2$$

Bài 10: Cho $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$.

Chứng minh $A < \frac{3}{4}$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{(1+3).2} + \frac{1}{(1+5).3} + \frac{1}{(1+7).4} + \dots + \frac{1}{(1+2017).1009} \\ &= \frac{2}{2.4} + \frac{2}{3.6} + \frac{2}{4.8} + \dots + \frac{2}{1009.2018} = \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{1009.1009} \end{aligned}$$

$$A < \frac{1}{2.2} + \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{1008.1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1008} - \frac{1}{1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1009} \right) \Rightarrow A < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \Rightarrow A < \frac{3}{4}$$

Bài 11: Cho $A = \frac{457}{1} + \frac{456}{2} + \frac{455}{3} + \dots + \frac{1}{457}$. Chứng minh: $A > 2016$

Lời giải

$$A = \frac{457}{1} + 1 + \frac{456}{2} + 1 + \frac{455}{3} + 1 + \dots + \frac{1}{457} + 1 - 457$$

$$A = 458 + \frac{458}{2} + \dots + \frac{458}{456} + \frac{458}{457} - 457$$

$$A = 458 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{457} \right) - 457$$

Nhận xét:

$$1 = 1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{32} > \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{32} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{33} + \dots + \frac{1}{64} > \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{64} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{65} + \dots + \frac{1}{128} > \frac{1}{128} + \dots + \frac{1}{128} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{129} + \dots + \frac{1}{256} > \frac{1}{256} + \dots + \frac{1}{256} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{257} + \dots + \frac{1}{457} > \frac{1}{457} + \dots + \frac{1}{457} = \frac{201}{457} \approx 0,4$$

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{456} + \frac{1}{457} > 1 + \frac{1}{2} \cdot 8 + 0,4 = 5,4$$

$$A > 458 \cdot 5,4 - 457 = 2016,2$$

$$A > 2016$$

Bài 12: Cho $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{2012}} + \frac{1}{2^{2013}}$. Chứng tỏ $S < 1$

Trích đề HSG huyện Quế Sơn 2018-2019

Lời giải

$$2S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2011}} + \frac{1}{2^{2012}}$$

$$2S - S = S = 1 - \frac{1}{2^{2013}} < 1$$

Bài 13: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

Trích đề HSG huyệnnăm 2019-2020

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

.....

$$\frac{1}{100^2} < \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} < 1$$

Bài 14: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$.

Trích đề HSG huyệnnăm 20...-20...

Lời giải

$$A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{99.100} = B$$

$$B = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} < 1.$$

Vậy $A < 1$.

Bài 15: Chứng minh rằng: $\frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{4}$.

Trích đề HSG huyện Kim Sơn năm 2021 -2022

Lời giải

Ta có:

$$A = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$$

$$A = \frac{1}{(2.2)^2} + \frac{1}{(2.3)^2} + \frac{1}{(2.4)^2} + \dots + \frac{1}{(2.n)^2}$$

$$A = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{(n-1).n} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{4} \quad (\text{ĐPCM})$$

Bài 16: Cho $M = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200}$. Chứng minh rằng $M > \frac{7}{12}$.

Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021 -2022

Lời giải

$$M = \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{149} + \frac{1}{150} \right) + \left(\frac{1}{151} + \frac{1}{152} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} \right) \text{ (Mỗi nhóm có 50 số hạng).}$$

$$M > \left(\frac{1}{150} + \frac{1}{150} + \dots + \frac{1}{150} + \frac{1}{150} \right) + \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{200} + \dots + \frac{1}{200} + \frac{1}{200} \right)$$

$$M > 50 \cdot \frac{1}{150} + 50 \cdot \frac{1}{200} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

$$\text{Vậy } M > \frac{7}{12}.$$

Bài 17: Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Lời giải

$$\text{Vì } 0 \leq a \leq b \leq c \leq 1 \text{ nên: } (a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab+1 \geq a+b$$

$$\text{Tương tự: } \frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c} \quad (2); \quad \frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c} \quad (3)$$

$$\text{Do đó: } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \quad (4)$$

$$\text{Mà } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5) suy ra: } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2 \quad (\text{đpcm})$$

Dạng 3: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức

Bài 1: Giá trị của x để $A = (x+7)^2 + 2022$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. -7.

B. 7.

C. 2022.

D. -2022.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021-2022

Lời giải

Đáp án: A. -7.

Bài 2: Tìm số tự nhiên n để phân số $M = \frac{6n-3}{4n-6}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\text{Ta có: } M = \frac{6n-3}{4n-6} = \frac{3}{2} + \frac{6}{4n-6}$$

Vì $\frac{6}{4n-6}$ có tử $6 > 0$ nên để M đạt giá trị lớn nhất khi $4n-6$ đạt giá trị dương nhỏ nhất với n là số tự nhiên.

Do đó $4n-6=2$ nên $4n=8$ suy ra $n=2$.

$$\text{Khi đó } M = \frac{3}{2} + \frac{6}{2} = \frac{9}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của M là $\frac{9}{2}$ khi $n = 2$.

Bài 3: Với giá trị nào của x, y thì biểu thức : $A = |x - y| + |x + 1| + 2016$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Trích đề HSG huyện Diễn Châu năm 2015-2016

Lời giải

Vì $|x - y| \geq 0$ với mọi x, y ; và $|x + 1| \geq 0$ với mọi x .

$$A = |x - y| + |x + 1| + 2016 \geq 2016 \text{ với mọi } x, y.$$

$$A \text{ đạt giá trị nhỏ nhất khi } \begin{cases} |x - y| = 0 \\ |x + 1| = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy với $x = y = -1$ thì A đạt giá trị nhỏ nhất là 2016.

Bài 4: Cho phân số $\frac{3n-8}{6n+4}$. Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để A có giá trị nhỏ nhất.

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021 -2022

Lời giải

$$\frac{3n-8}{6n+4} \text{ nhỏ nhất khi } \frac{6n+4}{3n-8} \text{ lớn nhất.}$$

Ta có:

$$\frac{6n+4}{3n-8} = \frac{6n-16+20}{3n-8} = 2 + \frac{20}{3n-8} \text{ lớn nhất khi:}$$

$$3n-8 > 0 \text{ và } 3n-8 \text{ nhỏ nhất}$$

$$n > \frac{8}{3} \text{ và } n \text{ nhỏ nhất, } n \in \mathbb{Z} \text{ nên } n = 3.$$

Vậy $n = 3$ để A có giá trị nhỏ nhất.

Bài 5: Tìm số tự nhiên n để phân số $M = \frac{6n-3}{4n-6}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\text{Ta có } M = \frac{6n-3}{4n-6} = \frac{3}{2} + \frac{6}{4n-6}$$

Vì phân số $\frac{6}{4n-6}$ có tử là số dương nên M đạt giá trị lớn nhất khi $4n-6$ đạt giá trị dương nhỏ nhất với n là số nguyên.

$$\text{Ta có } 4n-6 = 2 \text{ khi đó } 4n = 8 \text{ suy ra } n = 2. \text{ Ta có } M = \frac{3}{2} + \frac{6}{2} = \frac{9}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 4,5 khi $n = 2$.

Bài 6: Cho phân số $A = \frac{n+1}{n-3}$ ($n \in \mathbb{Z}$)

- Tìm n để A là phân số
- Tìm n để A là phân số tối giản
- Tìm n để A có giá trị lớn nhất

Trích đề HSG huyện Anh Sơn năm 2018-2019

Lời giải

a) A là phân số khi $n-3 \neq 0 \Rightarrow n \neq 3$

b) Để A là phân số tối giản thì $\text{CLN}(n+1, n-3) = 1$

Hay $\text{CLN}((n-3)+4; n-3) = 1$

Vì $4:2$ (2 là ước nguyên tố)

Nên để $\text{CLN}((n-3)+4; n-3) = 1$ thì $n-3$ không chia hết cho 2

Suy ra $n-3 = 2k+1$ (k là số nguyên)

Hay n là số chẵn.

c) Ta có: $A = \frac{n+1}{n-3} = \frac{n-3+4}{n-3} = 1 + \frac{4}{n-3}$

Với $n > 3$ thì $\frac{4}{n-3} > 0$, Với $n < 3$ thì $\frac{4}{n-3} < 0$

Để A có giá trị lớn nhất thì $n-3$ nguyên dương và có giá trị nhỏ nhất.

Do đó $n-3=1$ hay $n=4$.

Bài 7: Với giá trị nào của số tự nhiên a thì $\frac{5a-17}{4a-23}$ có giá trị lớn nhất.

Trích đề HSG cấp huyện 2016-2017

Lời giải

$$\frac{5a-17}{4a-23} = \frac{20a-68}{4(4a-23)} = \frac{5(4a-23)+47}{4(4a-23)} = \frac{5}{4} + \frac{47}{4(4a-23)}$$

Như vậy bài toán đưa về tìm số tự nhiên a để $4a-23$ là số tự nhiên nhỏ nhất

$$\text{Vậy } a=6 \Rightarrow \frac{5a-17}{4a-23} = 13$$

Bài 8: Tìm số tự nhiên n để phân số $M = \frac{6n-3}{4n-6}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Trích đề HSG huyện Tân Kỳ năm 2021-2022

Lời giải

$$\text{Ta có: } M = \frac{6n-3}{4n-6} = \frac{3}{2} + \frac{6}{4n-6}$$

Vì $\frac{6}{4n-6}$ có tử $6 > 0$ nên để M đạt giá trị lớn nhất khi $4n-6$ đạt giá trị dương nhỏ nhất với n là số tự nhiên.

Với $4n-6=1$ ta có: $4n=7$ nên $n = \frac{7}{4} \notin \mathbb{Z}$ (loại).

Do đó $4n-6=2$ ta có $4n=8$ nên $n=2$.

$$\text{Khi đó } M = \frac{3}{2} + \frac{6}{2} = \frac{9}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của M là $\frac{9}{2}$ khi $n=2$.

Bài 9: Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{10n-3}{4n-10}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó?

Trích đề HSG huyện Sơn Tây năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\text{Ta có } B = \frac{10n-3}{4n-10} = \frac{5(2n-5)+22}{2(2n-5)} = \frac{5}{2} + \frac{22}{2(2n-5)} = \frac{5}{2} + \frac{11}{2n-5}.$$

Ta có B đạt giá trị lớn nhất khi $\frac{11}{2n-5}$ đạt giá trị lớn nhất, vì $11 > 0$ và không đổi nên $\frac{11}{2n-5}$ đạt giá trị lớn nhất khi $2n-5 > 0$ và đạt giá trị nhỏ nhất.

Suy ra: $2n-5=1$ khi và chỉ khi $n=3$.

Vậy B đạt giá trị lớn nhất là $13,5$ khi $n=3$.

B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

(copy đề bài ở các dạng trên để làm phiếu ôn tập cho HS)

Dạng 1: So sánh hai số, so sánh một biểu thức với một số

Bài 1: Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{100}-1}$. Chứng tỏ rằng: $50 < A < 100$

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021-2022

Bài 2: Cho tổng: $S = \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{60}$. Chứng minh rằng: $\frac{3}{5} < S < \frac{4}{5}$.

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015 - 2016

Bài 3: Cho $A = \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \dots + \frac{11}{5^{12}}$. Chứng minh rằng $A < \frac{1}{16}$.

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015 - 2016

Bài 4: $M = \frac{1}{1.4} + \frac{2}{4.10} + \frac{3}{10.19} + \frac{4}{19.31}$ và $N = \frac{2}{1.5} + \frac{3}{5.11} + \frac{4}{11.19} + \frac{5}{19.29} + \frac{6}{29.41}$

So sánh M và N .

Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 - 2022

Bài 5: So sánh tổng $S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots + \frac{2007}{2^{2007}}$ với 2. ($n \in \mathbb{N}^*$)

Trích đề HSG cấp huyện 2016-2017

Bài 6: Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2001} + 2^{2002}$; $B = 2^{2003}$

So sánh A và B

Trích đề HSG huyện năm 2019 - 2020

Bài 7: Cho $P = 1 + 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{72}$ và $Q = 2012^{73} - 1$.

So sánh P và Q .

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021 - 2022

Bài 8: Cho tổng $A = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2008}$.

So sánh giá trị biểu thức: $B = 8A - 3^{2010}$ với -1 .

Trích đề HSG huyện Sóc Sơn năm 2021 - 2022

Bài 9: So sánh $A = \frac{10^{2016} + 1}{10^{2017} + 1}$ và $B = \frac{10^{2017} + 1}{10^{2018} + 1}$.

Trích đề HSG huyện Kim Sơn năm 2021 - 2022

Bài 10: Cho $M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \dots + \frac{1}{13.16}$. So sánh M với $\frac{1}{3}$

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2022 - 2023

Bài 11: Cho $A = \frac{3}{2^2} + \frac{8}{3^2} + \frac{15}{4^2} + \dots + \frac{2023^2 - 1}{2023^2}$. Chứng minh rằng giá trị của A không phải là một tự nhiên.

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Bài 12: Cho $S = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2022^2}$. Chứng tỏ rằng S không là số tự nhiên.

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021-2022

Bài 13: Cho $M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \dots + \frac{1}{13.16}$. So sánh M với $\frac{1}{3}$

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2022 - 2023

Bài 14: Cho $S = \frac{1}{7^2} + \frac{2}{7^3} + \frac{3}{7^4} + \dots + \frac{69}{7^{70}}$. Chứng tỏ $S < \frac{1}{36}$

Trích đề HSG huyện Tiên Hải năm 2021-2022

Dạng 2: Chứng minh bất đẳng thức

Bài 1: Cho $A = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{70}$ Chứng minh rằng: $\frac{4}{3} < A < \frac{5}{2}$

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Bài 2: Cho $A = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{98} + 4^{99}$, $B = 4^{100}$

Chứng minh rằng: $A < \frac{B}{3}$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 3: Tính tổng $S = \frac{6}{2.5} + \frac{6}{5.8} + \frac{6}{8.11} + \dots + \frac{6}{29.32}$ và chứng tỏ $S < 1$

Trích đề HSG THCS Phan Đình Phùng năm 2018-2019

Bài 4: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Bài 5: Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{28} + \frac{1}{30} + \frac{1}{32} + \frac{1}{34} + \dots + \frac{1}{52} = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{5.12} + \frac{1}{7.16} + \dots + \frac{1}{25.52}.$$

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021 - 2022

Bài 6: Cho $A = \frac{457}{1} + \frac{456}{2} + \frac{455}{3} + \dots + \frac{1}{457}$. Chứng minh: $A > 2016$.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2012-2022

Bài 7: Cho $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{100}}$. Chứng tỏ rằng $A < \frac{3}{4}$.

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Bài 8: Cho tổng $S = \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{60}$. Chứng minh rằng: $\frac{3}{5} < S < \frac{4}{5}$

Trích đề HSG Trường THCS Ái Thượng năm 2021-2022

Bài 9: Cho $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \dots + \frac{1}{50^2}$. Chứng minh rằng: $A < 2$.

Trích đề HSG THCS Lý Tự Trọng năm 2015-2016

Bài 10: Cho $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$.

Chứng minh $A < \frac{3}{4}$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Bài 11: Cho $A = \frac{457}{1} + \frac{456}{2} + \frac{455}{3} + \dots + \frac{1}{457}$. Chứng minh: $A > 2016$

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021 - 2022

Bài 12: Cho $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{2012}} + \frac{1}{2^{2013}}$. Chứng tỏ $S < 1$

Trích đề HSG huyện Quế Sơn 2018-2019

Bài 13: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

Trích đề HSG huyệnnăm 2019-2020

Bài 14: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$.

Trích đề HSG huyệnnăm 20...-20...

Bài 15: Chứng minh rằng: $\frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{4}$.

Trích đề HSG huyện Kim Sơn năm 2021 -2022

Bài 16: Cho $M = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200}$. Chứng minh rằng $M > \frac{7}{12}$.

Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021 -2022

Bài 17: Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Dạng 3: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức

Bài 1: Giá trị của x để $A = (x+7)^2 + 2022$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

- A. -7. B. 7. C. 2022. D. -2022.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021-2022

Bài 2: Tìm số tự nhiên n để phân số $M = \frac{6n-3}{4n-6}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Bài 3: Với giá trị nào của x, y thì biểu thức : $A = |x - y| + |x + 1| + 2016$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Trích đề HSG huyện Diễn Châu năm 2015-2016

Bài 4: Cho phân số $\frac{3n-8}{6n+4}$. Tìm $n \in \mathbb{Q}$ để A có giá trị nhỏ nhất.

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021 -2022

Bài 5: Tìm số tự nhiên n để phân số $M = \frac{6n-3}{4n-6}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2021 - 2022

Bài 6: Cho phân số $A = \frac{n+1}{n-3}$ ($n \in \mathbb{Q}$)

- d) Tìm n để A là phân số
- e) Tìm n để A là phân số tối giản
- f) Tìm n để A có giá trị lớn nhất

Trích đề HSG huyện Anh Sơn năm 2018-2019

Bài 7: Với giá trị nào của số tự nhiên a thì $\frac{5a-17}{4a-23}$ có giá trị lớn nhất.

Trích đề HSG cấp huyện 2016-2017

Bài 8: Tìm số tự nhiên n để phân số $M = \frac{6n-3}{4n-6}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Trích đề HSG huyện Tân Kỳ năm 2021 -2022

Bài 9: Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{10n-3}{4n-10}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó?

Trích đề HSG huyện Sơn Tây năm 2021 - 2022

C. SỬU TÂM CÁC BÀI TRONG CÁC ĐỀ CỦA NHỮNG NĂM TRƯỚC ĐÓ

(Phần này lấy các câu từ những năm trước, trước năm 2020-2021, tối thiểu 10 bài)

Bài 1: Tính tổng $S = \frac{6}{2.5} + \frac{6}{5.8} + \frac{6}{8.11} + \dots + \frac{6}{29.32}$ và chứng tỏ $S < 1$.

Trích đề HSG trường THCS Phan Đình Phùng năm 2018-2019

Lời giải

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \left(\frac{3}{2.5} + \frac{3}{5.8} + \dots + \frac{3}{29.32} \right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{29} - \frac{1}{32} \right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{32} \right) = \frac{30}{32} < 1 \\ \text{Vậy } S &< 1. \end{aligned}$$

Bài 2: Cho biểu thức $B = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$. Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{6} < B < \frac{1}{4}$.

Trích đề HSG huyện Giao Thủy (Nam Định) năm 2018-2019

Lời giải

Ta có $\frac{1}{5^2} < \frac{1}{4.5}$
 $\frac{1}{6^2} < \frac{1}{5.6}$

$$\frac{1}{7^2} < \frac{1}{6.7}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{100^2} < \frac{1}{99.100}$$

$$B < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

$$B < \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$B < \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4} \quad (1)$$

Ta có $\frac{1}{5^2} > \frac{1}{5.6}$

$$\frac{1}{6^2} > \frac{1}{6.7}$$

$$\frac{1}{7^2} > \frac{1}{7.8}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{100^2} > \frac{1}{100.101}$$

$$B > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{100.101}$$

$$B > \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101}$$

$$B > \frac{1}{5} - \frac{1}{101} = \frac{96}{505} > \frac{96}{576} = \frac{1}{6}$$

$$B > \frac{1}{6} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\frac{1}{6} < B < \frac{1}{4}$.

Bài 3: Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh: $2 < \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < 3$.

Lời giải

$$\frac{a+b}{a+b+c+d} < \frac{a+b}{a+b+c} < \frac{a+b+d}{a+b+c+d}$$

$$\frac{b+c}{a+b+c+d} < \frac{b+c}{b+c+d} < \frac{a+b+c}{a+b+c+d}$$

$$\frac{c+d}{a+b+c+d} < \frac{c+d}{c+d+a} < \frac{c+d+b}{a+b+c+d}$$

$$\frac{d+a}{a+b+c+d} < \frac{d+a}{a+b+d} < \frac{d+a+c}{a+b+c+d}$$

Cộng theo vế ta được: $2 < A < 3$.

Bài 4: Cho $a, b, c > 0$ và tổng hai số luôn lớn hơn số còn lại. Chứng minh: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$.

Lời giải

Giả sử: $a \geq b \geq c \Rightarrow a+b > a+c > b+c$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{a}{b+c} = \frac{a}{b+c} \\ \frac{b}{c+a} < \frac{b}{b+c} \\ \frac{c}{a+b} < \frac{c}{b+c} \end{cases}$$

Cộng theo vế ta được:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{a+b+c}{b+c} = 1 + \frac{a}{b+c} < 1+1=2$$

Bài 5: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ có giá trị không nguyên.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c} \\ \frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c} \\ \frac{c}{c+a} > \frac{c}{a+b+c} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c} \\ \frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c} \\ \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c} \end{cases},$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} < M < \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{a+b+c} + \frac{c+a}{a+b+c} \text{ hay } 1 < M < 2.$$

Bài 6: Chứng minh: $A = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdots \frac{208}{210} < \frac{1}{25}$.

Lời giải

Ta thấy A có dạng $\frac{n}{n+2} < 1$ nên $\frac{n}{n+2} < \frac{n-1}{n+1} < \frac{n-1}{n}$

$$A < \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{207}{208}$$

$$A^2 < \frac{(1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots 208)(1 \cdot 3 \cdot 6 \cdots 207)}{(3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 210)(3 \cdot 4 \cdot 7 \cdots 208)}$$

$$A^2 < \frac{1}{3 \cdot 210} = \frac{1}{630}$$

$$A^2 < \frac{1}{625}$$

$$A < \frac{1}{25}$$

Bài 7: Chứng minh: $A = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > 1$.

Lời giải

$A = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right)$ có $n^2 - (n+1) + 1 = n^2 - n$ số hạng.

$$A > \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{n^2 - n}{n^2} = \frac{1}{n} + 1 - \frac{n}{n^2} = 1$$

Vậy $A > 1$.

Bài 8: Chứng minh: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{2016}} < 2016$.

Lời giải

$$A = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2015}} + \dots + \frac{1}{2^{2016} - 1}\right) + \frac{1}{2^{2016}}.$$

$$A < 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{2015} \cdot \frac{1}{2^{2015}} + \frac{1}{2^{2016}}$$

$$A < 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \frac{1}{2^{2016}}$$

$$A < 2015 + \frac{1}{2^{2016}} < 2016$$

Bài 9: Chứng minh: $50 < A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{100} - 1} < 100$,

Lời giải

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{100}}\right) - \frac{1}{2^{100}}.$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{99} \cdot \frac{1}{2^{100}} - \frac{1}{2^{100}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{100}}$$

$$A > \frac{100}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^{100}}\right) > 50$$

$$A = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100} - 1}\right)$$

$$A < 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{99} \cdot \frac{1}{2^{99}}.$$

$$A < 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 100$$

Vậy $A < 100$.

Bài 10: Chứng minh: $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{64} > 4$.

Lời giải

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^5 + 1} + \dots + \frac{1}{2^6}\right).$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^5 \cdot \frac{1}{2^6}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 4$$

Bài 11: Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} < \frac{1}{3}$.

b) $\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{16}$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2017-2018

Lời giải

a) Đặt $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6}$

$$2A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5}$$

$$2A + A = 1 - \frac{1}{2^6}$$

$$3A = \frac{2^6 - 1}{2^6} < 1$$

$$3A < 1.$$

$$\text{Vậy } A < \frac{1}{3}.$$

$$\text{b) Đặt } A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$3A = 1 - \frac{2}{3} - \frac{3}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{3}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$$

$$4A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$4A < 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } B = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}}$$

$$3B = 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{97}} - \frac{1}{3^{98}}$$

$$B + 3B = 3 - \frac{1}{3^{99}}$$

$$4B < 3$$

$$B < \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 4A < B < \frac{3}{4}.$$

$$\text{Vậy } A < \frac{3}{16}.$$

Bài 12: Chứng tỏ rằng $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Ta thấy $\frac{1}{41}$ đến $\frac{1}{80}$ có 40 phân số

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} \\ &= \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{61} + \frac{1}{62} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{41} > \frac{1}{42} > \dots > \frac{1}{60} \text{ và } \frac{1}{61} > \frac{1}{62} > \dots > \frac{1}{80} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } A &= \frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} \\ A &> \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{80} + \dots + \frac{1}{80} + \frac{1}{80} \right) \\ &= \frac{20}{60} + \frac{20}{80} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) ta được } \frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}.$$

Bài 13: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = (2x+1)^4 - 3$.

Lời giải

Vì $(2x+1)^4 \geq 0$ với mọi x .

Nên $A = (2x+1)^4 - 3 \geq -3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A bằng -3 , đạt được khi

$$(2x+1)^2 = 0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}.$$

Bài 14: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 2021 + (x-2020)^{2022}$.

Lời giải

Vì $(x-2020)^{2022} \geq 0$ với mọi x .

Nên $A = (x-2020)^{2022} + 2021 \geq 2021$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A bằng 2021 , đạt được khi

$$(x-2020)^{2022} = 0 \Rightarrow x-2020=0 \Rightarrow x=2020.$$

Bài 15: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = -(x-2021)^{2020} - 1$.

Lời giải

Vì $(x-2021)^{2020} \geq 0 \Rightarrow -(x-2021)^{2020} \leq 0$ với mọi x .

Nên $A = -(x-2021)^{2020} - 1 \leq -1$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A bằng -1 , đạt được khi

$$(x-2021)^{2020} = 0 \Rightarrow x-2021=0 \Rightarrow x=2021.$$

Vậy $x=2021$.

Bài 16: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = -4.(x-5)^6 - 7$.

Lời giải

Vì $(x-5)^6 \geq 0 \Rightarrow -4.(x-5)^6 \leq 0$ với mọi x .

Nên $A = -4.(x-5)^6 - 7 \leq -7$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A bằng -7 , đạt được khi

$$(x-5)^6 = 0 \Rightarrow x-5=0 \Rightarrow x=5.$$

Vậy $x=5$.

Bài 17: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = (x+1)^2 + (y+3)^2 + 1$.

Lời giải

$$\text{Vì } \begin{cases} (x+1)^2 \geq 0 \\ (y+3)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x+1)^2 + (y+3)^2 \geq 0.$$

Nên $A = (x+1)^2 + (y+3)^2 + 1 \geq 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A bằng 1 , đạt được khi

$$\begin{cases} (x+1)^2 = 0 \\ (y+3)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}.$$

Bài 18: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = (x-1)^2 + (y+5)^2 + 1$.

Lời giải

$$\text{Vì } \begin{cases} (x-1)^2 \geq 0 \\ (y+5)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 + (y+5)^2 \geq 0$$

Nên $A = (x-1)^2 + (y+5)^2 + 1 \geq 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A bằng 1 , đạt được khi

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ (y+5)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y+5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-5 \end{cases}.$$

Bài 19: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{3}{(x-2)^2 + 5}$.

Lời giải

Vì $(x-2)^2 \geq 0$ với mọi x .

$$\begin{aligned} \text{Nên } (x-2)^2 + 5 &\geq 5 \Rightarrow \frac{1}{(x-2)^2 + 5} \leq \frac{1}{5} \\ \Rightarrow A &= \frac{3}{(x-2)^2 + 5} \leq \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A bằng $\frac{3}{5}$, đạt được khi

$$(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2.$$

Bài 20: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{8}{(x-1)^2 + 4}$

Lời giải

Vì $(x-1)^2 \geq 0$ với mọi x .

$$\begin{aligned} \text{Nên } (x-1)^2 + 4 &\geq 4 \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2 + 4} \leq \frac{1}{4} \\ \Rightarrow A &= \frac{8}{(x-1)^2 + 4} \leq \frac{8}{4} = 2. \end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A bằng 2 , đạt được khi

$$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1.$$

Bài 21: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2020^2} < 1$

Lời giải:

Ta thấy bài toán có dạng tổng các lũy thừa bậc hai, nên ta sẽ phân tích tổng A như sau:

$$A = \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2018 \cdot 2019} + \frac{1}{2019 \cdot 2020}$$

Đến đây ta sẽ so sánh với phân số có mẫu nhỏ hơn, vì yêu cầu bài toán là chứng minh nhỏ hơn.

$$\begin{aligned} A &< \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2019 \cdot 2019} + \frac{1}{2019 \cdot 2020} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2018} - \frac{1}{2019}\right) + \left(\frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}\right) \end{aligned}$$

$$A < \frac{1}{1} - \frac{1}{2020} < 1$$

Bài 22: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{3}{4}$

Lời giải:

Ta biến đổi:

$$A = \frac{1}{4} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 99} + \frac{1}{100 \cdot 100} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$$

$$A < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{100} = \frac{3}{4} - \frac{1}{100} < \frac{3}{4}$$

Bài 23: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{2}$

Lời giải:

Nhận thấy bài này là tổng lũy thừa mà cơ số ở mẫu là các số chẵn nên ta sẽ đưa về tổng lũy thừa mà cơ số ở mẫu là các số tự nhiên liên tiếp như sau:

$$A = \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right) < \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{49.50} \right)$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{4} \left(1 + 1 - \frac{1}{50} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{200} < \frac{1}{2}$$

Bài 24: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{100}{2^{100}} < 2$

Lời giải :

Nhận thấy bài này có dạng tổng các phân số có mẫu là các lũy thừa cùng cơ số nên ta sẽ thực hiện phép tính tổng A

Việc tính chính xác được tổng A sẽ giảm bớt sự sai số, tuy nhiên không phải tổng nào cũng có thể tính được.

Ta tính tổng A như sau: $2A = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{99}{2^{98}} + \frac{100}{2^{99}}$

Sau đó lấy $2A$ trừ A theo vế và nhóm các phân số có cùng mẫu ta được:

$$A = \frac{3}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{99}} - \frac{100}{2^{100}}, \text{ đặt } B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{99}} \text{ và tính tổng } B \text{ theo cách như trên ta}$$

$$\text{được: } B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{99}}, \text{ thay vào } A \text{ ta được: } A = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{99}} - \frac{100}{2^{100}} < 2$$

Bài 25: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$

Lời giải:

Tính tương tự như bài 5, ta có: $2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$,

Đặt $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{99}}$, và tính B rồi thay vào tổng A ta được

$$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3^{99}}$$

$$\Rightarrow 2A = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow 2A < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow A < \frac{3}{4}$$

Bài 26: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$

Lời giải:

Ta có: $A = \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{n.n} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$

Bài 27: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{4}$

Lời giải:

Ta có: $A = \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4n} < \frac{1}{4}$

Bài 28: So sánh $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$ với $\frac{1}{2}$

Lời giải:

$$A = \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{4} \left(1 + 1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} < \frac{1}{2}$$

Bài 29: Chứng minh rằng với số tự nhiên $n > 2$ thì $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ không là số tự nhiên

Lời giải:

Ta có: $A < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} < 2$. Mặt khác ta thấy $A > 1$

Vậy ta có: $1 < A < 2$.

Bài 30: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2021^2} < \frac{2020}{2021}$

Lời giải:

$$A < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2020.2021} = 1 - \frac{1}{2021} = \frac{2020}{2021}$$

Bài 31: Cho $M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \dots + \frac{1}{13.16}$. So sánh M với $\frac{1}{3}$

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2022 - 2023

Bài 32: Cho $A = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{70}$ Chứng minh rằng: $\frac{4}{3} < A < \frac{5}{2}$

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Bài 33: Cho $A = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{98} + 4^{99}$, $B = 4^{100}$

Chứng minh rằng: $A < \frac{B}{3}$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 34: Tính tổng $S = \frac{6}{2.5} + \frac{6}{5.8} + \frac{6}{8.11} + \dots + \frac{6}{29.32}$ và chứng tỏ $S < 1$

Trích đề HSG THCS Phan Đình Phùng năm 2018-2019

Bài 35: Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} < \frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{16}$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 36. Chứng tỏ rằng $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$

Lời giải

Ta thấy $\frac{1}{41}$ đến $\frac{1}{80}$ có 40 phân số

$$\text{Vậy } \frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80}$$

$$= \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{61} + \frac{1}{62} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} \right) \quad (1)$$

$$\text{Vì } \frac{1}{41} > \frac{1}{42} > \dots > \frac{1}{60} \text{ và } \frac{1}{61} > \frac{1}{62} > \dots > \frac{1}{80} \quad (2)$$

Ta có:

$$\left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60} + \frac{1}{60}\right) + \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{80} + \dots + \frac{1}{80} + \frac{1}{80}\right)$$

$$= \frac{20}{60} + \frac{20}{80} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \quad (3)$$

Từ (1) (2) (3) suy ra: $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$

Bài 37. Cho biết $S = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{130}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{4} < S < \frac{91}{330}$

Lời giải

*Chứng minh $S < \frac{91}{330}$

$$S = \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{110}\right) + \left(\frac{1}{111} + \dots + \frac{1}{120}\right) + \left(\frac{1}{121} + \dots + \frac{1}{130}\right)$$

$$S < \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{110} + \dots + \frac{1}{110}\right) + \left(\frac{1}{120} + \dots + \frac{1}{120}\right)$$

$$S < \frac{1}{100} \cdot 10 + \frac{1}{110} \cdot 10 + \frac{1}{120} \cdot 10 = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} = \frac{181}{660} < \frac{182}{660} < \frac{91}{330}$$

Suy ra: $S < \frac{91}{330}$ (1)

*Chứng minh $\frac{1}{4} < S$

$$S > \left(\frac{1}{110} + \dots + \frac{1}{110}\right) + \left(\frac{1}{120} + \dots + \frac{1}{120}\right) + \left(\frac{1}{130} + \dots + \frac{1}{130}\right)$$

$$S > \frac{1}{110} \cdot 10 + \frac{1}{120} \cdot 10 + \frac{1}{130} \cdot 10 = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13}$$

$$S > \frac{431}{1716} > \frac{429}{1716} \text{ suy ra } S > \frac{1}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{1}{4} < S < \frac{91}{330}$

Bài 38. Cho $A = \frac{3}{2^2} + \frac{8}{3^2} + \frac{15}{4^2} + \dots + \frac{2023^2 - 1}{2023^2}$. Chứng minh rằng giá trị của A không phải là một tự nhiên.

Lời giải

$$A = \frac{2^2 - 1}{2^2} + \frac{3^2 - 1}{3^2} + \frac{4^2 - 1}{4^2} + \dots + \frac{2023^2 - 1}{2023^2}$$

$$A = 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + \dots + 1 - \frac{1}{2023^2}$$

$$A = 2022 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2023^2}\right)$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2023^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2022 \cdot 2023} = 1 - \frac{1}{2023} < 1$$

Do vậy $2021 < A < 2022$ nên giá trị của A không phải là một số tự nhiên

Bài 39. Cho tổng $T = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2016}{2^{2015}} + \frac{2017}{2^{2016}}$ So sánh T với 3

Lời giải

$$T = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2016}{2^{2015}} + \frac{2017}{2^{2016}}$$

$$2T = 2 + \frac{3}{2^1} + \frac{4}{2^2} + \dots + \frac{2016}{2^{2014}} + \frac{2017}{2^{2015}}$$

$$2T - T = 2 + \frac{3}{2^1} - \frac{2}{2^1} + \frac{4}{2^2} - \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{2016}{2^{2014}} - \frac{2015}{2^{2014}} + \frac{2017}{2^{2015}} - \frac{2016}{2^{2015}} - \frac{2017}{2^{2016}}$$

$$T = 2 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2015}} - \frac{2017}{2^{2016}}$$

Đặt $N = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2015}}$ suy ra $2N = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2014}}$

$$2N - N = 1 - \frac{1}{2^{2015}} \text{ suy ra } N < 1$$

Nên $T < 2 + 1 - \frac{2017}{2^{2016}} = 3 - \frac{2017}{2^{2016}}$ suy ra $T < 3$

Bài 40. Cho $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$. Chứng minh $A < \frac{3}{4}$

Lời giải

Ta có: $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$

$$A = \frac{1}{(1+3).2} + \frac{1}{(1+5).3} + \frac{1}{(1+7).4} + \dots + \frac{1}{(1+2017).1009}$$

$$= \frac{2}{2.4} + \frac{2}{3.6} + \frac{2}{4.8} + \dots + \frac{2}{1009.2018} = \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{1009.1009}$$

$$A < \frac{1}{2.2} + \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{1008.1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1008} - \frac{1}{1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1009} \right)$$

Suy ra $A < \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ suy ra $A < \frac{3}{4}$

Bài 41. Cho biểu thức $D = \frac{(2!)^2}{1^2} + \frac{(2!)^2}{3^2} + \frac{(2!)^2}{5^2} + \frac{(2!)^2}{7^2} + \dots + \frac{(2!)^2}{2015^2}$

So sánh D với 6. Biết $n! = 1.2.3\dots n$ (n là số tự nhiên khác 0)

Lời giải

Ta có:

$$D = \frac{(2!)^2}{1^2} + \frac{(2!)^2}{3^2} + \frac{(2!)^2}{5^2} + \frac{(2!)^2}{7^2} + \dots + \frac{(2!)^2}{2015^2}$$

$$D = \frac{2^2}{1^2} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^2}{5^2} + \frac{2^2}{7^2} + \dots + \frac{2^2}{2015^2}$$

$$D = 4 + 2 \cdot \left(\frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \dots + \frac{2}{2015^2} \right)$$

$$D < 4 + 2 \cdot \left(\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{2013.2015} \right)$$

$$= 4 + 2 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2015} \right)$$

$$= 4 + 2 \left(1 - \frac{1}{2015} \right) = 4 + 2 - \frac{2}{2015} < 6$$

Suy ra $D < 6$

Bài 42. Chứng minh $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{32} > 2$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} = \frac{4n-1}{4n^2-2n} > \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}; n \geq 2)$$

$$\text{Do đó: } \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{32} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{8} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2$$

Bài 43: Cho phân số: $P = \frac{6n+5}{3n+2} \quad (n \in \mathbb{N})$

a. Chứng minh rằng phân số P là phân số tối giản

b. Với giá trị nào của n thì phân số P có giá trị lớn nhất? tìm giá trị lớn nhất đó.

Trích đề HSG Quận Liên Chiểu năm 2018-2019

Lời giải

a. Gọi d là BC của $6n+5$ và $3n+2$

ta có: $6n+5 : d$ và $3n+2 : d$

$$3n+2 : d$$

$$2(3n+2) : d$$

hay $6n+4 : d$

$$6n+5 - (6n+4) : d$$

$$1 : d$$

$$d = 1$$

Vậy phân số $P = \frac{6n+5}{3n+2} \quad (n \in \mathbb{N})$ là phân số tối giản.

$$\text{b. Ta có } P = \frac{6n+5}{3n+2} = \frac{6n+4+1}{3n+2} = 2 + \frac{1}{3n+2}$$

P đạt giá trị lớn nhất khi $\frac{1}{3n+2}$ đạt giá trị lớn nhất, khi đó $3n+2$ đạt giá trị nhỏ nhất vì $3n+2 \geq 2$

nên $3n+2$ nhỏ nhất bằng 2 khi $3n=0$ hay $n=0$

Vậy với $n=0$ thì P đạt giá trị lớn nhất là $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Bài 44: Chứng tỏ rằng:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2} < \frac{3}{4}.$$

Trích đề HSG Quận Hải Châu năm 2016-2017

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3}$$

$$\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4}$$

$$\frac{1}{5^2} < \frac{1}{4.5}$$

.....

$$\frac{1}{99^2} < \frac{1}{98.99}$$

$$\frac{1}{100^2} < \frac{1}{99.100}$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{98.99} + \frac{1}{99.100}$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } & \frac{1}{4} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{98.99} + \frac{1}{99.100} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{100} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{100} < \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2} < \frac{3}{4}.$$

Bài 45: Cho tổng $T = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2016}{2^{2015}} + \frac{2017}{2^{2016}}$. So sánh T với 3

Trích đề HSG huyện Ý Yên năm 2018-2019

Lời giải

$$T = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2016}{2^{2015}} + \frac{2017}{2^{2016}}$$

$$2T = 2 + \frac{3}{2^1} + \frac{4}{2^2} + \dots + \frac{2016}{2^{2014}} + \frac{2017}{2^{2015}}$$

$$2T - T = 2 + \frac{3}{2^1} - \frac{2}{2^1} + \frac{4}{2^2} - \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{2016}{2^{2014}} - \frac{2015}{2^{2014}} + \frac{2017}{2^{2015}} - \frac{2016}{2^{2015}} - \frac{2017}{2^{2016}}$$

$$T = 2 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2015}} - \frac{2017}{2^{2016}}$$

$$\text{Đặt } N = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2015}}$$

$$\text{Ta có } 2N = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2014}}$$

$$2N - N = 1 - \frac{1}{2^{2015}}$$

$$\text{Vậy } N < 1$$

$$\text{Nên } T < 2 + 1 - \frac{2017}{2^{2016}} = 3 - \frac{2017}{2^{2016}}$$

$$\text{Vậy } T < 3.$$

Bài 46: Tìm giá trị nhỏ nhất của phân số $\frac{\overline{ab}}{a+b}$ (\overline{ab} là số có 2 chữ số).

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \frac{\overline{ab}}{a+b} = \frac{10a+b}{a+b} = 1 + \frac{9a}{a+b} = 1 + \frac{9}{1 + \frac{b}{a}}$$

A có GTNN khi $1 + \frac{b}{a}$ có GTLN hay $\frac{b}{a}$ có GTLN. Khi đó $b=9$ và $a=1$

Khi đó số $\overline{ab}=19$

GTNN của A là 1,9.

Bài 47: Cho biết $S = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{130}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{4} < S < \frac{91}{330}$

Trích đề HSG huyện Hưng Hà năm 2012-2013

Lời giải

* Chứng minh: $S < \frac{91}{330}$

$$S = \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{110} \right) + \left(\frac{1}{111} + \dots + \frac{1}{120} \right) + \left(\frac{1}{121} + \dots + \frac{1}{130} \right)$$

$$S < \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{100} \right) + \left(\frac{1}{110} + \dots + \frac{1}{110} \right) + \left(\frac{1}{120} + \dots + \frac{1}{120} \right)$$

$$S < \frac{1}{100} \cdot 10 + \frac{1}{110} \cdot 10 + \frac{1}{120} \cdot 10 = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}$$

$$S < \frac{66+60+55}{660}$$

$$S < \frac{181}{660} < \frac{182}{660} \text{ hay } S < \frac{91}{330} \quad (1)$$

* Chứng minh $\frac{1}{4} < S$

$$S > \left(\frac{1}{110} + \dots + \frac{1}{110} \right) + \left(\frac{1}{120} + \dots + \frac{1}{120} \right) + \left(\frac{1}{130} + \dots + \frac{1}{130} \right)$$

$$S > \frac{1}{110} \cdot 10 + \frac{1}{120} \cdot 10 + \frac{1}{130} \cdot 10 = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13}$$

$$S > \frac{156+143+132}{1716}$$

$$S > \frac{431}{1716} > \frac{429}{1716} \text{ Hay } S > \frac{1}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{1}{4} < S < \frac{91}{330}$.

Bài 48: Cho $S = \frac{5}{20} + \frac{5}{21} + \frac{5}{22} + \frac{5}{23} + \dots + \frac{5}{49}$. Chứng minh rằng: $3 < S < 8$.

Trích đề HSG huyện Hưng Hà năm 2015-2016

Lời giải

Xét tổng $S = \frac{5}{20} + \frac{5}{21} + \frac{5}{22} + \frac{5}{23} + \dots + \frac{5}{49}$ có 30 số hạng

$$\text{Mà } \frac{5}{20} > \frac{5}{50}; \frac{5}{21} > \frac{5}{50}; \frac{5}{22} > \frac{5}{50}; \dots; \frac{5}{49} > \frac{5}{50}$$

$$S > 30 \cdot \frac{5}{50} \Rightarrow S > 3 \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } \frac{5}{20} = \frac{5}{20}; \frac{5}{21} < \frac{5}{20}; \frac{5}{22} < \frac{5}{20}; \dots; \frac{5}{49} < \frac{5}{20}$$

$$S < 30 \cdot \frac{5}{20} = \frac{150}{20} \Rightarrow S < 8 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $3 < S < 8$.

Bài 49: Chứng minh rằng: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{1999}} > 1000$

Trích đề HSG huyện Hải Hậu năm 2015-2016

Lời giải

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{1999}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2^4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{1998} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{1999}}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \cdot 2 + \frac{1}{2^3} \cdot 2^2 + \frac{1}{2^4} \cdot 2^3 + \dots + \frac{1}{2^{1999}} \cdot 2^{1998} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot 1999 = 1000,5 > 1000 \quad (\text{ĐPCM}). \end{aligned}$$

Bài 50: Tìm GTNN của biểu thức $A = (2x+5)^4 + 3$.

Trích đề HSG huyện Mỹ Lộc năm 2015-2016

Lời giải

Với mọi x ta có $(2x+5)^4 \geq 0 \Rightarrow (2x+5)^4 + 3 \geq 3$, và $(2x+5)^4 = 0$ khi $2x+5=0$ hay $x = -\frac{5}{2}$.

Vậy GTNN của biểu thức $A = (2x+5)^4 + 3$ là 3 khi $x = -\frac{5}{2}$.

Bài 51: Tìm GTNN của biểu thức $C = (x-y)^{2020} + 4(y-3)^{30} - 25$.

Trích đề HSG huyện Mỹ Lộc năm 2015-2016

Lời giải

Với mọi $x; y$ ta có $(x-y)^{2020} \geq 0$, và $(x-y)^{2020} = 0$ khi $x-y=0$ hay $x=y$.

Với mọi y ta có $(y-3)^{30} \geq 0$ nên $4 \cdot (y-3)^{30} \geq 0$, và $(y-3)^{30} = 0$ khi $y-3=0$ hay $y=3$.

Do đó với mọi $x; y$ ta có: $(x-y)^{2020} + 4(y-3)^{30} \geq 0$ nên $(x-y)^{2020} + 4(y-3)^{30} - 25 \geq -25$ hay $B \geq -25$.

Ta có $B = -25$ khi xảy ra đồng thời $x=y$ và $y=3$ hay $x=y=3$

Vậy GTNN của biểu thức $C = (x-y)^{2020} + 4(y-3)^{30} - 25$ là -25 khi $x=y=3$.

Bài 52: Tìm GTLN của biểu thức $B = -2(x-1)^4 - (y+2)^6 - 3$.

Trích đề HSG huyện Thạch Thất năm 2015-2016

Lời giải

Ta có: $B = -2(x-1)^4 - (y+2)^6 - 3 = -3 - [2(x-1)^4 + (y+2)^6]$

Với mọi x ta có $(x-1)^4 \geq 0 \Rightarrow 2(x-1)^4 \geq 0$, và $(x-1)^4 = 0$ khi $x-1=0$ hay $x=1$.

Với mọi y ta có $(y+2)^6 \geq 0$, và $(y+2)^6 = 0$ khi $y+2=0$ hay $y=-2$.

Do đó với mọi $x; y$ ta có:

$$2(x-1)^4 + (y+2)^6 \geq 0$$

$$-[2(x-1)^4 + (y+2)^6] \leq 0$$

$$-[2(x-1)^4 + (y+2)^6] - 3 \leq -3 \text{ hay } B \leq -3.$$

Vậy GTLN của biểu thức $B = -2(x-1)^4 - (y+2)^6 - 3$ là -3 khi $x=1$ và $y=-2$.

Bài 53: Tìm số nguyên n để $B = \frac{7n-5}{2n+1}$ có GTNN. Tìm GTNN đó.

Trích đề HSG huyện Hoa Lư năm 2017-2018

Lời giải

Ta có:
$$B = \frac{7n-5}{2n+1} = \frac{2 \cdot (7n-5)}{2 \cdot (2n+1)} = \frac{14n-10}{2 \cdot (2n+1)} = \frac{14n+7-17}{2 \cdot (2n+1)} = \frac{7(2n+1)-17}{2 \cdot (2n+1)}$$

$$= \frac{7}{2} - \frac{17}{2 \cdot (2n+1)} = \frac{7}{2} - \frac{17}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)}$$

Do đó biểu thức $B = \frac{7n-5}{2n+1}$ đạt GTNN khi $\frac{1}{2n+1}$ đạt GTLN.

Mặt khác, do tử là $1 > 0$ nên $\frac{1}{2n+1}$ đạt GTLN khi $2n+1 > 0$ và có GTNN ứng với $n \in \mathbf{Z}$.

Xét $2n+1 > 0$ thì $2n > -1$ hay $n > -\frac{1}{2}$

Do đó để $2n+1 > 0$ và có GTNN ứng với $n \in \mathbf{Z}$ thì n phải là số nguyên nhỏ nhất thỏa mãn $n > -\frac{1}{2}$

Từ đó ta suy ra $n=0$ và GTNN của $B = \frac{7n-5}{2n+1}$ là $\frac{7 \cdot 0 - 5}{2 \cdot 0 + 1} = -5$.

Bài 54: Cho $A = \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{2021}$, $B = 20$. So sánh A và B .

Lời giải

Ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{100} = \frac{1}{100} \\ \frac{1}{101} < \frac{1}{100} \\ \frac{1}{102} < \frac{1}{100} \\ \dots \\ \frac{1}{2021} < \frac{1}{100} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{2021}}_{1922} < \underbrace{\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{100}}_{1922}$$

$$\Rightarrow A < 1922 \cdot \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1922}{100} < \frac{2000}{100} = 20$$

$$\Rightarrow A < B$$

Vậy $A < B$.

Bài 55: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} < 1$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{10^2 - 9^2}{9^2 \cdot 10^2} = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2}\right)$$

$$A = 1 - \frac{1}{10^2} < 1$$

Bài 56: Chứng tỏ rằng: $B = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \dots - \frac{1}{2021^2} > \frac{1}{2021}$

Lời giải

$$B = 1 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2021^2}\right),$$

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2021^2} \text{ ta có:}$$

$$A < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2021} < 1 - \frac{1}{2021}$$

$$\Rightarrow -A > -1 + \frac{1}{2021}$$

$$B > 1 - A = 1 - 1 + \frac{1}{2021}$$

$$\Rightarrow B > \frac{1}{2021}$$

Bài 57: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

.....

$$\frac{1}{100^2} < \frac{1}{99 \cdot 100} = \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$\text{Nên } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} < 1$$

Bài 58: Chứng minh rằng: $\frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{4}$

Lời giải

Ta có

$$A = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$$

$$A = \frac{1}{(2.2)^2} + \frac{1}{(2.3)^2} + \frac{1}{(2.4)^2} + \dots + \frac{1}{(2.n)^2}$$

$$A = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{4} \text{ (ĐPCM)}$$

Bài 59: Cho $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$

Chứng minh $A < \frac{3}{4}$

Lời giải

Ta có: $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$

$$A = \frac{1}{\frac{(1+3).2}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+5).3}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+7).4}{2}} + \dots + \frac{1}{\frac{(1+2017).1009}{2}}$$

$$A = \frac{2}{2.4} + \frac{2}{3.6} + \frac{2}{4.8} + \dots + \frac{2}{1009.2018}$$

$$A = \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{1009.1009}$$

$$A < \frac{1}{2.2} + \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{1008.1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1008} - \frac{1}{1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$A < \frac{3}{4}$$

Bài 60: Cho $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2}$. Chứng minh rằng: $A < 2$

Lời giải

Chứng minh: $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2} < 2$

Ta có: $\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots\dots$$

$$\frac{1}{50^2} < \frac{1}{49} - \frac{1}{50}$$

Vậy: $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots +$
 $= 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50}$
 $= 1 + 1 - \frac{1}{50} = \frac{99}{50} < 2$

Bài 61: Chứng minh rằng: $\frac{1}{100} + \frac{1}{1001} + \dots + \frac{1}{2000} > \frac{1}{2}$

Lời giải

Ta có $\frac{1}{100} + \frac{1}{1001} + \dots + \frac{1}{2000} > \frac{1}{2000} \cdot 1000 = \frac{1}{2}$

Suy ra $\frac{1}{100} + \frac{1}{1001} + \dots + \frac{1}{2000} > \frac{1}{2}$

Bài 62: Cho tổng: $S = \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{60}$. Chứng minh: $\frac{3}{5} < S < \frac{4}{5}$.

Lời giải

Ta có:

Ta có: $S = \left(\frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{40}\right) + \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{50}\right) + \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{60}\right)$

$$\Rightarrow S < \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40}\right) + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \dots + \frac{1}{50}\right)$$

hay $S < \frac{10}{30} + \frac{10}{40} + \frac{10}{50}$ tức là: $S < \frac{47}{60} < \frac{48}{60}$ Vậy $S < \frac{4}{5}$ (1)

Mặt khác: $S > \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40}\right) + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \dots + \frac{1}{50}\right) + \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60}\right)$

$$\Rightarrow S > \frac{10}{40} + \frac{10}{50} + \frac{10}{60} \text{ tức là: } S > \frac{37}{60} > \frac{36}{60} \text{ Vậy } S > \frac{3}{5} \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Bài 63: Cho \overline{abc} là số tự nhiên có ba chữ số

Tìm giá trị lớn nhất của $A = \frac{\overline{abc}}{a+b+c} + 1918$

Lời giải

$$A = \frac{\overline{abc}}{a+b+c} + 1918 = \frac{100a+10b+c}{a+b+c} + 1918$$

Nếu $b=c=0$ thì $A = 100 + 1918 = 2018$

Nếu b hoặc c khác 0 thì $A < \frac{100a + 100b + 100c}{a + b + c} + 1918 = 100 + 1918 = 2018 \Rightarrow A \leq 2018$

Giá trị lớn nhất của A là 2018 khi $a \in \{1; 2; \dots; 9\}; b = c = 0$

Bài 64: Cho phân số: $A = \frac{n+10}{2n} (n \in \mathbb{N}^*)$

Tìm n để A đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

Ta có A đạt GTNN khi $\frac{5}{n}$ lớn nhất. Với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $\frac{5}{n}$ lớn nhất khi $n_{\min} \Rightarrow n = 1$

Lúc đó $A_{\max} = \frac{1}{2} + 5 = 5,5$

Vậy với $n = 1$ thì $A_{\max} = 5,5$

Bài 65: Tìm GTLN của biểu thức $Q = 9 - (x + 2019)^2$

Lời giải

$$-(x + 2019)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow 9 - (x + 2019)^2 \leq 9$$

$$\Rightarrow Q \leq 9$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = -2019$

Giá trị lớn nhất của Q là 9.

Bài 66: Cho $M = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{101}}$. Chứng tỏ $M < 1$

Lời giải:

$$\text{Ta có } M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{100}}$$

$$M = 2M - M = 1 - \frac{1}{2^{101}}$$

$$\text{Mà } M = 1 - \frac{1}{2^{101}} < 1 \Rightarrow M < 1$$

Bài 67: Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{100} - 1}$. Chứng minh $50 < A < 100$.

Lời giải:

$$A = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{99}+1} + \dots + \frac{1}{2^{100}-1}\right)$$

Có 99 nhóm trong tổng của A

$$A < 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{99}} + \dots + \frac{1}{2^{99}}\right)$$

$$A < 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 100$$

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99}+1} + \frac{1}{2^{100}+2} + \dots + \frac{1}{2^{100}-1} + \frac{1}{2^{100}}\right) - \frac{1}{2^{100}}$$

Có 99 nhóm trong tổng của A

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{100}} + \dots + \frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{100}}\right) - \frac{1}{2^{100}}$$

$$A > 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{100 \text{ số hạng}} - \frac{1}{2^{100}} = 1 + 50 - \frac{1}{2^{100}} > 50$$

Bài 68: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} < \frac{1}{3}$.

Lời giải:

Đưa về dạng tổng $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n$ để tính tổng rồi so sánh.

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6}$$

$$2A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5}$$

$$2A + A = 3A = 1 - \frac{1}{2^6} = \frac{2^6 - 1}{2^6} < 1$$

$$\Rightarrow 3A < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{3}$$

Bài 69: Cho $B = \frac{4}{3} + \frac{10}{9} + \frac{28}{27} + \dots + \frac{3^{98} + 1}{3^{98}}$. Chứng minh $B < 100$.

Lời giải:

$$B = \frac{4}{3} + \frac{10}{9} + \frac{28}{27} + \dots + \frac{3^{98} + 1}{3^{98}} = \frac{4}{3} + \frac{10}{3^2} + \frac{28}{3^3} + \dots + \frac{3^{98} + 1}{3^{98}}$$

$$\Rightarrow B - 98 = \frac{4}{3} - 1 + \frac{10}{3^2} - 1 + \frac{28}{3^3} - 1 + \dots + \frac{3^{98} + 1}{3^{98}} - 1 = \frac{4}{3} + \frac{10}{9} + \frac{28}{27} + \dots + \frac{3^{98} + 1}{3^{98}}$$

$$B - 98 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}}$$

$$3(B - 98) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{97}}$$

$$3(B - 98) - (B - 98) = 1 - \frac{1}{98}$$

$$\Rightarrow 2(B - 98) = \frac{97}{98} \Rightarrow B - 98 = \frac{97}{196} \Rightarrow B = 98 + \frac{97}{196} < 100$$

Bài 70: Cho biểu thức $A = \frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \dots - \frac{2022}{5^{2022}}$. So sánh A và $\frac{5}{36}$.

Trích đề HSG huyện năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \dots - \frac{2022}{5^{2022}} \\ \Rightarrow 5A &= 1 - \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} - \frac{4}{5^3} + \dots - \frac{2022}{5^{2021}} \\ \Rightarrow 6A &= 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \dots - \frac{1}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}} \\ \Rightarrow 30A &= 5 - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \dots - \frac{1}{5^{2020}} - \frac{2022}{5^{2021}} \\ \text{Do đó: } 30A + 6A &= 5 - \frac{2023}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}} \end{aligned}$$

Bài 71: Cho $S = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200}$. Chứng minh rằng: $S > \frac{13}{21}$.

Trích đề HSG huyện năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{125} &> \frac{1}{125} + \frac{1}{125} + \dots + \frac{1}{125} = \frac{25}{125} = \frac{1}{5} \\ \frac{1}{126} + \frac{1}{127} + \frac{1}{128} + \dots + \frac{1}{150} &> \frac{1}{150} + \frac{1}{150} + \frac{1}{150} + \dots + \frac{1}{150} = \frac{25}{150} = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{151} + \frac{1}{152} + \frac{1}{153} + \dots + \frac{1}{175} &> \frac{1}{175} + \frac{1}{175} + \dots + \frac{1}{175} = \frac{25}{175} = \frac{1}{7} \\ \frac{1}{176} + \frac{1}{177} + \frac{1}{178} + \dots + \frac{1}{200} &> \frac{1}{200} + \frac{1}{200} + \frac{1}{200} + \dots + \frac{1}{200} = \frac{25}{200} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } S > \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

$$\text{Mà } \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) = \frac{13}{40} + \frac{13}{42} > \frac{13}{42} + \frac{13}{42} = \frac{13}{21}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} > \frac{13}{21}$$

Bài 72: Tìm số tự nhiên n để phân số $M = \frac{6n-3}{4n-6}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

$$\text{Ta có: } M = \frac{6n-3}{4n-6} = \frac{3}{2} + \frac{6}{4n-6}$$

Vì $\frac{6}{4n-6}$ có tử $6 > 0$ nên để M đạt giá trị lớn nhất khi $4n-6$ đạt giá trị dương nhỏ nhất với n

là số tự nhiên

$$\text{Do đó } 4n-6 = 2 \Rightarrow 4n = 8 \Rightarrow n = 2.$$

$$\text{Khi đó } M = \frac{3}{2} + \frac{6}{2} = \frac{9}{2}$$

Vậy GTLN của M là 4,5 khi $n = 2$.

Bài 73: Với mọi số tự nhiên $n \geq 1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$.

Trích đề HSG huyện Giao Thủy, năm 2013- 2014

Lời giải

Ta có

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \times 2} = 1 - \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \dots; \quad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n} < 1$.

Bài 74: Cho phân số $A = \frac{n-1}{n-3}$ ($n \in \mathbf{Z}, n \neq 3$)

- a) Tìm số nguyên n sao cho phân số $A = \frac{5}{3}$
 b) Tìm số nguyên n để A đạt giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó?

Trích đề HSG huyện Nghi Lộc, năm 2020-2021

Lời giải

a) Ta có: $A = \frac{5}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{n-1}{n-3} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow n = 6$$

b) Ta có: $A = \frac{n-1}{n-3} = 1 + \frac{2}{n-3}$

Để A đạt giá trị lớn nhất thì $n-3$ nhỏ nhất

$$\Rightarrow n-3 = 1$$

$$\Rightarrow n = 4$$

Bài 75: So sánh: $E = \frac{2018^{99} - 1}{2018^{100} - 1}$ và $F = \frac{2018^{98} - 1}{2018^{99} - 1}$.

Trích đề HSG huyện Kinh Môn năm 2017-2018

Lời giải

Ta có: $E = \frac{2018^{99} - 1}{2018^{100} - 1}$

Suy ra $2018 \cdot E = \frac{2018^{100} - 2018}{2018^{100} - 1}$

Suy ra $2018 \cdot E = 1 - \frac{2017}{2018^{100} - 1}$

$$F = \frac{2018^{98} - 1}{2018^{99} - 1}$$

Suy ra $2018 \cdot F = \frac{2018^{99} - 2018}{2018^{99} - 1}$

Suy ra $2018 \cdot F = 1 - \frac{2017}{2018^{99} - 1}$

Vì $\frac{2017}{2018^{100} - 1} < \frac{2017}{2018^{99} - 1}$ suy ra $1 - \frac{2017}{2018^{100} - 1} > 1 - \frac{2017}{2018^{99} - 1}$

Hay $2018 \cdot E > 2018 \cdot F$

Vậy $E > F$.

Bài 76: So sánh: $A = \frac{2012^{2012} + 1}{2012^{2013} + 1}$ và $B = \frac{2012^{2011} + 1}{2012^{2012} + 1}$.

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018 -2019**Lời giải**

Vì $2012^{2012} + 1 < 2012^{2013} + 1$ suy ra $\frac{2012^{2012} + 1}{2012^{2013} + 1} < 1$.

$$\frac{2012^{2012} + 1}{2012^{2013} + 1} < \frac{2012^{2012} + 1 + 2011}{2012^{2013} + 1 + 2011} = \frac{2012^{2012} + 2012}{2012^{2013} + 2012} = \frac{2012 \cdot (2012^{2011} + 1)}{2012 \cdot (2012^{2012} + 1)} = \frac{2012^{2011} + 1}{2012^{2012} + 1} = B$$

Vậy $A < B$.

Bài 77: Cho $A = \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \frac{1}{33} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60}$. Chứng tỏ rằng: $A < \frac{4}{5}$.

Trích đề HSG huyện Ba Vì năm 2017 -2018**Lời giải**

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{40} \right) + \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{50} \right) + \left(\frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{60} \right) \\ &< \left(\frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{30} \right) + \left(\frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40} \right) + \left(\frac{1}{50} + \dots + \frac{1}{50} \right) = \frac{10}{30} + \frac{10}{40} + \frac{10}{50} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} < \frac{48}{60} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Vậy $A < \frac{4}{5}$

Bài 78: Cho tổng gồm 2014 số hạng, $S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2014}{4^{2014}}$. Chứng minh $S < \frac{1}{2}$.

Trích đề HSG huyện hương Sơn năm 2018 -2019**Lời giải**

Ta có: $4S = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \dots + \frac{2014}{4^{2013}}$.

Suy ra: $3S = 4S - S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2013}} - \frac{2014}{4^{2014}}$

Suy ra: $3S < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2013}}$.

Đặt $M = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2013}}$.

Suy ra: $4M = 4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2012}}$

Ta có: $3M = 4M - M = 4 - \frac{1}{4^{2013}} < 4$ suy ra $M < \frac{4}{3}$.

Do đó $3S < \frac{4}{3}$ suy ra $S < \frac{4}{9} < \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Vậy $S < \frac{1}{2}$.

Bài 79: Chứng minh rằng: $\frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{4}$.

Trích đề HSG huyện Buôn Mê Thuật năm 2018 -2019**Lời giải**

Ta có:

$$A = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$$

$$A = \frac{1}{(2.2)^2} + \frac{1}{(2.3)^2} + \frac{1}{(2.4)^2} + \dots + \frac{1}{(2.n)^2}$$

$$A = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{4} \quad (\text{đpcm})$$

Bài 80: Tìm giá trị nhỏ nhất của phân số $\frac{\overline{ab}}{a+b}$ (\overline{ab} là số có 2 chữ số).

Trích đề HSG huyện Tam Hưng năm 2018 - 2019

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \frac{\overline{ab}}{a+b} = \frac{10a+b}{a+b} = 1 + \frac{9a}{a+b} = 1 + \frac{9}{1 + \frac{b}{a}}$$

A có GTNN khi và chỉ khi $1 + \frac{b}{a}$ có GTLN khi và chỉ khi $\frac{b}{a}$ có GTLN khi và chỉ khi $a=1$ và $b=9$.

$$\text{Khi đó số } \overline{ab} = 19. \text{ GTNN của } A \text{ là } A = \frac{\overline{ab}}{a+b} = \frac{19}{1+9} = 1,9.$$

Bài 81: Cho \overline{abc} là số tự nhiên có ba chữ số. Tìm giá trị lớn nhất của $A = \frac{\overline{abc}}{a+b+c} + 1918$.

Trích đề HSG huyện Kinh Môn năm 2017 - 2018

Lời giải

$$A = \frac{\overline{abc}}{a+b+c} + 1918 = \frac{100a+10b+c}{a+b+c} + 1918.$$

+) Nếu $b=c=0$ thì $A = 100 + 1918 = 2018$.

+) Nếu b hoặc c khác 0 thì $A < \frac{100a+100b+100c}{a+b+c} + 1918 = 100 + 1918 = 2018$.

Nên $A \leq 2018$

Giá trị lớn nhất của A là 2018 khi $a \in \{1; 2; \dots; 9\}; b=c=0$.

Bài 82: Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{11}{17} < \frac{a}{b} < \frac{23}{29} \text{ và } 8b - 9a = 31.$$

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017 - 2018

Lời giải

Ta có: $8b - 9a = 31$ suy ra $b = \frac{31+9a}{8} = \frac{32-1+8a+a}{8} \in \square$ suy ra $(a-1):8$

Suy ra $a = 8q + 1$ ($q \in \square$)

$$b = \frac{31+9(8q+1)}{8} = 9q+5 \text{ suy ra } \frac{11}{17} < \frac{8q+1}{9q+5} < \frac{23}{29}$$

$11(9q+5) < 17(8q+1)$ suy ra $37q > 38$ suy ra $q > 1$.

$29(8q+1) < 23(9q+5)$ suy ra $25q < 86$ suy ra $q < 4$ suy ra $q \in \{2; 3\}$.

Với $q=2$ thì $a = 8q+1 = 8.2+1 = 17$; $b = 9q+5 = 9.2+5 = 23$.

Với $q = 3$ thì $a = 8q + 1 = 8.3 + 1 = 25$; $b = 9q + 5 = 9.3 + 5 = 32$.

Bài 83: Cho $M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \dots + \frac{1}{13.16}$. So sánh M với $\frac{1}{3}$

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2022 - 2023

Lời giải

Ta có:

$$M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \frac{1}{13.16}$$

$$M = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{16} \right)$$

$$M = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{16} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{16} = \frac{15}{48}$$

$$\text{Lại có: } \frac{1}{3} = \frac{16}{48}$$

$$\text{Vì } 16 > 15 \text{ do đó } \frac{16}{48} > \frac{15}{48} \text{ hay } M < \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } M < \frac{1}{3}$$

Bài 84: Cho $P = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^{200}}\right)$ so sánh P với 3

Trích đề HSG huyện Lạng Chánh năm 2022-2023

Lời giải

Ta có: $2^n > 2^n - 2$ ($n \in \mathbb{N}$)

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^n - 2} \Rightarrow 1 + \frac{1}{2^n} < 1 + \frac{1}{2^n - 2}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2^n} < \frac{2^n - 1}{2(2^{n-1} - 1)}$$

Áp dụng vào P ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^{200}}\right) < \frac{3}{2} \cdot \frac{2^2 - 1}{2(2 - 1)} \cdot \frac{2^3 - 1}{2(2^2 - 1)} \cdot \frac{2^4 - 1}{2(2^3 - 1)} \dots \frac{2^{100} - 1}{2(2^{99} - 1)} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{2^{100} - 1}{2^{99}} = 3 \cdot \frac{2^{100} - 1}{2^{100}} = 3 - \frac{3}{2^{100}} < 3 \text{ (dpcm)} \end{aligned}$$

PHIẾU BÀI TẬP SỐ 2

Bài 1: Tính tổng $S = \frac{6}{2.5} + \frac{6}{5.8} + \frac{6}{8.11} + \dots + \frac{6}{29.32}$ và chứng tỏ $S < 1$.

Trích đề HSG trường THCS Phan Đình Phùng năm 2018-2019

Bài 2: Cho biểu thức $B = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$. Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{6} < B < \frac{1}{4}$.

Trích đề HSG huyện Giao Thủy (Nam Định) năm 2018-2019

Bài 3: Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh: $2 < \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < 3$.

Bài 4: Cho $a, b, c > 0$ và tổng hai số luôn lớn hơn số còn lại. Chứng minh: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$.

Bài 5: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ có giá trị không nguyên.

Bài 6: Chứng minh: $A = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdots \frac{208}{210} < \frac{1}{25}$.

Bài 7: Chứng minh: $A = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n^2} > 1$.

Lời giải

$A = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$ có $n^2 - (n+1) + 1 = n^2 - n$ số hạng.

$$A > \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{n^2 - n}{n^2} = \frac{1}{n} + 1 - \frac{n}{n^2} = 1$$

Vậy $A > 1$.

Bài 8: Chứng minh: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2016}} < 2016$.

Bài 9: Chứng minh: $50 < A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{100} - 1} < 100$,

Bài 10: Chứng minh: $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{64} > 4$.

Bài 11: Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} < \frac{1}{3}$.

b) $\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{16}$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2017-2018

Bài 12: Chứng tỏ rằng $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 13: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = (2x+1)^4 - 3$.

Bài 14: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 2021 + (x-2020)^{2022}$.

Bài 15: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = -(x-2021)^{2020} - 1$.

Bài 16: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = -4 \cdot (x-5)^6 - 7$.

Bài 17: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = (x+1)^2 + (y+3)^2 + 1$.

Bài 18: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = (x-1)^2 + (y+5)^2 + 1$.

Bài 19: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{3}{(x-2)^2 + 5}$.

Bài 20: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{8}{(x-1)^2 + 4}$.

Bài 21: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2020^2} < 1$

Bài 22: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{3}{4}$

Bài 23: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{2}$

Bài 24: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{100}{2^{100}} < 2$

Bài 25: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$

Bài 26: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$

Bài 27: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{4}$

Bài 28: So sánh $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$ với $\frac{1}{2}$

Bài 29: Chứng minh rằng với số tự nhiên $n > 2$ thì $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ không là số tự nhiên

Bài 30: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2021^2} < \frac{2020}{2021}$

Bài 31: Cho $M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \dots + \frac{1}{13.16}$. So sánh M với $\frac{1}{3}$

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2022 - 2023

Bài 32: Cho $A = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{70}$ Chứng minh rằng: $\frac{4}{3} < A < \frac{5}{2}$

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Bài 33: Cho $A = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{98} + 4^{99}$, $B = 4^{100}$. Chứng minh rằng: $A < \frac{B}{3}$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 34: Tính tổng $S = \frac{6}{2.5} + \frac{6}{5.8} + \frac{6}{8.11} + \dots + \frac{6}{29.32}$ và chứng tỏ $S < 1$

Trích đề HSG THCS Phan Đình Phùng năm 2018-2019

Bài 35: Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} < \frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{16}$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 36. Chứng tỏ rằng $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$

Bài 37. Cho biết $S = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{130}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{4} < S < \frac{91}{330}$

Bài 38. Cho $A = \frac{3}{2^2} + \frac{8}{3^2} + \frac{15}{4^2} + \dots + \frac{2023^2 - 1}{2023^2}$. Chứng minh rằng giá trị của A không phải là một tự nhiên.

Bài 39. Cho tổng $T = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2016}{2^{2015}} + \frac{2017}{2^{2016}}$ So sánh T với 3

Bài 40. Cho $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$. Chứng minh $A < \frac{3}{4}$

Bài 41. Cho biểu thức $D = \frac{(2!)^2}{1^2} + \frac{(2!)^2}{3^2} + \frac{(2!)^2}{5^2} + \frac{(2!)^2}{7^2} + \dots + \frac{(2!)^2}{2015^2}$

So sánh D với 6. Biết $n! = 1.2.3...n$ (n là số tự nhiên khác 0)

Bài 42: Chứng minh $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{32} > 2$

Bài 43: Cho phân số: $P = \frac{6n+5}{3n+2}$ ($n \in \mathbb{N}$)

a. Chứng minh rằng phân số P là phân số tối giản

b. Với giá trị nào của n thì phân số P có giá trị lớn nhất? tìm giá trị lớn nhất đó.

Trích đề HSG Quận Liên Chiểu năm 2018-2019

Bài 44: Chứng tỏ rằng:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2} < \frac{3}{4}$$

Trích đề HSG Quận Hải Châu năm 2016-2017

Bài 45: Cho tổng $T = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2016}{2^{2015}} + \frac{2017}{2^{2016}}$. So sánh T với 3

Trích đề HSG huyện Ý Yên năm 2018-2019

Bài 46: Tìm giá trị nhỏ nhất của phân số $\frac{\overline{ab}}{a+b}$ (\overline{ab} là số có 2 chữ số).

Trích đề HSG huyện Vụ Bản năm 2017-2018

Bài 47: Cho biết $S = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{130}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{4} < S < \frac{91}{330}$

Trích đề HSG huyện Hưng Hà năm 2012-2013

Bài 48: Cho $S = \frac{5}{20} + \frac{5}{21} + \frac{5}{22} + \frac{5}{23} + \dots + \frac{5}{49}$. Chứng minh rằng: $3 < S < 8$.

Trích đề HSG huyện Hưng Hà năm 2015-2016

Bài 49: Chứng minh rằng: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{1999}} > 1000$

Trích đề HSG huyện Hải Hậu năm 2015-2016

Bài 50: Tìm GTNN của biểu thức $A = (2x+5)^4 + 3$.

Trích đề HSG huyện Mỹ Lộc năm 2015-2016

Bài 51: Tìm GTNN của biểu thức $C = (x-y)^{2020} + 4(y-3)^{30} - 25$.

Trích đề HSG huyện Mỹ Lộc năm 2015-2016

Bài 52: Tìm GTLN của biểu thức $B = -2(x-1)^4 - (y+2)^6 - 3$.

Trích đề HSG huyện Thạch Thất năm 2015-2016

Bài 53: Tìm số nguyên n để $B = \frac{7n-5}{2n+1}$ có GTNN. Tìm GTNN đó.

Trích đề HSG huyện Hoa Lư năm 2017-2018

Bài 54: Cho $A = \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{2021}$, $B = 20$. So sánh A và B .

Bài 55: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} < 1$

Bài 56: Chứng tỏ rằng: $B = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \dots - \frac{1}{2021^2} > \frac{1}{2021}$

Bài 57: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

Bài 58: Chứng minh rằng: $\frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{4}$

Bài 59: Cho $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$

Chứng minh $A < \frac{3}{4}$

Bài 60: Cho $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2}$. Chứng minh rằng: $A < 2$

Bài 61: Chứng minh rằng: $\frac{1}{100} + \frac{1}{1001} + \dots + \frac{1}{2000} > \frac{1}{2}$

Bài 62: Cho tổng: $S = \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{60}$. Chứng minh: $\frac{3}{5} < S < \frac{4}{5}$.

Bài 63: Cho \overline{abc} là số tự nhiên có ba chữ số

Tìm giá trị lớn nhất của $A = \frac{\overline{abc}}{a+b+c} + 1918$

Bài 64: Cho phân số: $A = \frac{n+10}{2n} (n \in \mathbb{N}^*)$

Tìm n để A đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Bài 65: Tìm GTLN của biểu thức $Q = 9 - (x + 2019)^2$

Bài 66: Cho $M = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{101}}$. Chứng tỏ $M < 1$

Bài 67: Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{100}-1}$. Chứng minh $50 < A < 100$.

Bài 68: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} < \frac{1}{3}$.

Bài 69: Cho $B = \frac{4}{3} + \frac{10}{9} + \frac{28}{27} + \dots + \frac{3^{98}+1}{3^{98}}$. Chứng minh $B < 100$.

Bài 70: Cho biểu thức $A = \frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \dots - \frac{2022}{5^{2022}}$. So sánh A và $\frac{5}{36}$.

Trích đề HSG huyện năm 2021 - 2022

Bài 71: Cho $S = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200}$. Chứng minh rằng: $S > \frac{13}{21}$.

Trích đề HSG huyện năm 2021 - 2022

Bài 72: Tìm số tự nhiên n để phân số $M = \frac{6n-3}{4n-6}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Bài 73: Với mọi số tự nhiên $n \geq 1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$.

Trích đề HSG huyện Giao Thủy, năm 2013- 2014

Bài 74: Cho phân số $A = \frac{n-1}{n-3} (n \in \mathbb{Z}, n \neq 3)$

a) Tìm số nguyên n sao cho phân số $A = \frac{5}{3}$

b) Tìm số nguyên n để A đạt giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó?

Trích đề HSG huyện Nghi Lộc, năm 2020-2021

Bài 75: So sánh: $E = \frac{2018^{99} - 1}{2018^{100} - 1}$ và $F = \frac{2018^{98} - 1}{2018^{99} - 1}$.

Trích đề HSG huyện Kinh Môn năm 2017-2018

Bài 76: So sánh: $A = \frac{2012^{2012} + 1}{2012^{2013} + 1}$ và $B = \frac{2012^{2011} + 1}{2012^{2012} + 1}$.

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Bài 77: Cho $A = \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \frac{1}{33} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60}$. Chứng tỏ rằng: $A < \frac{4}{5}$.

Trích đề HSG huyện Ba Vì năm 2017-2018

Bài 78: Cho tổng gồm 2014 số hạng, $S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2014}{4^{2014}}$. Chứng minh $S < \frac{1}{2}$.

Trích đề HSG huyện hương Sơn năm 2018-2019

Bài 79: Chứng minh rằng: $\frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{4}$.

Trích đề HSG huyện Buôn Mê Thuật năm 2018-2019

Bài 80: Tìm giá trị nhỏ nhất của phân số $\frac{\overline{ab}}{a+b}$ (\overline{ab} là số có 2 chữ số).

Trích đề HSG huyện Tam Hưng năm 2018-2019

Bài 81: Cho \overline{abc} là số tự nhiên có ba chữ số. Tìm giá trị lớn nhất của $A = \frac{\overline{abc}}{a+b+c} + 1918$.

Trích đề HSG huyện Kinh Môn năm 2017-2018

Bài 82: Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{11}{17} < \frac{a}{b} < \frac{23}{29} \text{ và } 8b - 9a = 31.$$

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Bài 83: Cho $M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \dots + \frac{1}{13.16}$. So sánh M với $\frac{1}{3}$

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2022-2023

Bài 84: Cho $P = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^{200}}\right)$ so sánh P với 3

Trích đề HSG huyện Lang Chánh năm 2022-2023

**CHỦ ĐỀ: BẤT ĐẲNG THỨC****A. PHẦN NỘI DUNG****Dạng 1: So sánh hai số, so sánh một biểu thức với một số**

Bài 1: Cho $M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \dots + \frac{1}{13.16}$. So sánh M với $\frac{1}{3}$

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2022 - 2023

Lời giải

Ta có:

$$M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \frac{1}{13.16}$$

$$M = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{16} \right)$$

$$M = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{16} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{16} = \frac{15}{48}$$

Lại có: $\frac{1}{3} = \frac{16}{48}$

Vì $16 > 15$ do đó $\frac{16}{48} > \frac{15}{48}$ hay $M < \frac{1}{3}$

Vậy $M < \frac{1}{3}$

Bài 2: $M = \frac{1}{1.4} + \frac{2}{4.10} + \frac{3}{10.19} + \frac{4}{19.31}$ và $N = \frac{2}{1.5} + \frac{3}{5.11} + \frac{4}{11.19} + \frac{5}{19.29} + \frac{6}{29.41}$

So sánh M và N .

Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có:

$$M = \frac{1}{1.4} + \frac{2}{4.10} + \frac{3}{10.19} + \frac{4}{19.31}$$

$$\Rightarrow 3M = \frac{3}{1.4} + \frac{6}{4.10} + \frac{9}{10.19} + \frac{12}{19.31} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{19} + \frac{1}{19} - \frac{1}{31} = 1 - \frac{1}{31} = \frac{30}{31}$$

$$\Rightarrow M = \frac{10}{31} = \frac{20}{62}$$

$$N = \frac{2}{1.5} + \frac{3}{5.11} + \frac{4}{11.19} + \frac{5}{19.29} + \frac{6}{29.41}$$

$$\Rightarrow 2N = \frac{4}{1.5} + \frac{6}{5.11} + \frac{8}{11.19} + \frac{10}{19.29} + \frac{12}{29.41} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{19} + \frac{1}{19} - \frac{1}{29} + \frac{1}{29} - \frac{1}{41}$$

$$\Rightarrow 2N = 1 - \frac{1}{41} = \frac{40}{41}$$

$$\Rightarrow N = \frac{20}{41}$$

Vì $\frac{20}{62} < \frac{20}{41}$ nên $M < N$

Vậy $M < N$



Bài 3: So sánh tổng $S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots + \frac{2007}{2^{2007}}$ với 2. ($n \in \mathbb{N}^*$)

Trích đề HSG cấp huyện 2016-2017

Lời giải

Với mọi $n \geq 2$, ta có: $\frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n+2}{2^n}$. Từ đó ta có:

$$S = \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{2^2}\right) + \left(\frac{4}{2^2} - \frac{5}{2^3}\right) + \dots + \left(\frac{2008}{2^{2006}} - \frac{2009}{2^{2007}}\right) = 2 - \frac{2009}{2^{2007}} < 2. \text{ Vậy } S < 2$$

Bài 4: Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2001} + 2^{2002}; B = 2^{2003}$

So sánh A và B

Trích đề HSG huyện năm 2019 - 2020

Lời giải

$$\text{Có } 2A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2002} + 2^{2003} \Rightarrow 2A - A = 2^{2003} - 1$$

$$\Rightarrow A = B - 1 \Rightarrow A < B$$

Bài 5: Cho $M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \dots + \frac{1}{13.16}$. So sánh M với $\frac{1}{3}$

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2022 - 2023

Lời giải

$$\text{Ta có: } M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \frac{1}{13.16}$$

$$M = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{16} \right)$$

$$M = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{16} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{16} = \frac{15}{48}$$

$$\text{Lại có: } \frac{1}{3} = \frac{16}{48}$$

$$\text{Vì } 16 > 15 \text{ do đó } \frac{16}{48} > \frac{15}{48} \text{ hay } M < \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } M < \frac{1}{3}$$

Bài 6: Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{100}-1}$. Chứng tỏ rằng: $50 < A < 100$

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021-2022

Lời giải



$$A = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{90}} + \frac{1}{2^{93}+1} + \dots + \frac{1}{2^{100}-1}\right)$$

$$< 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{90}} + \frac{1}{2^{99}} + \dots + \frac{1}{2^{99}}\right)$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + 2^{99} \cdot \frac{1}{2^{99}} = 1 + 1 + \dots + 1 \text{ (Có 100 số hạng 1)}$$

$$= 100$$

$$A < 100.$$

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2^4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{90}+1} + \frac{1}{2^{90}+2} + \dots + \frac{1}{2^{100}}\right) - \frac{1}{2^{100}}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{100}} \text{ (Có 100 số hạng } \frac{1}{2} \text{)}$$

$$= 100 \cdot \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^{100}}\right) > 50 \text{ (Vì } 1 - \frac{1}{2^{100}} > 0 \text{)}$$

$$A > 50.$$

$$\text{Vậy } 100 > A > 50.$$

Bài 7: Cho tổng : $S = \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{60}$. Chứng minh rằng : $\frac{3}{5} < S < \frac{4}{5}$.

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015 - 2016

Lời giải

$$\text{Ta có : } S = \left(\frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{40}\right) + \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{50}\right) + \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{60}\right)$$

$$S < \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40}\right) + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \dots + \frac{1}{50}\right)$$

$$\text{hay } S < \frac{10}{30} + \frac{10}{40} + \frac{10}{50}$$

$$\text{tức là: } S < \frac{47}{60} < \frac{48}{60} \text{ Vậy } S < \frac{4}{5} \text{ (1)}$$

$$\text{Mặt khác: } S > \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40}\right) + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \dots + \frac{1}{50}\right) + \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60}\right)$$

$$S > \frac{10}{40} + \frac{10}{50} + \frac{10}{60} \text{ tức là : } S > \frac{37}{60} > \frac{36}{60}$$

$$\text{Vậy } S > \frac{3}{5} \text{ (2).}$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra : } \frac{3}{5} < S < \frac{4}{5} \text{ đpcm.}$$

Bài 8: Cho $A = \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \dots + \frac{11}{5^{12}}$. Chứng minh rằng $A < \frac{1}{16}$.



Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \dots + \frac{11}{5^{12}}.$$

$$5A = \frac{1}{5^1} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{11}{5^{11}}.$$

$$5A - A = \frac{1}{5^1} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{11}{5^{11}} - \frac{1}{5^2} - \frac{2}{5^3} - \frac{3}{5^4} - \dots - \frac{11}{5^{12}}.$$

$$4A = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{11}} - \frac{11}{5^{12}}.$$

$$4A = B - \frac{11}{5^{12}}.$$

$$B = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{11}}$$

$$5B = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{10}}$$

$$5B - B = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{10}} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} - \dots - \frac{1}{5^{11}}$$

$$4B = 1 - \frac{1}{5^{11}} = \frac{5^{11} - 1}{5^{11}}$$

$$B = \frac{5^{11} - 1}{4 \cdot 5^{11}}$$

$$4A = B - \frac{11}{5^{12}} = \frac{5^{11} - 1}{4 \cdot 5^{11}} - \frac{11}{5^{12}} = \frac{5^{12} - 5 - 44}{4 \cdot 5^{12}} = \frac{5^{12} - 49}{4 \cdot 5^{12}}$$

$$A = \frac{5^{12} - 49}{4 \cdot 4 \cdot 5^{12}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{5^{12} - 49}{5^{12}} = \frac{1}{16} \cdot \left(1 - \frac{49}{5^{12}}\right) < \frac{1}{16}$$

$$\text{Vậy } A < \frac{1}{16}.$$

Bài 9: Cho $M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \dots + \frac{1}{13.16}$. So sánh M với $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có:

$$M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \frac{1}{13.16}$$

$$M = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{16} \right)$$

$$M = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{16} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{16} = \frac{15}{48}$$

$$\text{Lại có: } \frac{1}{3} = \frac{16}{48}$$



Vì $16 > 15$ do đó $\frac{16}{48} > \frac{15}{48}$ hay $M < \frac{1}{3}$.

Vậy $M < \frac{1}{3}$.

Bài 10: Cho $P = 1 + 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{72}$ và $Q = 2012^{73} - 1$.
So sánh P và Q .

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có: $2012.P = 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{72} + 2012^{73}$

Xét: $2012.P - P = 2012^{73} - 1$

$2011.P = 2012^{73} - 1$ mà $Q = 2012^{73} - 1$ nên $2011.P = Q$. Vậy $Q > P$ (vì $P > 0$)

Bài 11: Cho tổng $A = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2008}$.

So sánh giá trị biểu thức: $B = 8A - 3^{2010}$ với -1 .

Trích đề HSG huyện Sóc Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có: $A = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2008}$

$9A = 3^2 + 3^4 + 3^6 + 3^8 + \dots + 3^{2010}$

$9A - A = 3^{2010} - 1$

$8A = 3^{2010} - 1$

$8A - 3^{2010} = 1$

Mà $B = 8A - 3^{2010}$.

Vậy $B = 1$.

Bài 12: So sánh $A = \frac{10^{2016} + 1}{10^{2017} + 1}$ và $B = \frac{10^{2017} + 1}{10^{2018} + 1}$.

Trích đề HSG huyện Kim Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

Nhân hai vế của A và B với 10 ta có:

$10.A = \frac{10^{2017} + 10}{10^{2017} + 1} = \frac{10^{2017} + 1 + 9}{10^{2017} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2017} + 1}$

$10.B = \frac{10^{2018} + 10}{10^{2018} + 1} = \frac{10^{2018} + 1 + 9}{10^{2018} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2018} + 1}$

Vì $10^{2017} < 10^{2018}$ nên $\frac{9}{10^{2017} + 1} > \frac{9}{10^{2018} + 1}$.

Vậy $A > B$.

Bài 13: Cho $A = \frac{3}{2^2} + \frac{8}{3^2} + \frac{15}{4^2} + \dots + \frac{2023^2 - 1}{2023^2}$. Chứng minh rằng giá trị của A không phải là một tự nhiên.

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có $A = \frac{3}{2^2} + \frac{8}{3^2} + \frac{15}{4^2} + \dots + \frac{2023^2 - 1}{2023^2}$



$$A = \frac{2^2-1}{2^2} + \frac{3^2-1}{3^2} + \frac{4^2-1}{4^2} + \dots + \frac{2023^2-1}{2023^2}$$

$$A = 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + 1 - \frac{1}{4^2} + \dots + 1 - \frac{1}{2023^2}$$

$$A = 2022 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} \right)$$

$$\text{Mà } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} > 0 \Rightarrow A < 2022 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2}$$

Ta có:

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \quad \dots;$$

$$\frac{1}{2023^2} < \frac{1}{2022.2023} = \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}$$

$$\Rightarrow B < 1 - \frac{1}{2023} \text{ mà } 1 - \frac{1}{2023} < 1 \Rightarrow B < 1$$

$$\Rightarrow 2022 - B > 2022 - 1 \Rightarrow A > 2021 \quad (1)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2021 < A < 2022 \Rightarrow$ Giá trị của A không là số tự nhiên.

Bài 14: Cho $S = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2022^2}$. Chứng tỏ rằng S không là số tự nhiên.

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021-2022

Lời giải

$$S < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2021.2022} = 1 - \frac{1}{2022} < 1$$

Mà $S > 0$ nên ta có $0 < S < 1$

Vậy, S không phải số tự nhiên.

Bài 15: Cho $M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \dots + \frac{1}{13.16}$. So sánh M với $\frac{1}{3}$

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2022 - 2023

Lời giải

Ta có:

$$M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \frac{1}{13.16}$$

$$M = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{16} \right)$$



$$M = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{16} = \frac{15}{48}$$

Lại có: $\frac{1}{3} = \frac{16}{48}$

Vì $16 > 15$ do đó $\frac{16}{48} > \frac{15}{48}$ hay $M < \frac{1}{3}$

Vậy $M < \frac{1}{3}$

Bài 16: Cho $S = \frac{1}{7^2} + \frac{2}{7^3} + \frac{3}{7^4} + \dots + \frac{69}{7^{70}}$. Chứng tỏ $S < \frac{1}{36}$

Trích đề HSG huyện Tiền Hải năm 2021-2022

Lời giải

$$7S = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \dots + \frac{69}{7^{69}}$$

$$6S = 7S - S = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{7^{69}} - \frac{69}{7^{70}}$$

$$42S = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{7^{68}} - \frac{69}{7^{69}}$$

$$36S = 42S - 6S = 1 - \frac{70}{7^{69}} + \frac{69}{7^{70}}$$

Vì $\frac{70}{7^{69}} > \frac{69}{7^{70}} \Rightarrow 36S < 1 \Rightarrow S < \frac{1}{36}$.

Dạng 2: Chứng minh bất đẳng thức

Bài 1: Cho $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$.

Chứng minh $A < \frac{3}{4}$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Lời giải

Ta có: $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$

$$A = \frac{1}{\frac{(1+3) \cdot 2}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+5) \cdot 3}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+7) \cdot 4}{2}} + \dots + \frac{1}{\frac{(1+2017) \cdot 1009}{2}}$$

$$= \frac{2}{2 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 6} + \frac{2}{4 \cdot 8} + \dots + \frac{2}{1009 \cdot 2018} = \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{1009 \cdot 1009}$$



$$A < \frac{1}{2.2} + \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{1008.1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1008} - \frac{1}{1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1009} \right) \Rightarrow A < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \Rightarrow A < \frac{3}{4}$$

Bài 2: Cho $A = \frac{457}{1} + \frac{456}{2} + \frac{455}{3} + \dots + \frac{1}{457}$. Chứng minh: $A > 2016$

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

$$A = \frac{457}{1} + 1 + \frac{456}{2} + 1 + \frac{455}{3} + 1 + \dots + \frac{1}{457} + 1 - 457$$

$$A = 458 + \frac{458}{2} + \dots + \frac{458}{456} + \frac{458}{457} - 457$$

$$A = 458 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{457} \right) - 457$$

Nhận xét:

$$1 = 1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{32} > \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{32} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{33} + \dots + \frac{1}{64} > \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{64} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{65} + \dots + \frac{1}{128} > \frac{1}{128} + \dots + \frac{1}{128} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{129} + \dots + \frac{1}{256} > \frac{1}{256} + \dots + \frac{1}{256} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{257} + \dots + \frac{1}{457} > \frac{1}{457} + \dots + \frac{1}{457} = \frac{201}{457} \approx 0,4$$

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{456} + \frac{1}{457} > 1 + \frac{1}{2} \cdot 8 + 0,4 = 5,4$$

$$A > 458 \cdot 5,4 - 457 = 2016,2$$

$$A > 2016$$

Bài 3: Cho $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{2012}} + \frac{1}{2^{2013}}$. Chứng tỏ $S < 1$

Trích đề HSG huyện Quế Sơn 2018-2019

**Lời giải**

$$2S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2011}} + \frac{1}{2^{2012}}$$

$$2S - S = S = 1 - \frac{1}{2^{2013}} < 1$$

Bài 4: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

Trích đề HSG huyện năm 2019-2020

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

.....

$$\frac{1}{100^2} < \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} < 1$$

Bài 5: Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{28} + \frac{1}{30} + \frac{1}{32} + \frac{1}{34} + \dots + \frac{1}{52} = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{5.12} + \frac{1}{7.16} + \dots + \frac{1}{25.52}.$$

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021 -2022

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{1.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{5.12} + \dots + \frac{1}{25.52}$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{25.26} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{25} - \frac{1}{26} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{25} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{26} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{25} + \frac{1}{26} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{26} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{25} + \frac{1}{26} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{13} \right) \right]$$



$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{26} \right)$$

$$= \frac{1}{28} + \frac{1}{30} + \frac{1}{32} + \frac{1}{34} + \dots + \frac{1}{52}$$

Bài 6: Cho $A = \frac{457}{1} + \frac{456}{2} + \frac{455}{3} + \dots + \frac{1}{457}$. Chứng minh: $A > 2016$.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2012-2022

Lời giải

Ta có: $A = \frac{457}{1} + 1 + \frac{456}{2} + 1 + \frac{455}{3} + 1 + \dots + \frac{1}{457} + 1 - 457$

$$A = 458 + \frac{458}{2} + \dots + \frac{458}{456} + \frac{458}{457} - 457$$

$$A = 458 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{457} \right) - 457$$

Nhận xét:

$$1 = 1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{32} > \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{32} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{33} + \dots + \frac{1}{64} > \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{64} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{65} + \dots + \frac{1}{128} > \frac{1}{128} + \dots + \frac{1}{128} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{129} + \dots + \frac{1}{256} > \frac{1}{256} + \dots + \frac{1}{256} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{257} + \dots + \frac{1}{457} > \frac{1}{457} + \dots + \frac{1}{457} = \frac{201}{457} \approx 0,4$$

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{456} + \frac{1}{457} > 1 + \frac{1}{2} \cdot 8 + 0,4 = 5,4$$

$$A > 458 \cdot 5,4 - 457 = 2016,2$$

$$A > 2016$$

Bài 7: Cho $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{100}}$. Chứng tỏ rằng $A < \frac{3}{4}$.

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{100}}$$

$$3A = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{99}}$$

$$3A - A = 1 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{3^2} - \frac{2}{3^2}\right) + \left(\frac{4}{3^3} - \frac{3}{3^3}\right) + \dots + \left(\frac{100}{3^{99}} - \frac{99}{3^{99}}\right) - \frac{100}{3^{100}}$$

$$2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\text{Đặt } B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}}$$

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}}$$

$$3B - B = 1 - \frac{1}{3^{99}}$$

$$2B = 1 - \frac{1}{3^{99}}$$

$$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{99}}$$

$$\text{Như vậy: } 2A = 1 + B - \frac{100}{3^{100}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} > \frac{3}{2}$$

$A > \frac{3}{4}$. Điều phải chứng minh.

Bài 8: Cho tổng : $S = \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{60}$. Chứng minh rằng : $\frac{3}{5} < S < \frac{4}{5}$

Trích đề HSG Trường THCS Ái Thượng năm 2021-2022

Lời giải

$$S = \left(\frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{40}\right) + \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{50}\right) + \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{60}\right)$$

$$S < \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40}\right) + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \dots + \frac{1}{50}\right)$$

$$\text{hay } S < \frac{10}{30} + \frac{10}{40} + \frac{10}{50} \text{ tức là: } S < \frac{47}{60} < \frac{48}{60} \text{ Vậy } S < \frac{4}{5} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } S > \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40}\right) + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \dots + \frac{1}{50}\right) + \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60}\right)$$

$$S > \frac{10}{40} + \frac{10}{50} + \frac{10}{60} \text{ tức là: } S > \frac{37}{60} > \frac{36}{60} \text{ Vậy } S > \frac{3}{5} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Bài 9: Cho $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{50^2}$. Chứng minh rằng: $A < 2$.

Trích đề HSG THCS Lý Tự Trọng năm 2015-2016

**Lời giải**

Ta có

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

.....

$$\frac{1}{50^2} < \frac{1}{49.50} = \frac{1}{49} - \frac{1}{50}$$

$$\text{Suy ra } A < \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} = 2 - \frac{1}{50} < 2$$

Bài 10: Cho $A = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{70}$ Chứng minh rằng: $\frac{4}{3} < A < \frac{5}{2}$

*Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022***Lời giải**Thấy rằng tổng A có 60 số hạngTH1: Ta chứng minh $A > \frac{4}{3}$ bằng cách nhóm hai số một ngoặc thông thường

$$\text{Ta có: } A = \underbrace{\left(\frac{1}{11} + \frac{1}{70}\right) + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{69}\right) + \dots + \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{41}\right)}_{30 \text{ ngoặc}} = \underbrace{\frac{81}{11.70} + \frac{81}{12.69} + \dots + \frac{81}{40.41}}_{30 \text{ số hạng}}$$

$$A > \frac{81}{40.41} + \frac{81}{40.41} + \dots + \frac{81}{40.41} = \frac{81.30}{40.41} = \frac{243}{164} > \frac{240}{164} > \frac{240}{180} = \frac{4}{3}$$

TH2: Chứng minh $A < \frac{5}{2}$

$$A = \left(\frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{20}\right) + \left(\frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{31} + \dots + \frac{1}{40}\right) + \left(\frac{1}{41} + \dots + \frac{1}{50}\right) + \left(\frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{60}\right) + \left(\frac{1}{61} + \dots + \frac{1}{70}\right)$$

$$A < \left(\frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{21}\right) + \left(\frac{1}{31} + \dots + \frac{1}{31}\right) + \left(\frac{1}{41} + \dots + \frac{1}{41}\right) + \left(\frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{51}\right) + \left(\frac{1}{61} + \dots + \frac{1}{61}\right)$$

$$A < \frac{10}{11} + \frac{10}{21} + \frac{10}{31} + \frac{10}{41} + \frac{10}{51} + \frac{10}{61} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = 2 + 0,5 = \frac{5}{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{4}{3} < A < \frac{5}{2}.$$

Bài 11: Cho $A = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{98} + 4^{99}$, $B = 4^{100}$

Chứng minh rằng: $A < \frac{B}{3}$.*Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019***Lời giải**

$$\text{Ta có: } 4A = 4.(1 + 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^{98} + 4^{99}) = 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^{98} + 4^{99} + 4^{100}$$

$$\text{Suy ra } 4A - A = 4^{100} - 1 \text{ suy ra } A = \frac{4^{100} - 1}{3}$$

$$\text{Vì } 4^{100} - 1 < 4^{100} \text{ suy ra } \frac{4^{100} - 1}{3} < \frac{4^{100}}{3}$$



Vậy $A < \frac{B}{3}$

Bài 12: Tính tổng $S = \frac{6}{2.5} + \frac{6}{5.8} + \frac{6}{8.11} + \dots + \frac{6}{29.32}$ và chứng tỏ $S < 1$

Trích đề HSG THCS Phan Đình Phùng năm 2018-2019

Lời giải

$$S = 2 \cdot \left(\frac{3}{2.5} + \frac{3}{5.8} + \dots + \frac{3}{29.32} \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{29} - \frac{1}{32} \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{32} \right) = \frac{30}{32} < 1$$

suy ra $S < 1$

Bài 13: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{2.1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

...

$$\frac{1}{100^2} < \frac{1}{99.100} = \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} < 1$$

Vậy $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

Bài 14: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$.

Trích đề HSG huyệnnăm 20...-20...

Lời giải

$$A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{99.100} = B$$

$$B = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} < 1.$$

Vậy $A < 1$.

Bài 15: Chứng minh rằng: $\frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{4}$.

Trích đề HSG huyện Kim Sơn năm 2021 -2022

Lời giải

Ta có:

$$A = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$$

$$A = \frac{1}{(2.2)^2} + \frac{1}{(2.3)^2} + \frac{1}{(2.4)^2} + \dots + \frac{1}{(2.n)^2}$$



$$A = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{(n-1).n} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{4} \quad (\text{ĐPCM})$$

Bài 16: Cho $M = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200}$. Chứng minh rằng $M > \frac{7}{12}$.

Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021-2022

Lời giải

$$M = \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{149} + \frac{1}{150} \right) + \left(\frac{1}{151} + \frac{1}{152} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} \right) \quad (\text{Mỗi nhóm có 50 số hạng}).$$

$$M > \left(\frac{1}{150} + \frac{1}{150} + \dots + \frac{1}{150} + \frac{1}{150} \right) + \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{200} + \dots + \frac{1}{200} + \frac{1}{200} \right)$$

$$M > 50 \cdot \frac{1}{150} + 50 \cdot \frac{1}{200} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

$$\text{Vậy } M > \frac{7}{12}.$$

Bài 17: Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Lời giải

$$\text{Vì } 0 \leq a \leq b \leq c \leq 1 \text{ nên: } (a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab+1 \geq a+b$$

$$\text{Tương tự: } \frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c} \quad (2); \quad \frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c} \quad (3)$$

$$\text{Do đó: } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \quad (4)$$

$$\text{Mà } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5) suy ra: } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2 \quad (\text{đpcm})$$

Dạng 3: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức

Bài 1: Với giá trị nào của số tự nhiên a thì $\frac{5a-17}{4a-23}$ có giá trị lớn nhất.

Trích đề HSG cấp huyện 2016-2017

Lời giải

$$\frac{5a-17}{4a-23} = \frac{20a-68}{4(4a-23)} = \frac{5(4a-23)+47}{4(4a-23)} = \frac{5}{4} + \frac{47}{4(4a-23)}$$



Như vậy bài toán đưa về tìm số tự nhiên a để $4a - 23$ là số tự nhiên nhỏ nhất

$$\text{Vậy } a = 6 \Rightarrow \frac{5a - 17}{4a - 23} = 13$$

Bài 2: Với giá trị nào của x, y thì biểu thức : $A = |x - y| + |x + 1| + 2016$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Trích đề HSG huyện Diễn Châu năm 2015-2016

Lời giải

Vì $|x - y| \geq 0$ với mọi x, y ; và $|x + 1| \geq 0$ với mọi x .

$$A = |x - y| + |x + 1| + 2016 \geq 2016 \text{ với mọi } x, y.$$

$$A \text{ đạt giá trị nhỏ nhất khi } \begin{cases} |x - y| = 0 \\ |x + 1| = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy với $x = y = -1$ thì A đạt giá trị nhỏ nhất là 2016.

Bài 3: Cho phân số $\frac{3n - 8}{6n + 4}$. Tìm $n \in \mathbb{Q}$ để A có giá trị nhỏ nhất.

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\frac{3n - 8}{6n + 4} \text{ nhỏ nhất khi } \frac{6n + 4}{3n - 8} \text{ lớn nhất.}$$

Ta có:

$$\frac{6n + 4}{3n - 8} = \frac{6n - 16 + 20}{3n - 8} = 2 + \frac{20}{3n - 8} \text{ lớn nhất khi:}$$

$$3n - 8 > 0 \text{ và } 3n - 8 \text{ nhỏ nhất}$$

$$n > \frac{8}{3} \text{ và } n \text{ nhỏ nhất, } n \in \mathbb{Q} \text{ nên } n = 3.$$

Vậy $n = 3$ để A có giá trị nhỏ nhất.

Bài 4: Tìm số tự nhiên n để phân số $M = \frac{6n - 3}{4n - 6}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\text{Ta có } M = \frac{6n - 3}{4n - 6} = \frac{3}{2} + \frac{6}{4n - 6}$$

Vì phân số $\frac{6}{4n - 6}$ có tử là số dương nên M đạt giá trị lớn nhất khi $4n - 6$ đạt giá trị dương nhỏ nhất với n là số nguyên.

$$\text{Ta có } 4n - 6 = 2 \text{ khi đó } 4n = 8 \text{ suy ra } n = 2. \text{ Ta có } M = \frac{3}{2} + \frac{6}{2} = \frac{9}{2}$$



Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 4,5 khi $n = 2$.

Bài 5: Cho phân số $A = \frac{n+1}{n-3}$ ($n \in \mathbb{Q}$)

- Tìm n để A là phân số
- Tìm n để A là phân số tối giản
- Tìm n để A có giá trị lớn nhất

Trích đề HSG huyện Anh Sơn năm 2018-2019

Lời giải

a) A là phân số khi $n-3 \neq 0 \Rightarrow n \neq 3$

b) Để A là phân số tối giản thì $\text{CLN}(n+1, n-3) = 1$

Hay $\text{CLN}((n-3)+4; n-3) = 1$

Vì $4:2$ (2 là ước nguyên tố)

Nên để $\text{CLN}((n-3)+4; n-3) = 1$ thì $n-3$ không chia hết cho 2

Suy ra $n-3 = 2k+1$ (k là số nguyên)

Hay n là số chẵn.

c) Ta có: $A = \frac{n+1}{n-3} = \frac{n-3+4}{n-3} = 1 + \frac{4}{n-3}$

Với $n > 3$ thì $\frac{4}{n-3} > 0$, Với $n < 3$ thì $\frac{4}{n-3} < 0$

Để A có giá trị lớn nhất thì $n-3$ nguyên dương và có giá trị nhỏ nhất.

Do đó $n-3 = 1$ hay $n = 4$.

Trắc nghiệm

Bài 6: Giá trị của x để $A = (x+7)^2 + 2022$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. -7.

B. 7.

C. 2022.

D. -2022.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021-2022

Lời giải

Đáp án: A. -7.

Tự luận

Bài 7: Tìm số tự nhiên n để phân số $M = \frac{6n-3}{4n-6}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có: $M = \frac{6n-3}{4n-6} = \frac{3}{2} + \frac{6}{4n-6}$

Vì $\frac{6}{4n-6}$ có tử 6 > 0 nên để M đạt giá trị lớn nhất khi $4n-6$ đạt giá trị dương nhỏ nhất với n là số tự nhiên.

Do đó $4n-6 = 2$ nên $4n = 8$ suy ra $n = 2$.

Khi đó $M = \frac{3}{2} + \frac{6}{2} = \frac{9}{2}$



Vậy giá trị lớn nhất của M là $\frac{9}{2}$ khi $n=2$.

Bài 8: Tìm số tự nhiên n để phân số $M = \frac{6n-3}{4n-6}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Trích đề HSG huyện Tân Kỳ năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\text{Ta có: } M = \frac{6n-3}{4n-6} = \frac{3}{2} + \frac{6}{4n-6}.$$

Vì $\frac{6}{4n-6}$ có tử $6 > 0$ nên để M đạt giá trị lớn nhất khi $4n-6$ đạt giá trị dương nhỏ nhất với n là số tự nhiên.

Với $4n-6=1$ ta có: $4n=7$ nên $n=\frac{7}{4} \notin \mathbb{N}$ (loại).

Do đó $4n-6=2$ ta có $4n=8$ nên $n=2$.

$$\text{Khi đó } M = \frac{3}{2} + \frac{6}{2} = \frac{9}{2}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của M là $\frac{9}{2}$ khi $n=2$.

Bài 9: Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{10n-3}{4n-10}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó?

Trích đề HSG huyện Sơn Tây năm 2021 - 2022

Lời giải

$$\text{Ta có } B = \frac{10n-3}{4n-10} = \frac{5(2n-5)+22}{2(2n-5)} = \frac{5}{2} + \frac{22}{2(2n-5)} = \frac{5}{2} + \frac{11}{2n-5}.$$

Ta có B đạt giá trị lớn nhất khi $\frac{11}{2n-5}$ đạt giá trị lớn nhất, vì $11 > 0$ và không đổi nên $\frac{11}{2n-5}$

đạt giá trị lớn nhất khi $2n-5 > 0$ và đạt giá trị nhỏ nhất.

Suy ra: $2n-5=1$ khi và chỉ khi $n=3$.

Vậy B đạt giá trị lớn nhất là 13,5 khi $n=3$.

Dạng 4: Dùng bất đẳng thức để tìm khoảng giá trị của số phải tìm.

Bài 1: Cho các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn $a < 2b+1$, $b < 3c+1$, $c < 4d+1$ và $d < 2021$. Tìm giá trị lớn nhất có thể của a .

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

Lời giải

Vì a là số nguyên mà $a < 2b+1$ nên $a \leq 2b$.

Vì b là số nguyên mà $b < 3c+1$ nên $b \leq 3c$.

Vì c là số nguyên mà $c < 4d+1$ nên $c \leq 4d$.

Vì d là số nguyên mà $d < 2021$ nên $d \leq 2020$.

Do đó $a \leq 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2020$ nên $a \leq 48480$.

Vậy giá trị lớn nhất có thể của a là 48480 khi $b = 24240$; $c = 8080$; $d = 2020$.



B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

Dạng 1: So sánh hai số, so sánh một biểu thức với một số

Bài 1: Cho $M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \dots + \frac{1}{13.16}$. So sánh M với $\frac{1}{3}$

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2022 - 2023

Bài 2: $M = \frac{1}{1.4} + \frac{2}{4.10} + \frac{3}{10.19} + \frac{4}{19.31}$ và $N = \frac{2}{1.5} + \frac{3}{5.11} + \frac{4}{11.19} + \frac{5}{19.29} + \frac{6}{29.41}$

So sánh M và N .

Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 - 2022

Bài 3: So sánh tổng $S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots + \frac{2007}{2^{2007}}$ với 2. ($n \in \mathbb{N}^*$)

Trích đề HSG cấp huyện 2016-2017



Bài 4: Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2001} + 2^{2002}$; $B = 2^{2003}$

So sánh A và B

Trích đề HSG huyện năm 2019 – 2020

Bài 5: Cho $M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \dots + \frac{1}{13.16}$. So sánh M với $\frac{1}{3}$

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2022 - 2023

Bài 6: Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{100} - 1}$. Chứng tỏ rằng: $50 < A < 100$

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021-2022

Bài 7: Cho tổng: $S = \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{60}$. Chứng minh rằng: $\frac{3}{5} < S < \frac{4}{5}$.

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015 - 2016

Bài 8: Cho $A = \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \dots + \frac{11}{5^{12}}$. Chứng minh rằng $A < \frac{1}{16}$.

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015 -2016

Bài 9: Cho $M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \dots + \frac{1}{13.16}$. So sánh M với $\frac{1}{3}$.

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2022 - 2023

Bài 10: Cho $P = 1 + 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{72}$ và $Q = 2012^{73} - 1$.

So sánh P và Q .

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021 - 2022

Bài 3: Cho tổng $A = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2008}$.

So sánh giá trị biểu thức: $B = 8A - 3^{2010}$ với -1 .

Trích đề HSG huyện Sóc Sơn năm 2021 -2022

Bài 11: So sánh $A = \frac{10^{2016} + 1}{10^{2017} + 1}$ và $B = \frac{10^{2017} + 1}{10^{2018} + 1}$.

Trích đề HSG huyện Kim Sơn năm 2021 -2022

Bài 12: Cho $A = \frac{3}{2^2} + \frac{8}{3^2} + \frac{15}{4^2} + \dots + \frac{2023^2 - 1}{2023^2}$. Chứng minh rằng giá trị của A không phải là một tự nhiên.

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Bài 13: Cho $S = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2022^2}$. Chứng tỏ rằng S không là số tự nhiên.

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021-2022

Bài 14: Cho $M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \dots + \frac{1}{13.16}$. So sánh M với $\frac{1}{3}$

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2022 - 2023



Bài 15: Cho $S = \frac{1}{7^2} + \frac{2}{7^3} + \frac{3}{7^4} + \dots + \frac{69}{7^{70}}$. Chứng tỏ $S < \frac{1}{36}$

Trích đề HSG huyện Tiền Hải năm 2021-2022

Dạng 2: Chứng minh bất đẳng thức

Bài 1: Cho $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$.

Chứng minh $A < \frac{3}{4}$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Bài 2: Cho $A = \frac{457}{1} + \frac{456}{2} + \frac{455}{3} + \dots + \frac{1}{457}$. Chứng minh: $A > 2016$

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021 - 2022

Bài 3: Cho $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{2012}} + \frac{1}{2^{2013}}$. Chứng tỏ $S < 1$

Trích đề HSG huyện Quế Sơn 2018-2019

Bài 4: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

Trích đề HSG huyện năm 2019-2020

Bài 5: Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{28} + \frac{1}{30} + \frac{1}{32} + \frac{1}{34} + \dots + \frac{1}{52} = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{5.12} + \frac{1}{7.16} + \dots + \frac{1}{25.52}$$

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021 -2022

Bài 6: Cho $A = \frac{457}{1} + \frac{456}{2} + \frac{455}{3} + \dots + \frac{1}{457}$. Chứng minh: $A > 2016$.

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2012-2022

Bài 7: Cho $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{100}}$. Chứng tỏ rằng $A < \frac{3}{4}$.

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Bài 8: Cho tổng : $S = \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{60}$. Chứng minh rằng : $\frac{3}{5} < S < \frac{4}{5}$

Trích đề HSG Trường THCS Ái Thượng năm 2021-2022

Bài 9: Cho $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \dots + \frac{1}{50^2}$. Chứng minh rằng: $A < 2$.

Trích đề HSG THCS Lý Tự Trọng năm 2015-2016

Bài 10: Cho $A = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{70}$ Chứng minh rằng: $\frac{4}{3} < A < \frac{5}{2}$

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Bài 11: Cho $A = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{98} + 4^{99}$, $B = 4^{100}$

Chứng minh rằng: $A < \frac{B}{3}$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019



Bài 12: Tính tổng $S = \frac{6}{2.5} + \frac{6}{5.8} + \frac{6}{8.11} + \dots + \frac{6}{29.32}$ và chứng tỏ $S < 1$

Trích đề HSG THCS Phan Đình Phùng năm 2018-2019

Bài 13: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$.

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Dạng 3: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức

Bài 1: Với giá trị nào của số tự nhiên a thì $\frac{5a-17}{4a-23}$ có giá trị lớn nhất.

Trích đề HSG cấp huyện 2016-2017

Bài 2: Với giá trị nào của x, y thì biểu thức : $A = |x - y| + |x + 1| + 2016$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Trích đề HSG huyện Diên Châu năm 2015-2016

Bài 3: Cho phân số $\frac{3n-8}{6n+4}$. Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để A có giá trị nhỏ nhất.

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021 - 2022

Bài 4: Tìm số tự nhiên n để phân số $M = \frac{6n-3}{4n-6}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2021 - 2022

Bài 5: Cho phân số $A = \frac{n+1}{n-3}$ ($n \in \mathbb{Z}$)

- d) Tìm n để A là phân số
- e) Tìm n để A là phân số tối giản
- f) Tìm n để A có giá trị lớn nhất

Trích đề HSG huyện Anh Sơn năm 2018-2019

Bài 6: Giá trị của x để $A = (x+7)^2 + 2022$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

- A. -7 .
- B. 7 .
- C. 2022 .
- D. -2022 .

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021-2022

Bài 7: Tìm số tự nhiên n để phân số $M = \frac{6n-3}{4n-6}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đông (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Bài 8: Tìm số tự nhiên n để phân số $M = \frac{6n-3}{4n-6}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Trích đề HSG huyện Tân Kỳ năm 2021 - 2022

Bài 9: Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{10n-3}{4n-10}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó?

Trích đề HSG huyện Sơn Tây năm 2021 - 2022

Dạng 4: Dùng bất đẳng thức để tìm khoảng giá trị của số phải tìm.

Bài 1: Cho các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn $a < 2b+1$, $b < 3c+1$, $c < 4d+1$ và $d < 2021$. Tìm giá



trị lớn nhất có thể của a .

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

**C. SỬ TÀM CÁC BÀI TƯƠNG TỰ**

Bài 1: Cho $A = \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{2021}$, $B = 20$. So sánh A và B .

Lời giải

Ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{100} = \frac{1}{100} \\ \frac{1}{101} < \frac{1}{100} \\ \frac{1}{102} < \frac{1}{100} \\ \dots \\ \frac{1}{2021} < \frac{1}{100} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{2021}}_{1922} < \underbrace{\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{100}}_{1922}$$

$$\Rightarrow A < 1922 \cdot \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1922}{100} < \frac{2000}{100} = 20$$

$$\Rightarrow A < B$$

Vậy $A < B$.

Bài 2: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} < 1$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{10^2 - 9^2}{9^2 \cdot 10^2} = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2} \right)$$

$$A = 1 - \frac{1}{10^2} < 1$$

Bài 3: Chứng tỏ rằng: $B = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \dots - \frac{1}{2021^2} > \frac{1}{2021}$

Lời giải

$$B = 1 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2021^2} \right),$$

Đặt $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2021^2}$ ta có:

$$A < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2021} < 1 - \frac{1}{2021}$$

$$\Rightarrow -A > -1 + \frac{1}{2021}$$

$$B > 1 - A = 1 - 1 + \frac{1}{2021}$$



$$\Rightarrow B > \frac{1}{2021}$$

Bài 4: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

Lời giải

Ta có $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} = 1 - \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

.....

$$\frac{1}{100^2} < \frac{1}{99.100} = \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$\text{Nên } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} < 1$$

Bài 5: Chứng minh rằng: $\frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{4}$

Lời giải

Ta có

$$A = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$$

$$A = \frac{1}{(2.2)^2} + \frac{1}{(2.3)^2} + \frac{1}{(2.4)^2} + \dots + \frac{1}{(2.n)^2}$$

$$A = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{4} \text{ (ĐPCM)}$$

Bài 6: Cho $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$

Chứng minh $A < \frac{3}{4}$

Lời giải

Ta có: $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$

$$A = \frac{1}{(1+3).2} + \frac{1}{(1+5).3} + \frac{1}{(1+7).4} + \dots + \frac{1}{(1+2017).1009}$$

$$A = \frac{2}{2.4} + \frac{2}{3.6} + \frac{2}{4.8} + \dots + \frac{2}{1009.2018}$$

$$A = \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{1009.1009}$$



$$A < \frac{1}{2.2} + \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{1008.1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1008} - \frac{1}{1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$A < \frac{3}{4}$$

Bài 7: Cho $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2}$. Chứng minh rằng: $A < 2$

Lời giải

Chứng minh: $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2} < 2$

Ta có: $\frac{1}{1.2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots\dots$$

$$\frac{1}{50^2} < \frac{1}{49} - \frac{1}{50}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy: } A &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \\ &= 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{50} = \frac{99}{50} < 2 \end{aligned}$$

Bài 8: Chứng minh rằng: $\frac{1}{100} + \frac{1}{1001} + \dots + \frac{1}{2000} > \frac{1}{2}$

Lời giải

Ta có $\frac{1}{100} + \frac{1}{1001} + \dots + \frac{1}{2000} > \frac{1}{2000} \cdot 1000 = \frac{1}{2}$

Suy ra $\frac{1}{100} + \frac{1}{1001} + \dots + \frac{1}{2000} > \frac{1}{2}$

Bài 9: Cho tổng: $S = \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{60}$. Chứng minh: $\frac{3}{5} < S < \frac{4}{5}$.

Lời giải

Ta có:

$$\text{Ta có: } S = \left(\frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{40} \right) + \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{50} \right) + \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{60} \right)$$

$$\Rightarrow S < \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{30} \right) + \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40} \right) + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \dots + \frac{1}{50} \right)$$



$$\text{hay } S < \frac{10}{30} + \frac{10}{40} + \frac{10}{50} \text{ tức là: } S < \frac{47}{60} < \frac{48}{60} \text{ Vậy } S < \frac{4}{5} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } S > \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40} \right) + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \dots + \frac{1}{50} \right) + \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60} \right)$$

$$\Rightarrow S > \frac{10}{40} + \frac{10}{50} + \frac{10}{60} \text{ tức là: } S > \frac{37}{60} > \frac{36}{60} \text{ Vậy } S > \frac{3}{5} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Bài 10: Cho \overline{abc} là số tự nhiên có ba chữ số

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của } A = \frac{\overline{abc}}{a+b+c} + 1918$$

Lời giải

$$A = \frac{\overline{abc}}{a+b+c} + 1918 = \frac{100a+10b+c}{a+b+c} + 1918$$

$$\text{Nếu } b=c=0 \text{ thì } A = 100 + 1918 = 2018$$

$$\text{Nếu } b \text{ hoặc } c \text{ khác } 0 \text{ thì } A < \frac{100a+100b+100c}{a+b+c} + 1918 = 100 + 1918 = 2018 \Rightarrow A \leq 2018$$

Giá trị lớn nhất của A là 2018 khi $a \in \{1; 2; \dots; 9\}; b=c=0$

Bài 11: Cho phân số: $A = \frac{n+10}{2n} (n \in \mathbb{N}^*)$

Tìm n để A đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

Ta có A đạt GTNN khi $\frac{5}{n}$ lớn nhất. Với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $\frac{5}{n}$ lớn nhất khi $n_{\min} \Rightarrow n=1$

$$\text{Lúc đó } A_{\max} = \frac{1}{2} + 5 = 5,5$$

Vậy với $n=1$ thì $A_{\max} = 5,5$

Bài 12: Tìm GTLN của biểu thức $Q = 9 - (x+2019)^2$

Lời giải

$$-(x+2019)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow 9 - (x+2019)^2 \leq 9$$

$$\Rightarrow Q \leq 9$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = -2019$

Giá trị lớn nhất của Q là 9.

Bài 13: Cho $M = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{101}}$. Chứng tỏ $M < 1$

Lời giải:

$$\text{Ta có } M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{100}}$$

$$M = 2M - M = 1 - \frac{1}{2^{101}}$$



$$\text{Mà } M = 1 - \frac{1}{2^{101}} < 1 \Rightarrow M < 1$$

Bài 14: Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{100}-1}$. Chứng minh $50 < A < 100$.

Lời giải:

$$A = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{99}+1} + \dots + \frac{1}{2^{100}-1}\right)$$

Có 99 nhóm trong tổng của A

$$A < 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{99}} + \dots + \frac{1}{2^{99}}\right)$$

$$A < 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 100$$

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99}+1} + \frac{1}{2^{100}+2} + \dots + \frac{1}{2^{100}-1} + \frac{1}{2^{100}}\right) - \frac{1}{2^{100}}$$

Có 99 nhóm trong tổng của A

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{100}} + \dots + \frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{100}}\right) - \frac{1}{2^{100}}$$

$$A > 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{100 \text{ số hạng}} - \frac{1}{2^{100}} = 1 + 50 - \frac{1}{2^{100}} > 50$$

Bài 15: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} < \frac{1}{3}$.

Lời giải:

Đưa về dạng tổng $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n$ để tính tổng rồi so sánh.

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6}$$

$$2A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5}$$

$$2A + A = 3A = 1 - \frac{1}{2^6} = \frac{2^6 - 1}{2^6} < 1$$

$$\Rightarrow 3A < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{3}$$



Bài 16: Cho $B = \frac{4}{3} + \frac{10}{9} + \frac{28}{27} + \dots + \frac{3^{98} + 1}{3^{98}}$. Chứng minh $B < 100$.

Lời giải:

$$B = \frac{4}{3} + \frac{10}{9} + \frac{28}{27} + \dots + \frac{3^{98} + 1}{3^{98}} = \frac{4}{3} + \frac{10}{3^2} + \frac{28}{3^3} + \dots + \frac{3^{98} + 1}{3^{98}}$$

$$\Rightarrow B - 98 = \frac{4}{3} - 1 + \frac{10}{3^2} - 1 + \frac{28}{3^3} - 1 + \dots + \frac{3^{98} + 1}{3^{98}} - 1 = \frac{4}{3} + \frac{10}{9} + \frac{28}{27} + \dots + \frac{3^{98} + 1}{3^{98}}$$

$$B - 98 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}}$$

$$3(B - 98) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{97}}$$

$$3(B - 98) - (B - 98) = 1 - \frac{1}{98}$$

$$\Rightarrow 2(B - 98) = \frac{97}{98} \Rightarrow B - 98 = \frac{97}{196} \Rightarrow B = 98 + \frac{97}{196} < 100$$

Bài 17: Cho biểu thức $A = \frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \dots - \frac{2022}{5^{2022}}$. So sánh A và $\frac{5}{36}$.

Trích đề HSG huyện năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có: $A = \frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \dots - \frac{2022}{5^{2022}}$

$$\Rightarrow 5A = 1 - \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} - \frac{4}{5^3} + \dots - \frac{2022}{5^{2021}}$$

$$\Rightarrow 6A = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \dots - \frac{1}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}}$$

$$\Rightarrow 30A = 5 - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \dots - \frac{1}{5^{2020}} - \frac{2022}{5^{2021}}$$

Do đó: $30A + 6A = 5 - \frac{2023}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}}$

Bài 18: Cho $S = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200}$. Chứng minh rằng: $S > \frac{13}{21}$.

Trích đề HSG huyện năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{125} > \frac{1}{125} + \frac{1}{125} + \dots + \frac{1}{125} = \frac{25}{125} = \frac{1}{5}$

$$\frac{1}{126} + \frac{1}{127} + \frac{1}{128} + \dots + \frac{1}{150} > \frac{1}{150} + \frac{1}{150} + \frac{1}{150} + \dots + \frac{1}{150} = \frac{25}{150} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{151} + \frac{1}{152} + \frac{1}{153} + \dots + \frac{1}{175} > \frac{1}{175} + \frac{1}{175} + \dots + \frac{1}{175} = \frac{25}{175} = \frac{1}{7}$$



$$\frac{1}{176} + \frac{1}{177} + \frac{1}{178} + \dots + \frac{1}{200} > \frac{1}{200} + \frac{1}{200} + \frac{1}{200} + \dots + \frac{1}{200} = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$$

Do đó: $S > \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$

Mà $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) = \frac{13}{40} + \frac{13}{42} > \frac{13}{42} + \frac{13}{42} = \frac{13}{21}$

Vậy $S = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} > \frac{13}{21}$

Bài 19: Tìm số tự nhiên n để phân số $M = \frac{6n-3}{4n-6}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

Ta có: $M = \frac{6n-3}{4n-6} = \frac{3}{2} + \frac{6}{4n-6}$

Vì $\frac{6}{4n-6}$ có tử $6 > 0$ nên để M đạt giá trị lớn nhất khi $4n-6$ đạt giá trị dương nhỏ nhất với

n là số tự nhiên

Do đó $4n-6 = 2 \Rightarrow 4n = 8 \Rightarrow n = 2$.

Khi đó $M = \frac{3}{2} + \frac{6}{2} = \frac{9}{2}$

Vậy GTLN của M là 4,5 khi $n = 2$.

Bài 20: Với mọi số tự nhiên $n \geq 1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$.

Trích đề HSG huyện Giao Thủy, năm 2013- 2014

Lời giải

Ta có

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \times 2} = 1 - \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \dots; \quad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n} < 1$.

Bài 21: Cho phân số $A = \frac{n-1}{n-3} (n \in \mathbf{Z}, n \neq 3)$

a) Tìm số nguyên n sao cho phân số $A = \frac{5}{3}$

b) Tìm số nguyên n để A đạt giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó?

Trích đề HSG huyện Nghi Lộc, năm 2020- 2021

Lời giải

a) Ta có: $A = \frac{5}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{n-1}{n-3} = \frac{5}{3}$$



$$\Rightarrow n=6$$

b) Ta có: $A = \frac{n-1}{n-3} = 1 + \frac{2}{n-3}$

Để A đạt giá trị lớn nhất thì $n-3$ nhỏ nhất

$$\Rightarrow n-3=1$$

$$\Rightarrow n=4$$

Bài 22: Cho phân số: $P = \frac{6n+5}{3n+2}$ ($n \in \mathbb{Q}$)

a. Chứng minh rằng phân số P là phân số tối giản

b. Với giá trị nào của n thì phân số P có giá trị lớn nhất? tìm giá trị lớn nhất đó.

Trích đề HSG Quận Liên Chiểu năm 2018-2019

Lời giải

a. Gọi d là BC của $6n+5$ và $3n+2$

ta có: $6n+5 : d$ và $3n+2 : d$

$$3n+2 : d$$

$$2(3n+2) : d$$

hay $6n+4 : d$

$$6n+5 - (6n+4) : d$$

$$1 : d$$

$$d=1$$

Vậy phân số $P = \frac{6n+5}{3n+2}$ ($n \in \mathbb{Q}$) là phân số tối giản.

b. Ta có $P = \frac{6n+5}{3n+2} = \frac{6n+4+1}{3n+2} = 2 + \frac{1}{3n+2}$

P đạt giá trị lớn nhất khi $\frac{1}{3n+2}$ đạt giá trị lớn nhất, khi đó $3n+2$ đạt giá trị nhỏ nhất vì $3n+2 \geq 2$

nên $3n+2$ nhỏ nhất bằng 2 khi $3n=0$ hay $n=0$

Vậy với $n=0$ thì P đạt giá trị lớn nhất là $2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Bài 23: Chứng tỏ rằng:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2} < \frac{3}{4}.$$

Trích đề HSG Quận Hải Châu năm 2016-2017

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3}$$



$$\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4}$$

$$\frac{1}{5^2} < \frac{1}{4.5}$$

.....

$$\frac{1}{99^2} < \frac{1}{98.99}$$

$$\frac{1}{100^2} < \frac{1}{99.100}$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{98.99} + \frac{1}{99.100}$$

$$\text{Mà } \frac{1}{4} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{98.99} + \frac{1}{99.100}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{100}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{100} < \frac{3}{4}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2} < \frac{3}{4}.$$

Bài 24: Cho tổng $T = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2016}{2^{2015}} + \frac{2017}{2^{2016}}$. So sánh T với 3

Trích đề HSG huyện Ý Yên năm 2018-2019

Lời giải

$$T = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2016}{2^{2015}} + \frac{2017}{2^{2016}}$$

$$2T = 2 + \frac{3}{2^1} + \frac{4}{2^2} + \dots + \frac{2016}{2^{2014}} + \frac{2017}{2^{2015}}$$

$$2T - T = 2 + \frac{3}{2^1} - \frac{2}{2^1} + \frac{4}{2^2} - \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{2016}{2^{2014}} - \frac{2015}{2^{2014}} + \frac{2017}{2^{2015}} - \frac{2016}{2^{2015}} - \frac{2017}{2^{2016}}$$

$$T = 2 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2015}} - \frac{2017}{2^{2016}}$$

$$\text{Đặt } N = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2015}}$$

$$\text{Ta có } 2N = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2014}}$$

$$2N - N = 1 - \frac{1}{2^{2015}}$$

Vậy $N < 1$

$$\text{Nên } T < 2 + 1 - \frac{2017}{2^{2016}} = 3 - \frac{2017}{2^{2016}}$$



Vậy $T < 3$.

Bài 25: Tìm giá trị nhỏ nhất của phân số $\frac{\overline{ab}}{a+b}$ (\overline{ab} là số có 2 chữ số).

Trích đề HSG huyện Vụ Bản năm 2017-2018

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \frac{\overline{ab}}{a+b} = \frac{10a+b}{a+b} = 1 + \frac{9a}{a+b} = 1 + \frac{9}{1+\frac{b}{a}}$$

A có GTNN khi $1+\frac{b}{a}$ có GTLN hay $\frac{b}{a}$ có GTLN. Khi đó $b=9$ và $a=1$

Khi đó số $\overline{ab}=19$

GTNN của A là 1,9.

Bài 26: Cho biết $S = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{130}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{4} < S < \frac{91}{330}$

Trích đề HSG huyện Hưng Hà năm 2012-2013

Lời giải

* Chứng minh: $S < \frac{91}{330}$

$$S = \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{110} \right) + \left(\frac{1}{111} + \dots + \frac{1}{120} \right) + \left(\frac{1}{121} + \dots + \frac{1}{130} \right)$$

$$S < \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{100} \right) + \left(\frac{1}{110} + \dots + \frac{1}{110} \right) + \left(\frac{1}{120} + \dots + \frac{1}{120} \right)$$

$$S < \frac{1}{100} \cdot 10 + \frac{1}{110} \cdot 10 + \frac{1}{120} \cdot 10 = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}$$

$$S < \frac{66+60+55}{660}$$

$$S < \frac{181}{660} < \frac{182}{660} \text{ hay } S < \frac{91}{330} \quad (1)$$

* Chứng minh $\frac{1}{4} < S$

$$S > \left(\frac{1}{110} + \dots + \frac{1}{110} \right) + \left(\frac{1}{120} + \dots + \frac{1}{120} \right) + \left(\frac{1}{130} + \dots + \frac{1}{130} \right)$$

$$S > \frac{1}{110} \cdot 10 + \frac{1}{120} \cdot 10 + \frac{1}{130} \cdot 10 = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13}$$

$$S > \frac{156+143+132}{1716}$$

$$S > \frac{431}{1716} > \frac{429}{1716} \text{ Hay } S > \frac{1}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{1}{4} < S < \frac{91}{330}$.



Bài 27: Cho $S = \frac{5}{20} + \frac{5}{21} + \frac{5}{22} + \frac{5}{23} + \dots + \frac{5}{49}$. Chứng minh rằng : $3 < S < 8$.

Trích đề HSG huyện Hưng Hà năm 2015-2016

Lời giải

Xét tổng $S = \frac{5}{20} + \frac{5}{21} + \frac{5}{22} + \frac{5}{23} + \dots + \frac{5}{49}$ có 30 số hạng

Mà $\frac{5}{20} > \frac{5}{50}; \frac{5}{21} > \frac{5}{50}; \frac{5}{22} > \frac{5}{50}; \dots; \frac{5}{49} > \frac{5}{50}$

$$S > 30 \cdot \frac{5}{50} \Rightarrow S > 3 \quad (1)$$

Lại có : $\frac{5}{20} = \frac{5}{20}; \frac{5}{21} < \frac{5}{20}; \frac{5}{22} < \frac{5}{20}; \dots; \frac{5}{49} < \frac{5}{20}$

$$S < 30 \cdot \frac{5}{20} = \frac{150}{20} \Rightarrow S < 8 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $3 < S < 8$.

Bài 28: Chứng minh rằng : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{1999}} > 1000$

Trích đề HSG huyện Hải Hậu năm 2015-2016

Lời giải

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{1999}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2^4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{1998} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{1999}}\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \cdot 2 + \frac{1}{2^3} \cdot 2^2 + \frac{1}{2^4} \cdot 2^3 + \dots + \frac{1}{2^{1999}} \cdot 2^{1998}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 1999 = 1000,5 > 1000 \quad (\text{ĐPCM}).$$

Bài 29: Tìm GTNN của biểu thức $A = (2x+5)^4 + 3$.

Trích đề HSG huyện Mỹ Lộc năm 2015-2016

Lời giải

Với mọi x ta có $(2x+5)^4 \geq 0 \Rightarrow (2x+5)^4 + 3 \geq 3$, và $(2x+5)^4 = 0$ khi $2x+5=0$ hay $x = -\frac{5}{2}$.

Vậy GTNN của biểu thức $A = (2x+5)^4 + 3$ là 3 khi $x = -\frac{5}{2}$.

Bài 30: Tìm GTNN của biểu thức $C = (x-y)^{2020} + 4(y-3)^{30} - 25$.

Trích đề HSG huyện Mỹ Lộc năm 2015-2016

Lời giải

Với mọi $x; y$ ta có $(x-y)^{2020} \geq 0$, và $(x-y)^{2020} = 0$ khi $x-y=0$ hay $x=y$.

Với mọi y ta có $(y-3)^{30} \geq 0$ nên $4 \cdot (y-3)^{30} \geq 0$, và $(y-3)^{30} = 0$ khi $y-3=0$ hay $y=3$.



Do đó với mọi $x; y$ ta có: $(x-y)^{2020} + 4(y-3)^{30} \geq 0$ nên $(x-y)^{2020} + 4(y-3)^{30} - 25 \geq -25$ hay $B \geq -25$.

Ta có $B = -25$ khi xảy ra đồng thời $x = y$ và $y = 3$ hay $x = y = 3$

Vậy GTNN của biểu thức $C = (x-y)^{2020} + 4(y-3)^{30} - 25$ là -25 khi $x = y = 3$.

Bài 31: Tìm GTLN của biểu thức $B = -2(x-1)^4 - (y+2)^6 - 3$.

Trích đề HSG huyện Thạch Thất năm 2015-2016

Lời giải

Ta có: $B = -2(x-1)^4 - (y+2)^6 - 3 = -3 - [2(x-1)^4 + (y+2)^6]$

Với mọi x ta có $(x-1)^4 \geq 0 \Rightarrow 2(x-1)^4 \geq 0$, và $(x-1)^4 = 0$ khi $x-1=0$ hay $x=1$.

Với mọi y ta có $(y+2)^6 \geq 0$, và $(y+2)^6 = 0$ khi $y+2=0$ hay $y=-2$.

Do đó với mọi $x; y$ ta có:

$$2(x-1)^4 + (y+2)^6 \geq 0$$

$$-[2(x-1)^4 + (y+2)^6] \leq 0$$

$$-[2(x-1)^4 + (y+2)^6] - 3 \leq -3 \text{ hay } B \leq -3.$$

Vậy GTLN của biểu thức $B = -2(x-1)^4 - (y+2)^6 - 3$ là -3 khi $x=1$ và $y=-2$.

Bài 32: Tìm số nguyên n để $B = \frac{7n-5}{2n+1}$ có GTNN. Tìm GTNN đó.

Trích đề HSG huyện Hoa Lư năm 2017-2018

Lời giải

$$\text{Ta có: } B = \frac{7n-5}{2n+1} = \frac{2 \cdot (7n-5)}{2 \cdot (2n+1)} = \frac{14n-10}{2 \cdot (2n+1)} = \frac{14n+7-17}{2 \cdot (2n+1)} = \frac{7(2n+1)-17}{2 \cdot (2n+1)}$$

$$= \frac{7}{2} - \frac{17}{2 \cdot (2n+1)} = \frac{7}{2} - \frac{17}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)}$$

Do đó biểu thức $B = \frac{7n-5}{2n+1}$ đạt GTNN khi $\frac{1}{2n+1}$ đạt GTLN.

Mặt khác, do tử là $1 > 0$ nên $\frac{1}{2n+1}$ đạt GTLN khi $2n+1 > 0$ và có GTNN ứng với $n \in \mathbf{Z}$.

Xét $2n+1 > 0$ thì $2n > -1$ hay $n > -\frac{1}{2}$

Do đó để $2n+1 > 0$ và có GTNN ứng với $n \in \mathbf{Z}$ thì n phải là số nguyên nhỏ nhất thỏa mãn $n > -\frac{1}{2}$

Từ đó ta suy ra $n=0$ và GTNN của $B = \frac{7n-5}{2n+1}$ là $\frac{7 \cdot 0 - 5}{2 \cdot 0 + 1} = -5$.

Bài 33: Tính tổng $S = \frac{6}{2.5} + \frac{6}{5.8} + \frac{6}{8.11} + \dots + \frac{6}{29.32}$ và chứng tỏ $S < 1$.



Lời giải

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \cdot \left(\frac{3}{2.5} + \frac{3}{5.8} + \dots + \frac{3}{29.32} \right) \\
 &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{29} - \frac{1}{32} \right) \\
 &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{32} \right) = \frac{30}{32} < 1
 \end{aligned}$$

Vậy $S < 1$.

Bài 34: Cho biểu thức $B = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$. Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{6} < B < \frac{1}{4}$.

Trích đề HSG huyện Giao Thủy (Nam Định) năm 2018-2019

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{5^2} &< \frac{1}{4.5} \\
 \frac{1}{6^2} &< \frac{1}{5.6} \\
 \frac{1}{7^2} &< \frac{1}{6.7} \\
 &\vdots \\
 \frac{1}{100^2} &< \frac{1}{99.100} \\
 B &< \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} \\
 B &< \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \\
 B &< \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{5^2} &> \frac{1}{5.6} \\
 \frac{1}{6^2} &> \frac{1}{6.7} \\
 \frac{1}{7^2} &> \frac{1}{7.8} \\
 &\vdots \\
 \frac{1}{100^2} &> \frac{1}{100.101} \\
 B &> \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{100.101} \\
 B &> \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} \\
 B &> \frac{1}{5} - \frac{1}{101} = \frac{96}{505} > \frac{96}{576} = \frac{1}{6} \\
 B &> \frac{1}{6} \quad (2)
 \end{aligned}$$



Từ (1) và (2) ta có $\frac{1}{6} < B < \frac{1}{4}$.

Bài 35: Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh: $2 < \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < 3$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a+b+c+d} &< \frac{a+b}{a+b+c} < \frac{a+b+d}{a+b+c+d} \\ \frac{b+c}{a+b+c+d} &< \frac{b+c}{b+c+d} < \frac{a+b+c}{a+b+c+d} \\ \frac{c+d}{a+b+c+d} &< \frac{c+d}{c+d+a} < \frac{c+d+b}{a+b+c+d} \\ \frac{d+a}{a+b+c+d} &< \frac{d+a}{a+b+d} < \frac{d+a+c}{a+b+c+d} \end{aligned}$$

Cộng theo vế ta được: $2 < A < 3$.

Bài 36: Cho $a, b, c > 0$ và tổng hai số luôn lớn hơn số còn lại. Chứng minh: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$.

Lời giải

Giả sử: $a \geq b \geq c \Rightarrow a+b > a+c > b+c$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{a}{b+c} = \frac{a}{b+c} \\ \frac{b}{c+a} < \frac{b}{b+c} \\ \frac{c}{a+b} < \frac{c}{b+c} \end{cases}$$

Cộng theo vế ta được:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{a+b+c}{b+c} = 1 + \frac{a}{b+c} < 1+1=2$$

Bài 37: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ có giá trị không nguyên.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c} \\ \frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c} \\ \frac{c}{c+a} > \frac{c}{a+b+c} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c} \\ \frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c} \\ \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c} \end{cases}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} < M < \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{a+b+c} + \frac{c+a}{a+b+c} \text{ hay } 1 < M < 2.$$

Bài 38: Chứng minh: $A = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdots \frac{208}{210} < \frac{1}{25}$.

Lời giải

Ta thấy A có dạng $\frac{n}{n+2} < 1$ nên $\frac{n}{n+2} < \frac{n-1}{n+1} < \frac{n-1}{n}$



$$A < \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{207}{208}$$

$$A^2 < \frac{(1.4.7.10 \cdots 208)(1.3.6 \cdots 207)}{(3.6.9 \cdots 210)(3.4.7 \cdots 208)}$$

$$A^2 < \frac{1}{3.210} = \frac{1}{630}$$

$$A^2 < \frac{1}{625}$$

$$A < \frac{1}{25}$$

Bài 39: Chứng minh: $A = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > 1$.

Lời giải

$$A = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) \text{ có } n^2 - (n+1) + 1 = n^2 - n \text{ số hạng.}$$

$$A > \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{n^2 - n}{n^2} = \frac{1}{n} + 1 - \frac{n}{n^2} = 1$$

Vậy $A > 1$.

Bài 40: Chứng minh: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{2016}} < 2016$.

Lời giải

$$A = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{2015}} + \cdots + \frac{1}{2^{2016} - 1} \right) + \frac{1}{2^{2016}}$$

$$A < 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^3} + \cdots + 2^{2015} \cdot \frac{1}{2^{2015}} + \frac{1}{2^{2016}}$$

$$A < 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \frac{1}{2^{2016}}$$

$$A < 2015 + \frac{1}{2^{2016}} < 2016$$

Bài 41: Chứng minh: $50 < A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{100} - 1} < 100$,

Lời giải

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{99} + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{100}} \right) - \frac{1}{2^{100}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \cdots + 2^{99} \cdot \frac{1}{2^{100}} - \frac{1}{2^{100}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{100}}$$

$$A > \frac{100}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^{100}} \right) > 50$$

$$A = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{15} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100} - 1} \right)$$

$$A < 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^3} + \cdots + 2^{99} \cdot \frac{1}{2^{99}}$$

$$A < 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = 100$$



Vậy $A < 100$.

Bài 42: Chứng minh: $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{64} > 4$.

Lời giải

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^5+1} + \dots + \frac{1}{2^6}\right).$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^5 \cdot \frac{1}{2^6}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 4$$

Bài 43: Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} < \frac{1}{3}$.

b) $\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{16}$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2017-2018

Lời giải

a) Đặt $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6}$

$$2A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5}$$

$$2A + A = 1 - \frac{1}{2^6}$$

$$3A = \frac{2^6 - 1}{2^6} < 1$$

$$3A < 1.$$

Vậy $A < \frac{1}{3}$.

b) Đặt $A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$

$$3A = 1 - \frac{2}{3} - \frac{3}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{3}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$$

$$4A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$4A < 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} \quad (1)$$

Đặt $B = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}}$

$$3B = 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{97}} - \frac{1}{3^{98}}$$

$$B + 3B = 3 - \frac{1}{3^{99}}$$

$$4B < 3$$

$$B < \frac{3}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $4A < B < \frac{3}{4}$.



Vậy $A < \frac{3}{16}$.

Bài 44: Chứng tỏ rằng $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Ta thấy $\frac{1}{41}$ đến $\frac{1}{80}$ có 40 phân số

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} \\ &= \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{61} + \frac{1}{62} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{41} > \frac{1}{42} > \dots > \frac{1}{60} \text{ và } \frac{1}{61} > \frac{1}{62} > \dots > \frac{1}{80} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } A &= \frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} \\ A &> \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{80} + \dots + \frac{1}{80} + \frac{1}{80} \right) \\ &= \frac{20}{60} + \frac{20}{80} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (1), (2), (3) ta được $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$.

Bài 45: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = (2x+1)^4 - 3$.

Lời giải

Vì $(2x+1)^4 \geq 0$ với mọi x .

Nên $A = (2x+1)^4 - 3 \geq -3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A bằng -3 , đạt được khi

$$(2x+1)^2 = 0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Bài 46: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 2021 + (x-2020)^{2022}$.

Lời giải

Vì $(x-2020)^{2022} \geq 0$ với mọi x .

Nên $A = (x-2020)^{2022} + 2021 \geq 2021$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A bằng 2021 , đạt được khi

$$(x-2020)^{2022} = 0 \Rightarrow x-2020=0 \Rightarrow x=2020.$$

Bài 47: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = -(x-2021)^{2020} - 1$.

Lời giải

Vì $(x-2021)^{2020} \geq 0 \Rightarrow -(x-2021)^{2020} \leq 0$ với mọi x .

Nên $A = -(x-2021)^{2020} - 1 \leq -1$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A bằng -1 , đạt được khi

$$(x-2021)^{2020} = 0 \Rightarrow x-2021=0 \Rightarrow x=2021.$$

Vậy $x=2021$.



Bài 48: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = -4.(x-5)^6 - 7$.

Lời giải

Vì $(x-5)^6 \geq 0 \Rightarrow -4.(x-5)^6 \leq 0$ với mọi x .

Nên $A = -4.(x-5)^6 - 7 \leq -7$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A bằng -7 , đạt được khi

$$(x-5)^6 = 0 \Rightarrow x-5=0 \Rightarrow x=5.$$

Vậy $x=5$.

Bài 49: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = (x+1)^2 + (y+3)^2 + 1$.

Lời giải

$$\text{Vì } \begin{cases} (x+1)^2 \geq 0 \\ (y+3)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x+1)^2 + (y+3)^2 \geq 0.$$

Nên $A = (x+1)^2 + (y+3)^2 + 1 \geq 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A bằng 1, đạt được khi

$$\begin{cases} (x+1)^2 = 0 \\ (y+3)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}.$$

Bài 50: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = (x-1)^2 + (y+5)^2 + 1$.

Lời giải

$$\text{Vì } \begin{cases} (x-1)^2 \geq 0 \\ (y+5)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 + (y+5)^2 \geq 0$$

Nên $A = (x-1)^2 + (y+5)^2 + 1 \geq 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A bằng 1, đạt được khi

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ (y+5)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y+5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-5 \end{cases}.$$

Bài 51: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{3}{(x-2)^2 + 5}$.

Lời giải

Vì $(x-2)^2 \geq 0$ với mọi x .

$$\text{Nên } (x-2)^2 + 5 \geq 5 \Rightarrow \frac{1}{(x-2)^2 + 5} \leq \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow A = \frac{3}{(x-2)^2 + 5} \leq \frac{3}{5}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A bằng $\frac{3}{5}$, đạt được khi

$$(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2.$$

Bài 52: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{8}{(x-1)^2 + 4}$

Lời giải

Vì $(x-1)^2 \geq 0$ với mọi x .



$$\begin{aligned} \text{Nên } (x-1)^2 + 4 \geq 4 &\Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2 + 4} \leq \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow A = \frac{8}{(x-1)^2 + 4} \leq \frac{8}{4} = 2. \end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A bằng 2 , đạt được khi

$$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1.$$

Bài 53: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2020^2} < 1$

Lời giải:

Ta thấy bài toán có dạng tổng các lũy thừa bậc hai, nên ta sẽ phân tích tổng A như sau:

$$A = \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{2018.2019} + \frac{1}{2019.2020}$$

Đến đây ta sẽ so sánh với phân số có mẫu nhỏ hơn, vì yêu cầu bài toán là chứng minh nhỏ hơn.

$$\begin{aligned} A &< \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2019.2019} + \frac{1}{2019.2020} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2018} - \frac{1}{2019}\right) + \left(\frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}\right) \\ A &< \frac{1}{1} - \frac{1}{2020} < 1 \end{aligned}$$

Bài 54: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{3}{4}$

Lời giải:

Ta biến đổi:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{99.99} + \frac{1}{100.100} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{99.100} \\ A &< \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{100} = \frac{3}{4} - \frac{1}{100} < \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Bài 55: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{2}$

Lời giải:

Nhận thấy bài này là tổng lũy thừa mà cơ số ở mẫu là các số chẵn nên ta sẽ đưa về tổng lũy thừa mà cơ số ở mẫu là các số tự nhiên liên tiếp như sau:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2}\right) < \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{49.50}\right) \\ \Rightarrow A &< \frac{1}{4} \left(1 + 1 - \frac{1}{50}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{200} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bài 56: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{100}{2^{100}} < 2$

Lời giải :



Nhận thấy bài này có dạng tổng các phân số có mẫu là các lũy thừa cùng cơ số nên ta sẽ thực hiện phép tính tổng A

Việc tính chính xác được tổng A sẽ giảm bớt sự sai số, tuy nhiên không phải tổng nào cũng có thể tính được.

$$\text{Ta tính tổng } A \text{ như sau: } 2A = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{99}{2^{98}} + \frac{100}{2^{99}}$$

Sau đó lấy $2A$ trừ A theo vế và nhóm các phân số có cùng mẫu ta được:

$$A = \frac{3}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{99}} - \frac{100}{2^{100}}, \text{ đặt } B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{99}} \text{ và tính tổng } B \text{ theo cách như trên ta}$$

$$\text{được: } B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{99}}, \text{ thay vào } A \text{ ta được: } A = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{99}} - \frac{100}{2^{100}} < 2$$

Bài 57: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$

Lời giải:

$$\text{Tính tương tự như bài 5, ta có: } 2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}},$$

$$\text{Đặt } B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{99}}, \text{ và tính } B \text{ rồi thay vào tổng } A \text{ ta được}$$

$$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{99}}$$

$$\Rightarrow 2A = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow 2A < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow A < \frac{3}{4}$$

Bài 58: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot n} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

Bài 59: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{4}$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4n} < \frac{1}{4}$$

Bài 60: So sánh $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$ với $\frac{1}{2}$

Lời giải:



$$A = \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{4} \left(1 + 1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} < \frac{1}{2}$$

Bài 61: Chứng minh rằng với số tự nhiên $n > 2$ thì $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ không là số tự nhiên

Lời giải:

Ta có: $A < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} < 2$. Mặt khác ta thấy $A > 1$

Vậy ta có: $1 < A < 2$.

Bài 62: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2021^2} < \frac{2020}{2021}$

Lời giải:

$$A < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2020.2021} = 1 - \frac{1}{2021} = \frac{2020}{2021}$$

Bài 63: Cho $M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \dots + \frac{1}{13.16}$. So sánh M với $\frac{1}{3}$

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2022 - 2023

Bài 64: Cho $A = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{70}$ Chứng minh rằng: $\frac{4}{3} < A < \frac{5}{2}$

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Bài 65: Cho $A = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{98} + 4^{99}$, $B = 4^{100}$

Chứng minh rằng: $A < \frac{B}{3}$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 66: Tính tổng $S = \frac{6}{2.5} + \frac{6}{5.8} + \frac{6}{8.11} + \dots + \frac{6}{29.32}$ và chứng tỏ $S < 1$

Trích đề HSG THCS Phan Đình Phùng năm 2018-2019

Bài 67: Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} < \frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{16}$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 68. Chứng tỏ rằng $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$

Lời giải

Ta thấy $\frac{1}{41}$ đến $\frac{1}{80}$ có 40 phân số

$$\text{Vậy } \frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80}$$

$$= \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{61} + \frac{1}{62} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} \right) \quad (1)$$

$$\text{Vì } \frac{1}{41} > \frac{1}{42} > \dots > \frac{1}{60} \text{ và } \frac{1}{61} > \frac{1}{62} > \dots > \frac{1}{80} \quad (2)$$



Ta có:

$$\left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60} + \frac{1}{60}\right) + \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{80} + \dots + \frac{1}{80} + \frac{1}{80}\right)$$

$$= \frac{20}{60} + \frac{20}{80} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \quad (3)$$

Từ (1) (2) (3) suy ra: $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$

Bài 69. Cho biết $S = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{130}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{4} < S < \frac{91}{330}$

Lời giải

*Chứng minh $S < \frac{91}{330}$

$$S = \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{110}\right) + \left(\frac{1}{111} + \dots + \frac{1}{120}\right) + \left(\frac{1}{121} + \dots + \frac{1}{130}\right)$$

$$S < \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{110} + \dots + \frac{1}{110}\right) + \left(\frac{1}{120} + \dots + \frac{1}{120}\right)$$

$$S < \frac{1}{100} \cdot 10 + \frac{1}{110} \cdot 10 + \frac{1}{120} \cdot 10 = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} = \frac{181}{660} < \frac{182}{660} < \frac{91}{330}$$

Suy ra: $S < \frac{91}{330}$ (1)

*Chứng minh $\frac{1}{4} < S$

$$S > \left(\frac{1}{110} + \dots + \frac{1}{110}\right) + \left(\frac{1}{120} + \dots + \frac{1}{120}\right) + \left(\frac{1}{130} + \dots + \frac{1}{130}\right)$$

$$S > \frac{1}{110} \cdot 10 + \frac{1}{120} \cdot 10 + \frac{1}{130} \cdot 10 = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13}$$

$$S > \frac{431}{1716} > \frac{429}{1716} \text{ suy ra } S > \frac{1}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{1}{4} < S < \frac{91}{330}$

Bài 70. Cho $A = \frac{3}{2^2} + \frac{8}{3^2} + \frac{15}{4^2} + \dots + \frac{2023^2 - 1}{2023^2}$. Chứng minh rằng giá trị của A không phải là một tự nhiên.

Lời giải

$$A = \frac{2^2 - 1}{2^2} + \frac{3^2 - 1}{3^2} + \frac{4^2 - 1}{4^2} + \dots + \frac{2023^2 - 1}{2023^2}$$

$$A = 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + \dots + 1 - \frac{1}{2023^2}$$

$$A = 2022 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2023^2}\right)$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2023^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2022 \cdot 2023} = 1 - \frac{1}{2023} < 1$$

Do vậy $2021 < A < 2022$ nên giá trị của A không phải là một số tự nhiên

Bài 71. Cho tổng $T = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2016}{2^{2015}} + \frac{2017}{2^{2016}}$ So sánh T với 3

Lời giải

$$T = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2016}{2^{2015}} + \frac{2017}{2^{2016}}$$



$$2T = 2 + \frac{3}{2^1} + \frac{4}{2^2} + \dots + \frac{2016}{2^{2014}} + \frac{2017}{2^{2015}}$$

$$2T - T = 2 + \frac{3}{2^1} - \frac{2}{2^1} + \frac{4}{2^2} - \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{2016}{2^{2014}} - \frac{2015}{2^{2014}} + \frac{2017}{2^{2015}} - \frac{2016}{2^{2015}} - \frac{2017}{2^{2016}}$$

$$T = 2 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2015}} - \frac{2017}{2^{2016}}$$

Đặt $N = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2015}}$ suy ra $2N = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2014}}$

$$2N - N = 1 - \frac{1}{2^{2015}} \text{ suy ra } N < 1$$

Nên $T < 2 + 1 - \frac{2017}{2^{2016}} = 3 - \frac{2017}{2^{2016}}$ suy ra $T < 3$

Bài 72. Cho $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$. Chứng minh $A < \frac{3}{4}$

Lời giải

Ta có: $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$

$$A = \frac{1}{(1+3).2} + \frac{1}{(1+5).3} + \frac{1}{(1+7).4} + \dots + \frac{1}{(1+2017).1009}$$

$$= \frac{2}{2.4} + \frac{2}{3.6} + \frac{2}{4.8} + \dots + \frac{2}{1009.2018} = \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{1009.1009}$$

$$A < \frac{1}{2.2} + \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{1008.1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1008} - \frac{1}{1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1009} \right)$$

Suy ra $A < \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ suy ra $A < \frac{3}{4}$

Bài 73. Cho biểu thức $D = \frac{(2!)^2}{1^2} + \frac{(2!)^2}{3^2} + \frac{(2!)^2}{5^2} + \frac{(2!)^2}{7^2} + \dots + \frac{(2!)^2}{2015^2}$

So sánh D với 6. Biết $n! = 1.2.3 \dots n$ (n là số tự nhiên khác 0)

Lời giải

Ta có:

$$D = \frac{(2!)^2}{1^2} + \frac{(2!)^2}{3^2} + \frac{(2!)^2}{5^2} + \frac{(2!)^2}{7^2} + \dots + \frac{(2!)^2}{2015^2}$$

$$D = \frac{2^2}{1^2} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^2}{5^2} + \frac{2^2}{7^2} + \dots + \frac{2^2}{2015^2}$$

$$D = 4 + 2 \cdot \left(\frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \dots + \frac{2}{2015^2} \right)$$

$$D < 4 + 2 \cdot \left(\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{2013.2015} \right)$$



$$= 4 + 2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2015} \right)$$

$$= 4 + 2 \left(1 - \frac{1}{2015} \right) = 4 + 2 - \frac{2}{2015} < 6$$

Suy ra $D < 6$

Bài 74. Chứng minh $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{32} > 2$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} = \frac{4n-1}{4n^2-2n} > \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}; n \geq 2)$$

$$\text{Do đó: } \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{32} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{8} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2$$

Bài 75: So sánh: $E = \frac{2018^{99} - 1}{2018^{100} - 1}$ và $F = \frac{2018^{98} - 1}{2018^{99} - 1}$.

Trích đề HSG huyện Kinh Môn năm 2017 - 2018

Lời giải

$$\text{Ta có: } E = \frac{2018^{99} - 1}{2018^{100} - 1}$$

$$\text{Suy ra } 2018 \cdot E = \frac{2018^{100} - 2018}{2018^{100} - 1}$$

$$\text{Suy ra } 2018 \cdot E = 1 - \frac{2017}{2018^{100} - 1}$$

$$F = \frac{2018^{98} - 1}{2018^{99} - 1}$$

$$\text{Suy ra } 2018 \cdot F = \frac{2018^{99} - 2018}{2018^{99} - 1}$$

$$\text{Suy ra } 2018 \cdot F = 1 - \frac{2017}{2018^{99} - 1}$$

$$\text{Vì } \frac{2017}{2018^{100} - 1} < \frac{2017}{2018^{99} - 1} \text{ suy ra } 1 - \frac{2017}{2018^{100} - 1} > 1 - \frac{2017}{2018^{99} - 1}$$

Hay $2018 \cdot E > 2018 \cdot F$

Vậy $E > F$.

Bài 76: So sánh: $A = \frac{2012^{2012} + 1}{2012^{2013} + 1}$ và $B = \frac{2012^{2011} + 1}{2012^{2012} + 1}$.

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018 - 2019

Lời giải

$$\text{Vì } 2012^{2012} + 1 < 2012^{2013} + 1 \text{ suy ra } \frac{2012^{2012} + 1}{2012^{2013} + 1} < 1.$$

$$\frac{2012^{2012} + 1}{2012^{2013} + 1} < \frac{2012^{2012} + 1 + 2011}{2012^{2013} + 1 + 2011} = \frac{2012^{2012} + 2012}{2012^{2013} + 2012} = \frac{2012 \cdot (2012^{2011} + 1)}{2012 \cdot (2012^{2012} + 1)} = \frac{2012^{2011} + 1}{2012^{2012} + 1} = B$$

Vậy $A < B$.



Bài 77: Cho $A = \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \frac{1}{33} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60}$. Chứng tỏ rằng: $A < \frac{4}{5}$.

Trích đề HSG huyện Ba Vì năm 2017 -2018

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{40} \right) + \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{50} \right) + \left(\frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{60} \right) \\ &< \left(\frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{30} \right) + \left(\frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40} \right) + \left(\frac{1}{50} + \dots + \frac{1}{50} \right) = \frac{10}{30} + \frac{10}{40} + \frac{10}{50} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} < \frac{48}{60} = \frac{4}{5} \\ \text{Vậy } A &< \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Bài 78: Cho tổng gồm 2014 số hạng, $S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2014}{4^{2014}}$. Chứng minh $S < \frac{1}{2}$.

Trích đề HSG huyện hương Sơn năm 2018 -2019

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 4S &= 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \dots + \frac{2014}{4^{2013}}. \\ \text{Suy ra: } 3S &= 4S - S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2013}} - \frac{2014}{4^{2014}} \\ \text{Suy ra: } 3S &< 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2013}}. \\ \text{Đặt } M &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2013}}. \\ \text{Suy ra: } 4M &= 4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2012}} \\ \text{Ta có: } 3M &= 4M - M = 4 - \frac{1}{4^{2013}} < 4 \text{ suy ra } M < \frac{4}{3}. \\ \text{Do đó } 3S &< \frac{4}{3} \text{ suy ra } S < \frac{4}{9} < \frac{4}{8} = \frac{1}{2}. \\ \text{Vậy } S &< \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Bài 79: Chứng minh rằng: $\frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{4}$.

Trích đề HSG huyện Buôn Mê Thuật năm 2018 -2019

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có:} \\ A &= \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \\ A &= \frac{1}{(2.2)^2} + \frac{1}{(2.3)^2} + \frac{1}{(2.4)^2} + \dots + \frac{1}{(2.n)^2} \\ A &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \right) \end{aligned}$$



$$A < \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{4} \text{ (đpcm)}$$

Bài 80: Cho $M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \dots + \frac{1}{13.16}$. So sánh M với $\frac{1}{3}$

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2022 - 2023

Lời giải

Ta có:

$$M = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \frac{1}{13.16}$$

$$M = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{16} \right)$$

$$M = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{16} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{16} = \frac{15}{48}$$

Lại có: $\frac{1}{3} = \frac{16}{48}$

Vì $16 > 15$ do đó $\frac{16}{48} > \frac{15}{48}$ hay $M < \frac{1}{3}$

Vậy $M < \frac{1}{3}$

Bài 81: Cho $P = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^{200}}\right)$ so sánh P với 3

Trích đề HSG huyện Lạng Chánh năm 2022-2023

Lời giải

Ta có: $2^n > 2^n - 2 \quad (n \in \mathbb{N})$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^n - 2} \Rightarrow 1 + \frac{1}{2^n} < 1 + \frac{1}{2^n - 2}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2^n} < \frac{2^n - 1}{2(2^{n-1} - 1)}$$

Áp dụng vào P ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^{200}}\right) < \frac{3}{2} \cdot \frac{2^2 - 1}{2(2 - 1)} \cdot \frac{2^3 - 1}{2(2^2 - 1)} \cdot \frac{2^4 - 1}{2(2^3 - 1)} \dots \frac{2^{100} - 1}{2(2^{99} - 1)} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{2^{100} - 1}{2^{99}} = 3 \cdot \frac{2^{100} - 1}{2^{100}} = 3 - \frac{3}{2^{100}} < 3 \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Bài 82: Tìm giá trị nhỏ nhất của phân số $\frac{\overline{ab}}{a+b}$ (\overline{ab} là số có 2 chữ số).

Trích đề HSG huyện Tam Hưng năm 2018 - 2019

**Lời giải**

$$\text{Đặt } A = \frac{\overline{ab}}{a+b} = \frac{10a+b}{a+b} = 1 + \frac{9a}{a+b} = 1 + \frac{9}{1 + \frac{b}{a}}$$

A có GTNN khi và chỉ khi $1 + \frac{b}{a}$ có GTLN khi và chỉ khi $\frac{b}{a}$ có GTLN khi và chỉ khi $a=1$ và $b=9$.

$$\text{Khi đó số } \overline{ab} = 19. \text{ GTNN của } A \text{ là } A = \frac{\overline{ab}}{a+b} = \frac{19}{1+9} = 1,9.$$

Bài 83: Cho \overline{abc} là số tự nhiên có ba chữ số. Tìm giá trị lớn nhất của $A = \frac{\overline{abc}}{a+b+c} + 1918$.

Trích đề HSG huyện Kinh Môn năm 2017 - 2018

Lời giải

$$A = \frac{\overline{abc}}{a+b+c} + 1918 = \frac{100a+10b+c}{a+b+c} + 1918.$$

+) Nếu $b=c=0$ thì $A=100+1918=2018$.

+) Nếu b hoặc c khác 0 thì $A < \frac{100a+100b+100c}{a+b+c} + 1918 = 100 + 1918 = 2018$.

Nên $A \leq 2018$

Giá trị lớn nhất của A là 2018 khi $a \in \{1; 2; \dots; 9\}; b=c=0$.

Bài 84: Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{11}{17} < \frac{a}{b} < \frac{23}{29} \text{ và } 8b - 9a = 31.$$

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017 - 2018

Lời giải

Ta có: $8b - 9a = 31$ suy ra $b = \frac{31+9a}{8} = \frac{32-1+8a+a}{8} \in \square$ suy ra $(a-1):8$

Suy ra $a = 8q + 1$ ($q \in \square$)

$$b = \frac{31+9(8q+1)}{8} = 9q+5 \text{ suy ra } \frac{11}{17} < \frac{8q+1}{9q+5} < \frac{23}{29}$$

$11(9q+5) < 17(8q+1)$ suy ra $37q > 38$ suy ra $q > 1$.

$29(8q+1) < 23(9q+5)$ suy ra $25q < 86$ suy ra $q < 4$ suy ra $q \in \{2; 3\}$.

Với $q=2$ thì $a=8q+1=8.2+1=17$; $b=9q+5=9.2+5=23$.

Với $q=3$ thì $a=8q+1=8.3+1=25$; $b=9q+5=9.3+5=32$.



CHỦ ĐỀ 10: NGUYÊN LÝ DIRICHLET

A. PHẦN NỘI DUNG

Dạng 1: Dùng nguyên lý Dirichlet để chứng minh chia hết

Bài 1: Cho 10 số tự nhiên bất kỳ: a_1, a_2, \dots, a_{10} . Chứng minh rằng thế nào cũng có một số hoặc một tổng một số các số liên tiếp nhau trong dãy đều chia hết cho 10.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Lập dãy số

$$\text{Đặt } B_1 = a_1$$

$$B_2 = a_1 + a_2$$

$$B_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

.....

$$B_{10} = a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$$

Nếu tồn tại B_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 10$) nào đó chia hết cho 10 thì bài toán được chứng minh

Nếu không tồn tại B_i nào chia hết cho 10 ta làm như sau:

Ta đem B_i chia cho 10 sẽ được 10 số dư (các số dư $\in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$). Theo nguyên tắc Dirichle, phải có ít nhất 2 số dư bằng nhau. Các số $B_m - B_n$ chia hết cho 10 ($m > n$) (đpcm)

Bài 2: Cho 2023 số tự nhiên bất kỳ: $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2023}$. Chứng minh rằng tồn tại một số hoặc tổng một số các số liên tiếp nhau trong dãy trên chia hết cho 2023.

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2022 - 2023

Lời giải

$$\text{Đặt } B_1 = a_1$$

$$B_2 = a_1 + a_2$$

.....

$$B_{2023} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2023}$$

Nếu tồn tại B_i ($i = 1; 2; 3; \dots; 2023$) nào đó chia hết cho 2023 thì bài toán được chứng minh

Nếu không tồn tại B_i chia hết cho 2023 ta làm như sau

Ta đem B_i chia cho 2023 sẽ được 2022 số dư (các số dư thuộc $\{1; 2; 3; \dots; 2022\}$). Theo nguyên lý Dirichlet phải có ít nhất hai số có số dư bằng nhau, giả sử hai số đó là B_m ; và B_n suy ra $B_n - B_m$ ($n > m$) chia hết cho 2023, mà $B_n - B_m$ là một số hoặc là tổng số các số liên tiếp ta được điều phải chứng minh.

Bài 3: Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên chỉ được viết bởi chữ số 2 và chữ số 0 mà số đó chia hết cho 2015.

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015 - 2016

Lời giải



Xét 2016 số : 2; 22; 222;...; 222...2 số cuối cùng có 2016 chữ số 2 .

Các số này khi chia cho 2015 ta được 2016 số dư. Mà một số tự nhiên bất kỳ khi chia cho 2015 chỉ có thể có số dư là : 0; 1; 2;...; 2014 có 2015 khả năng dư.

Do đó theo nguyên tắc Dirichlê tồn tại hai số trong các số trên có cùng số dư khi chia cho 2015 . Hiệu của chúng có dạng 222...2000...0 chia hết cho 2015 .

Bài 4: Cho 2023 số tự nhiên bất kì: $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2023}$. Chứng minh rằng tồn tại một số hoặc tổng một số các số liên tiếp nhau trong dãy trên chia hết cho 2023.

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2022 - 2023

Lời giải

Đặt $B_1 = a_1$

$B_2 = a_1 + a_2$

.....

$B_{2023} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2023}$

Nếu tồn tại $B_i (i = 1; 2; 3; \dots; 2023)$ nào đó chia hết cho 2023 thì bài toán được chứng minh

Nếu không tồn tại B_i chia hết cho 2023 ta làm như sau

Ta đem B_i chia cho 2023 sẽ được 2022 số dư (các số dư thuộc $\{1; 2; 3; \dots; 2022\}$). Theo nguyên lý

Dirichlet phải có ít nhất hai số có số dư bằng nhau, giả sử hai số đó là B_m ; và B_n suy ra

$B_n - B_m (n > m)$ chia hết cho 2023, mà $B_n - B_m$ là một số hoặc là tổng số các số liên tiếp ta được điều phải chứng minh .

Bài 5: Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên chỉ được viết bởi chữ số 2 và chữ số 0 mà số đó chia hết cho 2015 .

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015 - 2016

Lời giải

Xét 2016 số : 2; 22; 222;...; 222...2 số cuối cùng có 2016 chữ số 2 .

Các số này khi chia cho 2015 ta được 2016 số dư. Mà một số tự nhiên bất kỳ khi chia cho 2015 chỉ có thể có số dư là : 0; 1; 2;...; 2014 có 2015 khả năng dư.

Do đó theo nguyên tắc Dirichlê tồn tại hai số trong các số trên có cùng số dư khi chia cho 2015 . Hiệu của chúng có dạng 222...2000...0 chia hết cho 2015 .

Bài 6: Cho 10 số tự nhiên bất kỳ: a_1, a_2, \dots, a_{10} . Chứng minh rằng thế nào cũng có một số hoặc một tổng một số các số liên tiếp nhau trong dãy đều chia hết cho 10.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Lập dãy số

Đặt $B_1 = a_1$



$$B_2 = a_1 + a_2$$

$$B_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

.....

$$B_{10} = a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$$

Nếu tồn tại B_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 10$) nào đó chia hết cho 10 thì bài toán được chứng minh

Nếu không tồn tại B_i nào chia hết cho 10 ta làm như sau:

Ta đem B_i chia cho 10 sẽ được 10 số dư (các số dư $\in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$). Theo nguyên tắc Dirichle, phải có ít nhất 2 số dư bằng nhau. Các số $B_m - B_n$ chia hết cho 10 ($m > n$) (đpcm)

Dạng 2: Dùng nguyên lý Dirichlet để chứng minh số bằng nhau

B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

Dạng 1: Dùng nguyên lý Dirichlet để chứng minh chia hết

Bài 1: Cho 10 số tự nhiên bất kỳ: a_1, a_2, \dots, a_{10} . Chứng minh rằng thế nào cũng có một số hoặc một tổng một số các số liên tiếp nhau trong dãy đều chia hết cho 10.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 2: Cho 2023 số tự nhiên bất kỳ: $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2023}$. Chứng minh rằng tồn tại một số hoặc tổng một số các số liên tiếp nhau trong dãy trên chia hết cho 2023.

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2022 - 2023

Bài 3: Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên chỉ được viết bởi chữ số 2 và chữ số 0 mà số đó chia hết cho 2015.

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015 - 2016

Bài 4: Cho 2023 số tự nhiên bất kỳ: $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2023}$. Chứng minh rằng tồn tại một số hoặc tổng một số các số liên tiếp nhau trong dãy trên chia hết cho 2023.

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2022 - 2023

Bài 5: Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên chỉ được viết bởi chữ số 2 và chữ số 0 mà số đó chia hết cho 2015.

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015 - 2016

Bài 6: Cho 10 số tự nhiên bất kỳ: a_1, a_2, \dots, a_{10} . Chứng minh rằng thế nào cũng có một số hoặc một tổng một số các số liên tiếp nhau trong dãy đều chia hết cho 10.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Dạng 2: Dùng nguyên lý Dirichlet để chứng minh số bằng nhau



C. SỬU TÀM CÁC BÀI TRONG CÁC ĐỀ CỦA NHỮNG NĂM TRƯỚC ĐÓ

(Phần này lấy các câu từ những năm trước, trước năm 2020-2021, tối thiểu 5 bài)

Bài 1: Chứng minh rằng: Trong 7 số tự nhiên liên tiếp luôn tìm được một số chia hết cho 7.

Lời giải

Giả sử không tìm được số nào trong 7 số tự nhiên liên tiếp đã cho mà chia hết cho 7.

Khi đó 7 số này chia cho 7 chỉ nhận được nhiều nhất là 6 số dư khác nhau $(1, 2, 3, \dots, 6)$, theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số chia hết cho 7 có cùng số dư, chẳng hạn là a và b với $a > b$, khi đó $a - b$ chia hết cho 7, mà $0 < a - b < 7$ nên mâu thuẫn. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 2: Cho sáu số nguyên dương đôi một khác nhau và đều nhỏ hơn 10. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 số trong đó có một số bằng tổng hai số còn lại.

Lời giải

Gọi sáu số nguyên dương đã cho là $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ (với $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_6 < 10$).

Đặt $A = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ gồm 5 phần tử có dạng a_m với $m \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Đặt $B = \{a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, a_5 - a_1, a_6 - a_1\}$ gồm 5 phần tử có dạng $a_n - a_1$ với $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ta thấy các phần tử của hai tập hợp A và B đều thuộc tập hợp gồm 9 phần tử $\{1; 2; 3; \dots; 9\}$ trong khi tổng số phần tử của hai tập hợp A và B là $5 + 5 = 10$.

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số bằng nhau mà chúng không thể thuộc cùng một tập hợp, nên có một số thuộc tập hợp A bằng một số thuộc tập hợp B , tức là $a_m = a_n - a_1$, do đó $a_n = a_m + a_1$.

Ba số a_m, a_n, a_1 đôi một khác nhau. Thật vậy, $a_m \neq a_n$ vì nếu $a_m = a_n$ thì $a_1 = 0$ trái với giả thiết của bài toán.

Vậy tồn tại ba số a_m, a_n, a_1 trong các số đã cho mà $a_n = a_m + a_1$ (đpcm).

Bài 3: Cho n số nguyên dương đôi một khác nhau và đều nhỏ hơn $2n - 2$. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 số sao cho một số bằng tổng hai số còn lại.

Lời giải

Gọi n số nguyên dương đã cho là $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ (với $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < 2n - 2$).

Đặt $A = \{a_2, a_3, a_4, \dots, a_n\}$ gồm $n - 1$ phần tử có dạng a_m với $m \in \{2, 3, 4, \dots, n\}$.

Đặt $B = \{a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, \dots, a_n - a_1\}$ gồm $n - 1$ phần tử có dạng $a_m - a_1$ với $m \in \{2, 3, 4, \dots, n\}$.

Ta thấy các phần tử của hai tập hợp A và B đều thuộc tập hợp gồm $2n - 3$ phần tử $\{1; 2; 3; \dots; 2n - 3\}$ trong khi tổng số phần tử của hai tập hợp A và B là $n - 1 + n - 1 = 2n - 2$.

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số bằng nhau mà chúng không thể thuộc cùng một tập hợp, nên có một số thuộc tập hợp A bằng một số thuộc tập hợp B , tức là $a_k = a_m - a_1$, do đó $a_m = a_k + a_1$.

Ba số a_m, a_k, a_1 đôi một khác nhau. Thật vậy, $a_m \neq a_k$ vì nếu $a_m = a_k$ thì $a_1 = 0$ trái với giả thiết của bài toán.



Vậy tồn tại ba số a_m, a_k, a_1 trong các số đã cho mà $a_m = a_k + a_1$ (đpcm).

Bài 4: Chứng minh rằng có thể tìm được một số có dạng $19781978\dots197800\dots0$ chia hết cho 2012.

Lời giải

Xét dãy số : $1978, 19781978, \dots, \underbrace{19781978\dots1978}_{2013 \text{ số } 1978}$. Khi chia các số hạng của dãy này cho 2012 sẽ có

hai phép chia có cùng số dư. Giả sử hai số hạng của dãy trong hai phép chia đó là $a = \underbrace{19781978\dots1978}_{m \text{ số } 1978}$

và $b = \underbrace{19781978\dots1978}_{n \text{ số } 1978}$ (với $1 \leq n < m \leq 2013$) .

Hiệu của a và b chia hết cho 2012 hay $a - b = \underbrace{19781978\dots197800\dots0}_{m-n \text{ số } 1978 \quad 4n \text{ số } 0} : 2012$ (đpcm)

Bài 5: Chứng minh rằng trong 19 số tự nhiên liên tiếp bất kì ta luôn tìm được một số có tổng các chữ số chia hết cho 10.

Lời giải

Trong 19 số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tại 10 số tự nhiên liên tiếp có chữ số hàng chục giống nhau, kí hiệu chữ số hàng chục đó là a (các chữ số hàng trăm, hàng nghìn, ... (nếu có) cũng giống nhau), còn các chữ số hàng đơn vị là dãy $0; 1; 2; 3; \dots; 9$.

Do đó tổng các chữ số của mỗi số cũng là một dãy 10 số tự nhiên liên tiếp, vì thế tồn tại số có tổng các chữ số chia hết cho 10.

Bài 6: Chứng minh rằng trong 11 số tự nhiên bất kì bao giờ cũng tồn tại ít nhất hai số có hiệu chia hết cho 10.

Lời giải

Với 11 số tự nhiên khi chia cho 10 ta được 11 số dư, mà một số tự nhiên bất kì khi chia cho 10 có 10 khả năng dư là $0; 1; 2; 3; \dots; 9$.

Vì có 11 số dư mà chỉ có 10 khả năng dư, theo nguyên lí Đê-rích-lê, tồn tại ít nhất hai số khi chia cho 10 có cùng số dư do đó hiệu của chúng chia hết cho 10 (đpcm).

Bài 7: Chứng minh rằng tồn tại số có dạng $19941994\dots199400\dots0$ chia hết cho 1995.

Lời giải

Ta có $19941994\dots199400\dots0 = 19941994\dots1994 \times 100\dots0$

Xét 1995 số có dạng: $1994 ; 19941994 ; \dots ;$

+) Nếu một trong các số trên chia hết cho 1995 thì dễ dàng có điều phải chứng minh.

+) Nếu các số trên đều không chia hết cho 1995 thì khi chia từng số cho 1995 sẽ chỉ có 1994 khả năng dư là $0; 1; 2; 3; \dots; 1994$.

Vì có 1995 số dư mà chỉ có 1994 khả năng dư, theo nguyên lí Đê-rích-lê tồn tại ít nhất hai số khi chia cho 1995 có cùng số dư, hiệu của chúng chia hết cho 1995.

Khi đó $19941994\dots199400\dots0$ chia hết cho 1995 (đpcm).

Bài 8: Có 10 đội bóng thi đấu với nhau vòng tròn một lượt, mỗi đội phải đấu đúng một trận với mỗi đội khác. Chứng minh rằng vào bất cứ lúc nào cũng có hai đội đã đấu số trận như nhau.

Lời giải

Rõ ràng nếu trong 10 đội bóng có 1 đội chưa đấu một trận nào thì trong các đội còn lại không có đội nào đã thi đấu 9 trận. Như vậy mỗi đội chỉ có số trận đấu hoặc từ 0 đến 8 hoặc từ 1 đến 9. Vậy theo nguyên lí Dirichlet phải có ít nhất hai đội có số trận đã đấu như nhau.



Bài 9: Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra không có ai bị điểm dưới 2 và chỉ có hai học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

Lời giải

Số học sinh có điểm kiểm tra từ 2 đến 9 là: $45 - 2 = 43$

Ta có: $43 = 8 \cdot 5 + 3$

Như vậy, khi phân chia 43 học sinh vào 8 loại điểm kiểm tra (từ 2 đến 9) thì theo nguyên lý Dirichlet luôn tồn tại ít nhất $5 + 1 = 6$ học sinh có điểm kiểm tra giống nhau (đpcm).

Bài 10: Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên gồm toàn chữ số 1 chia hết cho 2013.

Lời giải

Xét 2014 số có dạng $1; 11; 111; \dots; 11\dots1$. Theo nguyên lý Dirichlet thì tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 2013. Giả sử hai số đó là $a = \underbrace{11\dots1}_{n \text{ số } 1}$, $b = \underbrace{11\dots1}_{k \text{ số } 1}$ với $n > k$.

Khi đó $a - b = \underbrace{11\dots1}_{n-k \text{ số } 1} \cdot 10^k : 2013$.

Vì $(2013, 10^k) = 1$ nên số $c = \underbrace{11\dots1}_{n-k \text{ số } 1}$ chia hết cho 2013.

Bài 11: Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra không có ai bị điểm dưới 2 và chỉ có 2 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

Lời giải

Số học sinh có điểm kiểm tra từ 2 đến 9 là: $45 - 2 = 43$

Ta có: $43 = 8 \cdot 5 + 3$

Như vậy, khi phân chia 43 học sinh vào 8 loại điểm kiểm tra (từ 2 đến 9) thì theo nguyên lý Dirichlet luôn tồn tại ít nhất $5 + 1 = 6$ học sinh có điểm kiểm tra giống nhau (đpcm)

Bài 12: Có 5 đấu thủ thi đấu cờ, mỗi người đấu một trận với mỗi đấu thủ khác. Chứng minh rằng trong suốt thời gian thi đấu, luôn tồn tại hai đấu thủ có số trận đã đấu bằng nhau.

Phân tích: Ta thành lập được các cái lồng đó là các lồng chứa số trận đã đấu của các đấu thủ (có 4 lồng), số đấu thủ ta coi là các con thỏ.

Lời giải

Gọi 5 lồng 0, 1, 2, 3, 4 thứ tự chứa các đấu thủ đã đấu 0, 1, 2, 3, 4 trận. Cũng chú ý rằng hai lồng 0 và 4 không thể cùng chứa người. Như vậy chỉ có 4 lồng, mà có 5 người, tồn tại 2 người trong cùng một lồng tức là tồn tại hai đấu thủ có số trận đấu bằng nhau.

Bài 13: Cho 5 người tùy ý. Chứng minh rằng trong số đó có ít nhất 2 người có số người quen như nhau (hiểu rằng A quen B thì B quen A).

Phân tích: Chú trọng đến câu hỏi “2 người có số người quen như nhau”

Từ đó hiểu rằng 5 người đóng vai trò là số thỏ. Ta có thể tạo ra các lồng như sau:

Lồng 1 chứa số người không quen ai, lồng 2 chứa số người có số người quen là 1, ...

Lời giải



Gọi lồng 0 chứa những người có số người quen là 0 .

Gọi lồng 1 chứa những người có số người quen là 1 .

...

Gọi lồng 4 chứa những người có số người quen là 4 .

Như vậy ta có 5 lồng. Nếu lồng 0 có chứa ai đó thì lồng 4 phải trống. Ngược lại nếu lồng 4 có chứa ai đó thì lồng 0 phải trống.

Vậy thực chất chỉ có 4 lồng nhất 5 thỏ nên có ít nhất 2 người ở cùng một phòng tức là hai người đó có số người quen như nhau.

Bài 14: Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra không có ai bị điểm dưới 2 và chỉ có 2 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

Lời giải

Số học sinh có điểm kiểm tra từ 2 đến 9 là : $45 - 2 = 43$. Ta có : $43 = 8.5 + 3$

Như vậy , khi phân chia 43 học sinh vào 8 loại điểm kiểm tra (từ 2 đến 9) thì theo nguyên lí Dirichlet luôn tồn tại ít nhất $5 + 1 = 6$ học sinh có điểm kiểm tra giống nhau (đpcm)

Bài 15: Ở vòng chung kết cờ vua có 8 bạn tham gia. Hai bạn bất kỳ đều phải đấu với nhau một trận và người nào cũng phải gặp đủ 7 đấu thủ của mình. Chứng minh rằng trong mọi thời điểm của vòng chung kết, bao giờ cũng có hai đấu thủ đã đấu một số trận như nhau.

Lời giải

Giả sử số trận thi đấu của các bạn tham gia thi đấu cờ vua là $a_1; a_2; \dots; a_8$. Do hai bạn thi đấu với nhau một trận nên ta có $0 \leq a_i \leq 7, 1 \leq i \leq 8$. Xét các trường hợp sau:

- Tính đến thời điểm đó có một bạn chưa đấu trận nào suy ra không có bạn nào đấu đủ 7 trận.

Khi đó $0 \leq a_i \leq 6, \forall 1 \leq i \leq 8$ do đó tồn tại $a_k = a_m$ có nghĩa là có hai đấu thủ đã đấu một số trận như nhau.

- Tính đến thời điểm đang xét, mỗi bạn đều đã đấu ít nhất một ván.

Khi đó ta có $0 \leq a_i \leq 7 (1 \leq i \leq 8)$, do đó tồn tại $a_k = a_m$ có nghĩa là có hai đấu thủ đã đấu một số trận như nhau. Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 16: Cho 5 số tự nhiên bất kỳ. Chứng minh rằng bao giờ cũng chọn được 2 số có hiệu chia hết cho 4 .

Nhận xét: Coi 5 số tự nhiên là 5 thỏ. Xác định chuồng ở đây là gì ? có bao nhiêu chuồng ?

1 số tự nhiên khi chia cho 4 thì số dư ở đây chỉ là: $0; 1; 2; 3 \Rightarrow 4$ (chuồng).

Lời giải

Lấy 5 số tự nhiên bất kỳ đem chia cho 4 thì các số dư nhận được chỉ có thể là một trong 4 số:

$0; 1; 2; 3$. Như vậy 5 số tự nhiên mà chỉ có 4 khả năng dư khi chia cho 4 , vì vậy theo nguyên lí Dirichlet tồn tại 2 số chia cho 4 có cùng số dư. Suy ra hiệu 2 số này chia hết cho 4 (đpcm).

Bài 17: Chứng minh rằng trong 6 số tự nhiên bất kỳ luôn tồn tại hai số có hiệu chia hết cho 5

Lời giải

Lấy 6 số tự nhiên bất kỳ đem chia cho 5 thì các số dư nhận được chỉ có thể là một trong 5 số:



0,1,2,3,4. Như vậy 6 số tự nhiên mà chỉ có 5 khả năng dư khi chia cho 5, vì vậy theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 2 số chia cho 5 có cùng số dư. Suy ra hiệu 2 số này chia hết cho 5 (đpcm).

Bài 18: Một lớp học có 41 học sinh làm bài kiểm tra Toán, không ai có điểm dưới 3. Có bốn học sinh đạt điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất ta tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

Phân tích: Trong bài toán này số “thỏ” là $41 - 4 = 37$ thỏ từ 3 đến 9 điểm. “Chuồng” là 7 loại điểm nói trên (từ 3 đến 9). Phép chia 37 cho 7 được 5 còn dư nên có chuồng sẽ nhiều hơn 5 thỏ.

Lời giải

Vì có 41 học sinh làm bài kiểm tra nên có 41 đầu điểm từ 3 đến 10 (do không ai dưới điểm 3). Mà có 4 bạn đạt điểm 10 nên còn $41 - 4 = 37$ đầu điểm từ 3 đến 9 điểm. Mà từ 3 đến 9 có 7 điểm khác nhau. Theo nguyên lý Dirichlet thì 37 bài (số thỏ) có 7 loại điểm (chuồng) thì có ít nhất có

$$\left\lceil \frac{37-1}{7} \right\rceil + 1 = 6 \text{ bài cùng điểm nhau. (ĐPCM)}$$

Bài 19: Viết 20 số tự nhiên vào 20 miếng bìa. Chứng minh rằng ta có thể chọn một hay nhiều tấm bìa để tổng các số trên đó chia hết cho 20

Lời giải

Gọi 20 số tự nhiên ghi trên 20 tấm bìa là: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$. Xét các tổng sau:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

.....

$$S_{20} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20}$$

+) Nếu một trong các số trên $S_1; S_2; \dots; S_{20}$ chia hết cho 20 thì bài toán được chứng minh.

+) Ngược lại, Nếu các tổng trên không chia hết cho 20 :

Ta có: $20 = 1.19 + 1$, theo nguyên lý Di-rich-lê tồn tại ít nhất hai tổng có cùng số dư khi chia cho 20.

Suy ra: Hiệu của chúng chia hết cho 20 .

Giả sử có hai tổng: $S_n; S_m$ có cùng số dư khi chia cho 20 ($1 \leq n < m \leq 20$)

$$\text{Suy ra: } S_m - S_n : 20 \Rightarrow (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m) - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) : 20$$

Bài 20: Trong một phòng họp có n người, bao giờ cũng tìm được 2 người có số người quen trong số những người dự họp là như nhau.

Phân tích:

Phòng họp có n người, có thể coi là n “thỏ” rồi này. Bây giờ chúng ta xác định đâu là “chuồng”. Hãy đọc kỹ đề bài yêu cầu gì, chúng ta sẽ nhìn ra “chuồng” ngay. “tìm được 2 người có số người quen trong số những người dự họp là như nhau” \Rightarrow số người quen giống nhau, hay chính là nhốt cùng “chuồng”. Như vậy, số người quen chính là số “chuồng”.

Ta thấy 1 người có thể quen với 0 người, 1 người, hoặc nhiều nhất là $n - 1$ người trong cuộc họp....

Lời giải



Số người quen của mỗi người trong phòng họp nhận các giá trị từ 0 đến $n-1$. Rõ ràng trong phòng không thể đồng thời có người có số người quen là 0 (tức là không quen ai) và có người có số người quen là $n-1$ (tức là quen tất cả). Vì vậy theo số lượng người quen, ta chỉ có thể phân n người ra thành $n-1$ nhóm.

Vậy theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một nhóm có ít nhất 2 người, tức là luôn tìm được ít nhất 2 người có số người quen là như nhau.

Bài 21: Trong một lưới ô vuông kích thước 5.5, người ta điền ngẫu nhiên vào các ô một trong các giá trị 0,1 hoặc 2, sau đó tính tổng tất cả các ô theo hàng; theo cột và theo hai đường chéo. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai tổng có giá trị bằng nhau.

Phân tích:

Hãy đọc kỹ đề bài yêu cầu, chúng ta sẽ thấy “thỏ” và “chuồng”

“Tồn tại ít nhất 2 tổng có giá trị bằng nhau” \Rightarrow thỏ chính là tổng (hàng ngang, dọc, chéo), còn giá trị chính là “chuồng”. Vấn đề của chúng ta là chúng ta cần đi tìm các giá trị có thể của tổng. Ta thấy một tổng 5 ô sẽ có giá trị nhỏ nhất là 0, lớn nhất là 10.

Lời giải

Gọi các tổng lần lượt là S_1, S_2, \dots, S_{12} .

Có tất cả 12 tổng. Ta nhận thấy rằng các tổng này chỉ có thể nhận các giá trị là $\{0, 1, 2, \dots, 9, 10\}$. Có tất cả 11 giá trị khác nhau. Từ đó, theo nguyên lý Dirichlet ta suy ra điều cần chứng minh.

Bài 22: Giả sử trong một nhóm 6 người mỗi cặp hai hoặc là bạn hoặc là thù. Chứng tỏ rằng trong nhóm có ba người là bạn lẫn nhau hoặc có ba người là kẻ thù lẫn nhau.

Lời giải

Gọi A là một trong 6 người. Trong số 5 người của nhóm hoặc là có ít nhất ba người là bạn của A hoặc có ít nhất ba người là kẻ thù của A , điều này suy ra từ nguyên lý Dirichlet, vì những người khác chỉ có thể là bạn hoặc thù của A .

Trong trường hợp đầu ta gọi B, C, D là bạn của A . nếu trong ba người này có hai người là bạn thì họ cùng với A lập thành một bộ ba người bạn lẫn nhau, ngược lại, tức là nếu trong ba người B, C, D không có ai là bạn ai cả thì chứng tỏ họ là bộ ba người thù lẫn nhau.

Tương tự có thể chứng minh trong trường hợp có ít nhất ba người là kẻ thù của A . (ĐPCM)

Bài 23: Có 5 đấu thủ thi đấu cờ, mỗi người đấu một trận với mỗi đấu thủ khác. Chứng minh rằng trong suốt thời gian thi đấu, luôn tồn tại hai đấu thủ có số trận đã đấu bằng nhau.

Lời giải

Ta có số trận đã đấu của mỗi người có thể là 0,1,2,3,4. Nhưng vì không thể có cùng lúc một người đã đấu 4 trận và một người chưa đấu trận nào, nên có tối đa 4 loại số trận đã đấu.

Vận dụng nguyên lý Dirichlet ta có ít nhất có 2 người có cùng số trận đã đấu.



Bài 24: Có 6 học sinh làm một bài thi gồm 6 câu hỏi. Nếu trả lời đúng được 2 điểm, trả lời sai bị trừ 1 điểm. Nếu số điểm bị trừ nhiều hơn số điểm đạt được thì tính bị 0 điểm. Hỏi có thể luôn có 2 học sinh bằng điểm nhau được hay không???

Lời giải

Bài này đề bài lại hỏi theo kiểu có hay không, nhưng chúng ta hãy bình tĩnh. Nếu một khi chúng ta đã hiểu bản chất của bài toán dạng này thì sẽ không gì làm chúng ta sợ hay mất tự tin được cả.

“Hai học sinh bằng điểm nhau” \Rightarrow Học sinh chính là “thỏ”, điểm chính là “chuồng”.

Vấn đề bài toán trở thành đi tìm số điểm có thể (số chuồng), từ đó sẽ giúp chúng ta trả lời được câu hỏi của đề bài.

Đề thi gồm 6 bài, xảy ra các trường hợp sau:

- Đúng hết 6 câu \Rightarrow 12 điểm
- Đúng 5 câu, sai 1 câu $\Rightarrow 5 \times 2 - 1 = 9$ điểm
- Đúng 4 câu, sai 2 câu $\Rightarrow 4 \times 2 - 2 \times 1 = 6$ điểm
- Đúng 3 câu, sai 3 câu $\Rightarrow 3 \times 2 - 3 \times 1 = 3$ điểm
- Đúng 2 câu, sai 4 câu $\Rightarrow 2 \times 2 - 4 \times 1 = 0$ điểm
- Đúng dưới 2 câu \Rightarrow dễ thấy sẽ bị 0 điểm.

Nhìn lại ta thấy chỉ có 0, 3, 6, 9, 12 điểm tức là chỉ có 5 loại điểm, trong khi có 6 học sinh \Rightarrow có 2 học sinh cùng điểm.

Bài 25: Chứng minh rằng có thể tìm được một số có dạng $19781978\dots197800\dots0$ chia hết cho 2012.

Lời giải

Xét dãy số : $1978, 19781978, \dots, \underbrace{19781978\dots1978}_{2013 \text{ số } 1978}$. Khi chia các số hạng của dãy này cho 2012 sẽ có

hai phép chia có cùng số dư. Giả sử hai số hạng của dãy trong hai phép chia đó là $a = \underbrace{19781978\dots1978}_{m \text{ số } 1978}$

và $b = \underbrace{19781978\dots1978}_{n \text{ số } 1978}$ (với $1 \leq n < m \leq 2013$) .

Suy ra: Hiệu của a và b chia hết cho 2012 hay $a - b = \underbrace{19781978\dots1978}_{m-n \text{ số } 1978} \underbrace{00\dots0}_{4n \text{ số } 0} : 2012$ (đpcm)

Bài 26: Cho dãy m số tự nhiên bất kì a_1, a_2, \dots, a_m . Chứng minh rằng tồn tại một số hạng chia hết cho m hoặc tổng của một số hạng liên tiếp trong dãy chia hết cho m ($m \in \mathbb{N}^*$) .

Lời giải

Xét dãy số $b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, \dots, b_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m$

Khi chia các số hạng của dãy này cho m thì xảy ra một trong hai trường hợp sau :

- Có một phép chia hết , chẳng hạn : $b_k : m$, thì ta có điều phải chứng minh : $(a_1 + a_2 + \dots + a_k) : m$
- Không có phép chia hết nào .Khi đó tồn tại hai phép chia có cùng số dư , chẳng hạn là b_i, b_j chia cho m (với $1 \leq j < i \leq m$)



Suy ra : $(b_i - b_j) : m$ hay $(a_{j+1} + a_{j+2} + \dots + a_i) : m$, ta có điều phải chứng minh .

Bài 27: Cho bốn số tự nhiên phân biệt $a > b > c > d$. Chứng minh rằng:

$$P = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) : 12$$

Lời giải

Chia bốn số phân biệt a, b, c, d cho 3 luôn có hai phép chia có cùng số dư

Suy ra hiệu hai số bị chia đó chia hết cho 3 suy ra tồn tại hiệu hai số trong bốn số a, b, c, d chia hết cho 3. Do vậy P chia hết cho 3 (1)

Trong bốn số a, b, c, d nếu có hai số có cùng số dư khi chia cho 4 thì P chia hết cho 4 ; trái lại , khi chia bốn số đó cho 4 có đủ bốn trường hợp về số dư là 0, 1, 2, 3 suy ra trong bốn số a, b, c, d có hai số chẵn , hai số lẻ, giả sử a, c chẵn và b, d lẻ suy ra $(a-c) : 2$ và $(b-d) : 2$

Do vậy P chia hết cho 4 (2)

Từ (1), (2) và $(3, 4) = 1$ suy ra $P : 3, 4$ hay $P : 12$ (đpcm)

Bài 28: Chứng minh rằng trong 19 số tự nhiên liên tiếp bất kì ta luôn tìm được một số có tổng các chữ số chia hết cho 10.

Lời giải

Trong 19 số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tại 10 số tự nhiên liên tiếp có chữ số hàng chục giống nhau , kí hiệu chữ số hàng chục đó là a (các chữ số hàng trăm, hàng nghìn,(nếu có) cũng giống nhau), còn các chữ số hàng đơn vị là dãy 0; 1; 2; 3; ...; 9. Do đó tổng các chữ số của mỗi số cũng là một dãy 10 số tự nhiên liên tiếp, vì thế tồn tại số có tổng các chữ số chia hết cho 10 .

Bài 29: Cho 12 số tự nhiên khác nhau có hai chữ số. Chứng minh rằng không tồn tại hai số có hiệu là một số có hai chữ số như nhau.

Lời giải

Có 12 số tự nhiên khác nhau, mà chỉ có 11 số dư trong phép chia cho 11, do đó tồn tại hai số có cùng số dư trong phép chia cho 11. Hiệu của chúng là một số chia hết cho 11, đó là số có hai chữ số như nhau.

Bài 30: Chứng minh rằng trong 11 số tự nhiên bất kì bao giờ cũng tồn tại ít nhất 2 số có hiệu chia hết cho 10

Lời giải

Với 11 số tự nhiên khi chia cho 10 ta được 11 số dư, mà một số tự nhiên bất kì khi chia cho 10 có 10 khả năng dư là 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ... ; 9. Vì có 11 số dư mà chỉ có 10 khả năng dư, theo nguyên lí Đê-rích-lê, tồn tại ít nhất 2 số khi chia cho 10 có cùng số dư do đó hiệu của chúng chia hết cho 10 (đpcm).

Bài 31: Chứng minh rằng tồn tại số có dạng 19941994...199400...0 chia hết cho 1995.

Lời giải

Ta có $19941994...199400...0 = 19941994...1994 \times 100...0$



Xét 1995 số có dạng: 1994 ; 19941994 ; ... ;....

+) Nếu một trong các số trên chia hết cho 1995 thì dễ dàng có điều phải chứng minh.

+) Nếu các số trên đều không chia hết cho 1995 thì khi chia từng số cho 1995 sẽ chỉ có 1994 khả năng dư là 1 ; 2 ; 3 ; ... ; 1994.

Vì có 1995 số dư mà chỉ có 1994 khả năng dư, theo nguyên lí Đê-rích-lê tồn tại ít nhất hai số khi chia cho 1995 có cùng số dư, hiệu của chúng chia hết cho 1995

Khi đó 1994...199400...0 chia hết cho 1995 (đpcm).

Bài 32: Chứng minh rằng tồn tại một số chỉ viết bởi hai chữ số chia hết cho 2003.

Lời giải

Xét 2003 số có dạng 1 ; 11 ; 111 ; ... ;

+) Nếu có một số chia hết cho 2003 thì ta được số $11...1100...00 : 2003$ (đpcm)

+) Nếu không có một số nào chia hết cho 2003 thì sẽ có 2002 khả năng dư là 1 ; 2 ; 3 ; ... ; 2002.

Mà dãy số trên có 2003 số hạng nên sẽ có ít nhất hai số khi chia cho 2003 có cùng số dư

Gọi hai số có cùng số dư khi chia cho 2003 là $11...11$ và $111...111$ (với $n > m$)
 m chữ số 1 n chữ số 1

Khi đó $111...111 - 11...11 = 11...110...00000 : 2003$ (đpcm).
 n chữ số 1 m chữ số 1 $n-m$ chữ số 0

Bài 33: Có 10 đội bóng thi đấu với nhau vòng tròn một lượt , mỗi đội phải đấu đúng một trận với mỗi đội khác .Chứng minh rằng vào bất cứ lúc nào cũng có hai đội đã đấu số trận như nhau.

Lời giải

Rõ ràng nếu trong 10 đội bóng có một đội chưa đấu một trận nào thì trong các đội còn lại không có đội nào đã thi đấu 9 trận . Như vậy mỗi đội chỉ có số trận đấu hoặc từ 0 đến 8 hoặc từ 1 đến 9 .VẬY theo nguyên lí Dirichlet phải có ít nhất hai đội có số trận đã đấu như nhau.

Bài 34: Cho 100 số tự nhiên bất kì. Chứng minh rằng ta có thể chọn được ít nhất 15 số mà hiệu của hai số tùy ý chia hết cho 7 .

Trích đề HSG huyện Yên Lạc năm 2019-2020

Lời giải

Ta có 100 số khi đem chia cho 7 thì các số dư nhận nhiều nhất là 7 giá trị khác nhau.

Vì $100 = 7 \cdot 14 + 2$ nên theo nguyên lí Dirichlet ta sẽ tìm được 15 số mà khi chia cho 7 có cùng số dư.

VẬY hiệu của hai số tùy ý trong 15 số này thì chia hết cho 7 .

Bài 35: Một lớp học có 40 học sinh. Chứng minh rằng có ít nhất 4 học sinh có tháng sinh giống nhau.

Trích đề HSG quận Hải Châu năm 2010-2011

Lời giải



Một năm có 12 tháng. Ta phân chia 40 học sinh vào 12 tháng đó. Nếu mỗi tháng có không quá 3 học sinh được sinh ra thì số học sinh không quá: $3 \cdot 12 = 36$ mà $36 < 40$ vô lý.

Vậy tồn tại một tháng có ít nhất 4 học sinh trùng tháng sinh theo nguyên lý Dirichlet (trong bài này 40 tháng là 40 học sinh, 12 lồng là 12 tên tháng).

Bài 36: Có 17 nhà toán học viết thư cho nhau trao đổi về 3 vấn đề khoa học, mỗi người viết thư cho một người về một vấn đề. Chứng minh rằng ít nhất cũng có 3 nhà toán học trao đổi với nhau về cùng một vấn đề.

Trích đề HSG quận Cẩm Lệ năm 2011-2012

Lời giải

Gọi A là nhà toán học nào đó trong số 17 nhà toán học, thì nhà toán học A phải trao đổi với 16 nhà toán học còn lại về 3 vấn đề. Như vậy nhà toán học A phải trao đổi ít nhất với 6 nhà toán học về một vấn đề nào đó. Vì nếu chỉ trao đổi với số ít hơn 6 nhà toán học về một vấn đề thì số nhà toán học được trao đổi với A ít hơn 16. (Các bạn có thể diễn tả theo khái niệm "thỏ" và "lồng" để thấy ở đây đã áp dụng nguyên tắc Diriclé lần thứ nhất.)

- Gọi các nhà toán học trao đổi với nhà toán học A về một vấn đề nào đó (giả sử vấn đề I) là $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Như vậy có 6 nhà toán học trao đổi với nhau về 3 vấn đề (không kể trao đổi với A). Như vậy có 6 nhà toán học $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ trao đổi với nhau về 3 vấn đề I, II, III .

Có hai khả năng xảy ra:

a. Nếu có 2 nhà toán học nào đó cùng trao đổi với nhau về vấn đề I thế thì có 3 nhà toán học (kể cả A) trao đổi với nhau về vấn đề I . Bài toán được chứng minh.

b. Nếu không có nhà toán học nào trong 6 nhà toán học $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ trao đổi về vấn đề I thì ta có 6 nhà toán học chỉ trao đổi với nhau về 2 vấn đề II và III . Theo nguyên tắc Diriclé có ít nhất 3 nhà toán học cùng trao đổi với nhau về một vấn đề II hoặc III . Bài toán cũng được chứng minh.

Bài 37: Có 15 đội bóng tham dự giải vô địch quốc gia theo thể thức đấu vòng tròn một lượt. Chứng minh rằng tại bất kì thời điểm nào của giải ta luôn tìm được 2 đội có cùng số trận đấu bằng nhau tại thời điểm đó (có thể là 0 trận).

Trích đề HSG huyện Nghĩa Hưng năm 2011-2012

Lời giải



Số lần gặp nhau mà mỗi đội có, có thể nhận 15 giá trị khác nhau : 0;1;2;...;14 . Trong trường hợp này không thể áp dụng nguyên tắc Dirichlet được vì số đội cũng là 15 .

Hai trường hợp 0 trận và 14 trận không thể xảy ra đồng thời vì nếu có một đội nào chưa đấu trận nào thì đồng thời không thể có một đội nào đó đã đấu hết 14 trận, ngược lại nếu có một đội đã đá 14 trận thì không thể có 1 đội chưa đá một trận nào . Vì vậy số lần gặp nhau mà mỗi đội đã thực hiện trong thực tế có thể nhận thêm 14 giá trị từ 0 đến 13 hoặc từ 1 đến 14 . Khi đó theo nguyên tắc Dirichlet ta luôn có thể tìm được hai đội có cùng một số trận đấu .

Bài 38: Chứng minh rằng trong số 65 số tự nhiên bất kì bao giờ cũng tìm được 9 số mà tổng của chúng chia hết cho 9 .

Trích đề HSG huyện Ý Yên năm 2006-2007

Lời giải

-TH 1: Giả sử trong số 65 số đã cho ta tìm được 9 số mà số dư của chúng chia hết cho 9 nhận 9 giá trị khác nhau. Khi đó tổng các số này chia hết cho 9 vì tổng các số dư là :

$$0+1+2+\dots+8=36$$

-TH 2: Giả sử ta không tìm được 9 số như vậy. Khi đó số dư của các phép chia các số này cho 9 sẽ nhận nhiều hơn 8 giá trị khác nhau, vì: $65 = 8 \cdot 8 + 1$. Ở đây số k theo nguyên tắc Dirichlet là 8 . Nên ta sẽ có 9 con thỏ cùng chuồng .

Bài 39: Có 5 đấu thủ thi đấu cờ, mỗi người đấu một trận với mỗi đấu thủ khác. Chứng minh rằng trong suốt thời gian thi đấu, luôn tồn tại hai đấu thủ có số trận đã đấu bằng nhau.

Lời giải

Ta có số trận đã đấu của mỗi người có thể là 0,1,2,3,4. Nhưng vì không thể có cùng lúc một người đã đấu 4 trận và một người chưa đấu trận nào, nên có tối đa 4 loại số trận đã đấu.

Vận dụng nguyên lý Dirichlet ta có ít nhất có 2 người có cùng số trận đã đấu.

Bài 40: Trong một lưới ô vuông kích thước 5.5, người ta điền ngẫu nhiên vào các ô một trong các giá trị 0,1 hoặc 2, sau đó tính tổng tất cả các ô theo hàng ; theo cột và theo hai đường chéo. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai tổng có giá trị bằng nhau.

Lời giải

Gọi các tổng lần lượt là S_1, S_2, \dots, S_{12} .

Có tất cả 12 tổng. Ta nhận thấy rằng các tổng này chỉ có thể nhận các giá trị là $\{0, 1, 2, \dots, 9, 10\}$. Có tất cả 11 giá trị khác nhau. Từ đó, theo nguyên lý Dirichlet ta suy ra điều cần chứng minh.

Bài 41: Chứng minh rằng trong số 12 số tự nhiên bất kỳ có thể chọn hai số có hiệu chia hết cho 11.

Trích đề HSG huyện Xuân Trường, năm 2012 - 2013

Lời giải

Khi chia một số cho 11 có thể có 11 số dư là 0, 1, 2, ..., 10. Với 12 số tự nhiên chia cho 11 mà chỉ có 11 số dư nên theo nguyên lý Dirichlet sẽ có hai số có cùng số dư chẳng hạn là a và b ($a < b$)

Khi đó $b - a$ sẽ chia hết cho 11.

Cho 10 số nguyên dương đôi một khác nhau và đều nhỏ hơn 18. Chứng minh rằng sẽ tìm được 3 số sao cho một số bằng tổng hai số còn lại.

Trích đề HSG huyện Vụ Bản, năm 2012 - 2013

**Lời giải**

Gọi mười số nguyên dương đã cho là $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$

(với $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{10} < 18$).

Đặt $A = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}$ gồm 9 phần tử có dạng a_m với $m \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Đặt $B = \{a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, a_5 - a_1, a_6 - a_1, a_7 - a_1, a_8 - a_1, a_9 - a_1, a_{10} - a_1\}$ gồm 9 phần tử có dạng $a_n - a_1$ với $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Ta thấy các phần tử của hai tập hợp A và B đều thuộc tập hợp gồm 17 phần tử $\{1, 2, 3, \dots, 17\}$ trong khi tổng số phần tử của hai tập hợp A và B là $9 + 9 = 18$.

Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai số bằng nhau mà chúng không thể thuộc cùng một tập hợp, nên có một số thuộc tập hợp A bằng một số thuộc tập hợp B, tức là $a_m = a_n - a_1$, do đó $a_n = a_m + a_1$.

Ba số a_m, a_n, a_1 đôi một khác nhau. Thật vậy, $a_m \neq a_n$ vì nếu $a_m = a_n$ thì $a_1 = 0$ trái với giả thiết của bài toán.

Vậy tồn tại ba số a_m, a_n, a_1 trong các số đã cho mà $a_n = a_m + a_1$ (đpcm).

Bài 42: Chứng minh rằng $M = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ chia hết cho 12, Với a, b, c, d là các số nguyên

Lời giải

$$\text{Ta có : } M = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

Theo nguyên lí Dirichlet Trong 4 số a, b, c, d chắc chắn có hai số chia cho 3 có cùng số dư, Nên hiệu của chúng chia hết cho 3, Như vậy M đã chia hết cho 3

Lại có trong 4 số nguyên a,b,c,d hoặc có 2 số chẵn hoặc có 2 số lẻ, Giả sử a,b là số chẵn, c,d là số lẻ Khi đó $(a-b), (c-d) : 2 \Rightarrow (a-b)(c-d) : 4 \Rightarrow M : 4$

Hoặc nếu không phải như trên thì trong 4 số trên tồn tại 2 số chia 4 có cùng số dư nên hiệu của chúng chia hết cho 4, Khi đó $M : 4$

Như vậy M chia hết cho cả 3 và 4 nên M chia hết cho 12

Bài 43: Cho 2001 số tùy ý. Chứng minh rằng có thể chọn được một hoặc một số số nào đó mà tổng của chúng chia hết cho 2001

Lời giải

Gọi 2002 số đã cho là: $a_1, a_2, \dots, a_{2002}$. Xét 2002 tổng sau:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

.....

$$S_{2002} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2002}$$

Xét số dư của 2002 số đã cho cho 2001 thu được 2001 số dư, theo nguyên lí Dirichlet chắc chắn ít nhất hai số có cùng số dư khi chia 2001. Do đó có thể chọn được một hoặc một số số nào đó mà tổng của chúng chia hết cho 2001

Bài 44:



Chứng minh rằng tồn tại số có dạng $19941994\dots199400\dots0$ chia hết cho 1995.

Lời giải

Ta có $19941994\dots199400\dots0 = 19941994\dots1994 \times 100\dots0$

Xét 1995 số có dạng: $1994 ; 19941994 ; \dots ; .$

+) Nếu một trong các số trên chia hết cho 1995 thì dễ dàng có điều phải chứng minh.

+) Nếu các số trên đều không chia hết cho 1995 thì khi chia từng số cho 1995 sẽ chỉ có 1994 khả năng dư là $1 ; 2 ; 3 ; \dots ; 1994$.

Vì có 1995 số dư mà chỉ có 1994 khả năng dư, theo nguyên lí Đê-rích-lê tồn tại ít nhất 2 số khi chia cho 1995 có cùng số dư, hiệu của chúng chia hết cho 1995.

Khi đó $1994\dots199400\dots0$ chia hết cho 1995 (đpcm).

Bài 45:

Chứng minh tồn tại một bội của 2003 có dạng $20042004\dots2004$

Lời giải

Xét 2004 số có dạng: $a_1 = 2004 ; a_2 = 20042004 ; a_3 = 200420042004 ; \dots ; a_{2004} = \underbrace{20042004\dots2004}_{2004}$

Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại hai số khi chia cho 2003 có cùng số dư

Giả sử hai số đó là: $a_m ; a_n (1 \leq n < m \leq 2004)$

$$\Rightarrow a_m - a_n = \underbrace{20042004\dots2004}_{m-n} \underbrace{000\dots0}_{4n} = \underbrace{20042004\dots2004}_{m-n} \cdot 10^{4n} : 2003$$

Vì $(10^{4n}, 2003) = 1 \Rightarrow 20042004\dots2004 : 2003$

Bài 46: Chứng tỏ rằng tồn tại số có dạng $2022202220222022\dots2022$ chia hết cho 2023

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn

Lời giải

Xét 2024 số: $2022 ; 20222022 ; 202220222022 ; \dots ; \underbrace{202220222022\dots2022}_{2024 \text{ số } 2022}$. Khi chia 2024 số trên cho

2023 thì tồn tại hai số có cùng số dư (theo nguyên lí Dirichlet), giả sử là số $\underbrace{202220222022\dots2022}_{m \text{ số } 2022}$ và

$\underbrace{202220222022\dots2022}_{n \text{ số } 2022}$, không mất tính tổng quát giả sử $m > n$ ta được:

$$\begin{aligned} & \underbrace{202220222022\dots2022}_{m \text{ số } 2022} - \underbrace{202220222022\dots2022}_{n \text{ số } 2022} = \underbrace{202220222022\dots2022}_{m-n \text{ số } 2022} \underbrace{000\dots0}_{4.n \text{ số } 0} \\ & = \underbrace{202220222022\dots2022}_{m-n \text{ số } 2022} \cdot 10^{4n} : 2023 \end{aligned}$$

Do 10^{4n} không chia hết cho 2023 nên $\underbrace{202220222022\dots2022}_{m-n \text{ số } 2022} : 2023$



Bài 47: Cho 100 số tự nhiên bất kỳ. Chứng minh rằng ta có thể chọn được ít nhất 15 số mà hiệu hai số tùy ý chia hết cho 7

Trích đề HSG huyện Tam Dương năm 2017-2018

Lời giải

Ta có 100 số khi đem chia cho 7 thì các số dư nhận nhiều nhất là 7 giá trị khác nhau

Vì $100 = 7 \cdot 14 + 2$ nên theo nguyên lý Dirichle ta sẽ tìm được 15 số mà khi chia cho 7 có cùng số dư

Vậy hiệu của hai số tùy ý trong 15 số này thì chia hết cho 7

Bài 48: Cho các số tự nhiên từ 1 đến 11 được viết theo thứ tự tùy ý, sau đó đem cộng mỗi số với chỉ số thứ tự của nó ta được một tổng. Chứng minh rằng trong các tổng nhận được, bao giờ cũng tìm ra hai tổng mà hiệu của chúng là một số chia hết cho 10

Trích đề HSG cấp trường năm 2017-2018

Lời giải

Vì có 11 tổng mà chỉ có thể có 10 chữ số tận cùng là các số 0, 1, 2, ..., 9 nên luôn tìm được hai tổng có chữ số tận cùng giống nhau (nguyên lý Dirichle) nên hiệu của chúng là một số nguyên có tận cùng là 0 và là số chia hết cho 10.

Bài 49: Một hội nghị có 52 đại biểu được ngồi vào 10 dãy ghế. Chứng minh rằng tồn tại một dãy ghế có số đại biểu ngồi lớn hơn hoặc bằng 6.

Trích đề HSG huyện năm 2021-2022

Lời giải

Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại một dãy ghế có số đại biểu ngồi không ít hơn:

$$\left\lceil \frac{52}{10} \right\rceil + 1 = 6$$

Bài 50: Phòng họp có 10 người tùy ý. Chứng minh luôn có ít nhất 2 người có số người quen bằng nhau.

Trích đề HSG huyện năm 2021-2022

Lời giải

Có 10 người nên số người quen nhiều nhất của mỗi người là 9.

Phòng 0: chứa những người không có người quen.

Phòng 1: chứa những người có 1 người quen.

.....

Phòng 9: chứa những người có 9 người quen.

Để ý rằng phòng 0 và phòng 9 không thể cùng có người. Thực chất 10 người chứa trong phòng 9.

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất $1 + \frac{10-1}{9} = 2$ người, từ đó có điều phải chứng minh.

Bài 51: Một hội nghị có n người tham dự ($n \geq 2$). Chứng minh rằng luôn tồn tại hai người có số người quen bằng nhau.

Trích đề HSG huyện năm 2021-2022

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Lời giải

Có n người nên số người quen nhiều nhất của mỗi người là $n-1$.



Phòng 0 : chứa những người không có người quen.

Phòng 1: chứa những người có 1 người quen.

.....

Phòng $n-1$: chứa những người có $n-1$ người quen.

Đề ý rằng phòng 0 và phòng $n-1$ không thể cùng có người. Thực chất n người chứa trong phòng $n-1$.

Theo nguyên lí dirichlet tồn tại ít nhất $1 + \frac{n-1}{n-1} = 2$ người. từ đó có điều phải chứng minh.

Bài 52: Một lớp có 30 học sinh. Khi viết chính tả, em A phạm 14 lỗi, các em khác phạm ít hơn, chứng minh có ít nhất 3 học sinh không mắc lỗi hoặc mắc số lỗi bằng nhau.

Trích đề HSG huyện năm 2021-2022

Lời giải

Giả sử:

Phòng 1: chứa các em mắc 1 lỗi

Phòng 2 : chứa các em mắc 2 lỗi

.....

Phòng 14: chứa các em mắc 14 lỗi

Phòng 15: chứa các em không mắc lỗi.

Theo giả thiết phòng 14 chỉ có em A . suy ra còn lại 14 phòng chứa 29 em. Theo nguyên lí

Dirichlet tại một phòng chứa ít nhất $1 + \frac{29-1}{14} = 3$ em. Ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 53: Chứng minh rằng trong số 12 số tự nhiên bất kỳ có thể chọn hai số có hiệu chia hết cho 11.

Trích đề HSG huyện năm 2021-2022

Lời giải

Khi chia 12 số bất kỳ cho 11 ta sẽ có mỗi số có một số dư trong 11 số dư: 0,1,2,...,10. Do đó theo nguyên lí Dirichlet phải tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư. Hiệu của hai số đó sẽ chia hết cho 11

Bài 54: Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra, không có ai bị điểm dưới 2 , chỉ có 2 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau(điểm kiểm tra là một số tự nhiên).

Trích đề HSG huyện năm 2021-2022

Lời giải

Có $45-2=43$ học sinh phân chia vào 9 loại điểm (từ 2 đến 9). Giả sử mỗi loại trong 8 loại điểm đều là điểm của không quá 5 học sinh thì lớp học có không quá: $5 \cdot 8 = 40$ học sinh, ít hơn 43 học sinh. Vậy tồn tại 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau.

Trong bài toán này “thỏ” là 43 điểm kiểm tra từ 2 đến 9, “lồng” là 8 loại điểm nói trên. Tồn tại học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau.

Bài 55: Cho 12 số tự nhiên khác nhau có hai chữ số. Chứng minh rằng không tồn tại hai số có hiệu là một số có hai chữ số như nhau.

Trích đề HSG huyện năm 2021-2022

Lời giải

Có 12 số tự nhiên khác nhau, mà chỉ có 11 số dư trong phép chia cho 11, do đó tồn tại hai số có cùng số dư trong phép chia cho 11. Hiệu của chúng là một số chia hết cho 11, đó là số có hai chữ số như nhau.

Bài 56: Có 5 đấu thủ thi đấu cờ, mỗi người đấu một trận với mỗi đấu thủ khác. Chứng minh rằng trong suốt thời gian thi đấu, luôn tồn tại hai đấu thủ có số trận đã đấu bằng nhau.



Lời giải

Gọi 5 lồng 0,1,2,3,4 thứ tự chứa các đấu thủ đã đấu 0,1,2,3,4 trận. Cũng chú ý rằng hai lồng 0 và 4 không thể cùng chứa người. Như vậy chỉ có 4 lồng, mà có 5 người, tồn tại 2 người trong cùng một lồng tức là tồn tại hai đấu thủ có số trận đấu bằng nhau.

Bài 57: Cho 10 số nguyên dương đôi một khác nhau và đều nhỏ hơn 18. Chứng minh rằng sẽ tìm được 3 số sao cho một số bằng tổng hai số còn lại.

Trích đề HSG huyện Vụ Bản, năm 2012 - 2013

Lời giải

Gọi mười số nguyên dương đã cho là $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$

(với $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{10} < 18$).

Đặt $A = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}$ gồm 9 phần tử có dạng a_m với $m \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Đặt $B = \{a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, a_5 - a_1, a_6 - a_1, a_7 - a_1, a_8 - a_1, a_9 - a_1, a_{10} - a_1\}$ gồm 9 phần tử có dạng $a_n - a_1$ với $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Ta thấy các phần tử của hai tập hợp A và B đều thuộc tập hợp gồm 17 phần tử $\{1, 2, 3, \dots, 17\}$ trong khi tổng số phần tử của hai tập hợp A và B là $9 + 9 = 18$.

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số bằng nhau mà chúng không thể thuộc cùng một tập hợp, nên có một số thuộc tập hợp A bằng một số thuộc tập hợp B, tức là $a_m = a_n - a_1$, do đó $a_n = a_m + a_1$.

Ba số a_m, a_n, a_1 đôi một khác nhau. Thật vậy, $a_m \neq a_n$ vì nếu $a_m = a_n$ thì $a_1 = 0$ trái với giả thiết của bài toán.

Vậy tồn tại ba số a_m, a_n, a_1 trong các số đã cho mà $a_n = a_m + a_1$ (đpcm).

Bài 58: Có 5 đấu thủ thi đấu cờ, mỗi người đấu một trận với mỗi đấu thủ khác. Chứng minh rằng trong suốt thời gian thi đấu, luôn tồn tại hai đấu thủ có số trận đã đấu bằng nhau.

Lời giải

Ta có số trận đã đấu của mỗi người có thể là 0,1,2,3,4. Nhưng vì không thể có cùng lúc một người đã đấu 4 trận và một người chưa đấu trận nào, nên có tối đa 4 loại số trận đã đấu.

Vận dụng nguyên lý Dirichlet ta có ít nhất có 2 người có cùng số trận đã đấu.

Bài 59: Trong một lưới ô vuông kích thước 5.5, người ta điền ngẫu nhiên vào các ô một trong các giá trị 0,1 hoặc 2, sau đó tính tổng tất cả các ô theo hàng ; theo cột và theo hai đường chéo. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai tổng có giá trị bằng nhau.

Lời giải

Gọi các tổng lần lượt là S_1, S_2, \dots, S_{12} .

Có tất cả 12 tổng. Ta nhận thấy rằng các tổng này chỉ có thể nhận các giá trị là $\{0, 1, 2, \dots, 9, 10\}$. Có tất cả 11 giá trị khác nhau. Từ đó, theo nguyên lý Dirichlet ta suy ra điều cần chứng minh.

Bài 60: Chứng minh rằng trong số 12 số tự nhiên bất kỳ có thể chọn hai số có hiệu chia hết cho 11.

Trích đề HSG huyện Xuân Trường, năm 2012 - 2013

Lời giải



Khi chia một số cho 11 có thể có 11 số dư là $0, 1, 2, \dots, 10$. Với 12 số tự nhiên chia cho 11 mà chỉ có 11 số dư nên theo nguyên lí Dirichlet sẽ có hai số có cùng số dư chẳng hạn là a và b ($a < b$)

Khi đó $b - a$ sẽ chia hết cho 11.

Cho 10 số nguyên dương đôi một khác nhau và đều nhỏ hơn 18. Chứng minh rằng sẽ tìm được 3 số sao cho một số bằng tổng hai số còn lại.

Trích đề HSG huyện Vụ Bản, năm 2012 - 2013

Lời giải

Gọi mười số nguyên dương đã cho là $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$

(với $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{10} < 18$).

Đặt $A = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}$ gồm 9 phần tử có dạng a_m với $m \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Đặt $B = \{a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, a_5 - a_1, a_6 - a_1, a_7 - a_1, a_8 - a_1, a_9 - a_1, a_{10} - a_1\}$ gồm 9 phần tử có dạng $a_n - a_1$ với $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Ta thấy các phần tử của hai tập hợp A và B đều thuộc tập hợp gồm 17 phần tử $\{1, 2, 3, \dots, 17\}$ trong khi tổng số phần tử của hai tập hợp A và B là $9 + 9 = 18$.

Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai số bằng nhau mà chúng không thể thuộc cùng một tập hợp, nên có một số thuộc tập hợp A bằng một số thuộc tập hợp B, tức là $a_m = a_n - a_1$, do đó $a_n = a_m + a_1$.

Ba số a_m, a_n, a_1 đôi một khác nhau. Thật vậy, $a_m \neq a_n$ vì nếu $a_m = a_n$ thì $a_1 = 0$ trái với giả thiết của bài toán.

Vậy tồn tại ba số a_m, a_n, a_1 trong các số đã cho mà $a_n = a_m + a_1$ (đpcm).

Bài 61: Chứng minh rằng $M = (a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d)$ chia hết cho 12, Với a, b, c, d là các số nguyên

Lời giải

Ta có : $M = (a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d)$

Theo nguyên lí Dirichlet Trong 4 số a, b, c, d . chắc chắn có hai số chia cho 3 có cùng số dư, Nên hiệu của chúng chia hết cho 3, Như vậy M đã chia hết cho 3

Lại có trong 4 số nguyên a, b, c, d hoặc có 2 số chẵn hoặc có 2 số lẻ, Giả sử a, b là số chẵn, c, d là số lẻ Khi đó $(a - b), (c - d) : 2 \Rightarrow (a - b)(c - d) : 4 \Rightarrow M : 4$

Hoặc nếu không phải như trên thì trong 4 số trên tồn tại 2 số chia 4 có cùng số dư nên hiệu của chúng chia hết cho 4, Khi đó $M : 4$

Như vậy M chia hết cho cả 3 và 4 nên M chia hết cho 12

Bài 62: Cho 2001 số tùy ý. Chứng minh rằng có thể chọn được một hoặc một số số nào đó mà tổng của chúng chia hết cho 2001

Lời giải

Gọi 2002 số đã cho là: $a_1, a_2, \dots, a_{2002}$. Xét 2002 tổng sau:

$$S_1 = a_1$$



$$S_2 = a_1 + a_2$$

.....

$$S_{2002} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2002}$$

Xét số dư của 2002 số đã cho cho 2001 thu được 2021 số dư, theo nguyên lí Dirichlet chắc chắn ít nhất hai số có cùng số dư khi chia 2001. Do đó có thể chọn được một hoặc một số số nào đó mà tổng của chúng chia hết cho 2001

Bài 63:

Chứng minh rằng tồn tại số có dạng 19941994...199400...0 chia hết cho 1995.

Lời giải

Ta có 19941994...199400...0 = 19941994...1994 × 100...0

Xét 1995 số có dạng: 1994 ; 19941994 ; ... ; .

+) Nếu một trong các số trên chia hết cho 1995 thì dễ dàng có điều phải chứng minh.

+) Nếu các số trên đều không chia hết cho 1995 thì khi chia từng số cho 1995 sẽ chỉ có 1994 khả năng dư là 1 ; 2 ; 3 ; ... ; 1994.

Vì có 1995 số dư mà chỉ có 1994 khả năng dư, theo nguyên lí Đê-rích-lê tồn tại ít nhất 2 số khi chia cho 1995 có cùng số dư, hiệu của chúng chia hết cho 1995.

Khi đó 1994...199400...0 chia hết cho 1995 (đpcm).

Bài 64:

Chứng minh tồn tại một bội của 2003 có dạng 20042004...2004

Lời giải

Xét 2004 số có dạng: $a_1 = 2004$; $a_2 = 20042004$; $a_3 = 200420042004$; ...; $a_{2004} = \underbrace{20042004\dots2004}_{2004}$

Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại hai số khi chia cho 2003 có cùng số dư

Giả sử hai số đó là: $a_m; a_n (1 \leq n < m \leq 2004)$

$$\Rightarrow a_m - a_n = \underbrace{20042004\dots2004}_{m-n} \underbrace{000\dots0}_{4n} = \underbrace{20042004\dots2004}_{m-n} \cdot 10^{4n} : 2003$$

Vì $(10^{4n}, 2003) = 1 \Rightarrow 20042004\dots2004 : 2003$

Bài 65: Chứng tỏ rằng tồn tại số có dạng 2022202220222022...2022 chia hết cho 2023

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn

Lời giải

Xét 2024 số: 2022; 20222022; 202220222022; ... ; $\underbrace{202220222022\dots2022}_{2024 \text{ số } 2022}$. Khi chia 2024 số trên cho

2023 thì tồn tại hai số có cùng số dư (theo nguyên lí Dirichlet), giả sử là số $\underbrace{202220222022\dots2022}_{m \text{ số } 2022}$ và



$\underbrace{202220222022\dots2022}_{n \text{ số } 2022}$, không mất tính tổng quát giả sử $m > n$ ta được:

$$\begin{aligned} & \underbrace{202220222022\dots2022}_{m \text{ số } 2022} - \underbrace{202220222022\dots2022}_{n \text{ số } 2022} = \underbrace{202220222022\dots2022}_{m-n \text{ số } 2022} \overbrace{000\dots0}^{4.n \text{ số } 0} \\ & = \underbrace{202220222022\dots2022}_{m-n \text{ số } 2022} \cdot 10^{4n} : 2023 \end{aligned}$$

Do 10^{4n} không chia hết cho 2023 nên $\underbrace{202220222022\dots2022}_{m-n \text{ số } 2022} : 2023$

Bài 66: Cho 100 số tự nhiên bất kì. Chứng minh rằng ta có thể chọn được ít nhất 15 số mà hiệu của hai số tùy ý chia hết cho 7.

Trích đề HSG huyện Yên Lạc năm 2019-2020

Lời giải

Ta có 100 số khi đem chia cho 7 thì các số dư nhận nhiều nhất là 7 giá trị khác nhau.

Vì $100 = 7 \cdot 14 + 2$ nên theo nguyên lý Dirichlet ta sẽ tìm được 15 số mà khi chia cho 7 có cùng số dư.

Vậy hiệu của hai số tùy ý trong 15 số này thì chia hết cho 7.

Bài 67: Một lớp học có 40 học sinh. Chứng minh rằng có ít nhất 4 học sinh có tháng sinh giống nhau.

Trích đề HSG quận Hải Châu năm 2010-2011

Lời giải

Một năm có 12 tháng. Ta phân chia 40 học sinh vào 12 tháng đó. Nếu mỗi tháng có không quá 3 học sinh được sinh ra thì số học sinh không quá: $3 \cdot 12 = 36$ mà $36 < 40$ vô lý.

Vậy tồn tại một tháng có ít nhất 4 học sinh trùng tháng sinh theo nguyên lý Dirichlet (trong bài này 40 tháng là 40 học sinh, 12 lồng là 12 tên tháng).

Bài 68: Có 17 nhà toán học viết thư cho nhau trao đổi về 3 vấn đề khoa học, mỗi người viết thư cho một người về một vấn đề. Chứng minh rằng ít nhất cũng có 3 nhà toán học trao đổi với nhau về cùng một vấn đề.

Trích đề HSG quận Cẩm Lệ năm 2011-2012

Lời giải

Gọi A là nhà toán học nào đó trong số 17 nhà toán học, thì nhà toán học A phải trao đổi với 16 nhà toán

học còn lại về 3 vấn đề. Như vậy nhà toán học A phải trao đổi ít nhất với 6 nhà toán học về một vấn đề nào đó. Vì nếu chỉ trao đổi với số ít hơn 6 nhà toán học về một vấn đề thì số nhà toán học được trao đổi



với A ít hơn 16. (Các bạn có thể diễn tả theo khái niệm "thỏ" và "lông" để thấy ở đây đã áp dụng nguyên tắc Diriclé lần thứ nhất.)

- Gọi các nhà toán học trao đổi với nhà toán học A về một vấn đề nào đó (giả sử vấn đề I) là $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Như vậy có 6 nhà toán học trao đổi với nhau về 3 vấn đề (không kể trao đổi với A). Như vậy có 6 nhà toán học $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ trao đổi với nhau về 3 vấn đề I, II, III .

Có hai khả năng xảy ra:

a. Nếu có 2 nhà toán học nào đó cùng trao đổi với nhau về vấn đề I thế thì có 3 nhà toán học (kể cả A) trao đổi với nhau về vấn đề I . Bài toán được chứng minh.

b. Nếu không có nhà toán học nào trong 6 nhà toán học $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ trao đổi về vấn đề I thì ta có 6 nhà toán học chỉ trao đổi với nhau về 2 vấn đề II và III . Theo nguyên tắc Diriclé có ít nhất 3 nhà toán học cùng trao đổi với nhau về một vấn đề II hoặc III . Bài toán cũng được chứng minh.

Bài 69: Có 15 đội bóng tham dự giải vô địch quốc gia theo thể thức đấu vòng tròn một lượt. Chứng minh rằng tại bất kì thời điểm nào của giải ta luôn tìm được 2 đội có cùng số trận đấu bằng nhau tại thời điểm đó (có thể là 0 trận).

Trích đề HSG huyện Nghĩa Hưng năm 2011-2012

Lời giải

Số lần gặp nhau mà mỗi đội có, có thể nhận 15 giá trị khác nhau : 0;1;2;...;14. Trong trường hợp này không thể áp dụng nguyên tắc Dirichlet được vì số đội cũng là 15.

Hai trường hợp 0 trận và 14 trận không thể xảy ra đồng thời vì nếu có một đội nào chưa đấu trận nào thì đồng thời không thể có một đội nào đó đã đấu hết 14 trận, ngược lại nếu có một đội đã đá 14 trận thì không thể có 1 đội chưa đá một trận nào. Vì vậy số lần gặp nhau mà mỗi đội đã thực hiện trong thực tế có thể nhận thêm 14 giá trị từ 0 đến 13 hoặc từ 1 đến 14. Khi đó theo nguyên tắc Dirichlet ta luôn có thể tìm được hai đội có cùng một số trận đấu.

Bài 70: Chứng minh rằng trong số 65 số tự nhiên bất kì bao giờ cũng tìm được 9 số mà tổng của chúng chia hết cho 9.

Trích đề HSG huyện Ý Yên năm 2006-2007

Lời giải

-TH 1: Giả sử trong số 65 số đã cho ta tìm được 9 số mà số dư của chúng chia hết cho 9 nhận 9 giá trị khác nhau. Khi đó tổng các số này chia hết cho 9 vì tổng các số dư là :

$$0+1+2+\dots+8=36$$

-TH 2: Giả sử ta không tìm được 9 số như vậy. Khi đó số dư của các phép chia các số này cho 9 sẽ nhận nhiều hơn 8 giá trị khác nhau, vì: $65=8.8+1$. Ở đây số k theo nguyên tắc Dirichlet là 8. Nên ta sẽ có 9 con thỏ cùng chuồng.



Bài 71: Chứng minh rằng: Trong 7 số tự nhiên liên tiếp luôn tìm được một số chia hết cho 7.

Lời giải

Giả sử không tìm được số nào trong 7 số tự nhiên liên tiếp đã cho mà chia hết cho 7.

Khi đó 7 số này chia cho 7 chỉ nhận được nhiều nhất là 6 số dư khác nhau (1, 2, 3, ..., 6), theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số chia hết cho 7 có cùng số dư, chẳng hạn là a và b với $a > b$, khi đó $a - b$ chia hết cho 7, mà $0 < a - b < 7$ nên mâu thuẫn. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 72: Cho sáu số nguyên dương đôi một khác nhau và đều nhỏ hơn 10. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 số trong đó có một số bằng tổng hai số còn lại.

Lời giải

Gọi sáu số nguyên dương đã cho là $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ (với $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_6 < 10$).

Đặt $A = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ gồm 5 phần tử có dạng a_m với $m \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Đặt $B = \{a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, a_5 - a_1, a_6 - a_1\}$ gồm 5 phần tử có dạng $a_n - a_1$ với $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ta thấy các phần tử của hai tập hợp A và B đều thuộc tập hợp gồm 9 phần tử $\{1; 2; 3; \dots; 9\}$ trong khi tổng số phần tử của hai tập hợp A và B là $5 + 5 = 10$.

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số bằng nhau mà chúng không thể thuộc cùng một tập hợp, nên có một số thuộc tập hợp A bằng một số thuộc tập hợp B , tức là $a_m = a_n - a_1$, do đó $a_n = a_m + a_1$.

Ba số a_m, a_n, a_1 đôi một khác nhau. Thật vậy, $a_m \neq a_n$ vì nếu $a_m = a_n$ thì $a_1 = 0$ trái với giả thiết của bài toán.

Vậy tồn tại ba số a_m, a_n, a_1 trong các số đã cho mà $a_n = a_m + a_1$ (đpcm).

Bài 73: Cho n số nguyên dương đôi một khác nhau và đều nhỏ hơn $2n - 2$. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 số sao cho một số bằng tổng hai số còn lại.

Lời giải

Gọi n số nguyên dương đã cho là $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ (với $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < 2n - 2$).

Đặt $A = \{a_2, a_3, a_4, \dots, a_n\}$ gồm $n - 1$ phần tử có dạng a_m với $m \in \{2, 3, 4, \dots, n\}$.

Đặt $B = \{a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, \dots, a_n - a_1\}$ gồm $n - 1$ phần tử có dạng $a_m - a_1$ với $m \in \{2, 3, 4, \dots, n\}$.

Ta thấy các phần tử của hai tập hợp A và B đều thuộc tập hợp gồm $2n - 3$ phần tử $\{1; 2; 3; \dots; 2n - 3\}$ trong khi tổng số phần tử của hai tập hợp A và B là $n - 1 + n - 1 = 2n - 2$.

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số bằng nhau mà chúng không thể thuộc cùng một tập hợp, nên có một số thuộc tập hợp A bằng một số thuộc tập hợp B , tức là $a_k = a_m - a_1$, do đó $a_m = a_k + a_1$.

Ba số a_m, a_k, a_1 đôi một khác nhau. Thật vậy, $a_m \neq a_k$ vì nếu $a_m = a_k$ thì $a_1 = 0$ trái với giả thiết của bài toán.

Vậy tồn tại ba số a_m, a_k, a_1 trong các số đã cho mà $a_m = a_k + a_1$ (đpcm).

Bài 74: Chứng minh rằng có thể tìm được một số có dạng 19781978.....197800...0 chia hết cho 2012.

Lời giải



Xét dãy số : $1978, 19781978, \dots, \underbrace{19781978 \dots 1978}_{2013 \text{ số } 1978}$. Khi chia các số hạng của dãy này cho 2012 sẽ có hai phép chia có cùng số dư. Giả sử hai số hạng của dãy trong hai phép chia đó là $a = \underbrace{19781978 \dots 1978}_{m \text{ số } 1978}$ và $b = \underbrace{19781978 \dots 1978}_{n \text{ số } 1978}$ (với $1 \leq n < m \leq 2013$).

Hiệu của a và b chia hết cho 2012 hay $a - b = \underbrace{19781978 \dots 1978}_{m-n \text{ số } 1978} \underbrace{00 \dots 0}_{4n \text{ số } 0} : 2012$ (đpcm)

Bài 75: Chứng minh rằng trong 19 số tự nhiên liên tiếp bất kì ta luôn tìm được một số có tổng các chữ số chia hết cho 10.

Lời giải

Trong 19 số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tại 10 số tự nhiên liên tiếp có chữ số hàng chục giống nhau, kí hiệu chữ số hàng chục đó là a (các chữ số hàng trăm, hàng nghìn, ... (nếu có) cũng giống nhau), còn các chữ số hàng đơn vị là dãy $0; 1; 2; 3; \dots; 9$.

Do đó tổng các chữ số của mỗi số cũng là một dãy 10 số tự nhiên liên tiếp, vì thế tồn tại số có tổng các chữ số chia hết cho 10.

Bài 76: Chứng minh rằng trong 11 số tự nhiên bất kì bao giờ cũng tồn tại ít nhất hai số có hiệu chia hết cho 10.

Lời giải

Với 11 số tự nhiên khi chia cho 10 ta được 11 số dư, mà một số tự nhiên bất kì khi chia cho 10 có 10 khả năng dư là $0; 1; 2; 3; \dots; 9$.

Vì có 11 số dư mà chỉ có 10 khả năng dư, theo nguyên lí Đê-rích-lê, tồn tại ít nhất hai số khi chia cho 10 có cùng số dư do đó hiệu của chúng chia hết cho 10 (đpcm).

Bài 77: Chứng minh rằng tồn tại số có dạng $19941994 \dots 199400 \dots 0$ chia hết cho 1995.

Lời giải

Ta có $19941994 \dots 199400 \dots 0 = 19941994 \dots 1994 \times 100 \dots 0$

Xét 1995 số có dạng: $1994 ; 19941994 ; \dots ;$

+) Nếu một trong các số trên chia hết cho 1995 thì dễ dàng có điều phải chứng minh.

+) Nếu các số trên đều không chia hết cho 1995 thì khi chia từng số cho 1995 sẽ chỉ có 1994 khả năng dư là $0; 1; 2; 3; \dots; 1994$.

Vì có 1995 số dư mà chỉ có 1994 khả năng dư, theo nguyên lí Đê-rích-lê tồn tại ít nhất hai số khi chia cho 1995 có cùng số dư, hiệu của chúng chia hết cho 1995.

Khi đó $19941994 \dots 199400 \dots 0$ chia hết cho 1995 (đpcm).

Bài 78: Có 10 đội bóng thi đấu với nhau vòng tròn một lượt, mỗi đội phải đấu đúng một trận với mỗi đội khác. Chứng minh rằng vào bất cứ lúc nào cũng có hai đội đã đấu số trận như nhau.

Lời giải

Rõ ràng nếu trong 10 đội bóng có 1 đội chưa đấu một trận nào thì trong các đội còn lại không có đội nào đã thi đấu 9 trận. Như vậy mỗi đội chỉ có số trận đấu hoặc từ 0 đến 8 hoặc từ 1 đến 9. Vậy theo nguyên lí Dirichlet phải có ít nhất hai đội có số trận đã đấu như nhau.

Bài 79: Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra không có ai bị điểm dưới 2 và chỉ có hai học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

Lời giải



Số học sinh có điểm kiểm tra từ 2 đến 9 là: $45 - 2 = 43$

Ta có: $43 = 8.5 + 3$

Như vậy, khi phân chia 43 học sinh vào 8 loại điểm kiểm tra (từ 2 đến 9) thì theo nguyên lý Dirichlet luôn tồn tại ít nhất $5 + 1 = 6$ học sinh có điểm kiểm tra giống nhau (đpcm).

Bài 80: Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên gồm toàn chữ số 1 chia hết cho 2013.

Lời giải

Xét 2014 số có dạng $1; 11; 111; \dots; 11\dots1$. Theo nguyên lý Dirichlet thì tồn tại hai số có cùng số dư khi

2014 số

chia cho 2013. Giả sử hai số đó là $a = 11\dots1$, $b = 11\dots1$ với $n > k$.

$n \text{ số}$

$k \text{ số}$

Khi đó $a - b = 11\dots1.10^k : 2013$.

$n - k \text{ số}$

Vì $(2013, 10^k) = 1$ nên số $c = 11\dots1$ chia hết cho 2013.

$n - k \text{ số}$

Bài 81: Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra không có ai bị điểm dưới 2 và chỉ có 2 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

Lời giải

Số học sinh có điểm kiểm tra từ 2 đến 9 là: $45 - 2 = 43$

Ta có: $43 = 8.5 + 3$

Như vậy, khi phân chia 43 học sinh vào 8 loại điểm kiểm tra (từ 2 đến 9) thì theo nguyên lý Dirichlet luôn tồn tại ít nhất $5 + 1 = 6$ học sinh có điểm kiểm tra giống nhau (đpcm)

Bài 82: Có 5 đấu thủ thi đấu cờ, mỗi người đấu một trận với mỗi đấu thủ khác. Chứng minh rằng trong suốt thời gian thi đấu, luôn tồn tại hai đấu thủ có số trận đã đấu bằng nhau.

Phân tích: Ta thành lập được các cái lồng đó là các lồng chứa số trận đã đấu của các đấu thủ (có 4 lồng), số đấu thủ ta coi là các con thỏ.

Lời giải

Gọi 5 lồng 0, 1, 2, 3, 4 thứ tự chứa các đấu thủ đã đấu 0, 1, 2, 3, 4 trận. Cũng chú ý rằng hai lồng 0 và 4 không thể cùng chứa người. Như vậy chỉ có 4 lồng, mà có 5 người, tồn tại 2 người trong cùng một lồng tức là tồn tại hai đấu thủ có số trận đấu bằng nhau.

Bài 83: Cho 5 người tùy ý. Chứng minh rằng trong số đó có ít nhất 2 người có số người quen như nhau (hiểu rằng A quen B thì B quen A).

Phân tích: Chú trọng đến câu hỏi “2 người có số người quen như nhau”

Từ đó hiểu rằng 5 người đóng vai trò là số thỏ. Ta có thể tạo ra các lồng như sau:

Lồng 1 chứa số người không quen ai, lồng 2 chứa số người có số người quen là 1, ...

Lời giải

Gọi lồng 0 chứa những người có số người quen là 0.

Gọi lồng 1 chứa những người có số người quen là 1.

...

Gọi lồng 4 chứa những người có số người quen là 4.



Như vậy ta có 5 lồng. Nếu lồng 0 có chứa ai đó thì lồng 4 phải trống. Ngược lại nếu lồng 4 có chứa ai đó thì lồng 0 phải trống.

Vậy thực chất chỉ có 4 lồng nhất 5 thỏ nên có ít nhất 2 người ở cùng một phòng tức là hai người đó có số người quen như nhau.

Bài 84: Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra không có ai bị điểm dưới 2 và chỉ có 2 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

Lời giải

Số học sinh có điểm kiểm tra từ 2 đến 9 là : $45 - 2 = 43$. Ta có : $43 = 8.5 + 3$

Như vậy , khi phân chia 43 học sinh vào 8 loại điểm kiểm tra (từ 2 đến 9) thì theo nguyên lí Dirichlet luôn tồn tại ít nhất $5 + 1 = 6$ học sinh có điểm kiểm tra giống nhau (đpcm)

Bài 85: Ở vòng chung kết cờ vua có 8 bạn tham gia. Hai bạn bất kỳ đều phải đấu với nhau một trận và người nào cũng phải gặp đủ 7 đấu thủ của mình. Chứng minh rằng trong mọi thời điểm của vòng chung kết, bao giờ cũng có hai đấu thủ đã đấu một số trận như nhau.

Lời giải

Giả sử số trận thi đấu của các bạn tham gia thi đấu cờ vua là $a_1; a_2; \dots; a_8$. Do hai bạn thi đấu với nhau một trận nên ta có $0 \leq a_i \leq 7, 1 \leq i \leq 8$. Xét các trường hợp sau:

- Tính đến thời điểm đó có một bạn chưa đấu trận nào suy ra không có bạn nào đấu đủ 7 trận.

Khi đó $0 \leq a_i \leq 6, \forall 1 \leq i \leq 8$ do đó tồn tại $a_k = a_m$ có nghĩa là có hai đấu thủ đã đấu một số trận như nhau.

- Tính đến thời điểm đang xét, mỗi bạn đều đã đấu ít nhất một ván.

Khi đó ta có $0 \leq a_i \leq 7 (1 \leq i \leq 8)$, do đó tồn tại $a_k = a_m$ có nghĩa là có hai đấu thủ đã đấu một số trận như nhau. Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 86: Cho 5 số tự nhiên bất kỳ. Chứng minh rằng bao giờ cũng chọn được 2 số có hiệu chia hết cho 4.

Nhận xét: Coi 5 số tự nhiên là 5 thỏ. Xác định chuồng ở đây là gì ? có bao nhiêu chuồng ?

1 số tự nhiên khi chia cho 4 thì số dư ở đây chỉ là: $0; 1; 2; 3 \Rightarrow 4$ (chuồng).

Lời giải

Lấy 5 số tự nhiên bất kỳ đem chia cho 4 thì các số dư nhận được chỉ có thể là một trong 4 số: $0; 1; 2; 3$. Như vậy 5 số tự nhiên mà chỉ có 4 khả năng dư khi chia cho 4, vì vậy theo nguyên lí Dirichlet tồn tại 2 số chia cho 4 có cùng số dư. Suy ra hiệu 2 số này chia hết cho 4 (đpcm).

Bài 87: Chứng minh rằng trong 6 số tự nhiên bất kỳ luôn tồn tại hai số có hiệu chia hết cho 5

Lời giải

Lấy 6 số tự nhiên bất kỳ đem chia cho 5 thì các số dư nhận được chỉ có thể là một trong 5 số: $0, 1, 2, 3, 4$. Như vậy 6 số tự nhiên mà chỉ có 5 khả năng dư khi chia cho 5, vì vậy theo nguyên lí Dirichlet tồn tại 2 số chia cho 5 có cùng số dư. Suy ra hiệu 2 số này chia hết cho 5 (đpcm).

Bài 88: Một lớp học có 41 học sinh làm bài kiểm tra Toán, không ai có điểm dưới 3. Có bốn học sinh đạt điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất ta tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).



Phân tích: Trong bài toán này số “thỏ” là $41 - 4 = 37$ thỏ từ 3 đến 9 điểm. “Chuồng” là 7 loại điểm nói trên (từ 3 đến 9). Phép chia 37 cho 7 được 5 còn dư nên có chuồng sẽ nhiều hơn 5 thỏ.

Lời giải

Vì có 41 học sinh làm bài kiểm tra nên có 41 đầu điểm từ 3 đến 10 (do không ai dưới điểm 3). Mà có 4 bạn đạt điểm 10 nên còn $41 - 4 = 37$ đầu điểm từ 3 đến 9 điểm. Mà từ 3 đến 9 có 7 điểm khác nhau. Theo nguyên lí Dirichlet thì 37 bài (số thỏ) có 7 loại điểm (chuồng) thì có ít nhất có

$$\left\lceil \frac{37-1}{7} \right\rceil + 1 = 6 \text{ bài cùng điểm nhau. (ĐPCM)}$$

Bài 89: Viết 20 số tự nhiên vào 20 miếng bìa. Chứng minh rằng ta có thể chọn một hay nhiều tấm bìa để tổng các số trên đó chia hết cho 20

Lời giải

Gọi 20 số tự nhiên ghi trên 20 tấm bìa là: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$. Xét các tổng sau:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\dots\dots\dots \\ S_{20} &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20} \end{aligned}$$

+) Nếu một trong các số trên $S_1; S_2; \dots; S_{20}$ chia hết cho 20 thì bài toán được chứng minh.

+) Ngược lại, Nếu các tổng trên không chia hết cho 20 :

Ta có: $20 = 1.19 + 1$, theo nguyên lí Di-rich-lê tồn tại ít nhất hai tổng có cùng số dư khi chia cho 20 .
Suy ra: Hiệu của chúng chia hết cho 20 .

Giả sử có hai tổng: $S_n; S_m$ có cùng số dư khi chia cho 20 ($1 \leq n < m \leq 20$)

$$\text{Suy ra: } S_m - S_n : 20 \Rightarrow (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m) - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) : 20$$

Bài 90: Trong một phòng họp có n người, bao giờ cũng tìm được 2 người có số người quen trong số những người dự họp là như nhau.

Phân tích:

Phòng họp có n người, có thể coi là n “thỏ” rồi này. Bây giờ chúng ta xác định đâu là “chuồng”. Hãy đọc kỹ đề bài yêu cầu gì, chúng ta sẽ nhìn ra “chuồng” ngay. “tìm được 2 người có số người quen trong số những người dự họp là như nhau” => số người quen giống nhau, hay chính là nhốt cùng “chuồng”. Như vậy, số người quen chính là số “chuồng”.

Ta thấy 1 người có thể quen với 0 người, 1 người, hoặc nhiều nhất là $n - 1$ người trong cuộc họp....

Lời giải

Số người quen của mỗi người trong phòng họp nhận các giá trị từ 0 đến $n - 1$. Rõ ràng trong phòng không thể đồng thời có người có số người quen là 0 (tức là không quen ai) và có người có số người quen là $n - 1$ (tức là quen tất cả). Vì vậy theo số lượng người quen, ta chỉ có thể phân n người ra thành $n - 1$ nhóm.



Vậy theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một nhóm có ít nhất 2 người, tức là luôn tìm được ít nhất 2 người có số người quen là như nhau.

Bài 91: Trong một lưới ô vuông kích thước 5×5 , người ta điền ngẫu nhiên vào các ô một trong các giá trị 0, 1 hoặc 2, sau đó tính tổng tất cả các ô theo hàng; theo cột và theo hai đường chéo. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai tổng có giá trị bằng nhau.

Phân tích:

Hãy đọc kỹ đề bài yêu cầu, chúng ta sẽ thấy “thỏ” và “chuồng”

“Tồn tại ít nhất 2 tổng có giá trị bằng nhau” \Rightarrow thỏ chính là tổng (hàng ngang, dọc, chéo), còn giá trị chính là “chuồng”. Vấn đề của chúng ta là chúng ta cần đi tìm các giá trị có thể của tổng. Ta thấy một tổng 5 ô sẽ có giá trị nhỏ nhất là 0, lớn nhất là 10.

Lời giải

Gọi các tổng lần lượt là S_1, S_2, \dots, S_{12} .

Có tất cả 12 tổng. Ta nhận thấy rằng các tổng này chỉ có thể nhận các giá trị là $\{0, 1, 2, \dots, 9, 10\}$. Có tất cả 11 giá trị khác nhau. Từ đó, theo nguyên lí Dirichlet ta suy ra điều cần chứng minh.

Bài 92: Giả sử trong một nhóm 6 người mỗi cặp hai hoặc là bạn hoặc là thù. Chứng tỏ rằng trong nhóm có ba người là bạn lẫn nhau hoặc có ba người là kẻ thù lẫn nhau.

Lời giải

Gọi A là một trong 6 người. Trong số 5 người của nhóm hoặc là có ít nhất ba người là bạn của A hoặc có ít nhất ba người là kẻ thù của A , điều này suy ra từ nguyên lí Dirichlet, vì những người khác chỉ có thể là bạn hoặc thù của A .

Trong trường hợp đầu ta gọi B, C, D là bạn của A . nếu trong ba người này có hai người là bạn thì họ cùng với A lập thành một bộ ba người bạn lẫn nhau, ngược lại, tức là nếu trong ba người B, C, D không có ai là bạn ai cả thì chứng tỏ họ là bộ ba người thù lẫn nhau.

Tương tự có thể chứng minh trong trường hợp có ít nhất ba người là kẻ thù của A . (ĐPCM)

Bài 93: Có 5 đấu thủ thi đấu cờ, mỗi người đấu một trận với mỗi đấu thủ khác. Chứng minh rằng trong suốt thời gian thi đấu, luôn tồn tại hai đấu thủ có số trận đã đấu bằng nhau.

Lời giải

Ta có số trận đã đấu của mỗi người có thể là 0, 1, 2, 3, 4. Nhưng vì không thể có cùng lúc một người đã đấu 4 trận và một người chưa đấu trận nào, nên có tối đa 4 loại số trận đã đấu.

Vận dụng nguyên lí Dirichlet ta có ít nhất có 2 người có cùng số trận đã đấu.

Bài 94: Có 6 học sinh làm một bài thi gồm 6 câu hỏi. Nếu trả lời đúng được 2 điểm, trả lời sai bị trừ 1 điểm. Nếu số điểm bị trừ nhiều hơn số điểm đạt được thì tính bị 0 điểm. Hỏi có thể luôn có 2 học sinh bằng điểm nhau được hay không???

Lời giải



Bài này đề bài lại hỏi theo kiểu có hay không, nhưng chúng ta hãy bình tĩnh. Nếu một khi chúng ta đã hiểu bản chất của bài toán dạng này thì sẽ không gì làm chúng ta sợ hay mất tự tin được cả.

“Hai học sinh bằng điểm nhau” \Rightarrow Học sinh chính là “thỏ”, điểm chính là “chuồng”.

Vấn đề bài toán trở thành đi tìm số điểm có thể (số chuồng), từ đó sẽ giúp chúng ta trả lời được câu hỏi của đề bài.

Đề thi gồm 6 bài, xảy ra các trường hợp sau:

- Đúng hết 6 câu \Rightarrow 12 điểm
- Đúng 5 câu, sai 1 câu $\Rightarrow 5 \times 2 - 1 = 9$ điểm
- Đúng 4 câu, sai 2 câu $\Rightarrow 4 \times 2 - 2 \times 1 = 6$ điểm
- Đúng 3 câu, sai 3 câu $\Rightarrow 3 \times 2 - 3 \times 1 = 3$ điểm
- Đúng 2 câu, sai 4 câu $\Rightarrow 2 \times 2 - 4 \times 1 = 0$ điểm
- Đúng dưới 2 câu \Rightarrow dễ thấy sẽ bị 0 điểm.

Nhìn lại ta thấy chỉ có 0, 3, 6, 9, 12 điểm tức là chỉ có 5 loại điểm, trong khi có 6 học sinh \Rightarrow có 2 học sinh cùng điểm.

Bài 95: Chứng minh rằng có thể tìm được một số có dạng $19781978\dots197800\dots0$ chia hết cho 2012.

Lời giải

Xét dãy số : $1978, 19781978, \dots, \underbrace{19781978\dots1978}_{2013 \text{ số } 1978}$. Khi chia các số hạng của dãy này cho 2012 sẽ có

hai phép chia có cùng số dư. Giả sử hai số hạng của dãy trong hai phép chia đó là $a = \underbrace{19781978\dots1978}_{m \text{ số } 1978}$

và $b = \underbrace{19781978\dots1978}_{n \text{ số } 1978}$ (với $1 \leq n < m \leq 2013$).

Suy ra: Hiệu của a và b chia hết cho 2012 hay $a - b = \underbrace{19781978\dots197800\dots0}_{m-n \text{ số } 1978} : 2012$ (đpcm)

Bài 96: Cho dãy m số tự nhiên bất kì a_1, a_2, \dots, a_m . Chứng minh rằng tồn tại một số hạng chia hết cho m hoặc tổng của một số hạng liên tiếp trong dãy chia hết cho m ($m \in \mathbb{N}^*$).

Lời giải

Xét dãy số $b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, \dots, b_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m$

Khi chia các số hạng của dãy này cho m thì xảy ra một trong hai trường hợp sau :

- Có một phép chia hết, chẳng hạn : $b_k : m$, thì ta có điều phải chứng minh : $(a_1 + a_2 + \dots + a_k) : m$
- Không có phép chia hết nào. Khi đó tồn tại hai phép chia có cùng số dư, chẳng hạn là b_i, b_j

chia cho m (với $1 \leq j < i \leq m$)

Suy ra : $(b_i - b_j) : m$ hay $(a_{j+1} + a_{j+2} + \dots + a_i) : m$, ta có điều phải chứng minh.

Bài 97: Cho bốn số tự nhiên phân biệt $a > b > c > d$. Chứng minh rằng:

$$P = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) : 12$$

Lời giải



Chia bốn số phân biệt a, b, c, d cho 3 luôn có hai phép chia có cùng số dư

Suy ra hiệu hai số bị chia đó chia hết cho 3 suy ra tồn tại hiệu hai số trong bốn số a, b, c, d chia hết cho 3. Do vậy P chia hết cho 3 (1)

Trong bốn số a, b, c, d nếu có hai số có cùng số dư khi chia cho 4 thì P chia hết cho 4; trái lại, khi chia bốn số đó cho 4 có đủ bốn trường hợp về số dư là 0, 1, 2, 3 suy ra trong bốn số a, b, c, d có hai số chẵn, hai số lẻ, giả sử a, c chẵn và b, d lẻ suy ra $(a-c):2$ và $(b-d):2$

Do vậy P chia hết cho 4 (2)

Từ (1), (2) và $(3, 4) = 1$ suy ra $P:3, 4$ hay $P:12$ (đpcm)

Bài 98: Chứng minh rằng trong 19 số tự nhiên liên tiếp bất kì ta luôn tìm được một số có tổng các chữ số chia hết cho 10.

Lời giải

Trong 19 số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tại 10 số tự nhiên liên tiếp có chữ số hàng chục giống nhau, kí hiệu chữ số hàng chục đó là a (các chữ số hàng trăm, hàng nghìn,(nếu có) cũng giống nhau), còn các chữ số hàng đơn vị là dãy 0; 1; 2; 3; ...; 9. Do đó tổng các chữ số của mỗi số cũng là một dãy 10 số tự nhiên liên tiếp, vì thế tồn tại số có tổng các chữ số chia hết cho 10.

Bài 99: Cho 12 số tự nhiên khác nhau có hai chữ số. Chứng minh rằng không tồn tại hai số có hiệu là một số có hai chữ số như nhau.

Lời giải

Có 12 số tự nhiên khác nhau, mà chỉ có 11 số dư trong phép chia cho 11, do đó tồn tại hai số có cùng số dư trong phép chia cho 11. Hiệu của chúng là một số chia hết cho 11, đó là số có hai chữ số như nhau.

Bài 100: Chứng minh rằng trong 11 số tự nhiên bất kì bao giờ cũng tồn tại ít nhất 2 số có hiệu chia hết cho 10

Lời giải

Với 11 số tự nhiên khi chia cho 10 ta được 11 số dư, mà một số tự nhiên bất kì khi chia cho 10 có 10 khả năng dư là 0; 1; 2; 3; ...; 9. Vì có 11 số dư mà chỉ có 10 khả năng dư, theo nguyên lí Đê-rích-lê, tồn tại ít nhất 2 số khi chia cho 10 có cùng số dư do đó hiệu của chúng chia hết cho 10 (đpcm).

Bài 101: Chứng minh rằng tồn tại số có dạng 19941994...199400...0 chia hết cho 1995.

Lời giải

Ta có $19941994...199400...0 = 19941994...1994 \times 100...0$

Xét 1995 số có dạng: 1994; 19941994; ...;

+) Nếu một trong các số trên chia hết cho 1995 thì dễ dàng có điều phải chứng minh.

+) Nếu các số trên đều không chia hết cho 1995 thì khi chia từng số cho 1995 sẽ chỉ có 1994 khả năng dư là 1; 2; 3; ...; 1994.



Vì có 1995 số dư mà chỉ có 1994 khả năng dư, theo nguyên lí Đê-rích-lê tồn tại ít nhất hai số khi chia cho 1995 có cùng số dư, hiệu của chúng chia hết cho 1995

Khi đó $1994 \dots 199400 \dots 0$ chia hết cho 1995 (đpcm).

Bài 102: Chứng minh rằng tồn tại một số chỉ viết bởi hai chữ số chia hết cho 2003.

Lời giải

Xét 2003 số có dạng $1; 11; 111; \dots$;

+) Nếu có một số chia hết cho 2003 thì ta được số $11 \dots 1100 \dots 00 : 2003$ (đpcm)

+) Nếu không có một số nào chia hết cho 2003 thì sẽ có 2002 khả năng dư là $1; 2; 3; \dots; 2002$.

Mà dãy số trên có 2003 số hạng nên sẽ có ít nhất hai số khi chia cho 2003 có cùng số dư

Gọi hai số có cùng số dư khi chia cho 2003 là $11 \dots 11$ và $111 \dots 111$ (với $n > m$)
 m chữ số 1 n chữ số 1

Khi đó $111 \dots 111 - 11 \dots 11 = 11 \dots 110 \dots 00000 : 2003$ (đpcm).
 n chữ số 1 m chữ số 1 $n-m$ chữ số 0

Bài 103: Có 10 đội bóng thi đấu với nhau vòng tròn một lượt, mỗi đội phải đấu đúng một trận với mỗi đội khác. Chứng minh rằng vào bất cứ lúc nào cũng có hai đội đã đấu số trận như nhau.

Lời giải

Rõ ràng nếu trong 10 đội bóng có một đội chưa đấu một trận nào thì trong các đội còn lại không có đội nào đã thi đấu 9 trận. Như vậy mỗi đội chỉ có số trận đấu hoặc từ 0 đến 8 hoặc từ 1 đến 9. Vậy theo nguyên lí Dirichlet phải có ít nhất hai đội có số trận đã đấu như nhau.



PHIẾU BÀI TẬP SỐ 2

Bài 1: Chứng minh rằng: Trong 7 số tự nhiên liên tiếp luôn tìm được một số chia hết cho 7.

Bài 2: Cho sáu số nguyên dương đôi một khác nhau và đều nhỏ hơn 10. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 số trong đó có một số bằng tổng hai số còn lại.

Bài 3: Cho n số nguyên dương đôi một khác nhau và đều nhỏ hơn $2n-2$. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 số sao cho một số bằng tổng hai số còn lại.

Bài 4: Chứng minh rằng có thể tìm được một số có dạng $19781978\dots197800\dots0$ chia hết cho 2012.

Bài 5: Chứng minh rằng trong 19 số tự nhiên liên tiếp bất kì ta luôn tìm được một số có tổng các chữ số chia hết cho 10.

Bài 6: Chứng minh rằng trong 11 số tự nhiên bất kì bao giờ cũng tồn tại ít nhất hai số có hiệu chia hết cho 10.

Bài 7: Chứng minh rằng tồn tại số có dạng $19941994\dots199400\dots0$ chia hết cho 1995.

Bài 8: Có 10 đội bóng thi đấu với nhau vòng tròn một lượt, mỗi đội phải đấu đúng một trận với mỗi đội khác. Chứng minh rằng vào bất cứ lúc nào cũng có hai đội đã đấu số trận như nhau.

Bài 9: Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra không có ai bị điểm dưới 2 và chỉ có hai học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

Bài 10: Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên gồm toàn chữ số 1 chia hết cho 2013.

Bài 11: Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra không có ai bị điểm dưới 2 và chỉ có 2 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

Bài 12: Có 5 đấu thủ thi đấu cờ, mỗi người đấu một trận với mỗi đấu thủ khác. Chứng minh rằng trong suốt thời gian thi đấu, luôn tồn tại hai đấu thủ có số trận đã đấu bằng nhau.

Bài 13: Cho 5 người tùy ý. Chứng minh rằng trong số đó có ít nhất 2 người có số người quen như nhau (hiểu rằng A quen B thì B quen A).

Bài 14: Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra không có ai bị điểm dưới 2 và chỉ có 2 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

Bài 15: Ở vòng chung kết cờ vua có 8 bạn tham gia. Hai bạn bất kỳ đều phải đấu với nhau một trận và người nào cũng phải gặp đủ 7 đấu thủ của mình. Chứng minh rằng trong mọi thời điểm của vòng chung kết, bao giờ cũng có hai đấu thủ đã đấu một số trận như nhau.

Bài 16: Cho 5 số tự nhiên bất kỳ. Chứng minh rằng bao giờ cũng chọn được 2 số có hiệu chia hết cho 4.

Nhận xét: Coi 5 số tự nhiên là 5 thỏ. Xác định chuồng ở đây là gì? có bao nhiêu chuồng?

1 số tự nhiên khi chia cho 4 thì số dư ở đây chỉ là: $0; 1; 2; 3 \Rightarrow 4$ (chuồng).

Bài 17: Chứng minh rằng trong 6 số tự nhiên bất kì luôn tồn tại hai số có hiệu chia hết cho 5

Bài 18: Một lớp học có 41 học sinh làm bài kiểm tra Toán, không ai có điểm dưới 3. Có bốn học sinh đạt điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất ta tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

Bài 19: Viết 20 số tự nhiên vào 20 miếng bìa. Chứng minh rằng ta có thể chọn một hay nhiều tấm bìa để tổng các số trên đó chia hết cho 20



Bài 20: Trong một phòng họp có n người, bao giờ cũng tìm được 2 người có số người quen trong số những người dự họp là như nhau.

Bài 21: Trong một lưới ô vuông kích thước 5.5 , người ta điền ngẫu nhiên vào các ô một trong các giá trị $0, 1$ hoặc 2 , sau đó tính tổng tất cả các ô theo hàng; theo cột và theo hai đường chéo. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai tổng có giá trị bằng nhau.

Bài 22: Giả sử trong một nhóm 6 người mỗi cặp hai hoặc là bạn hoặc là thù. Chứng tỏ rằng trong nhóm có ba người là bạn lẫn nhau hoặc có ba người là kẻ thù lẫn nhau.

Bài 23: Có 5 đấu thủ thi đấu cờ, mỗi người đấu một trận với mỗi đấu thủ khác. Chứng minh rằng trong suốt thời gian thi đấu, luôn tồn tại hai đấu thủ có số trận đã đấu bằng nhau.

Bài 24: Có 6 học sinh làm một bài thi gồm 6 câu hỏi. Nếu trả lời đúng được 2 điểm, trả lời sai bị trừ 1 điểm. Nếu số điểm bị trừ nhiều hơn số điểm đạt được thì tính bị 0 điểm. Hỏi có thể luôn có 2 học sinh bằng điểm nhau được hay không???

Bài 25: Chứng minh rằng có thể tìm được một số có dạng $19781978\dots197800\dots0$ chia hết cho 2012.

Bài 26: Cho dãy m số tự nhiên bất kì a_1, a_2, \dots, a_m . Chứng minh rằng tồn tại một số hạng chia hết cho m hoặc tổng của một số hạng liên tiếp trong dãy chia hết cho m ($m \in \mathbb{N}^*$).

Bài 27: Cho bốn số tự nhiên phân biệt $a > b > c > d$. Chứng minh rằng:

$$P = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) : 12$$

Bài 28: Chứng minh rằng trong 19 số tự nhiên liên tiếp bất kì ta luôn tìm được một số có tổng các chữ số chia hết cho 10.

Bài 29: Cho 12 số tự nhiên khác nhau có hai chữ số. Chứng minh rằng không tồn tại hai số có hiệu là một số có hai chữ số như nhau.

Bài 30: Chứng minh rằng trong 11 số tự nhiên bất kì bao giờ cũng tồn tại ít nhất 2 số có hiệu chia hết cho 10

Bài 31: Chứng minh rằng tồn tại số có dạng $19941994\dots199400\dots0$ chia hết cho 1995.

Bài 32: Chứng minh rằng tồn tại một số chỉ viết bởi hai chữ số chia hết cho 2003.

Bài 33: Có 10 đội bóng thi đấu với nhau vòng tròn một lượt, mỗi đội phải đấu đúng một trận với mỗi đội khác. Chứng minh rằng vào bất cứ lúc nào cũng có hai đội đã đấu số trận như nhau.

Bài 34: Cho 100 số tự nhiên bất kì. Chứng minh rằng ta có thể chọn được ít nhất 15 số mà hiệu của hai số tùy ý chia hết cho 7.

Trích đề HSG huyện Yên Lạc năm 2019-2020

Bài 35: Một lớp học có 40 học sinh. Chứng minh rằng có ít nhất 4 học sinh có tháng sinh giống nhau.

Trích đề HSG quận Hải Châu năm 2010-2011



Bài 36: Có 17 nhà toán học viết thư cho nhau trao đổi về 3 vấn đề khoa học, mỗi người viết thư cho một người về một vấn đề. Chứng minh rằng ít nhất cũng có 3 nhà toán học trao đổi với nhau về cùng một vấn đề.

Trích đề HSG quận Cẩm Lệ năm 2011-2012

Bài 37: Có 15 đội bóng tham dự giải vô địch quốc gia theo thể thức đấu vòng tròn một lượt. Chứng minh rằng tại bất kì thời điểm nào của giải ta luôn tìm được 2 đội có cùng số trận đấu bằng nhau tại thời điểm đó (có thể là 0 trận).

Trích đề HSG huyện Nghĩa Hưng năm 2011-2012

Bài 38: Chứng minh rằng trong số 65 số tự nhiên bất kì bao giờ cũng tìm được 9 số mà tổng của chúng chia hết cho 9.

Bài 39: Có 5 đấu thủ thi đấu cờ, mỗi người đấu một trận với mỗi đấu thủ khác. Chứng minh rằng trong suốt thời gian thi đấu, luôn tồn tại hai đấu thủ có số trận đã đấu bằng nhau.

Bài 40: Trong một lưới ô vuông kích thước 5.5, người ta điền ngẫu nhiên vào các ô một trong các giá trị 0,1 hoặc 2, sau đó tính tổng tất cả các ô theo hàng; theo cột và theo hai đường chéo. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai tổng có giá trị bằng nhau.

Bài 41: Chứng minh rằng trong số 12 số tự nhiên bất kỳ có thể chọn hai số có hiệu chia hết cho 11.

Trích đề HSG huyện Xuân Trường, năm 2012 - 2013

Bài 42: Chứng minh rằng $M = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ chia hết cho 12, Với a, b, c, d là các số nguyên

Bài 43: Cho 2001 số tùy ý. Chứng minh rằng có thể chọn được một hoặc một số số nào đó mà tổng của chúng chia hết cho 2001

Bài 44:

Chứng minh rằng tồn tại số có dạng 19941994...199400...0 chia hết cho 1995.

Bài 45:

Chứng minh tồn tại một bội của 2003 có dạng 20042004...2004

Bài 46: Chứng tỏ rằng tồn tại số có dạng 2022202220222022...2022 chia hết cho 2023

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn

Bài 47: Cho 100 số tự nhiên bất kỳ. Chứng minh rằng ta có thể chọn được ít nhất 15 số mà hiệu hai số tùy ý chia hết cho 7

Trích đề HSG huyện Tam Dương năm 2017-2018

Bài 48: Cho các số tự nhiên từ 1 đến 11 được viết theo thứ tự tùy ý, sau đó đem cộng mỗi số với chỉ số thứ tự của nó ta được một tổng. Chứng minh rằng trong các tổng nhận được, bao giờ cũng tìm ra hai tổng mà hiệu của chúng là một số chia hết cho 10

Trích đề HSG cấp trường năm 2017-2018

Bài 49: Một hội nghị có 52 đại biểu được ngồi vào 10 dãy ghế. Chứng minh rằng tồn tại một dãy ghế có số đại biểu ngồi lớn hơn hoặc bằng 6.

Trích đề HSG huyện năm 2021-2022



Bài 50: Phòng họp có 10 người tùy ý. Chứng minh luôn có ít nhất 2 người có số người quen bằng nhau.

Trích đề HSG huyện năm 2021-2022

Bài 51: Một hội nghị có n người tham dự ($n \geq 2$). Chứng minh rằng luôn tồn tại hai người có số người quen bằng nhau.

Trích đề HSG huyện năm 2021-2022

Bài 52: Một lớp có 30 học sinh. Khi viết chính tả, em A phạm 14 lỗi, các em khác phạm ít hơn, chứng minh có ít nhất 3 học sinh không mắc lỗi hoặc mắc số lỗi bằng nhau.

Trích đề HSG huyện năm 2021-2022

Bài 53: Chứng minh rằng trong số 12 số tự nhiên bất kỳ có thể chọn hai số có hiệu chia hết cho 11.

Trích đề HSG huyện năm 2021-2022

Bài 54: Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra, không có ai bị điểm dưới 2, chỉ có 2 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên).

Trích đề HSG huyện năm 2021-2022

Bài 55: Cho 12 số tự nhiên khác nhau có hai chữ số. Chứng minh rằng không tồn tại hai số có hiệu là một số có hai chữ số như nhau.

Trích đề HSG huyện năm 2021-2022

Bài 56: Có 5 đấu thủ thi đấu cờ, mỗi người đấu một trận với mỗi đấu thủ khác. Chứng minh rằng trong suốt thời gian thi đấu, luôn tồn tại hai đấu thủ có số trận đã đấu bằng nhau.

Trích đề HSG huyện năm 2021-2022

Bài 57: Cho 10 số nguyên dương đôi một khác nhau và đều nhỏ hơn 18. Chứng minh rằng sẽ tìm được 3 số sao cho một số bằng tổng hai số còn lại.

Trích đề HSG huyện Vụ Bản, năm 2012 – 2013.

Bài 58: Có 5 đấu thủ thi đấu cờ, mỗi người đấu một trận với mỗi đấu thủ khác. Chứng minh rằng trong suốt thời gian thi đấu, luôn tồn tại hai đấu thủ có số trận đã đấu bằng nhau.

Bài 59: Trong một lưới ô vuông kích thước 5.5, người ta điền ngẫu nhiên vào các ô một trong các giá trị 0,1 hoặc 2, sau đó tính tổng tất cả các ô theo hàng; theo cột và theo hai đường chéo. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai tổng có giá trị bằng nhau.

Bài 60: Chứng minh rằng trong số 12 số tự nhiên bất kỳ có thể chọn hai số có hiệu chia hết cho 11.

Trích đề HSG huyện Xuân Trường, năm 2012 - 2013

Bài 61: Cho 10 số nguyên dương đôi một khác nhau và đều nhỏ hơn 18. Chứng minh rằng sẽ tìm được 3 số sao cho một số bằng tổng hai số còn lại.

Trích đề HSG huyện Vụ Bản, năm 2012 - 2013

Bài 62: Chứng minh rằng $M = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ chia hết cho 12, Với a, b, c, d là các số nguyên

Bài 63: Cho 2001 số tùy ý. Chứng minh rằng có thể chọn được một hoặc một số số nào đó mà tổng của chúng chia hết cho 2001

Bài 64: Chứng minh tồn tại một bội của 2003 có dạng 20042004...2004

Bài 65: Chứng tỏ rằng tồn tại số có dạng 2022202220222022...2022 chia hết cho 2023

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn

Bài 66: Cho 100 số tự nhiên bất kỳ. Chứng minh rằng ta có thể chọn được ít nhất 15 số mà hiệu của hai số tùy ý chia hết cho 7.



Trích đề HSG huyện Yên Lạc năm 2019-2020

Bài 67: Một lớp học có 40 học sinh. Chứng minh rằng có ít nhất 4 học sinh có tháng sinh giống nhau.

Trích đề HSG quận Hải Châu năm 2010-2011

Bài 68: Có 17 nhà toán học viết thư cho nhau trao đổi về 3 vấn đề khoa học, mỗi người viết thư cho một người về một vấn đề. Chứng minh rằng ít nhất cũng có 3 nhà toán học trao đổi với nhau về cùng một vấn đề.

Trích đề HSG quận Cẩm Lệ năm 2011-2012

Bài 69: Có 15 đội bóng tham dự giải vô địch quốc gia theo thể thức đấu vòng tròn một lượt. Chứng minh rằng tại bất kì thời điểm nào của giải ta luôn tìm được 2 đội có cùng số trận đấu bằng nhau tại thời điểm đó (có thể là 0 trận).

Trích đề HSG huyện Nghĩa Hưng năm 2011-2012

Bài 70: Chứng minh rằng trong số 65 số tự nhiên bất kì bao giờ cũng tìm được 9 số mà tổng của chúng chia hết cho 9.

Trích đề HSG huyện Ý Yên năm 2006-2007

Bài 71: Chứng minh rằng: Trong 7 số tự nhiên liên tiếp luôn tìm được một số chia hết cho 7.

Bài 72: Cho sáu số nguyên dương đôi một khác nhau và đều nhỏ hơn 10. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 số trong đó có một số bằng tổng hai số còn lại.

Bài 73: Cho n số nguyên dương đôi một khác nhau và đều nhỏ hơn $2n - 2$. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 số sao cho một số bằng tổng hai số còn lại.

Bài 74: Chứng minh rằng có thể tìm được một số có dạng $19781978\dots197800\dots0$ chia hết cho 2012.

Bài 75: Chứng minh rằng trong 19 số tự nhiên liên tiếp bất kì ta luôn tìm được một số có tổng các chữ số chia hết cho 10.

Bài 76: Chứng minh rằng trong 11 số tự nhiên bất kì bao giờ cũng tồn tại ít nhất hai số có hiệu chia hết cho 10.

Bài 77: Chứng minh rằng tồn tại số có dạng $19941994\dots199400\dots0$ chia hết cho 1995.

Bài 78: Có 10 đội bóng thi đấu với nhau vòng tròn một lượt, mỗi đội phải đấu đúng một trận với mỗi đội khác. Chứng minh rằng vào bất cứ lúc nào cũng có hai đội đã đấu số trận như nhau.

Bài 79: Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra không có ai bị điểm dưới 2 và chỉ có hai học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

Bài 80: Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên gồm toàn chữ số 1 chia hết cho 2013.

Bài 81: Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra không có ai bị điểm dưới 2 và chỉ có 2 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

Bài 82: Có 5 đấu thủ thi đấu cờ, mỗi người đấu một trận với mỗi đấu thủ khác. Chứng minh rằng trong suốt thời gian thi đấu, luôn tồn tại hai đấu thủ có số trận đã đấu bằng nhau.

Bài 83: Cho 5 người tùy ý. Chứng minh rằng trong số đó có ít nhất 2 người có số người quen như nhau (hiểu rằng A quen B thì B quen A).



Bài 84: Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra không có ai bị điểm dưới 2 và chỉ có 2 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

Bài 85: Ở vòng chung kết cờ vua có 8 bạn tham gia. Hai bạn bất kỳ đều phải đấu với nhau một trận và người nào cũng phải gặp đủ 7 đấu thủ của mình. Chứng minh rằng trong mọi thời điểm của vòng chung kết, bao giờ cũng có hai đấu thủ đã đấu một số trận như nhau.

Bài 86: Cho 5 số tự nhiên bất kỳ. Chứng minh rằng bao giờ cũng chọn được 2 số có hiệu chia hết cho 4.

Bài 87: Chứng minh rằng trong 6 số tự nhiên bất kỳ luôn tồn tại hai số có hiệu chia hết cho 5

Bài 88: Một lớp học có 41 học sinh làm bài kiểm tra Toán, không ai có điểm dưới 3. Có bốn học sinh đạt điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất ta tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

Bài 89: Viết 20 số tự nhiên vào 20 miếng bìa. Chứng minh rằng ta có thể chọn một hay nhiều tấm bìa để tổng các số trên đó chia hết cho 20

Bài 90: Trong một phòng họp có n người, bao giờ cũng tìm được 2 người có số người quen trong số những người dự họp là như nhau.

Bài 91: Trong một lưới ô vuông kích thước 5×5 , người ta điền ngẫu nhiên vào các ô một trong các giá trị 0, 1 hoặc 2, sau đó tính tổng tất cả các ô theo hàng; theo cột và theo hai đường chéo. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai tổng có giá trị bằng nhau.

Bài 92: Giả sử trong một nhóm 6 người mỗi cặp hai hoặc là bạn hoặc là thù. Chứng tỏ rằng trong nhóm có ba người là bạn lẫn nhau hoặc có ba người là kẻ thù lẫn nhau.

Bài 93: Có 5 đấu thủ thi đấu cờ, mỗi người đấu một trận với mỗi đấu thủ khác. Chứng minh rằng trong suốt thời gian thi đấu, luôn tồn tại hai đấu thủ có số trận đã đấu bằng nhau.

Bài 94: Có 6 học sinh làm một bài thi gồm 6 câu hỏi. Nếu trả lời đúng được 2 điểm, trả lời sai bị trừ 1 điểm. Nếu số điểm bị trừ nhiều hơn số điểm đạt được thì tính bị 0 điểm. Hỏi có thể luôn có 2 học sinh bằng điểm nhau được hay không?

Bài 95: Chứng minh rằng có thể tìm được một số có dạng $19781978 \dots 197800 \dots 0$ chia hết cho 2012.

Bài 96: Cho dãy m số tự nhiên bất kỳ a_1, a_2, \dots, a_m . Chứng minh rằng tồn tại một số hạng chia hết cho m hoặc tổng của một số hạng liên tiếp trong dãy chia hết cho m ($m \in \mathbb{N}^*$).

Bài 97: Cho bốn số tự nhiên phân biệt $a > b > c > d$. Chứng minh rằng:

$$P = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) : 12$$

Bài 98: Chứng minh rằng trong 19 số tự nhiên liên tiếp bất kỳ ta luôn tìm được một số có tổng các chữ số chia hết cho 10.

Bài 99: Cho 12 số tự nhiên khác nhau có hai chữ số. Chứng minh rằng không tồn tại hai số có hiệu là một số có hai chữ số như nhau.

Bài 100: Chứng minh rằng trong 11 số tự nhiên bất kỳ bao giờ cũng tồn tại ít nhất 2 số có hiệu chia hết cho 10



Bài 101: Chứng minh rằng tồn tại số có dạng $19941994\dots199400\dots0$ chia hết cho 1995.

Bài 102: Chứng minh rằng tồn tại một số chỉ viết bởi hai chữ số chia hết cho 2003.

Bài 103: Có 10 đội bóng thi đấu với nhau vòng tròn một lượt, mỗi đội phải đấu đúng một trận với mỗi đội khác. Chứng minh rằng vào bất cứ lúc nào cũng có hai đội đã đấu số trận như nhau.

CHỦ ĐỀ: HÌNH HỌC**A. PHẦN NỘI DUNG****III. Độ lớn góc****Dạng toán: Tính số đo góc**

Bài 1: Cho $xOy = 80^\circ$, tia Oz nằm giữa hai tia Ox và Oy sao cho $xOz = 30^\circ$. Số đo yOz là:

- A. 50° . B. 110° . C. 50° hoặc 110° . D. 80° .

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: A. 50°

Bài 2: Cho 2021 tia chung gốc O (trong đó không có hai tia nào đối nhau). Hỏi có bao nhiêu góc có hai cạnh là hai trong 2021 tia đã cho?

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Lời giải

Có 2021 tia gốc O . Chọn ra một tia, tia đó tạo với mỗi tia trong $(2021-1)$ tia tạo thành một góc.

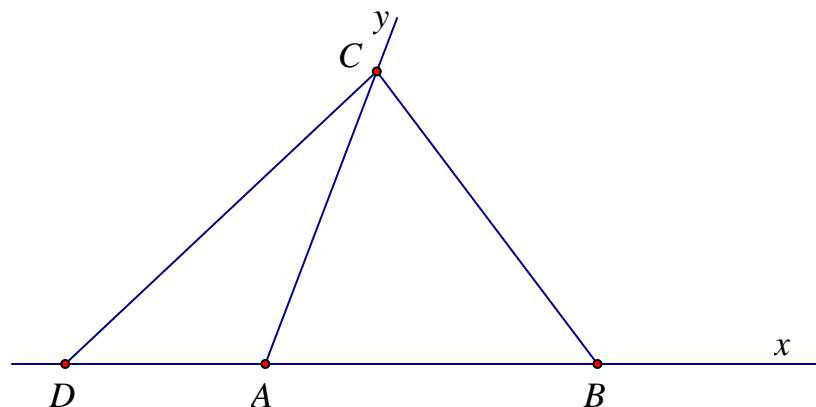
Làm như thế với 2021 tia ta có $2021 \cdot (2021-1) = 4082420$ góc, trong đó mỗi góc đã được tính hai lần.

Do đó số góc tạo thành là: $4082420 : 2 = 2041210$ (góc).

Bài 3: Cho xAy , trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = 6\text{cm}$. Trên tia đối của tia Ax lấy điểm D sao cho $AD = 4\text{cm}$.

- Tính BD .
- Lấy C là một điểm trên tia Ay . Biết $BCD = 80^\circ, BCA = 45^\circ$. Tính ACD .
- Biết $AK = 2\text{cm}$ (K thuộc BD). Tính BK .

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải

a) Ta có A nằm giữa D và B .

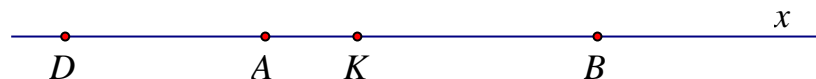
Suy ra: $BD = BA + AD = 6 + 4 = 10$ (cm).

b) Ta có tia CA nằm giữa 2 tia CB và CD .

Suy ra $ACD + ACB = BCD$

$$ACD = BCD - ACB = 80^\circ - 45^\circ = 35^\circ.$$

c) * Trường hợp 1: K thuộc tia Ax .



Ta có K nằm giữa A và B

Suy ra: $AK + KB = AB$

$$KB = AB - AK = 6 - 2 = 4$$
 (cm)

Vậy $KB = 4$ cm.

* Trường hợp 2: K thuộc tia đối của tia Ax



Ta có A nằm giữa K và B

Suy ra: $KB = KA + AB$

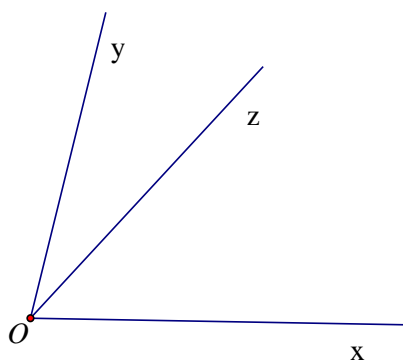
$$KB = 6 + 2 = 8$$
 (cm)

Vậy $KB = 4$ cm hoặc $KB = 8$ cm.

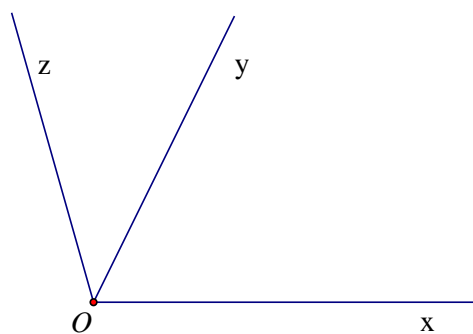
Bài 4: Trên cùng nửa mặt phẳng cho trước có bờ Ox vẽ hai tia Oy, Oz sao cho $\widehat{xOy} = 70^\circ, \widehat{yOz} = 30^\circ$
 Xác định số đo của \widehat{xOz}

Trích đề HSG huyện Tĩnh Gia năm 2018-2019

Lời giải



(A)



(B)

Trường hợp hình (A) khi Oz nằm giữa 2 tia Ox, Oy ta có:

$$\text{Số đo } \widehat{xOz} = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ$$

Trường hợp hình (B) khi Oz không nằm giữa hai tia Ox, Oy ta có

$$\widehat{xOy} = 70^\circ + 30^\circ = 100^\circ$$

Bài 5: Cho góc $\widehat{xBy} = 55^\circ$. Trên các tia Bx, By lần lượt lấy các điểm A, C ($A \neq B, B \neq C$). Trên đoạn thẳng AC lấy điểm D sao cho $\widehat{ABD} = 30^\circ$.

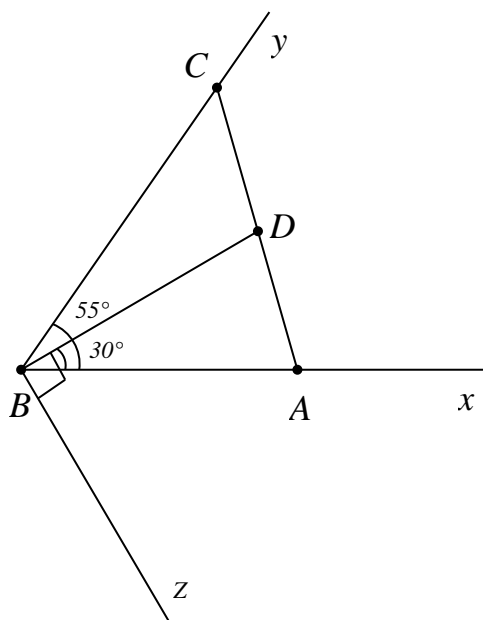
a) Tính độ dài AC , biết $AD = 4cm, CD = 3cm$.

b) Tính số đo góc DBC .

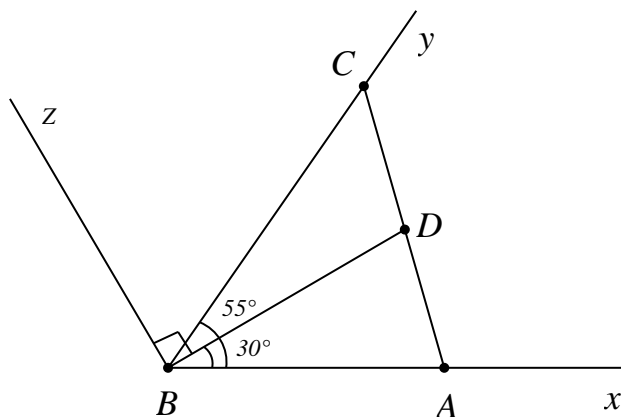
c) Từ B vẽ tia Bz sao cho $\widehat{DBz} = 90^\circ$. Tính số đo \widehat{ABz} .

Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015 -2016

Lời giải



Trường hợp 1



Trường hợp 2

a) Ta có D nằm giữa A và C .

$$AC = AD + CD = 4 + 3 = 7cm$$

b) Ta có tia BD nằm giữa hai tia BA và BC

Ta có đẳng thức: $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} + \widehat{DBC}$

$$\widehat{DBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABD} = 25^\circ$$

c) Xét hai trường hợp:

- Trường hợp 1: Tia BA nằm giữa hai tia Bz và BD .

Tính được $\widehat{ABz} = 90^\circ - \widehat{ABD} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

- Trường hợp 2: Tia BD nằm giữa hai tia Bz và BA .

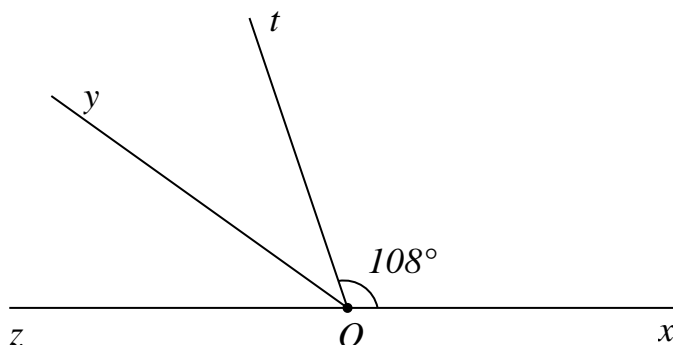
Tính được $\widehat{ABz} = 90^\circ + \widehat{ABD} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$.

Bài 6: Cho hai góc \widehat{xOy} và \widehat{yOz} kề bù sao cho $\widehat{xOy} = 4 \widehat{yOz}$.

- a) Tính số đo mỗi góc có trên hình vẽ?
 b) Vẽ tia Ot sao cho $xOt = 108^\circ$. Tính góc tOy ?

Trích đề HSG huyện Vĩnh Tường năm 2021 - 2022

Lời giải



- a) Có góc xOy và yOz là hai góc kề bù

$$xOy + yOz = 180^\circ$$

Mà $xOy = 4 yOz$

$$4 yOz + yOz = 180^\circ$$

$$5 yOz = 180^\circ$$

$$yOz = 36^\circ$$

$$xOy = 4.36 = 144^\circ.$$

Vậy $xOy = 144^\circ$; $yOz = 36^\circ$.

- b) Ta có O nằm giữa Ox và Oy .

Ta có $xOt + tOy = xOy$

Có $xOt = 108^\circ$

$$108^\circ + tOy = 144^\circ$$

$$tOy = 144 - 108 = 36^\circ.$$

Vậy $tOy = 36^\circ$.

Bài 7: Cho xOy và yOz là hai góc kề bù. Góc yOz bằng 30°

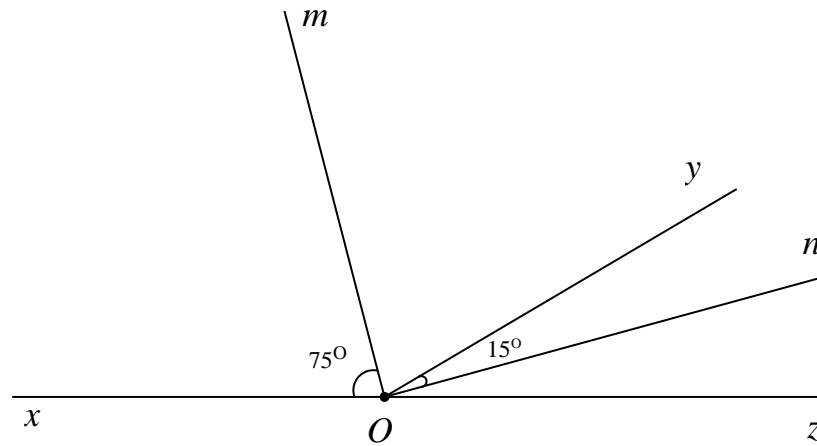
- a) Vẽ tia Om nằm trong góc xOy sao cho $xOm = 75^\circ$; tia On nằm trong yOz sao cho $yOn = 15^\circ$
 b) Hình vẽ trên có mấy góc?
 c) Nếu có n tia chung gốc thì sẽ tạo nên bao nhiêu góc ?

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Lời giải

- a) Vẽ được góc xOy và góc yOz kề bù và $yOz = 30^\circ$
 Vẽ được tia Om thỏa mãn điều kiện

Vẽ được tia On thỏa mãn điều kiện



- b) Hình vẽ trên có 10 góc
 c) Lập luận : từ hình vẽ trên ta có mỗi tia với 1 tia còn lại tạo thành 1 góc. Xét 1 tia, tia đó cùng với 4 tia còn lại tạo thành 4 góc. Làm như vậy với 5 tia ta được 5.4 góc. Nhưng mỗi góc đã được tính 2 lần, do đó có tất cả là $\frac{5.4}{2} = 10$ góc

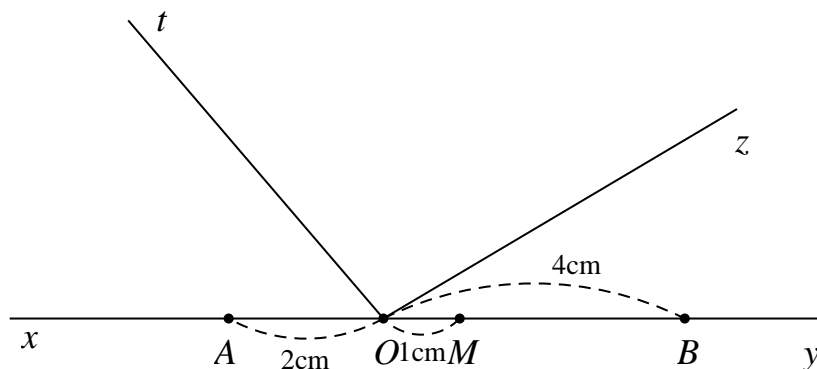
Từ đó suy ra tổng quát: với n tia chung gốc có $n \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)$ (góc)

Bài 8: Cho góc bẹt xOy , trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 2cm$; trên tia Oy lấy hai điểm M và B sao cho $OM = 1cm$; $OB = 4cm$.

- a) Chứng tỏ điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB
 b) Từ O kẻ hai tia Ot, Oz sao cho $tOy = 130^\circ$; $zOy = 30^\circ$. Tính số đo tOz

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Lời giải



- a) Ta có M nằm giữa O và B

$$MO + MB = OB$$

$$MB = OB - MO = 3cm \quad (1)$$

Ta có O nằm giữa A và M

$$AM = AO - OM = 3cm \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $MB = MA = 3cm \Leftrightarrow M$ là trung điểm của AB

- b) Ta có 2 trường hợp

Ox, Oz nằm cùng phía $xy : tOz = 100^\circ$

Ox, Oz nằm khác phía $xy : tOz = 160^\circ$

Bài 9: Cho 10 đường thẳng đồng quy tại O . Hỏi có bao nhiêu góc ở đỉnh O được tạo thành (không kể góc bẹt)

Trích đề thi chọn HSG Tam Dương năm 2016-2017

Lời giải

Vì có 10 đường thẳng đồng quy tại O nên có 20 tia gốc O . Chọn ra một tia, tia đó tạo với mỗi tia trong $(20-1)$ tia tạo thành một góc. Làm như thế với 20 tia ta có $20 \cdot (20-1) = 380$ góc, trong đó mỗi góc đã được tính hai lần.

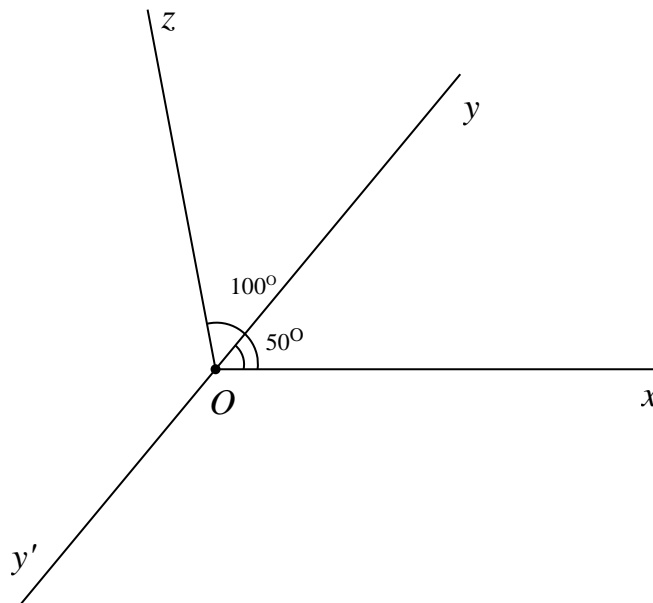
Do đó số góc tạo thành là: $380 : 2 = 190$ (góc)

Bài 10: Cho $xOy = 50^\circ; xOz = 100^\circ$ sao cho tia Oy nằm giữa hai tia Ox, Oz . Vẽ tia Oy' là tia đối của tia Oy . Tính số đo $y'Oz$

Trích đề chọn HSG Nga Sơn năm 2017-2018

Lời giải

Trường hợp 1.



Ta có tia Oy nằm giữa hai tia Ox và Oz

$$xOy + yOz = xOz.$$

$$\text{Thay số } 50^\circ + yOz = 100^\circ \Rightarrow yOz = 50^\circ$$

Do tia Oy' là tia đối của tia Oy nên $y'Oz, yOz$ là hai góc kề bù

$$\text{Do đó } y'Oz + yOz = 180^\circ.$$

$$\text{Thay số : } y'Oz + 50^\circ = 180^\circ$$

$$y'Oz = 130^\circ$$

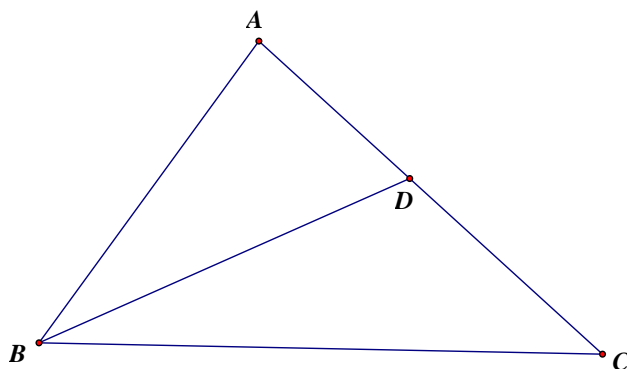
Vậy $y'Oz = 130^\circ$

Bài 11: Cho tam giác ABC có $\angle A = 55^\circ$, trên cạnh AC lấy điểm D (D không trùng với A và C)

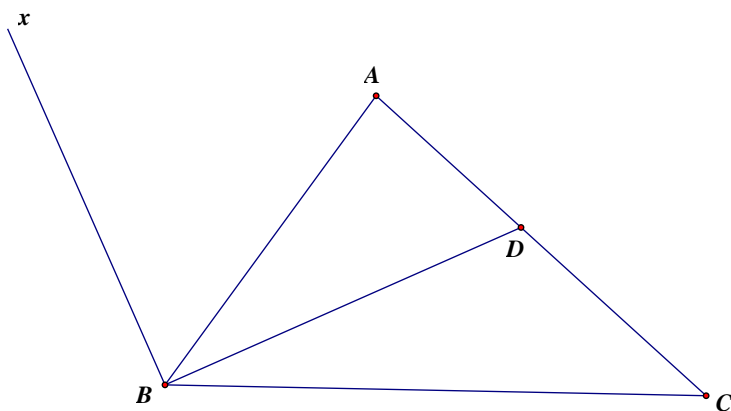
- a) Tính số đo DBC biết $ABD = 30^\circ$
 b) Từ B dựng tia Bx sao cho $DBx = 90^\circ$. Tính số đo ABx

Trích đề HSG cấp trường năm 2018 -2019

Lời giải



- a) Tia BD nằm giữa hai tia BA và BC nên $ABC = ABD + DBC$
 $\Rightarrow DBC = ABC - ABD = 55^\circ - 30^\circ = 25^\circ$
 b) Xét hai trường hợp:
 - Trường hợp 1: Tia Bx và BD nằm về cùng 1 phía với AB

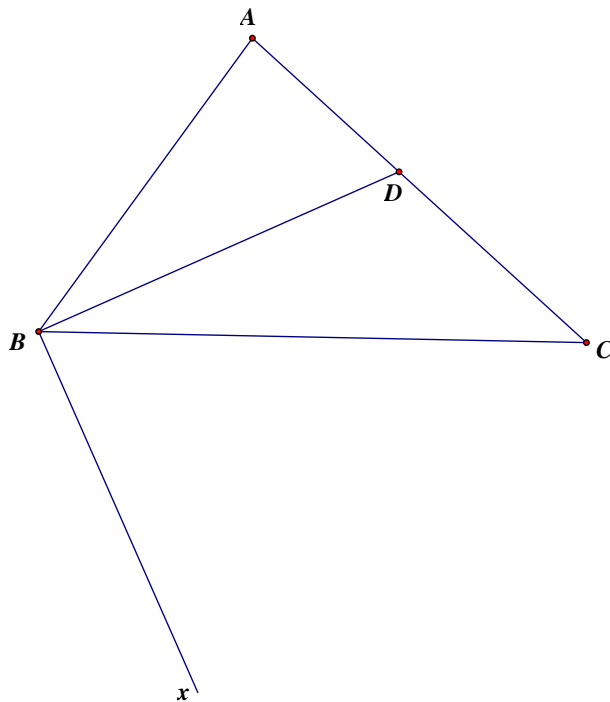


Tính được: $ABx = 90^\circ - ABD$

Mặt khác tia BD nằm giữa hai tia BA, BC nên $0^\circ < ABD < 55^\circ$

$$\Rightarrow 90^\circ - 55^\circ < ABx < 90^\circ - 0^\circ \Leftrightarrow 35^\circ < ABx < 90^\circ$$

- Trường hợp 2: Tia Bx, BD nằm khác phía với AB



Tính được: $ABx = 90^\circ + \angle ABD$

Lập luận tương tự trường hợp 1 chỉ ra được: $90^\circ < ABx < 145^\circ$

Vậy $35^\circ < ABx < 145^\circ, ABx \neq 90^\circ$

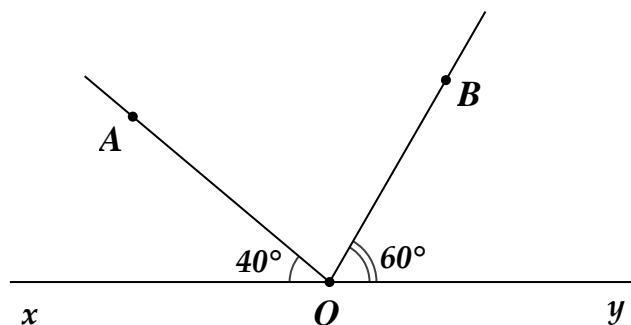
Bài 12: Cho điểm O thuộc đường thẳng xy . Vẽ các tia OA, OB sao cho góc $AOx = 40^\circ, BOy = 60^\circ$.
 Tính số đo AOB .

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có hai trường hợp hình vẽ:

Trường hợp 1:



Hai góc $\angle xOB, \angle BOy$ kề bù $\Rightarrow \angle xOB + \angle BOy = 180^\circ$

$$\Rightarrow \angle xOB + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle xOB = 120^\circ$$

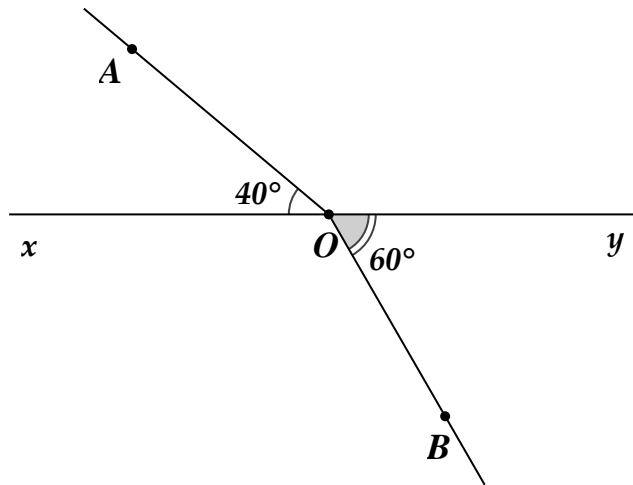
Tia OA nằm giữa hai tia Ox, OB

$$\Rightarrow xOA + AOB = xOB$$

$$\Rightarrow 40^\circ + AOB = 120^\circ$$

$$\Rightarrow AOB = 80^\circ$$

Trường hợp 2:



Hai góc xOB ; BOy kề bù $\Rightarrow xOB + BOy = 180^\circ$

$$\Rightarrow xOB + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow xOB = 120^\circ$$

Từ hình vẽ ta có: $xOA + xOB = AOB$

$$\Rightarrow 40^\circ + 120^\circ = AOB$$

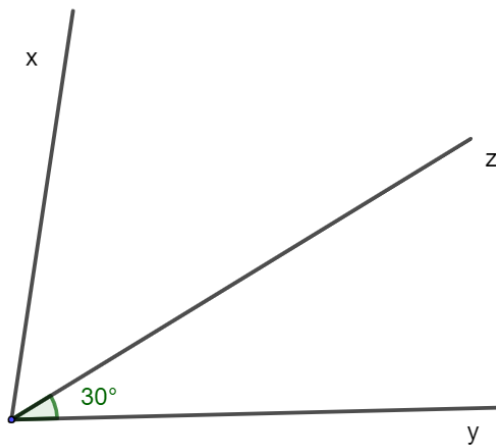
$$\Rightarrow AOB = 160^\circ$$

Vậy $AOB = 80^\circ$ hoặc $AOB = 160^\circ$

Bài 13: Cho $xOy = 80^\circ$, tia Oz nằm giữa hai tia Ox , Oy sao cho $xOz = 30^\circ$. Số đo yOz là bao nhiêu?

Trích đề HSG huyện Lâm Thao, năm 2018- 2019

Lời giải



Từ hình vẽ ta có: $xOy = xOz + zOy$

$$\Rightarrow 80^\circ = 30^\circ + zOy$$

$$\Rightarrow zOy = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ$$

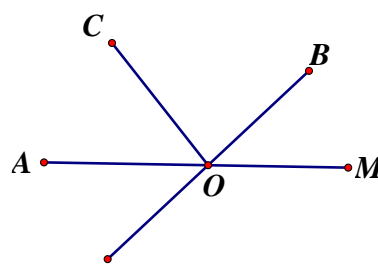
Bài 14: Trên đường thẳng AM lấy một điểm O (O nằm giữa A và M). Vẽ các tia OB, OC sao cho OB nằm giữa tia OM , OC và $MOC = 115^\circ, BOC = 70^\circ$. Vẽ tia OD (D không cùng phía với B, C) sao cho $AOD = 45^\circ$.

a) Tính MOB, AOC

c) Chứng tỏ rằng 3 điểm D, O, B thẳng hàng.

Trích đề 59 HSG huyện năm 2018- 2019

Lời giải



a) Từ hình vẽ ta có: $MOB + BOC = MOC$

$$\Rightarrow MOB = MOC - BOC = 115^\circ - 70^\circ = 45^\circ$$

Hai góc AOC, COM là hai góc kề bù nên $AOC + COM = 180^\circ$

$$\Rightarrow AOC = 180^\circ - COM = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$$

b) Hai góc AOB, BOM là hai góc kề bù $\Rightarrow AOB + BOM = 180^\circ$

$$\Rightarrow AOB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

Hai góc DOA, AOB là 2 góc có cạnh chung OA.

Ta có $DOA + AOB = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ \Rightarrow OD, OB$ là hai tia đối nhau

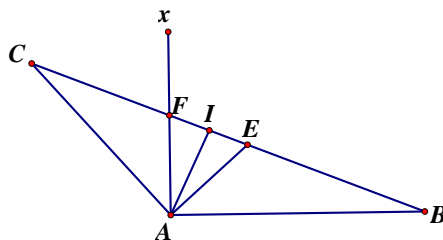
$\Rightarrow D, O, B$ thẳng hàng

Bài 15: Cho tam giác ABC có $BAC = 120^\circ$. Điểm E nằm giữa B và C sao cho $BAE = 30^\circ$. Trên mặt phẳng có bờ AC chứa điểm B kẻ tia Ax sao cho $CAx = 30^\circ$, tia Ax cắt BC ở F

Tính số đo của EAF

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Lời giải



Ta có: $BAE + EAC = BAC$

Hay $30^\circ + EAC = 120^\circ \Rightarrow EAC = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$

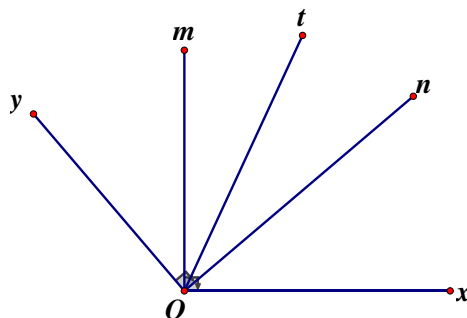
Xét nửa mặt phẳng bờ AC có chứa điểm B

$CAF + FAE = CAE \Rightarrow 30^\circ + FAE = 90^\circ \Rightarrow FAE = 60^\circ$

Bài 16: Cho góc tù xOy . Bên trong góc xOy , vẽ tia Om sao cho $xOm = 90^\circ$ và vẽ tia On sao cho $yOn = 90^\circ$. Chứng minh $xOn = yOm$

Trích đề HSG trường Nguyễn Khuyến năm 20...-20...

Lời giải



Lập luận được $xOm + mOy = xOy$ hay $90^\circ + mOy = xOy$

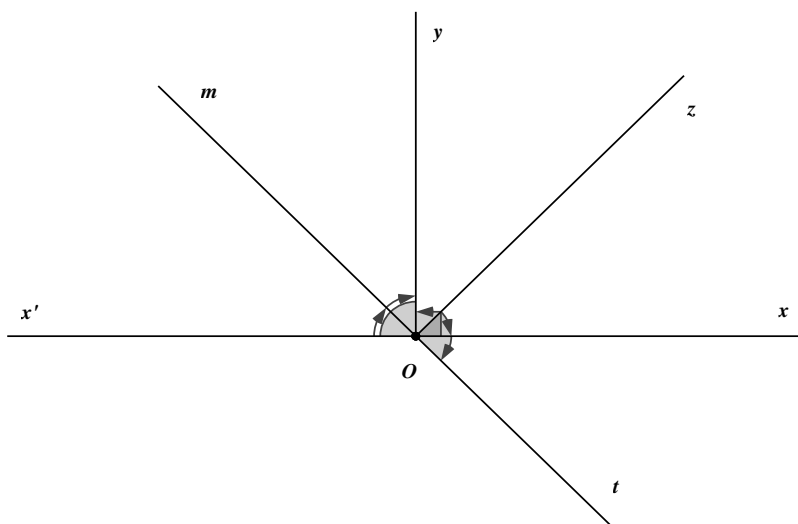
$yOn + nOx = xOy$ hay $90^\circ + nOx = xOy$

$\Rightarrow xOn = yOm$

- Bài 17:** Cho tia Oz nằm trong góc vuông xOy . Vẽ tia Ot sao cho Ox là tia phân giác của tOz . Vẽ tia Om sao cho tia Oy là phân giác của zOm .
- Chứng minh rằng tia Om và tia Ot là hai tia đối nhau.
 - Gọi Ox' là tia đối của tia Ox , biết $x'Om = 30^\circ$. Tính tOz .
 - Vẽ thêm 2014 tia phân biệt gốc O (không trùng với các tia Ox, Oz, Oy, Om, Ox' và Ot). Hỏi trong hình vẽ có tất cả bao nhiêu góc?

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021-2022

Lời giải



a) * Chứng minh: $tOz + zOm = 180^\circ$.

Tia Oz nằm trong góc xOy nên: $xOz + zOy = xOy = 90^\circ$.

Vì Ox là tia phân giác của tOz nên: $xOz = \frac{1}{2}tOz$

Vì Oy là tia phân giác của zOm suy ra $zOy = \frac{1}{2}zOm$.

Ta có: $xOz + zOy = 90^\circ$ suy ra $\frac{1}{2}tOz + \frac{1}{2}zOm = 90^\circ$ suy ra $\frac{1}{2} \cdot (tOz + zOm) = 90^\circ$

Suy ra $tOz + zOm = 180^\circ$. (1)

* Chứng minh tOz và zOm là hai góc kề nhau:

Vì hai tOz và zOm là hai góc có cạnh chung Oz và nằm trên hai nửa mp có bờ là cạnh Oz . (2)

Từ (1) và (2) suy ra: tia Om và tia Ot là hai tia đối nhau.

b) Ta có: $tOx = mOx' = 30^\circ$ (Cùng kề bù với mOx)

Vì Ox là tia phân giác của tOz nên $tOx = xOz = 30^\circ$.

Suy ra $tOz = tOx + xOz = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$.

c) Giả sử vẽ thêm n tia phân biệt gốc O không trùng với các tia Ox, Oz, Oy, Om, Ot, Ox' .

Tất cả trong hình vẽ có $n+6$ tia phân biệt.

Cứ 1 tia trong $n+6$ tia đó tạo với $n+5$ tia còn lại thành $n+5$ góc.

Có $n+6$ tia nên tạo thành $(n+5)(n+6)$ góc, nhưng như thế mỗi góc được tính hai lần. Vậy có tất cả là $\frac{(n+5)(n+6)}{2}$ góc.

Thay $n=2014$ ta được số góc là: $(2014+6)(2014+5):2=2039190$ (góc)

Bài 18: 1) Trong các hình sau đây: Hình chữ nhật, hình thang, hình bình hành, hình thoi, hình vuông, hình tròn, hình lục giác đều. Hình nào có trục đối xứng, hình nào có tâm đối xứng? (nếu có, hãy chỉ ra trục đối xứng, tâm đối xứng đó). Hình nào không có trục đối xứng, hình nào không có tâm đối xứng?

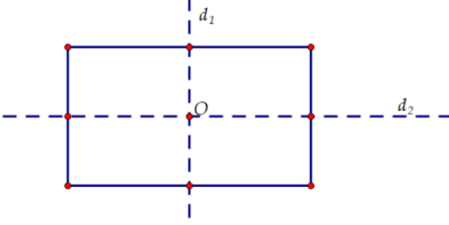
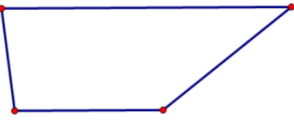
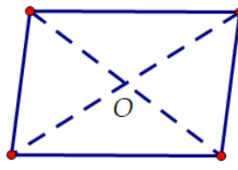
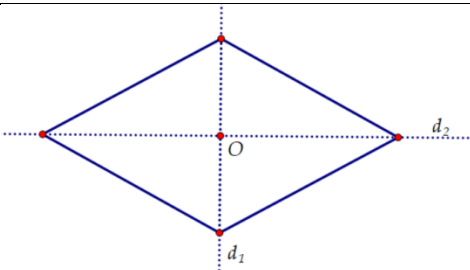
2) Cho $\angle xOy = 60^\circ$. Trên tia Oy lấy điểm A sao cho $OA = 5\text{ cm}$. Trên tia Ox lấy điểm B và C sao cho $OB = 6\text{ cm}, BC = 2\text{ cm}$. Nối AB, AC . Hỏi:

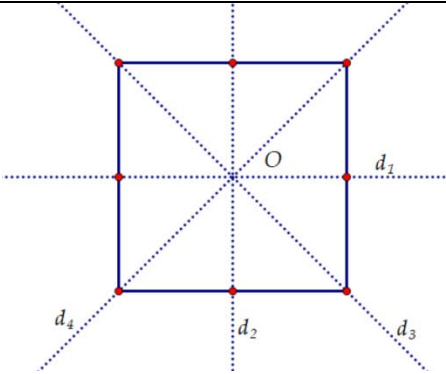
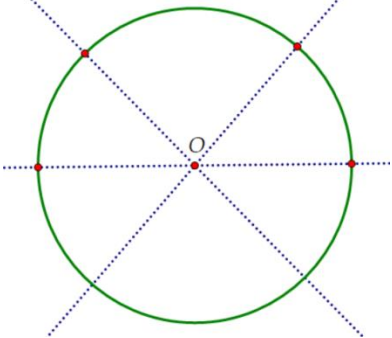
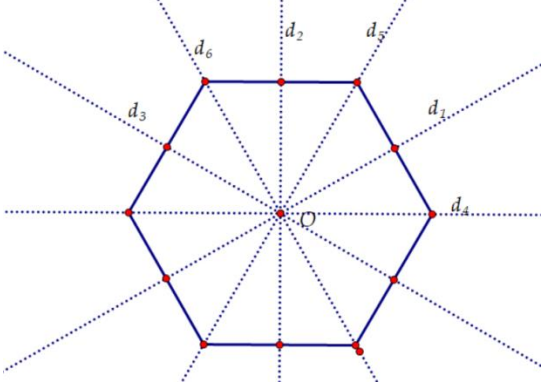
- Có mấy tam giác được tạo thành? Gọi tên các tam giác đó.
- Vẽ tia Om là tia đối với tia Ox . Tính số đo góc mOy .
- Tính độ dài đoạn thẳng OC .

Trích đề HSG Thanh Ba năm 2021-2022

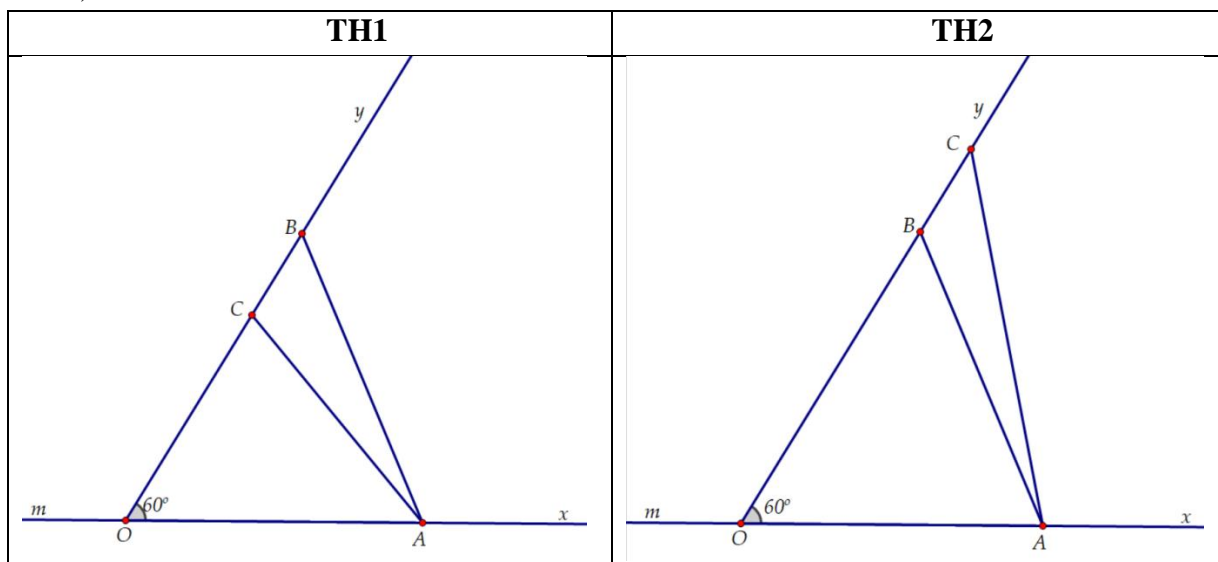
Lời giải

1) Ta có bảng sau đây:

Hình	Hình vẽ	Tâm đối xứng và trục đối xứng
Hình chữ nhật		Điểm O là tâm đối xứng của hình chữ nhật. Các đường thẳng $d_1; d_2$ là hai trục đối xứng của hình chữ nhật
Hình thang		Hình thang không có trục đối xứng và không có tâm đối xứng.
Hình bình hành		O là tâm đối xứng của hình bình hành Hình bình hành không có trục đối xứng.
Hình thoi		Tâm đối xứng của hình thoi là O . Trục đối xứng của hình thoi là $d_1; d_2$

Hình vuông		Tâm đối xứng của hình thoi là O . Trục đối xứng của hình thoi là $d_1; d_2; d_3; d_4$.
Hình tròn		Tâm O là tâm đối xứng của hình tròn. Bất kỳ đường kính nào đều là trục đối xứng của hình tròn.
Hình lục giác đều		Hình lục giác đều có 1 tâm đối xứng là O Hình lục giác đều có 6 trục đối xứng là $d_1; d_2; d_3; d_4; d_5; d_6$

2)



a) Trên hình vẽ có 3 tam giác, đó là các tam giác ΔOAC , ΔOAB ; ΔABC .

b) Vì Om là tia đối của tia Ox nên ta có: $mOy + yOx = 180^\circ$

suy ra $mOy + 60^\circ = 180^\circ$ suy ra $mOy = 120^\circ$.

c) Tính OC .

Trường hợp 1: Điểm C nằm giữa O và B nên:

$$OC + CB = OB$$

$$OC = OB - CB = 6 - 2 = 4(\text{cm})$$

Trường hợp 2: Điểm B nằm giữa O và C nên:

$$OB + BC = OC$$

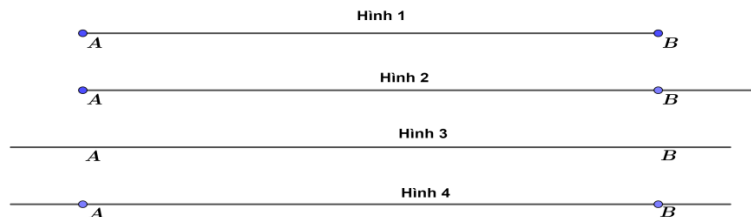
$$OC = 6 + 2 = 8(\text{cm})$$

Bài 19: 1) Trong hình vẽ dưới, có bao nhiêu đoạn thẳng phân biệt:



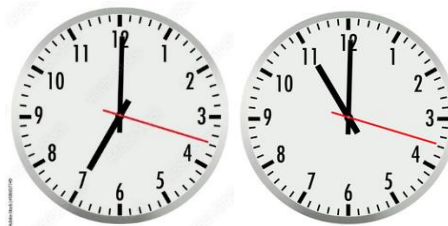
- A. 4. B. 6. C. 8. D. 10.

2) Đây là hình vẽ đúng của đường thẳng AB :



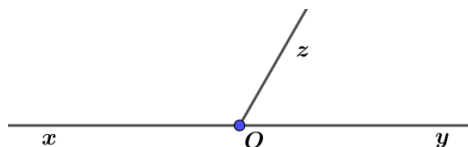
- A. Hình 1. B. Hình 3 và hình 4. C. Hình 4. D. Tất cả 4 hình.

3) Buổi sáng, bạn Trang vào lớp thi đồng hồ trên tường chỉ 7 h đúng. Đến khi tan trường đồng hồ chỉ đúng 11h trưa. Hỏi kim giờ trên đồng hồ đã quay được một góc bao nhiêu độ?



- A. 100° . B. 110° . C. 120° . D. 130° .

4) Trong hình vẽ sau:



Góc yOz bằng 50% góc xOz và tia Ox, Oy là hai tia đối nhau. Số đo góc yOz là:

- A. 70° . B. 80° . C. 50° . D. 60° .

Trích đề HSG Quận Thanh Ba năm 2021-2022

Lời giải

- 1) Đáp án B
- 2) Đáp án C
- 3) Đáp án C
- 4) Đáp án D

IV. Các bài toán về chu vi, diện tích

Dạng toán: Giải các bài toán về chu vi diện tích

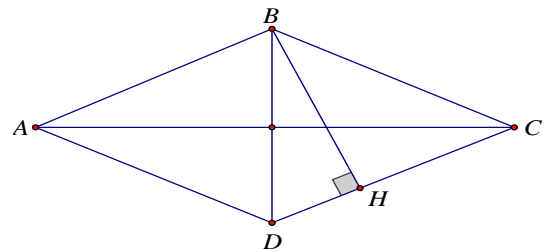
Bài 1: Bác An muốn làm hàng rào cho khu vườn hình vuông trồng hoa hồng của mình. Biết khu vườn có cạnh 5 m, tính độ dài hàng rào?

A. 25 m.

B. 20 m.

C. 10 m.

D. 5 m.

*Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022***Lời giải****Đáp án:** B. 20 m.**Bài 2:** Một hình chữ nhật có chiều dài là 12m, chiều rộng là 8m, một hình vuông có chu vi bằng chu vi hình chữ nhật. Diện tích hình vuông đó là:A. 96 m^2 .B. 25 m^2 .C. 40 m^2 .D. 100 m^2 .*Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022***Lời giải****Đáp án:** D. 100 m^2 .**Bài 3:**Cho hình thoi $ABCD$ có độ dài cạnh là 30cm(Hình vẽ 1). Tổng độ dài hai đường chéo là 84cm, hiệu độ dài hai đường chéo là 12cm. Tính độ dài đường cao BH .

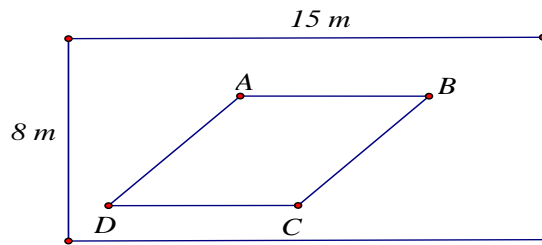
Hình vẽ 1

*Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022***Lời giải**Ta có: $AC + BD = 84$ và $AC - BD = 12$ nên $AC = (84 + 12) : 2 = 48$

$$BD = (84 - 12) : 2 = 36$$

$$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{48 \cdot 36}{2} = 864$$

Lại có $S_{ABCD} = BH \cdot CD = 864 \text{ (cm}^2\text{)}$ Suy ra $BH = 864 : 30 = 28,8 \text{ (cm)}$.**Bài 4:** Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài 15m, chiều rộng 8m. Người ta trồng một vườn hoa hình thoi ở trong mảnh đất đó, biết diện tích phần còn lại là 75 m^2 . Tính độ dài đường chéo AC , biết $BD = 9 \text{ m}$.



Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Lời giải

Diện tích mảnh đất hình chữ nhật là: $15 \cdot 8 = 120 \text{ (m}^2\text{)}$

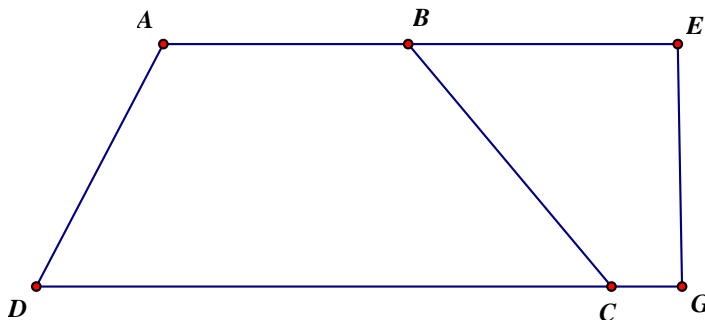
Diện tích phần trồng hoa hình thoi là: $120 - 75 = 45 \text{ (m}^2\text{)}$

Độ dài đường chéo AC là: $45 \cdot 2 : 9 = 10 \text{ (m)}$.

Bài 5: Một thửa ruộng hình thang có diện tích là 1155 m^2 và có đáy bé kém đáy lớn 33 m . Người ta kéo dài đáy bé thêm 20 m và kéo dài đáy lớn thêm 5 m về cùng một phía để được hình thang mới. Diện tích hình thang mới này bằng diện tích của một hình chữ nhật có chiều rộng là 30 m và chiều dài 51 m . Hãy tính đáy bé, đáy lớn của thửa ruộng ban đầu.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiên (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải



Gọi hình thang ban đầu là $ABCD$, hình thang mới là $AEGD$.

Hình thang $AEGD$ có diện tích bằng diện tích của một hình chữ nhật có chiều rộng 30 m và chiều dài 51 m .

Do đó diện tích hình thang $AEGD$ là: $30 \cdot 51 = 1530 \text{ (m}^2\text{)}$

Diện tích phần tăng thêm $BEGC$ là: $1530 - 1155 = 375 \text{ (m}^2\text{)}$

Chiều cao BH của hình thang $BEGC$ là: $375 \cdot 2 : (20 + 5) = 30 \text{ (m)}$

Chiều cao BH cũng là chiều cao của hình thang $ABCD$. Do đó tổng hai đáy AB và CD là:

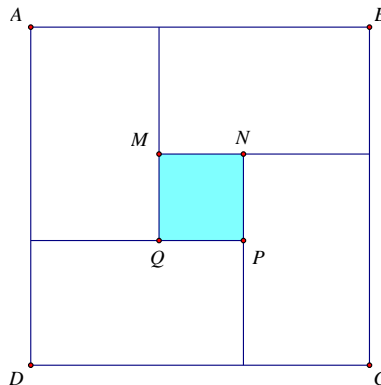
$$1155 \cdot 2 : 30 = 77 \text{ (m)}$$

Đáy bé là: $(77 - 33) : 2 = 22 \text{ (m)}$

Đáy lớn là: $77 - 22 = 55$ (m)

Vậy đáy bé: 22 m ; đáy lớn: 55 m .

Bài 6: Người ta xếp bốn hình chữ nhật bằng nhau có chiều rộng mỗi hình là 5cm ; chiều dài là 8cm để được một hình vuông $ABCD$ và bên trong có là một hình vuông $MNPQ$ (như hình vẽ). Tính diện tích hình vuông $MNPQ$.



Trích đề HSG Trường THCS Hoài Ân năm 2021 - 2022

Lời giải

Độ dài cạnh hình vuông $MNPQ$ là: $8 - 5 = 3$ (cm).

Diện tích hình vuông $MNPQ$ là: $3 \cdot 3 = 9$ (cm²).

Bài 7: Sân nhà Nam là hình chữ nhật có chiều dài 10,25 mét và chiều rộng 6,9 mét. Bố bạn Nam đang tính toán để mua gạch lát sân. Tại cửa hàng vật liệu xây dựng có loại gạch lát kích thước 500x500mm (mỗi viên gạch hình vuông cạnh 500mm). Gạch được bán nguyên thùng, mỗi thùng có 4 viên. Biết rằng khi lát sân, nếu gặp khoảng trống nhỏ hơn kích thước viên gạch thì người thợ phải cắt viên gạch để có kích thước vừa khít với khoảng trống và loại bỏ phần dư của viên gạch nếu phần dư đó không dùng đủ cho khoảng trống khác. Em hãy tính giúp bố bạn Nam xem cần mua ít nhất bao nhiêu thùng gạch mới đủ để lát sân trên.

Trích đề HSG huyện Kỳ Anh năm 2021-2022

Lời giải

Kích thước mỗi viên gạch hình vuông là: 500mm = 0,5m

Nên để lát mỗi mét dài ta cần: $1 : 0,5 = 2$ (viên gạch)

Chiều dài của sân là 6,9 mét. Vì $6,9 \cdot 2 = 13,8$ nên để lát theo chiều dài thì ta cần 14 viên, trong đó viên cuối cùng phải cắt bỏ phần thừa

Chiều rộng sân là 10,25 mét nên cần $10,25 \cdot 2 = 20,5$ viên gạch (gồm: 20 viên gạch nguyên và $\frac{1}{2}$ viên

gạch được cắt ra từ viên gạch nguyên). Như vậy phần cắt còn lại $\frac{1}{2}$ viên vẫn sử dụng được.

Tổng số viên gạch cần dùng là: $14 \cdot 20,5 = 287$ (viên)

Vì mỗi thùng gạch có 4 viên mà $287 : 4 = 71,75$ nên bố bạn Nam cần mua ít nhất 72 thùng gạch.

Bài 8: Để đảm bảo đủ ánh sáng phòng học của con, gia đình ông Nam đã sửa căn phòng có nền là hình chữ nhật với kích thước là 4,2 m và 5,4 m, có hai cửa sổ hình chữ nhật kích thước là 1 m và 1,6 m và một cửa ra vào hình chữ nhật có kích thước là 1,2 m và 2 m.

a) Hỏi căn phòng trên sau khi sửa có đạt chuẩn về ánh sáng hay không? Biết căn phòng đạt mức chuẩn về ánh sáng nếu tổng diện tích các cửa lớn hơn hoặc bằng 20% diện tích nền.

b) Trên thị trường có các loại gạch với kích thước như sau $50\text{cm} \times 50\text{cm}$; $60\text{cm} \times 60\text{cm}$; $80\text{cm} \times 80\text{cm}$. Gia đình ông Nam muốn lát kín căn phòng trên bằng một loại gạch có cùng kích thước mà không phải cắt (các viên gạch phải lát liền nhau, coi như không có khe hở). Em hãy giúp gia đình ông Nam chọn loại gạch có kích thước phù hợp và tính xem cần bao nhiêu viên gạch để vừa đủ?

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Lời giải

a) Diện tích của các cửa là: $1.1,6 + 2.1,2 = 5,6\text{m}^2$

Diện tích nền là: $4,2. 5,4 = 22,68\text{m}^2$

Diện tích các cửa so với diện tích nền là: $5,6 : 22,68$ gần bằng $24,69\% > 20\%$

Vậy căn phòng trên đạt chuẩn về ánh sáng.

b) Ta có $4,2\text{m} = 420\text{cm}$; $5,4\text{m} = 540\text{cm}$

ta có ƯCLN $(420; 540) = 60$

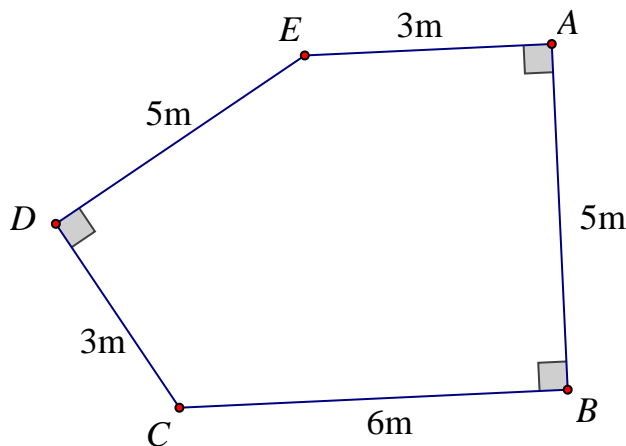
Vì 60 không chia hết cho 50; 80 nên ta chọn gạch có kích thước là $60\text{cm} \times 60\text{cm}$

Diện tích nền là: $4,2. 5,4 = 22,68\text{m}^2 = 226800\text{cm}^2$

Do đó số viên gạch để lát vừa đủ căn phòng là $226800 : (60.60) = 63$ viên.

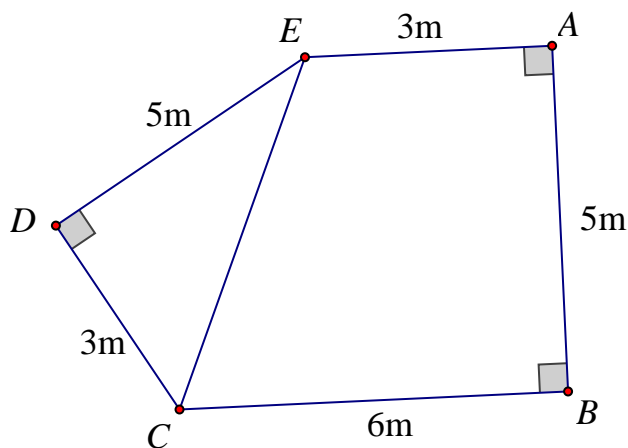
Bài 9: Một mảnh đất được vẽ trên giấy như hình vẽ bên dưới.

Hỏi diện tích mảnh đất là bao nhiêu mét vuông?



Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Lời giải



Ta có:

$$S_{EDC} = \frac{1}{2} ED \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 = \frac{15}{2} (\text{m}^2)$$

$$S_{AECB} = \frac{1}{2} (AE + CB) AB = \frac{1}{2} \cdot (3 + 6) \cdot 5 = \frac{45}{2} (\text{m}^2)$$

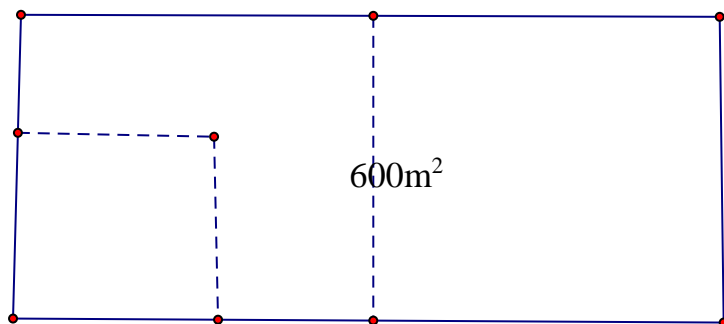
$$S = S_{EDC} + S_{AECB} = 30 (\text{m}^2)$$

Bài 10. Người ta mở rộng một cái ao hình vuông để được một cái ao hình chữ nhật có chiều dài gấp 2 lần chiều rộng. Sau khi mở rộng, diện tích ao tăng thêm 600m^2 và diện tích ao mới gấp 4 lần ao cũ. Hỏi phải dùng bao nhiêu chiếc cọc để đủ rào xung quanh ao mới? Biết rằng cọc nọ cách cọc kia 1m và ở một góc ao người ta để lối lên xuống rộng 2m .

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Lời giải

Ta có hình vẽ:



Diện tích ao mới là:

$$600 : (4 - 1) \times 4 = 800 (\text{m}^2) \text{ Ta chia ao mới thành hai hình vuông có diện tích bằng nhau như hình vẽ.}$$

Diện tích một hình vuông là:

$$800 : 2 = 400 (\text{m}^2)$$

Vì $400 = 20 \times 20$

Cạnh của hình vuông hay chiều rộng của ao mới là 20m

Chiều dài của ao mới là: $20 \times 2 = 40 (\text{m})$

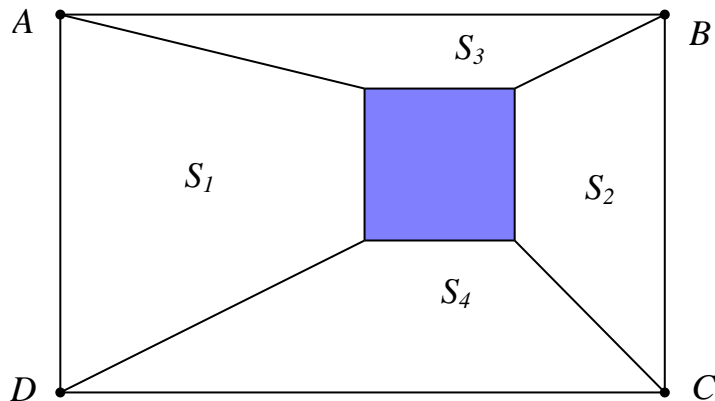
Chu vi ao mới là:

$$(40 + 20) \times 2 = 120 (\text{m})$$

Số cọc để rào xung quanh ao mới là:

$$(120 - 3) : 1 = 117 (\text{chiếc})$$

Bài 11: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài AB hơn chiều rộng BC là 4cm . Hình chữ nhật được chia thành một hình vuông và bốn hình thang (H1). Biết rằng 4 hình thang có diện tích là $S_1; S_2; S_3; S_4$ và $S_1 + S_2 = 49\text{cm}^2$; $S_3 + S_4 = 41\text{cm}^2$. Tính cạnh của hình vuông.



Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021 - 2022

Lời giải

1) Cách 1: Nối các đỉnh hình vuông tới các đỉnh hình chữ nhật và các cạnh hình vuông kéo dài cắt các cạnh hình chữ nhật như hình vẽ.

Gọi chiều cao các hình thang có diện tích $S_1; S_2; S_3; S_4$ lần lượt là $h_1; h_2; h_3; h_4$

Đường chéo mỗi hình chữ nhật ở góc chia hình chữ nhật đó thành hai tam giác có diện tích bằng nhau:

$$S_a = S_b; S_c = S_d; S_m = S_n; S_x = S_y$$

$$S_5 = ah_1; S_6 = ah_2; S_7 = ah_3; S_8 = ah_4$$

$$h_1 + h_2 = AB - a; h_3 + h_4 = BC - a$$

$$h_1 + h_2 - h_3 - h_4 = AB - a - BC + a = AB - BC = 4$$

$$(h_1 + h_2) - (h_3 + h_4) = AB - a - BC + a = AB - BC = 4$$

$$S_1 = S_5 + S_x + S_m; S_2 = S_6 + S_b + S_d; S_3 = S_7 + S_a + S_y; S_4 = S_8 + S_c + S_n$$

$$(S_1 + S_2) - (S_3 + S_4) = S_5 + S_x + S_m + S_6 + S_b + S_d - S_7 - S_a - S_y - S_8 - S_c - S_n$$

$$(S_1 + S_2) - (S_3 + S_4) = S_5 + S_6 - S_7 - S_8 + (S_x - S_y) + (S_b - S_a) + (S_d - S_c)$$

$$49 - 41 = ah_1 + ah_2 - ah_3 - ah_4$$

$$8 = (h_1 + h_2 - h_3 - h_4)a$$

$$8 = 4a$$

$$a = 2$$

Vậy cạnh hình vuông là 2cm .

Cách 2: Gọi cạnh của hình vuông là $a\text{ (cm)}$. Gọi chiều cao các hình thang có diện tích $S_1; S_2; S_3; S_4$ lần lượt là $h_1; h_2; h_3; h_4$

$$S_1 = \frac{(AD + a)h_1}{2};$$

$$S_2 = \frac{(BC+a)h_2}{2} = \frac{(AD+a)h_2}{2} \quad (AD=BC)$$

$$S_3 = \frac{(AB+a)h_3}{2};$$

$$S_4 = \frac{(CD+a)h_4}{2} = \frac{(AB+a)h_4}{2} \quad (AB=CD).$$

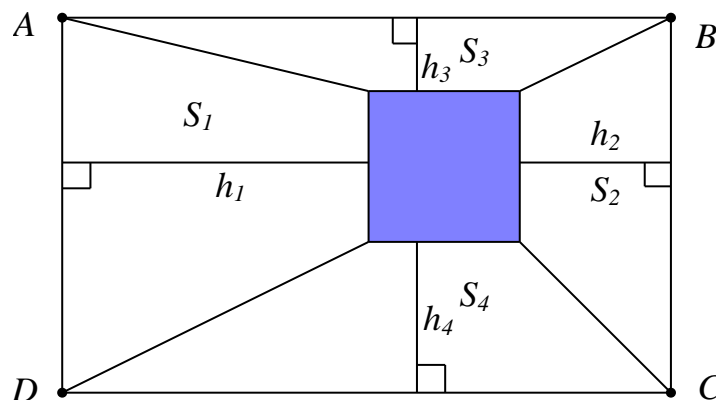
$$S_1 + S_2 = 49 \Rightarrow \frac{(AD+a)h_1}{2} + \frac{(AD+a)h_2}{2} = 49$$

$$\frac{(AD+a)(h_1+h_2)}{2} = 49$$

$$\frac{(AD+a)(AB-a)}{2} = 49$$

$$\frac{(AD+a)(AD+4-a)}{2} = 49$$

$$\frac{(AD+a)(AD-a)}{2} + \frac{(AD+a)4}{2} = 49 \quad (1)$$



$$S_3 + S_4 = 4q$$

$$\frac{(AB+a)h_3}{2} + \frac{(AB+a)h_4}{2} = 41$$

$$\frac{(AB+a)(h_3+h_4)}{2} = 41$$

$$\frac{(AB+a)(AD-a)}{2} = 41$$

$$\frac{(AD+4+a)(AD-a)}{2} = 41$$

$$\frac{(AD+a)(AD-a)}{2} + \frac{4(AD-a)}{2} = 41 \quad (2)$$

Trừ từng vế (1) và (2) ta có:

$$\frac{(AD+a)4}{2} - \frac{(AD-a)4}{2} = 8$$

$$\frac{4AD + 4a}{2} - \frac{4AD - 4a}{2} = 8$$

$$\frac{4AD + 4a - 4AD + 4a}{2} = 8$$

$$4a = 8$$

$$a = 2$$

Vậy cạnh hình vuông là 2 cm.

Bài 12: Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài 15 m, chiều rộng 8 m. Người ta trồng một vườn hoa hình thoi ở trong mảnh đất đó, biết diện tích phần còn lại là 75 m^2 . Tính độ dài đường chéo AC , biết $BD = 9 \text{ m}$.

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021-2022

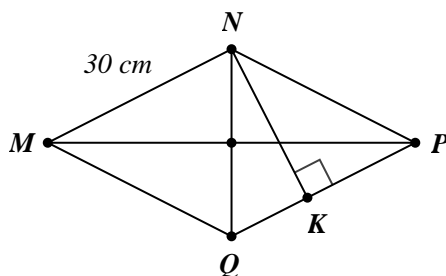
Lời giải

Diện tích mảnh đất hình chữ nhật là: $15 \cdot 8 = 120 (\text{m}^2)$

Diện tích phần trồng hoa hình thoi là: $120 - 75 = 45 (\text{m}^2)$

Độ dài đường chéo AC là: $45 \cdot 2 : 9 = 10 (\text{m})$

Bài 13: 1. Cho hình thoi $MNPQ$ có độ dài cạnh là 30 cm (Hình vẽ 1). Tổng độ dài hai đường chéo là 84, hiệu độ dài hai đường chéo là 12 cm. Tính độ dài chiều cao NK .



Hình vẽ 1



Hình vẽ 2

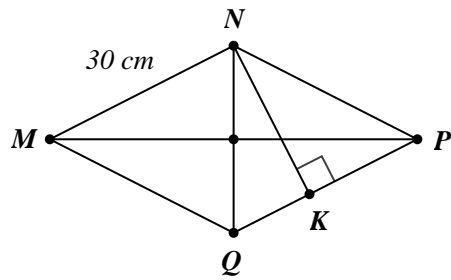
2. Một thửa ruộng hình chữ nhật được chia thành hai mảnh hình chữ nhật (Hình vẽ 2), một mảnh nhỏ trồng rau và mảnh còn lại trồng ngô. Diện tích của mảnh trồng ngô gấp 6 lần diện tích của mảnh trồng rau. Chu vi mảnh trồng ngô gấp 4 lần chu vi mảnh trồng rau. Tính diện tích thửa ruộng ban đầu, biết chiều rộng của nó là 5 mét.

3. Nếu giảm chiều dài của một hình chữ nhật đi 20% và muốn diện tích không thay đổi thì chiều rộng phải thay đổi như thế nào?

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Lời giải

1.



Hình vẽ 1

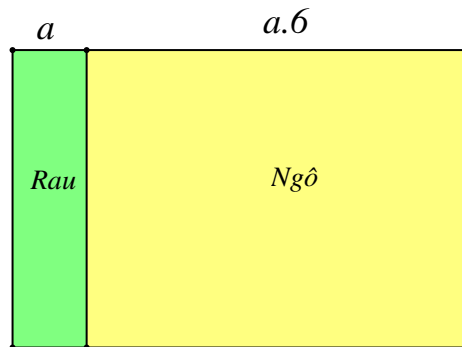
Ta có $MP + NQ = 84$ và $MP - NQ = 12$ nên $MP = (84 + 12) : 2 = 48$ (cm);

$$\Rightarrow NQ = 84 - 48 = 36 \text{ (cm)}$$

$$\text{Ta có } S_{MNPQ} = \frac{MP \cdot NQ}{2} = \frac{48 \cdot 36}{2} = 864$$

$$\text{Lại có } S_{MNPQ} = NK \cdot PQ = 864 \Rightarrow NK = 864 : 30 = 28,8 \text{ (cm)}$$

2.



Hình vẽ 2

Vì diện tích trồng ngô gấp 6 lần diện tích trồng rau mà hai mảnh chung một cạnh nên độ dài cạnh còn lại của mảnh trồng ngô gấp 6 lần độ dài cạnh còn lại của mảnh trồng rau

Gọi độ dài cạnh còn lại của mảnh trồng rau là: a

Vậy độ dài cạnh còn lại của mảnh trồng ngô là: $6a$

Nửa chu vi mảnh trồng ngô là: $6a + 5$

Nửa chu vi mảnh trồng rau là: $a + 5$

Nửa chu vi mảnh trồng ngô hơn nửa chu vi mảnh trồng rau là:

$$6a + 5 - (a + 5) = 5a$$

Mà chu vi mảnh trồng ngô gấp 4 lần chu vi mảnh trồng rau nên ta có sơ đồ:

$$\frac{1}{2}P_2 : \quad \bullet \quad \overset{a}{\text{---}} \quad \bullet \quad \overset{5}{\text{---}} \quad \bullet$$

$$\frac{1}{2}P_1 : \quad \bullet \quad \overset{a}{\text{---}} \quad \bullet \quad \overset{5}{\text{---}} \quad \bullet \quad \overset{a}{\text{---}} \quad \bullet \quad \overset{5}{\text{---}} \quad \bullet \quad \overset{a}{\text{---}} \quad \bullet \quad \overset{5}{\text{---}} \quad \bullet \quad \overset{a}{\text{---}} \quad \bullet \quad \overset{5}{\text{---}} \quad \bullet$$

a.5

Nhìn vào sơ đồ ta có: $3(a+5) = 5a$

$$3a + 15 = 5a$$

$$5a - 3a = 15$$

$$2a = 15$$

$$a = 7,5$$

Độ dài cạnh còn lại của mảnh trồng rau là: 7,5 (m)

Độ dài cạnh còn lại của mảnh trồng ngô là: $7,5 \cdot 6 = 45$ (m)

Diện tích thửa ruộng ban đầu là: $(45 + 7,5) \cdot 6 = 262$ (m²)

3. Khi chiều dài của hình chữ nhật đó giảm đi 20% thì diện tích của hình chữ nhật cũng giảm đi 20%

Diện tích của hình chữ nhật sau khi giảm 20% là: $100\% - 20\% = 80\%$

Chiều rộng tăng số phần trăm là: $\frac{100}{80} \cdot 100\% = 125\%$

Số phần trăm chiều rộng cần tăng thêm là: $125\% - 100\% = 25\%$

Vậy chiều rộng phải tăng lên 25% để diện tích của hình chữ nhật đó không thay đổi.

Bài 14: Cho tam giác ABC có diện tích bằng 42 cm^2 . Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $CE = \frac{1}{3}AE$

, trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $BF = \frac{1}{2}FC$, đoạn EF cắt AB tại K .

1. Tính diện tích của tam giác ABF và tam giác AEF ?

2. Tính tỉ số độ dài giữa KB và KA ?

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Lời giải

1. Ta có $S_{ABF} = \frac{1}{2}S_{AFC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$ (do có chung đường cao hạ từ đỉnh A xuống đáy BC ; mà $BF = \frac{1}{2}FC = \frac{1}{3}BC$) $\Rightarrow S_{ABF} = 42 \cdot \frac{1}{3} = 14 \text{ cm}^2$

Ta có: $S_{AEF} = \frac{3}{4}S_{ACF}$ (do có chung đường cao hạ từ đỉnh F xuống đáy AC và $CE = \frac{1}{3}AE$ nên $AE = \frac{3}{4}AC$) mà $S_{ABF} = 42 - 14 = 28 \text{ cm}^2$ nên $S_{AEF} = 28 \cdot \frac{3}{4} = 21 \text{ cm}^2$.

2. Ta có: $S_{KBE} = \frac{1}{2}S_{KCF}$ (có chung chiều cao hạ từ K xuống BC và $BF = \frac{1}{2}FC$)

$S_{EBF} = \frac{1}{2}S_{ECF}$ (có chung chiều cao hạ từ E xuống BC và $BF = \frac{1}{2}FC$)

Suy ra $S_{KBE} = \frac{1}{2}S_{KCE}$.

Mà $S_{KCE} = \frac{1}{3}S_{KAE}$ (có chung chiều cao hạ từ K xuống AC và $CE = \frac{1}{3}AE$)

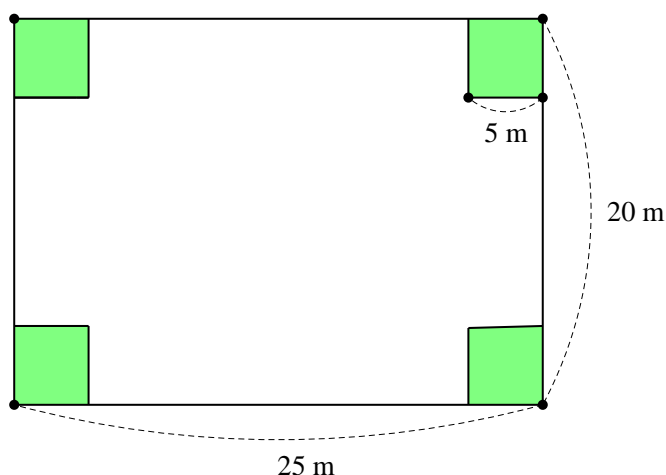
$$\text{Do đó } S_{KBE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} S_{KAE} = \frac{1}{6} S_{KAE}.$$

Mà hai tam giác KBE và KAE có chung chiều cao hạ từ E xuống $AB \Rightarrow KB = \frac{1}{6} KA$.

$$\text{Hay } \frac{KB}{KA} = \frac{1}{6}. \text{ Vậy } \frac{KB}{KA} = \frac{1}{6}.$$

Bài 15: Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài 25 m, chiều rộng 20 m. Người ta trồng hoa hồng vào bốn hình vuông ở các góc vườn (như hình vẽ bên) và phần diện tích còn lại trồng hoa cúc.

1) Tính diện tích phần đất trồng hoa mỗi loại.



2) Biết mỗi mét vuông làm đất và trồng hoa hồng phải trả 50000 đồng tiền công, mỗi mét vuông làm đất và trồng hoa cúc phải trả 40000 đồng. Tính số tiền công phải trả để trồng hoa cho cả mảnh vườn đó.

Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Lời giải

1) Phần diện tích trồng hoa hồng là: $4 \cdot 5^2 = 4 \cdot 25 = 100 \text{ (m}^2\text{)}$.

Tổng diện tích của vườn là: $20 \cdot 25 = 500 \text{ (m}^2\text{)}$.

Diện tích trồng hoa cúc là $500 - 100 = 400 \text{ (m}^2\text{)}$.

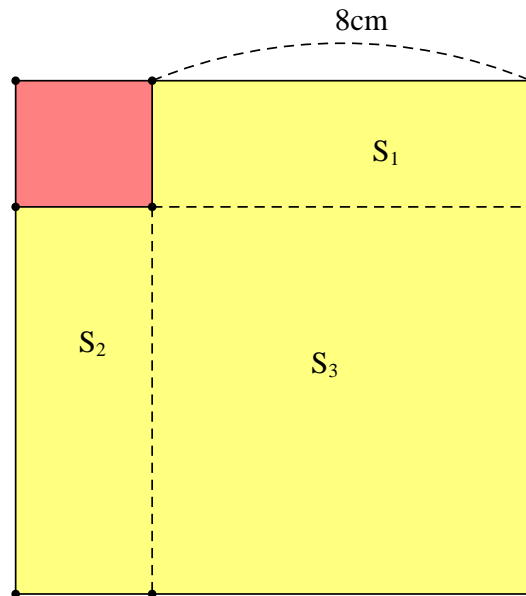
2) Số tiền công phải trả để trồng hoa là: $100 \cdot 500 + 400 \cdot 400 = 50000 + 160000 = 210000$ (nghìn đồng).

Vậy tổng số tiền phải trả là 21 triệu đồng.

Bài 16: Minh có hai tờ giấy hình vuông mà số đo các cạnh hơn kém nhau 8 cm. Minh đem đặt tờ giấy hình vuông nhỏ nằm trọn trong tờ giấy hình vuông lớn thì phần diện tích còn lại không bị che của tờ giấy hình vuông lớn là 96 cm^2 . Tính độ dài cạnh của mỗi tờ giấy.

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Lời giải



Gọi diện tích các phần được chia ra lần lượt là: S_1, S_2, S_3 như hình vẽ.

Theo đề bài ta có: $S_1 + S_2 + S_3 = 96 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Mặt khác: S_3 là diện tích hình vuông cạnh 8 cm nên $S_3 = 8.8 = 64 \text{ (cm}^2\text{)}$.

$S_1 = S_2$ vì là diện tích hai hình chữ nhật có kích thước bằng nhau (chiều rộng bằng độ dài cạnh hình vuông nhỏ, chiều dài bằng 8 cm).

Suy ra $S_1 = S_2 = (96 - S_3) : 2 = (96 - 64) : 2 = 32 : 2 = 16 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Cạnh của hình vuông nhỏ là: $16 : 8 = 2 \text{ (cm)}$.

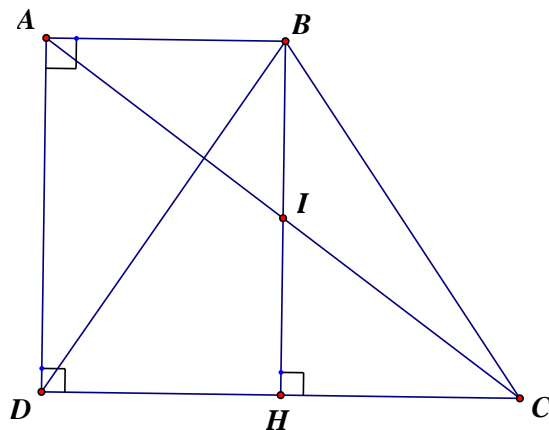
Cạnh của hình vuông lớn là: $2 + 8 = 10 \text{ (cm)}$.

Vậy hai tờ giấy hình vuông có cạnh là 2 cm và 8 cm .

Bài 17: Hình thang vuông ABCD có góc A và D vuông. Đường chéo AC cắt đường cao BH tại I. So sánh diện tích tam giác IDC và diện tích tam giác BHC.

Trích đề HSG tỉnh Bắc Ninh năm 2016 - 2017

Lời giải



Nối BD . Ta có: $S_{BDC} = S_{ADC}$ (cùng đáy DC và chiều cao $BH = AD$)

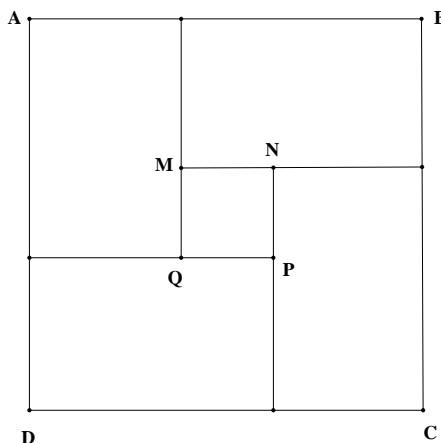
$$S_{BDH} = S_{DBA} \left(= \frac{1}{2} S_{ABHD} \right); S_{DBA} = S_{IAD} \text{ (cùng đáy } AD \text{ và chiều cao bằng nhau)}$$

Do đó:

$$S_{BHC} = S_{BDC} - S_{BDH} = S_{BDC} - S_{DBA} = S_{ADC} - S_{IAD} = S_{IDC}$$

Vậy $S_{BHC} = S_{IDC}$

Bài 18: Người ta xếp bốn hình chữ nhật bằng nhau có chiều rộng mỗi hình là 5 cm; chiều dài là 8 cm để được một hình vuông $ABCD$ và bên trong có là một hình vuông $MNPQ$ (như hình vẽ). Tính diện tích hình vuông $MNPQ$.



Trích đề HSG huyện Hà Trung năm 2021-2022

Lời giải

Cạnh hình vuông $ABCD$ là $5 + 8 = 13$ (cm)

Diện tích hình chữ nhật nhỏ là: $5 \cdot 8 = 40$ (cm^2)

Diện tích hình vuông $ABCD$ là: $13 \cdot 13 = 169$ (cm^2)

2) Độ dài đường chéo thứ nhất của hình thoi là:

$$(84 + 12) : 2 = 48 \text{ (cm)}$$

Độ dài đường chéo thứ hai của hình thoi là:

$$48 - 12 = 36(\text{cm})$$

Diện tích hình thoi $MNPQ$ là:

$$48 \cdot 36 : 2 = 864(\text{cm}^2)$$

Diện tích hình thoi còn được tính như sau: $S_{MNPQ} = NK \cdot PQ$

$$\Rightarrow NK = S_{MNPQ} : PQ = 864 : 30 = 28,8(\text{cm})$$

Đáp số: $NK = 28,8\text{cm}$

Bài 19: Một khu đất hình chữ nhật có chu vi là 132m . Nếu giảm chiều rộng đi 5m và tăng chiều dài lên 5m thì chiều dài gấp đôi chiều rộng. Người ta dùng 30% diện tích khu đất để trồng rau, $\frac{11}{30}$ diện tích khu đất để trồng cây ăn quả, diện tích còn lại để xây nhà. Hỏi diện tích xây nhà là bao nhiêu?

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2022-2023

Lời giải

Khi giảm chiều rộng 5m và tăng chiều dài 5m thì chu vi không đổi.

Ta có nửa chu vi lúc sau là: $132 : 2 = 66(\text{m})$

Lúc sau chiều dài gấp đôi chiều rộng hay chiều rộng bằng $\frac{1}{2}$ chiều dài.

Suy ra chiều rộng lúc sau bằng $\frac{1}{3}$ nửa chu vi.

Chiều rộng khu đất đó là: $66 \cdot \frac{1}{3} + 5 = 27(\text{m})$

Chiều dài khu đất đó là: $66 - 27 = 39(\text{m})$

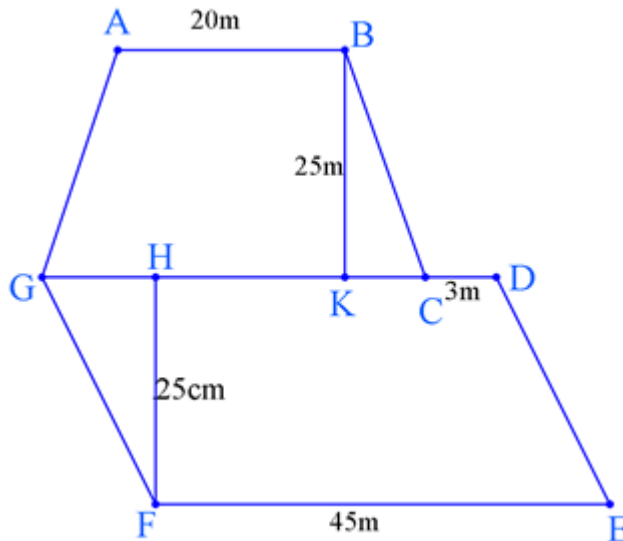
Diện tích khu đất đó là: $27 \cdot 39 = 1053(\text{m}^2)$

Đổi: $30\% = \frac{3}{10}$

Diện tích đất làm nhà chiếm số phần là: $1 - \frac{3}{10} - \frac{11}{30} = \frac{1}{3}$ (diện tích khu đất)

Diện tích đất xây nhà là: $1053 \cdot \frac{1}{3} = 351(\text{m}^2)$

Bài 20: Bác Hai có một thửa ruộng có dạng như hình bên (độ dài đoạn thẳng CD bằng 3 mét). Bác Hai trồng lúa trên toàn bộ thửa ruộng đó. Nếu trên mỗi mét vuông bác Hai thu được $0,8\text{kg}$ thóc thì số tiền bác Hai thu được là bao nhiêu? Biết mỗi tạ thóc có giá 700.000 đồng.



Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

Có $GD = FE = 45\text{ m}$

$GC = GD - CD = 45 - 3 = 42\text{ (m)}$

Diện tích hình thang $ABCG$ là: $S_1 = \frac{(AB + CG) \cdot BK}{2} = \frac{(20 + 42) \cdot 25}{2} = 775\text{ (m}^2\text{)}$

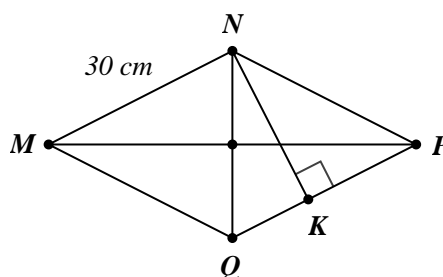
Diện tích hình bình hành $GFDE$ là $S_2 = FH \cdot FE = 25 \cdot 45 = 1125\text{ (m}^2\text{)}$

Diện tích cả thửa ruộng là: $S = S_1 + S_2 = 775 + 1125 = 1900\text{ (m}^2\text{)}$

Tổng số thóc thu hoạch được trên thửa ruộng là: $0,8 \cdot 1900 = 1520\text{ (kg)} = 15,2\text{ (tạ)}$

Tổng số tiền bác Hai thu được là: $15,2 \cdot 700\,000 = 10\,640\,000\text{ (đồng)}$

Bài 21: Cho hình thoi $MNPQ$ có độ dài cạnh là 30cm (Hình vẽ 1). Tổng độ dài hai đường chéo là 84cm , hiệu độ dài hai đường chéo là 12cm . Tính độ dài chiều cao NK .



Hình vẽ 1

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Lời giải

Ta có: $MP + NQ = 84$ và $MP - NQ = 12$

$$\text{nên } MP = (84 + 12) : 2 = 48$$

$$NQ = 84 - 48 = 36$$

$$S_{MNPQ} = \frac{MP \cdot NQ}{2} = \frac{48 \cdot 36}{2} = 864$$

$$\text{Lại có } S_{MNPQ} = NK \cdot PQ = 864$$

$$\Rightarrow NK = 864 : 30 = 28,8 \text{ (cm)}$$

Bài 22: Một thửa ruộng hình chữ nhật được chia thành 2 mảnh hình chữ nhật (hình vẽ 2), một mảnh nhỏ trồng rau và mảnh còn lại trồng ngô. Diện tích của mảnh trồng ngô gấp 6 lần diện tích của mảnh trồng rau. Chu vi mảnh trồng ngô gấp 4 lần chu vi mảnh trồng rau. Tính diện tích thửa ruộng ban đầu, biết chiều rộng của nó là 5 mét.

Nếu giảm chiều dài của một hình chữ nhật đi 20% và muốn diện tích không thay đổi thì chiều rộng phải thay đổi như thế nào?

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Lời giải



Vì diện tích trồng ngô gấp 6 lần diện tích trồng rau mà 2 mảnh chung 1 cạnh nên độ dài cạnh còn lại của mảnh trồng ngô gấp 6 lần độ dài cạnh còn lại của mảnh trồng rau

Gọi độ dài cạnh còn lại của mảnh trồng rau là: a

Vậy độ dài cạnh còn lại của mảnh trồng ngô là: $a \times 6$

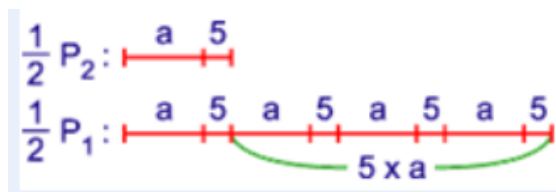
Nửa chu vi mảnh trồng ngô là: $a \times 6 + 5$

Nửa chu vi mảnh trồng rau là: $a + 5$

Nửa chu vi mảnh trồng ngô hơn nửa chu vi mảnh trồng rau là:

$$a \times 6 + 5 - (a + 5) = a \times 5$$

Mà chu vi mảnh trồng ngô gấp 4 lần chu vi mảnh trồng rau nên ta có sơ đồ:



Nhìn vào sơ đồ ta có: $(a + 5) \cdot 3 = 5 \cdot a$

$$15 = 5a - 3a = 2 \cdot a$$

$$\Rightarrow a = 7,5$$

Độ dài cạnh còn lại của mảnh trồng rau là: 7,5m

Độ dài cạnh còn lại của mảnh trồng ngô là: $7,5 \times 6 = 45$ (m)

Diện tích thửa ruộng ban đầu là: $(45 + 7,5) \times 6 = 262$ (m²)

* Nếu giảm chiều dài của một hình chữ nhật đi 20% và muốn diện tích không thay đổi thì chiều rộng phải thay đổi như thế nào?

Khi chiều dài của hình chữ nhật đó giảm đi 20% thì diện tích của hình chữ nhật cũng giảm đi 20%

Diện tích của hình chữ nhật sau khi giảm 20% là: $100 - 20 = 80$ (%)

Chiều rộng tăng số phần trăm là: $100 : 80 \times 100 = 125$ (%)

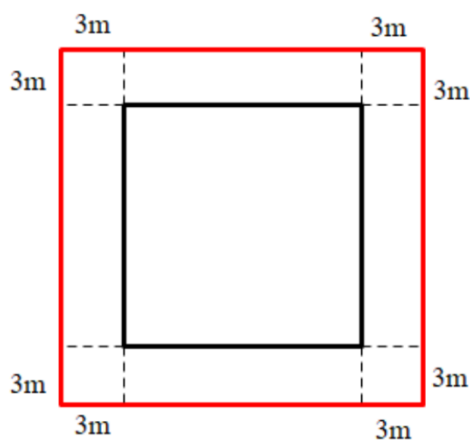
Số phần trăm chiều rộng cần tăng thêm là: $125 - 100 = 25$ (%)

Vậy chiều rộng phải tăng lên 25% để diện tích của hình chữ nhật đó không thay đổi.

Bài 23: Một bác nông dân có một khu vườn hình vuông. Ông ấy mở rộng vườn thêm 3m về mỗi phía như hình bên và thấy rằng diện tích khu vườn rộng thêm 84m². Tìm diện tích của khu vườn ban đầu.

Trích đề HSG THCS Quỳnh Thiện năm 2022 - 2023

Lời giải



Diện tích tăng thêm gồm 4 hình vuông có cạnh bằng 3 và 4 hình chữ nhật bằng nhau nên ta có:

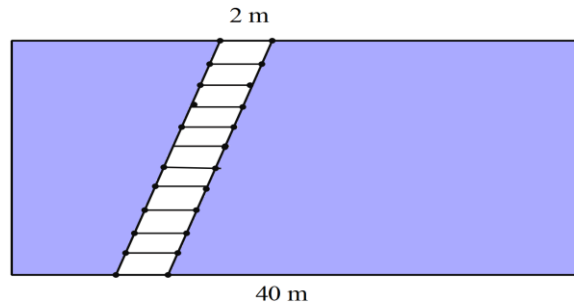


Diện tích mỗi hình chữ nhật là: $(84 - 4 \cdot 3 \cdot 3) : 4 = 48 : 4 = 12 (m^2)$

Chiều dài của hình chữ nhật (tức là cạnh của hình vuông ban đầu) là: $12 : 3 = 4 (m)$

Vậy diện tích của khu vườn ban đầu là: $4 \cdot 4 = 16 (m^2)$

Bài 24: Nhà bác Sơn có một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng 40 mét và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Trong khu vườn, bác Sơn làm một lối đi để tiện chăm sóc và tưới cho cây với kích thước được cho như hình vẽ. Bác dùng lưới B40 rào xung quanh khu vườn. Chi phí để làm cho mỗi mét hàng rào là 150000 đồng và cho mỗi mét vuông làm lối đi là 350000 đồng (bao gồm cả tiền công thợ và tiền vật liệu). Hỏi bác Sơn phải trả bao nhiêu tiền để làm hàng rào và làm lối đi cho khu vườn?



Trích đề HSG huyệnnăm 20...-20...

Lời giải

Chiều rộng khu vườn là: $40 : 2 = 20(m)$.

Chiều dài lưới B40 dùng để rào khu vườn là: $(40 + 20) \cdot 2 = 120(m)$.

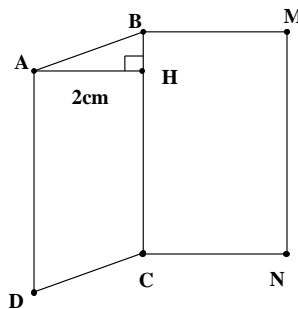
Diện tích của lối đi là: $2 \cdot 20 = 40(m^2)$

Chi phí để làm hàng rào là: $120 \cdot 150000 = 18000000$ (đồng).

Chi phí để làm lối đi là: $40 \cdot 350000 = 14000000$ (đồng).

Số tiền bác Sơn phải trả để làm hàng rào và làm lối đi cho khu vườn là:
 $8000000 + 14000000 = 32000000$ (đồng).

Bài 25: Tìm diện tích của hình H gồm hình bình hành $ABCD$ và hình chữ nhật $BMNC$, biết hình chữ nhật $BMNC$ có chu vi bằng 18cm và chiều dài MN gấp hai lần chiều rộng BM .



Trích đề HSG TX Sơn Tây năm 2021-2022

Lời giải

Nửa chu vi hình chữ nhật $BMNC$ bằng: $18 : 2 = 9(cm)$

Coi chiều dài hình chữ nhật $BMNC$ gồm 2 phần bằng nhau thì chiều rộng của nó gồm 1 phần như thế.

Tổng số phần bằng nhau là: $2 + 1 = 3$ (phần)

Chiều rộng của hình chữ nhật $BMNC$: $9 : 3 = 3(cm)$

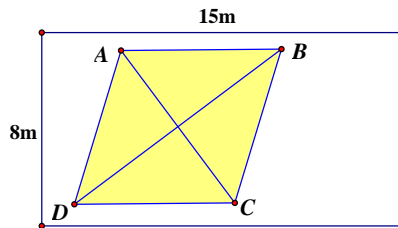
Chiều dài của hình chữ nhật $BMNC$: $3 \cdot 2 = 6(cm)$

Diện tích của hình chữ nhật $BMNC$: $6 \cdot 3 = 18(cm^2)$

Diện tích hình bình hành: $ABCD: 6 \cdot 2 = 12(\text{cm}^2)$

Diện tích hình H là: $12 + 18 = 30(\text{cm}^2)$

Bài 26: Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài 15m, chiều rộng 8m. Người ta trồng một vườn hoa hình thoi ở trong mảnh đất đó, biết diện tích phần còn lại là 75m^2 . Tính độ dài đường chéo AC , biết $BD=9\text{m}$.



Trích đề HSG huyện Tân Kỳ (Nghĩa Đông) và huyện Hậu Lộc năm 2021-2022

Lời giải

Diện tích mảnh đất hình chữ nhật là: $15 \cdot 8 = 120(\text{m}^2)$

Diện tích phần trồng hoa hình thoi là: $120 - 75 = 45(\text{m}^2)$

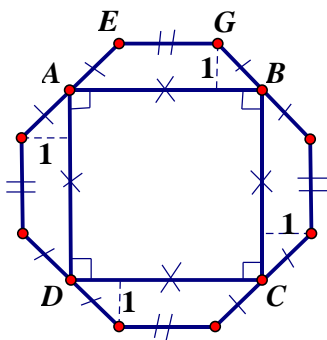
Độ dài đường chéo AC là: $45 \cdot 2 : 9 = 10(\text{m})$

Vậy độ dài đường chéo $AC = 10\text{m}$.

Bài 27: Muốn cắt một miếng bìa có diện tích là 28cm^2 như hình bên. Biết chu vi hình vuông $ABCD$ là 16cm. Tính độ dài cạnh EG . (số liệu trên hình vẽ đơn vị là cm)

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2021-2022

Lời giải



Cạnh của hình vuông $ABCD$ là: $16 : 4 = 4(\text{cm})$

Diện tích của hình vuông $ABCD$ là: $4 \cdot 4 = 16(\text{cm}^2)$

Tổng diện tích của bốn hình thang là: $28 - 16 = 12(\text{cm}^2)$

Diện tích của hình thang $ABGE$ là: $12 : 4 = 3(\text{cm}^2)$

Tổng 2 đáy của hình thang $ABGE$ là: $3 \cdot 2 : 1 = 6(\text{cm})$

Cạnh GE là: $6 - 4 = 2(\text{cm})$

Bài 28: Một khu đất hình chữ nhật có chu vi là 132 m. Nếu giảm chiều rộng đi 5 m và tăng chiều dài lên 5 m thì chiều dài gấp đôi chiều rộng.

a) Tính diện tích khu đất hình chữ nhật ban đầu.

b) Người ta dùng 30% diện tích khu đất ban đầu để trồng rau, chi phí cho mỗi mét vuông trồng rau là 35000 đồng. Tính số tiền cần chi phí để trồng rau?

Trích đề HSG huyện Sóc Sơn năm 2021-2022

Lời giải

a) Nếu giảm chiều rộng 5 m và tăng chiều dài 5 m thì chu vi không đổi.

Ta có nửa chu vi lúc sau là: $132 : 2 = 66(\text{m})$

Lúc sau chiều dài gấp đôi chiều rộng hay chiều rộng bằng $\frac{1}{2}$ chiều dài.

Suy ra chiều rộng lúc sau bằng $\frac{1}{3}$ nửa chu vi.

Chiều rộng ban đầu khu đất đó là: $66 \cdot \frac{1}{3} + 5 = 27(\text{m})$

Chiều dài ban đầu khu đất đó là: $66 - 27 = 39(\text{m})$

Diện tích ban đầu khu đất đó là: $27 \cdot 39 = 1053(\text{m}^2)$

b) Diện tích trồng rau là: $30\% \cdot 1050 = \frac{3}{10} \cdot 1050 = 315(\text{m}^2)$

Số tiền chi phí để trồng rau là: $315 \cdot 35000 = 11025000$ đồng.

Bài 29: Người ta muốn lát gạch và trồng cỏ cho sân vườn hình vuông. Biết diện tích phần trồng cỏ bằng $\frac{1}{4}$ diện tích sân vườn và diện tích phần lát gạch là 48m^2 .

1) Tính diện tích sân vườn.

2) Tính diện tích trồng cỏ.

3) Giá 1m^2 cỏ là 60000 đồng, nhưng khi mua lại được giảm giá 10%. Vậy số tiền cần mua cỏ là bao nhiêu?

4) Người ta cắm cọc làm hàng rào xung quanh sân vườn, khoảng cách giữa các cọc đều nhau là 0,8m. Hỏi phải dùng bao nhiêu chiếc cọc?

Trích đề HSG Quận Hà Đông năm 2021-2022

Lời giải

1) Phần số chỉ diện tích phần lát gạch là: $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ diện tích sân vườn.

Do đó diện tích sân vườn là: $48 : \frac{3}{4} = 64(\text{m}^2)$

2) Diện tích trồng cỏ là: $\frac{1}{4} \cdot 64 = 16(\text{m}^2)$

3) Giá tiền 1m^2 cỏ sau khi được giảm giá là: $60000 - 10\% \cdot 60000 = 54000$ (đồng).

Số tiền cần mua cỏ là: $54000 \cdot 16 = 864000$ (đồng).

4) Cạnh của sân vườn là: $\sqrt{64} = 8(\text{m})$

Chu vi của sân vườn là: $8 \cdot 4 = 32(\text{m})$

Vậy số cọc cần dùng là: $32 : 0,8 = 40$ (chiếc).

Bài 30: Một nền nhà hình chữ nhật có chiều rộng 5 m và chiều dài gấp 4 lần chiều rộng. Người ta lát nền nhà bằng những viên gạch hình vuông cạnh 4 dm . Tổng số tiền mua gạch là 11875000 đồng thì vừa đủ để lát . Hỏi giá mỗi viên gạch lát nền là bao nhiêu ?

Trích đề HSG Huyện Tiên Du năm 2021-2022

Lời giải

Chiều dài của nền nhà là: $4 \cdot 5 = 20(\text{m})$

Diện tích nền nhà hình chữ nhật là: $20 \cdot 5 = 100(\text{m}^2)$

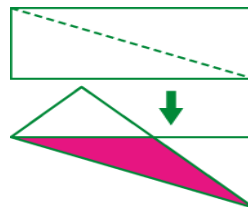
Đổi: $4 \text{ dm} = 0,4 \text{ m}$

Diện tích một viên gạch lát nền là: $0,4 \cdot 0,4 = 0,16(\text{m}^2)$

Số viên gạch dùng để lát nền là: $100 : 0,16 = 625$ (viên)

Giá mỗi viên gạch lát nền là: $11875000 : 625 = 19000$ (đồng)

Bài 31: Một tờ giấy hình chữ nhật được gấp theo đường chéo như hình vẽ. Diện tích hình nhận được bằng $\frac{5}{8}$ diện tích hình chữ nhật ban đầu. Biết diện tích phần tô màu là 18 cm^2 . Tính diện tích tờ giấy ban đầu.



Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Lời giải

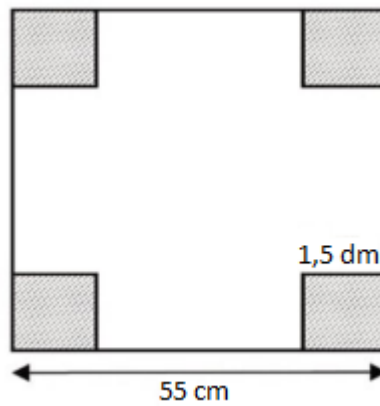
Khi gấp tờ giấy hình chữ nhật theo đường chéo (đường nét đứt) thì phần hình tam giác được tô màu bị xếp chồng lên nhau. Do đó diện tích hình chữ nhật ban đầu lớn hơn diện tích hình nhận được chính là diện tích tam giác được tô màu.

Diện tích hình chữ nhật ban đầu giảm đi bằng $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$ diện tích hình chữ nhật ban đầu.

Do vậy diện tích tam giác tô màu bằng $\frac{3}{8}$ diện tích hình chữ nhật ban đầu, hay $\frac{3}{8}$ diện tích hình chữ nhật ban đầu bằng 18 cm^2 .

Vậy diện tích hình chữ nhật ban đầu là: $18 : \frac{3}{8} = 48 (\text{cm}^2)$

Bài 32: Một miếng tôn hình vuông có độ dài 1 cạnh là 55 cm . Người ta cắt đi bốn góc theo các hình vuông nhỏ có độ dài cạnh là 1,5 dm . Tính chu vi và diện tích phần tôn còn lại (*không yêu cầu học sinh vẽ hình*)



Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Lời giải

Sau khi cắt đi bốn góc theo các hình vuông nhỏ thì chu vi của miếng tôn còn lại vẫn bằng chu vi miếng tôn cũ và bằng: $55 \cdot 4 = 220$ (cm)

Đổi $1,5\text{dm} = 15\text{cm}$

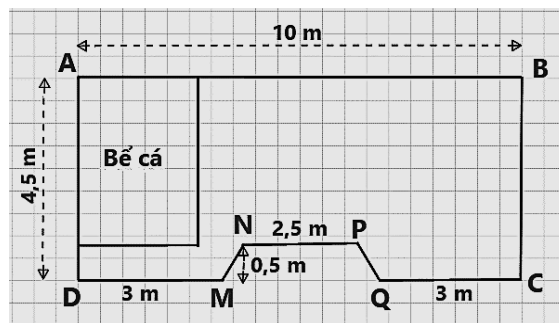
Diện tích của bốn miếng tôn bị cắt đi là: $4 \cdot (15 \cdot 15) = 4 \cdot 225 = 900$ (cm²).

Diện tích của miếng tôn ban đầu là: $55 \cdot 55 = 3025$ (cm²).

Diện tích của miếng tôn còn lại là: $3025 - 900 = 2125$ (cm²).

Vậy diện tích của miếng tôn còn lại là: 2125 cm².

Bài 33: Nhà bác Bình có một mảnh sân như hình bên. Trong sân, bác xây một bể cá có dạng hình chữ nhật dài 3m, rộng 2m. Phần còn lại của sân bác lát gạch. Biết công làm bể cá là 500000 đồng/m², công lát gạch là 100000 đồng/m². Tính tổng tiền công bác Bình cần trả cho thợ để hoàn thiện sân.



(Học sinh không phải vẽ lại hình vào bài làm)

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Lời giải

Diện tích hình chữ nhật ABCD là: $10 \cdot 4,5 = 45$ (m²)

Chiều dài đoạn MQ là: $10 - 3 - 3 = 4$ (m)

Diện tích hình thang $MNPQ$ là : $(4 + 2,5).0,5 : 2 = 1,625 (m^2)$

Diện tích sân nhà bác Bình là: $45 - 1,625 = 43,375 (m^2)$

Diện tích bể cá là: $3.2 = 6 (m^2)$

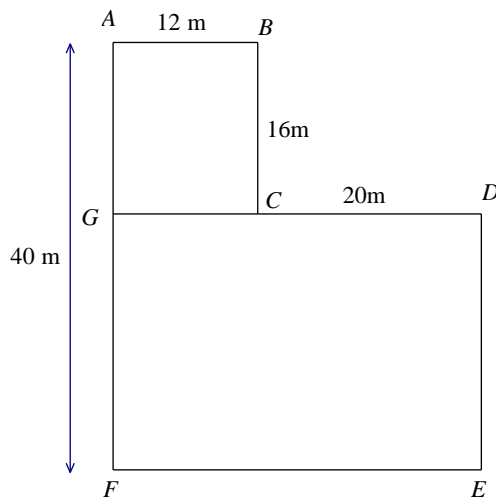
Tiền công làm bể cá là: $6.500\ 000 = 3\ 000\ 000$ (đồng)

Diện tích lát gạch là: $43,375 - 6 = 37,375 (m^2)$

Tiền công lát gạch là: $37,375.100\ 000 = 3\ 737\ 500$ (đồng)

Tổng tiền công là: $3\ 000\ 000 + 3\ 737\ 500 = 6\ 737\ 500$ (đồng)

Bài 34: Khu vườn nhà anh Minh có dạng và kích thước như hình vẽ.



a) Anh Minh muốn dùng lưới B40 để rào cả khu vườn. Hỏi anh Minh phải trả bao nhiêu tiền để rào cả khu vườn, biết giá trọn gói (gồm tiền lưới và tiền công) cho mỗi mét lưới (theo chiều dài) là 150000 đồng?

b) Trên phần đất $ABCG$, anh Minh trồng rau mùng tơi, còn trên mảnh đất $GDEF$ anh trồng rau cải. Hỏi sau khi anh Minh thu hoạch hết toàn bộ rau mùng tơi và rau cải trong khu vườn thì anh thu được bao nhiêu tiền? Biết rằng cứ $1 m^2$ thì anh thu hoạch được 2 kg rau cải và 3 kg rau mùng tơi. Giá mỗi kilogram rau mùng tơi là 8000 đồng, giá mỗi kilogram rau cải là 7500 đồng.

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021-2022

Lời giải

2.a) Số mét lưới B40 anh Minh cần dùng để rào toàn bộ khu vườn là:

$$12 + 16 + 20 + (40 - 16) + (12 + 20) + 40 = 144 (m)$$

Số tiền anh Minh phải trả để rào hết khu vườn là:

$$144.150000 = 21600000 \text{ (đồng)}$$

2.b) Diện tích phần đất $ABCG$ anh Minh trồng rau mồng tơi là:

$$S_{ABCG} = 12.16 = 192(m^2)$$

Độ dài đoạn thẳng DE là: $40 - 16 = 24(m)$

Độ dài đoạn thẳng EF là: $12 + 20 = 32(m)$

Diện tích phần đất $GDEF$ anh Minh trồng rau cải là:

$$S_{GDEF} = 24.32 = 768(m^2)$$

Khối lượng rau mồng tơi thu được trên phần đất $ABCG$ là: $3.192 = 576(kg)$

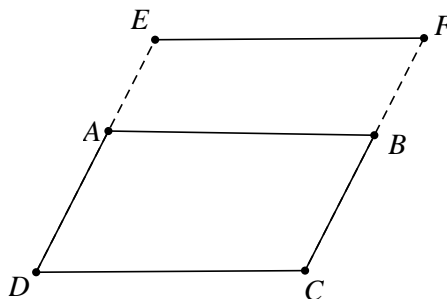
Khối lượng rau cải thu được trên phần đất $GDEF$ là: $2.768 = 1536(kg)$

Số tiền anh Minh thu được từ rau mồng tơi là: $576.8000 = 4608000$ (đồng)

Số tiền anh Minh thu được từ rau cải là: $1536.7500 = 1152000$ (đồng)

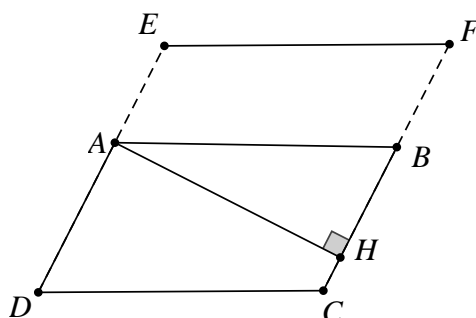
Tổng số tiền anh Minh thu được là: $4608000 + 1152000 = 16128000$ (đồng)

Bài 35: Cho hình bình hành $ABCD$ ($AB > AD$) có chu vi là 32 cm. Nếu thêm vào mỗi cạnh AD và BC của hình bình hành 4 cm thì được hình thoi $CDEF$ (hình vẽ). Biết hình thoi $CDEF$ có diện tích là 54 cm^2 . Tính diện tích hình bình hành $ABCD$.



Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Lời giải



Khi thêm vào mỗi cạnh AD và BC của hình bình hành 4cm thì được hình thoi $CDEF$ có chu vi lớn hơn chu vi hình bình hành $ABCD$ là $2.4 = 8\text{cm}$

Chu vi hình thoi $CDEF$ là $32 + 8 = 40\text{cm}$

Cạnh của hình thoi $CDEF$ là $40 : 4 = 10\text{cm}$

Kẻ đường cao AH của hình bình hành $ABCD$ nên AH cũng là chiều cao của hình thoi $CDEF$

Vì diện tích của hình thoi là 54cm^2 nên độ dài chiều cao AH là $54 : 10 = 5,4\text{cm}$

Nửa chu vi hình bình hành là $40 : 4 = 10\text{cm}$

$CD + BC = 16\text{cm}$. Mà $CD = 10\text{cm} \Rightarrow CD = 6$

Diện tích hình bình hành $ABCD$ là

$AH.BC = 5,4.6 = 32,4\text{cm}^2$

Bài 36: Nhà ông Minh có một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi bằng 600m và chiều dài bằng $\frac{3}{2}$ chiều rộng. Trên mảnh vườn đó, để tiện cho việc chăm bón và thu hoạch ông Minh đã làm một lối đi xung quanh rộng 1m , phần diện tích còn lại dùng để trồng cam.

1. Tính diện tích mảnh vườn nhà ông Minh?
2. Tính diện tích ông Minh dùng để trồng cam.
3. Trung bình cứ 4m^2 ông Minh trồng một cây cam. Dự định sau 3 năm mỗi cây sẽ cho thu hoạch khoảng 50kg . Nếu giá thị trường là 25000 đồng/ 1kg và trừ đi 40% chi phí thì ông Minh thu được bao nhiêu tiền ?

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2020-2021

Lời giải

Nửa chu vi của mảnh vườn là $600 : 2 = 300\text{m}$

Vì chiều dài bằng $\frac{3}{2}$ chiều rộng nên chiều dài của mảnh vườn là $300 : (3 + 2).3 = 180\text{m}$

Chiều rộng của mảnh vườn là $300 - 180 = 120\text{m}$

Diện tích của mảnh vườn là $180.120 = 21600\text{m}^2$

Tính được diện tích phần trồng cam là $178.118 = 21004\text{m}^2$

Số cây cam ông Minh trồng được là $21004 : 4 = 5251$ cây

Dự định sau 3 năm thu được $5251.50 = 262550\text{kg}$

Khi đó ông Minh thu được số tiền cam là: $262550.25000 = 6563750000$ đồng

Số tiền chi phí là $6563750000.40\% = 2625500000$ đồng

Số tiền lãi ông Minh thu được là

$$6563750000 - 2625500000 = 3938250000 \text{ đồng}$$

Bài 37: Bác An đào cái ao hình vuông trong mảnh đất hình chữ nhật có chiều rộng 10 m và chiều dài 15 m. Biết rằng sau khi đào ao diện tích đất còn lại quanh cái ao là 50 m^2 . Tính độ dài cạnh cái ao.

Trích đề HSG huyện Tiền Hải năm 2020-2021

Lời giải

Diện tích mảnh đất hình chữ nhật là:

$$10.15 = 150 \text{ (m}^2\text{)}$$

Diện tích của cái ao là :

$$150 - 50 = 100 \text{ (m}^2\text{)}$$

Vì cái ao hình vuông có diện tích 100 m^2 suy ra độ dài cạnh cái ao là 10 m.

B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

I. Số điểm, số đoạn thẳng, số đường thẳng

Dạng toán: Đếm số điểm, số đường thẳng, số đoạn thẳng

Bài 1: Cho 100 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm vẽ một đường thẳng. Số đường thẳng vẽ được là:

- A. 200. B. 4950. C. 5680. D. 9900.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Bài 2: Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Biết rằng tổng số giao điểm mà n đường thẳng đó cắt nhau tạo ra bằng 465. Tìm n .

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Bài 3: Có 25 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Nếu thay 25 điểm bởi n điểm ($n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$) thì số đường thẳng là bao nhiêu?

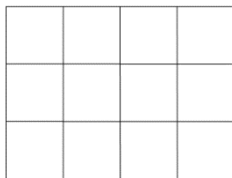
Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

Bài 4: Cho 30 điểm trong đó có đúng 5 điểm thẳng hàng (ngoài ra không còn 3 điểm nào thẳng hàng). Qua 2 điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi có tất cả bao nhiêu đường thẳng.

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đông (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Bài 5: Cho trước n điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Nếu bớt đi 1 điểm thì số đường thẳng vẽ được qua các cặp điểm giảm đi 10 đường thẳng. Tìm n .

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021 - 2022



Bài 6: Cho hình chữ nhật có chiều dài 4 cm, chiều rộng 3 cm. Chia các cạnh của hình chữ nhật thành những đoạn thẳng bằng nhau có độ dài mỗi đoạn là 1 cm. Nối các điểm chia như hình vẽ bên. Hỏi trong hình vẽ có tất cả bao nhiêu hình vuông.

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Bài 7: Cho n điểm phân biệt, trong đó có đúng 10 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm ta vẽ được một đường thẳng. Có tất cả 256 đường thẳng. Tính số điểm n

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Bài 8. a) Cho 40 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được bao nhiêu đường thẳng ?

b) Cho 40 điểm trong đó có đúng 10 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được bao nhiêu đường thẳng.

c) Cho n điểm ($n \in \mathbb{N}$). Trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, cứ qua hai điểm ta được 1 đường thẳng. Biết rằng có tất cả 105 đường thẳng. Tìm n ?

Trích đề HSG Trần Phú Gia Lai năm 2018-2019

Bài 9: Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Biết rằng tổng số giao điểm mà n đường thẳng đó cắt nhau tạo ra bằng 465. Tìm n .

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Bài 10: Cho 2010 đường thẳng trong đó bất kỳ 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau. Không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Bài 11: Cho 30 điểm trong đó có đúng 5 điểm thẳng hàng, ngoài ra không còn có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ một đường thẳng. Hỏi có tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021-2022

Bài 12: Cho 20 điểm phân biệt, trong đó có n điểm thẳng hàng. Cứ qua hai điểm vẽ được một đường thẳng. Hãy tìm n , biết rằng vẽ được tổng cộng 170 đường thẳng.

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021 -2022

Bài 13: Cho n điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Biết rằng có tất cả 105 đường thẳng. Tính n

Trích đề HSG huyện Ngọc Lặc năm 2018-2019

Bài 14: Cho 20 điểm phân biệt trong đó có đúng 7 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi từ 20 điểm đó vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Trích đề HSG huyện Hoà Nhon năm 2015-2016

Bài 15: a) Cho 40 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được bao nhiêu đường thẳng ?

- b) Cho 40 điểm trong đó có đúng 10 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được bao nhiêu đường thẳng.
- c) Cho n điểm ($n \in \mathbb{N}$). Trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, cứ qua hai điểm ta được 1 đường thẳng. Biết rằng có tất cả 105 đường thẳng. Tìm n ?

Trích đề HSG cấp trường Trần Phú năm 2018-2019

Bài 16: Cho 2018 điểm phân biệt trong đó có đúng 3 điểm thẳng hàng. Qua hai điểm ta kẻ được một đường thẳng. Tính số đường thẳng kẻ được.

Trích đề chọn HSG Nga Sơn năm 2017-2018

Bài 17: Cho tam giác ABC và một đường thẳng d không đi qua bất kỳ đỉnh nào của tam giác và cắt cạnh BC của tam giác. Hãy chứng tỏ rằng đường thẳng d cắt một và chỉ một trong hai cạnh AB và AC của tam giác ABC

Trích đề KSCL HSG Ba Vì năm 2017-2018

*** Tính số góc, số tam giác được tạo ra**

Bài 18: Trên đoạn thẳng AB lấy 2006 điểm khác nhau đặt tên theo thứ tự từ A đến B là $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2004}$. Từ điểm M không nằm trên đoạn thẳng AB ta nối M với các điểm $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2004}; B$. Tính số tam giác tạo thành.

Trích đề HSG cấp trường năm 2019-2020

Bài 19: Cho 10 đường thẳng đồng quy tại O . Hỏi có bao nhiêu góc ở đỉnh O được tạo thành (không kể góc bẹt) ?

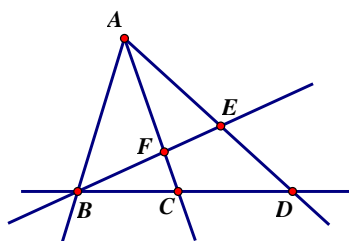
Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015 -2016

Bài 20: Cho 200 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm vẽ một đường thẳng. Số đường thẳng vẽ được là bao nhiêu?

- A. 1990 B. 19900 C. 39800 D. 40000

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 21: Trên hình vẽ sau có bao nhiêu bộ ba điểm thẳng hàng?



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 22: Cho 20 điểm phân biệt trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có thể kẻ được bao nhiêu đoạn thẳng?

- A. 190 B. 180 C. 380 D. 200

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 23: Vẽ đường thẳng d không đi qua O . Trên đường thẳng d lấy 2015 điểm phân biệt. Tính số các góc có đỉnh O và cạnh đi qua 2 điểm bất kỳ trên đường thẳng d .

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Bài 24: Cho 6 đường thẳng đôi một cắt nhau. Hỏi 6 đường thẳng đó có thể cắt nhau ít nhất tại bao nhiêu điểm, nhiều nhất tại bao nhiêu điểm.

Trích đề HSG Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020

Bài 25: Trên cùng một nửa mặt chứa tia Oy , có bờ chứa tia Ox . Cần vẽ thêm bao nhiêu tia phân biệt gốc O và không trùng với các tia đã vẽ trong hình để tạo thành 630 góc đỉnh O (chỉ tính các góc thuộc nửa mặt phẳng nói trên).

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 26: Cho 2010 đường thẳng trong đó bất kỳ 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau. Không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018 - 2019

Bài 27: Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Biết rằng tổng số giao điểm mà n đường thẳng đó cắt nhau tạo ra bằng 465. Tìm n .

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Bài 28: Cho 100 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm vẽ một đường thẳng. Số đường thẳng vẽ được là:

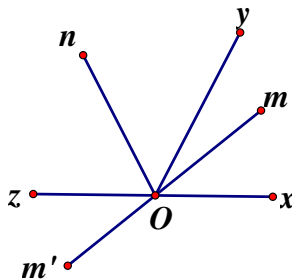
Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 29: Cho góc xOy và góc yOz là hai góc kề bù. Góc yOz bằng 30°

- d) Vẽ tia Om nằm trong góc xOy sao cho $xOm = 75^\circ$; tia On nằm trong góc yOz sao cho $yOn = 15^\circ$
- e) Hình vẽ trên có mấy góc?
- f) Nếu có n tia chung gốc thì sẽ tạo nên bao nhiêu góc ?

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Bài 30: Cho hình vẽ:



Cần vẽ thêm bao nhiêu tia phân biệt chung gốc O và không trùng với các tia đã vẽ trong hình để tạo thành tất cả 300 góc.

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Bài 31: Cho đường thẳng xy , trên đó lấy ba điểm phân biệt A, B, C .

- a) Biết $AB = 5\text{cm}, AC = 3\text{cm}$. Tính BC .

b) Trên xy lấy 4 điểm phân biệt (không trùng với A, B, C) và điểm O không nằm trên đường thẳng xy . Hỏi có thể vẽ được tất cả bao nhiêu tam giác có đỉnh là ba trong các điểm đã có trên hình vẽ.

Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 - 2022

Bài 32: Lấy thêm 19 điểm phân biệt trên đường thẳng xy (các điểm này không trùng với điểm O) và một điểm A nằm ngoài đường thẳng xy . Hỏi vẽ được bao nhiêu tam giác nhận 3 trong các điểm trên làm đỉnh.

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2018 - 2019

Bài 33: Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Biết rằng tổng số giao điểm mà n đường thẳng đó cắt nhau tạo ra bằng 465. Tìm n .

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Bài 34: Cho 2010 đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau. Không có ba đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng?

Trích đề HSG huyệnnăm 20...-20...

Bài 35: Cho n đường thẳng, trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy. Biết rằng số giao điểm của các đường thẳng đó là 903. Tính n ?

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2021-2022

Bài 36: Cho 30 điểm trong đó có đúng 5 điểm thẳng hàng (ngoài ra không còn 3 điểm nào thẳng hàng). Qua 2 điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi có tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2021-2022

Bài 37: Cho 25 điểm trong đó có đúng 8 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Hỏi vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Trích đề HSG huyện Sóc Sơn năm 2021-2022

Bài 38: Cho 100 điểm (trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng). Nối từng cặp hai điểm trong 100 điểm đó thành các đoạn thẳng. Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng?

Trích đề HSG huyện Tiên Du năm 2021-2022

Bài 39: Cho 25 điểm trong đó có đúng 8 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Hỏi vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Bài 40: Cho n ($n > 2, n \in \mathbb{N}$) điểm phân biệt trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Tính n biết vẽ được tất cả 300 đường thẳng.

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Bài 41: Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Biết rằng tổng số giao điểm mà n đường thẳng đó cắt nhau tạo ra bằng 465. Tìm n .

Bài 42: Cho 50 điểm phân biệt sao cho có đúng 3 điểm thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm phân biệt ta kẻ được 1 đường thẳng. Hỏi kẻ được tất cả bao nhiêu đường thẳng từ 50 điểm trên?

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

II. Trung điểm của đoạn thẳng

Dạng toán: Tính độ dài đoạn thẳng, chứng minh trung điểm của đoạn thẳng.

Bài 1: Trên đường thẳng a lấy ba điểm M, N, P sao cho: $MN = 2$ cm, $NP = 5$ cm. Khi đó độ dài đoạn thẳng MP bằng:

- A. 3 cm. B. 7 cm. C. 3 cm hoặc 7 cm. D. 3,5 cm.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 2: Cho ba điểm A, O, B sao cho $OA = 2$ cm, $OB = 3$ cm và $AB = 5$ cm. Lấy điểm M nằm trên đường thẳng AB sao cho $OM = 1$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng AM .

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

Bài 3: Cho hai điểm A và B cùng nằm trên đường thẳng xy sao cho $AB = 5$ cm. Trên tia Ax lấy điểm C sao cho $AC = 3$ cm. Gọi M là trung điểm của BC . Tính độ dài đoạn thẳng AM .

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Bài 4: Cho hai tia Ox và Oy đối nhau, trên tia Ox lấy hai điểm A và M sao cho $OA = 5$ cm, $OM = 1$ cm; trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OB = 3$ cm. Chứng tỏ: Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Bài 5: Trên tia Ox lấy hai điểm A và B sao cho $OA = 8$ cm, $AB = 2$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng OB .

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 6: Trên tia Ox lấy hai điểm M và N sao cho $OM = 3$ cm, $ON = 7$ cm.

- a) Tính độ dài đoạn thẳng MN .
- b) Gọi P là điểm thuộc tia Ox sao cho $MP = 2$ cm. Hỏi P có phải là trung điểm của đoạn thẳng MN không? Vì sao?

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021 - 2022

Bài 7: Lấy điểm O trên đường thẳng xy . Trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 2$ cm. Trên tia Oy lấy hai điểm M và B sao cho $OM = 1$ cm; $OB = 4$ cm.

- a) Tính độ dài đoạn thẳng BM .
- b) Chứng tỏ rằng M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Bài 8: Lấy điểm O trên đường thẳng xy . Trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 2$ cm. Trên tia Oy lấy hai điểm M và B sao cho $OM = 1$ cm; $OB = 4$ cm.

- a) Tính độ dài đoạn thẳng BM .
- b) Chứng tỏ rằng M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

c) Cho điểm Q không thuộc đường thẳng xy và lấy thêm 2017 điểm phân biệt khác thuộc đường thẳng xy và không trùng với 4 điểm A, B, M, O . Hỏi có thể vẽ được bao nhiêu đoạn thẳng có 2 đầu mút là 2 điểm trong số các điểm đã cho?

Trích đề HSG huyện Chí Linh năm 2021-2022

Bài 9: Trên tia Ox lấy hai điểm M và N , sao cho $OM = 5$ cm và $ON = 9$ cm.

a) Tính độ dài đoạn thẳng MN .

b) Lấy điểm P trên tia Ox , sao cho $MP = 2$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng OP .

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Bài 10: Trên tia Ox lấy hai điểm A, B (điểm A không trùng với điểm O và độ dài OB lớn hơn độ dài OA). Gọi M là trung điểm của OA . Hãy so sánh độ dài MB với trung bình cộng độ dài OB, AB

Trích đề HSG huyện Tĩnh Gia năm 2018-2019

Bài 11: Trên đường thẳng xy lấy điểm O và hai điểm M, N sao cho $OM = 2$ cm, $ON = 3$ cm. Vẽ các điểm A, B trên đường thẳng xy sao cho M là trung điểm của OA ; N là trung điểm của OB . Tính độ dài AB .

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021 - 2022

Bài 12: Cho hai tia Ox và Oy đối nhau. Trên tia Ox lấy hai điểm A và M sao cho $OA = 5$ cm, $OM = 1$ cm. Trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OB = 3$ cm. Chỉ ra: M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021-2022

Bài 13: Cho đường thẳng xy . Trên xy , lấy ba điểm A, B, C sao cho $AB = a$ (cm), $AC = b$ (cm) ($b > a$). Gọi I là trung điểm của AB .

a) Tính IC .

b) Lấy 4 điểm M, N, P, Q nằm ngoài đường thẳng xy . Chứng tỏ rằng đường thẳng xy không cắt hoặc cắt ba, hoặc cắt bốn đoạn thẳng trong các đoạn thẳng sau: MN, MP, MQ, NP, NQ, PQ .

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2019 -2020

Bài 14: a) Cho đoạn thẳng $AB = 7$ cm. Trên tia AB lấy điểm I sao cho $AI = 4$ cm. Trên tia BA lấy điểm K sao cho $BK = 2$ cm. Tính IK .

b) Trên tia Ox cho 4 điểm A, B, C, D . Biết rằng A nằm B và C , B nằm giữa C và D ; $OA = 5$ cm, $OD = 2$ cm, $BC = 4$ cm và độ dài AC gấp đôi độ dài BD . Tính độ dài các đoạn BD, AC .

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2017 -2018

Bài 15: Cho tam giác ABC có $BC = 6$ cm. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $BD = 3$ cm.

a) Tính độ dài đoạn thẳng CD .

b) Gọi M là trung điểm của CD . Tính độ dài đoạn thẳng BM .

c) Biết góc $DAC = 120^\circ$. Vẽ Ax và Ay lần lượt là các tia nằm chính giữa của góc BAC và góc BAD .

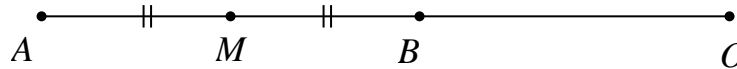
d) Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB không chứa điểm D , nếu vẽ thêm n tia gốc A phân biệt không trùng với các tia AB, AC, Ax thì có tất cả bao nhiêu góc đỉnh A được tạo thành?

Trích đề HSG huyện Phù Ninh năm 2015 -2016

Bài 16: Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trên tia đối của tia BA lấy O (O khác B). So sánh độ dài đoạn thẳng OM và trung bình cộng của hai đoạn thẳng OA và OB .

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015 -2016

Lời giải



M là trung điểm của đoạn thẳng AB nên M nằm giữa A và B và $MA = MB$ (1)

Hai tia BM , BA trùng nhau; hai tia BO , BA đối nhau do đó B nằm giữa O và M

Ta có $OM = OB + BM$ (2).

Hai tia MA , MB đối nhau, hai tia MB , MO trùng nhau suy ra hai tia MA , MO đối nhau do đó M nằm giữa A và O .

Vậy $OM + MA = OA$

$OM = OA - MA$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $2OM = OA + OB$ hay $OM = \frac{OA + OB}{2}$.

Bài 17: Cho đoạn thẳng $AB = 5\text{cm}$. Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng AB , trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $AN = AM$.

a) Tính BN khi $BM = 2\text{cm}$.

b) Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB , vẽ các tia Ax và Ay sao cho $B Ax = 40^\circ$, $B Ay = 110^\circ$. Tính $y Ax$, $N Ay$.

c) Xác định vị trí của điểm M trên đoạn thẳng AB để đoạn thẳng BN có độ dài lớn nhất.

Trích đề HSG THCS Ái Thượng năm 2021-2022

Bài 18: Trên đường thẳng xy lấy điểm O . Trên tia Ox lấy điểm A , trên tia Oy lấy điểm B, C sao cho $OA = OC = 2\text{cm}$ và $OB = 7\text{cm}$.

1) Vẽ hình sau đó:

a) Tính độ dài đoạn thẳng BC .

b) Cho biết điểm O có là trung điểm đoạn thẳng AC không? Vì sao?

2) Cần lấy thêm trên đường thẳng xy bao nhiêu điểm phân biệt không trùng với các điểm đã cho để trên đường thẳng có 465 đoạn thẳng mà mỗi đoạn thẳng có mút là hai trong các điểm đó.

Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Bài 19: Cho đoạn thẳng AB và trung điểm M của nó. Chứng tỏ rằng nếu C là điểm nằm giữa M và

B thì: $CM = \frac{CA - CB}{2}$

Trích đề HSG Trường Hưng Mỹ năm 2018-2019

Lời giải

Ta có $CA = CM + MA$ (1)

$$CB = MB - CM \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $CA - CB = 2CM$ ($MA = MB$) $\Rightarrow CM = \frac{CA - CB}{2}$

Bài 20: Cho đoạn thẳng AB , điểm O thuộc tia đối của tia AB . Gọi M, N thứ tự là trung điểm OA, OB

- Chứng tỏ rằng $OA < OB$
- Trong ba điểm O, M, N điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại
- Chứng tỏ rằng độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào vị trí điểm O (O thuộc tia đối tia AB)

Trích đề HSG cấp trường THCS Hà Huy Tập năm 2018-2019

Bài 21: Cho góc bẹt xOy , trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 2cm$; trên tia Oy lấy hai điểm M và B sao cho $OM = 1cm, OB = 4cm$. Chứng tỏ điểm M nằm giữa hai điểm O và B . Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Bài 22: Gọi A và B là hai điểm trên tia Ox sao cho $OA = 4cm, OB = 6cm$. Trên tia BA lấy điểm C sao cho $BC = 3cm$. So sánh AB với AC .

Trích đề HSG cấp trường vòng 2 THCS Tân Lập năm 2018-2019

Bài 23: Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trên tia đối của tia BA lấy O (O khác B). So sánh độ dài đoạn thẳng OM và trung bình cộng của hai đoạn thẳng OA và OB

Trích đề thi chọn HSG Tam Dương năm 2016-2017

Bài 24: Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng 2 cm. Lấy điểm C thuộc đường thẳng AB sao cho $BC = 5cm$. Tính độ dài đoạn thẳng AC

Trích đề chọn HSG Trục Ninh năm 2017-2018

Bài 25: Trên tia Ox cho 4 điểm A, B, C, D . Biết rằng A nằm giữa B và C ; B nằm giữa C và D ; $OA = 7cm$; $OD = 3cm$; $BC = 8cm$ và $AC = 3BD$

- Tính độ dài AC
- Chứng tỏ rằng: Điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AD

Trích đề chọn HSG Nga Sơn năm 2017-2018

Bài 26: Trên tia Ox lấy 2 điểm A, B sao cho $OA = 6cm, OB = 10cm$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của OA, AB . Tính độ dài đoạn thẳng EF .

Trích đề chọn HSG Nga Sơn năm 2017-2018

Bài 27: Trên đường thẳng a lấy 3 điểm M, N, P sao cho $MN = 2cm, NP = 5cm$. Khi đó độ dài đoạn thẳng MP bằng:

- A. 3 cm B. 3 cm hoặc 7 cm C. 7 cm D. 3,5 cm

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 28: Cho đoạn thẳng $AB = 12cm$. Biết điểm M thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AM = 7cm$, khi đó $AM - MB$ bằng:

- A. 3 cm B. 4 cm C. 2 cm D. 5 cm

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 29: Cho đoạn thẳng $CD = 20$ cm. Gọi M là trung điểm của CD , I là trung điểm của MC , K là trung điểm của MD , khi đó IK có độ dài là

- A. 10 cm B. 5 cm C. 6 cm D. 2,5 cm

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 30: Cho đoạn thẳng $AB = a$; điểm C nằm giữa hai điểm A và B , điểm M là trung điểm của AC ,

điểm N là trung điểm của CB . Hãy chứng tỏ rằng $MN = \frac{a}{2}$

Trích đề HSG tỉnh Bắc Ninh năm 2016 - 2017

Bài 31: Cho đoạn thẳng AB , điểm O thuộc tia đối của tia AB . Gọi M, N thứ tự là trung điểm của OA, OB .

- Chứng tỏ rằng $OA < OB$
- Trong ba điểm O, M, N điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại ?
- Chứng tỏ rằng độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào vị trí của điểm O (O thuộc tia đối của tia AB)

Trích đề HSG Toán 6 năm 2019 -2020

Bài 32: Cho đoạn thẳng $AB = 8$ cm. Lấy điểm C nằm giữa hai điểm A và B sao cho $BC = 4,5$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng AC .

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 33: Cho $\triangle ABC$ có $BC = 5,5$ cm. Điểm M thuộc tia đối của tia CB sao cho $CM = 3$ cm

- Tính độ dài đoạn thẳng BM
- Biết $\angle BAM = 80^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$ Tính $\angle CAM$
- Tính độ dài đoạn thẳng BK thuộc đoạn BM biết $CK = 1$ cm

Trích đề HSG huyệnnăm 2019-2020

Bài 34: Cho đoạn thẳng $AB = 8$ cm và C là trung điểm của nó, lấy điểm D là trung điểm của CB , E là trung điểm của CD . Tính độ dài đoạn thẳng EB .

Trích đề HSG Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020

Bài 35: Vẽ tia Ax . Trên tia Ax xác định hai điểm B và C sao cho B nằm giữa A, C và $AC = 8$ cm, $AB = 3BC$. Tính độ dài các đoạn AB, BC .

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Bài 36: Trên đường thẳng a lấy ba điểm M, N, P sao cho $MN = 2$ cm, $NP = 5$ cm. Khi đó độ dài đoạn MP bằng bao nhiêu

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 37: Cho đoạn thẳng AB ; điểm O thuộc tia đối của tia AB , Gọi M, N thứ tự là trung điểm của OA, OB .

Chứng tỏ rằng độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào vị trí của điểm O (O thuộc tia đối của tia AB)

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 38: Cho góc xAy , trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = 6cm$. Trên tia đối của tia Ax lấy điểm D sao cho $AD = 4cm$.

- Tính BD
- Lấy C là một điểm trên tia Ay . Biết $BCD = 80^\circ, BCA = 45^\circ$. Tính góc ACD
- Biết $AK = 2cm$ (K thuộc BD). Tính BK .

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Bài 39: Cho đoạn thẳng AB , điểm O thuộc tia đối của tia AB . Gọi M, N thứ tự là trung điểm của OA, OB .

- Chứng tỏ rằng $OA < OB$
- Trong ba điểm O, M, N điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại ?
- Chứng tỏ rằng độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào vị trí của điểm O (O thuộc tia đối của tia AB)

Trích đề HSG huyện Nông Cống năm 2019-2020

Bài 40: Vẽ đoạn thẳng $AB = 5cm$

- Trên đoạn thẳng AB lấy hai điểm M, N sao cho $MN = 1cm$. Tính $AM + BN$?
- Trên đoạn thẳng AB lấy hai điểm M, N sao cho $AM + BN = 7cm$. Tính MN ?

Trích đề HSG huyện Quế Sơn năm 2018-2019

Bài 41: Cho đoạn thẳng $AB = 6cm$. M là điểm nằm giữa hai điểm A và B . Gọi C và D lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AM và MB . Tính độ dài đoạn thẳng CD .

Trích đề HSG huyện Sơn Tây năm 2021-2022

Bài 42: Trên tia Ox cho 4 điểm A, B, C, D . Biết rằng B nằm giữa A và D ; A nằm giữa B và C ; $OA = 7cm$; $OD = 3cm$; $BC = 8cm$ và $AC = 3BD$.

- Tính độ dài đoạn thẳng AD ?
- Chứng tỏ rằng: Điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AD .

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2021-2022

Bài 43: Cho hai tia Ox và Oy đối nhau, trên tia Ox lấy hai điểm A và M sao cho $OA = 5cm$; $OM = 1cm$ trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OB = 3cm$. Chứng tỏ: Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2021-2022

Bài 44: Trên đường thẳng xy lấy điểm O . Trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 5cm$. Trên tia Oy lấy hai điểm B và C sao cho $OB = 5cm$ và $OC = a(cm)$, với $0 < a < 5$.

- a) Điểm O có là trung điểm của đoạn thẳng AB không? Vì sao?
 b) Xác định giá trị của a để C là trung điểm của đoạn thẳng OB .
 c) Trên đường thẳng xy lấy thêm 15 điểm phân biệt (không trùng với A, B, O, C). Tính tất cả số đoạn thẳng phân biệt được tạo thành từ các điểm trên hình.

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2021-2022

Bài 45: Cho đoạn thẳng AB bằng 1 đơn vị độ dài.

- a) Lấy C_1 là trung điểm của AB . Tính tỷ số $\frac{AB}{AC_1}$.
 b) Tương tự, lấy các điểm $C_2; C_3; \dots; C_{2022}$ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $AC_1; AC_2; AC_3; \dots; AC_{2021}$. Đặt $F = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2022}$. So sánh F với 2^{2023} .

Trích đề HSG Thanh Ba năm 2021-2022

Bài 46: Trên đoạn thẳng $AB = 4\text{cm}$ lấy điểm M , trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $AM = AN$.

- a) Nếu $BM = 1\text{cm}$. Tính BN .
 b) Xác định vị trí của điểm M để BN có độ dài lớn nhất. Giá trị lớn nhất đó là bao nhiêu?

Trích đề HSG Kim Sơn (Quang Thiện) năm 2021-2022

Bài 47: Cho đoạn thẳng AB . Điểm C thuộc tia đối của tia BA . M là trung điểm của đoạn thẳng AB . Chứng tỏ rằng: $CM = \frac{CA + CB}{2}$.

Trích đề HSG Tiên Du năm 2021-2022

Bài 48: Trên tia Ox lấy hai điểm M và N , sao cho $OM = 3\text{cm}$ và $ON = 7\text{cm}$.

- a) Tính độ dài đoạn thẳng MN .
 b) Lấy điểm P trên tia Ox , sao cho $MP = 2\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng OP .

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Bài 49: Lấy điểm O trên đường thẳng xy . Trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 2\text{cm}$. Trên tia Oy lấy hai điểm M và B sao cho $OM = 1\text{cm}; OB = 4\text{cm}$.

- a) Tính độ dài đoạn thẳng BM .
 b) Chứng tỏ rằng điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Bài 50: Trên đoạn thẳng $AB = 12\text{cm}$ lấy điểm M nằm giữa A và B . Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AM ; K là trung điểm của đoạn thẳng AB .

- a) Biết $AM = 9\text{cm}$. Tính IK ?
 b) Giả sử $AM = a(\text{cm})(0 < a < 12)$. Tìm a để K là trung điểm của đoạn thẳng IM .

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Bài 51: Cho điểm A nằm giữa hai điểm B và C sao cho $AB = 3\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$. Chứng tỏ rằng điểm A là trung điểm của đoạn thẳng BC (*không cần vẽ hình*).

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Bài 52: Cho ba điểm $A, M; B$ thẳng hàng và $AM = 3 \text{ cm}$; $AB = \frac{8}{3} AM$. Biết điểm N là trung điểm của đoạn thẳng MB . Tính độ dài đoạn thẳng NA ?

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021- 2022

Bài 53: Cho đoạn thẳng AB dài 8 cm, điểm O thuộc tia đối của tia AB . Gọi M, N thứ tự là trung điểm của đoạn thẳng OA, OB . Tính độ dài đoạn thẳng MN .

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Bài 54: Trên đường thẳng xy lấy điểm O . Trên tia Oy lấy điểm C , trên tia Ox lấy hai điểm A, B sao cho $OC = 3 \text{ cm}$, $OA = 2 \text{ cm}$ và $OB = 4 \text{ cm}$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AB .

b) Gọi điểm I là trung điểm đoạn thẳng AB . Chứng tỏ điểm O là trung điểm của đoạn thẳng IC .

Trích đề HSG huyện Tiên Hải năm 2021-2022

III. Độ lớn góc

Dạng toán: Tính số đo góc

Bài 1: Cho $\angle xOy = 80^\circ$, tia Oz nằm giữa hai tia Ox và Oy sao cho $\angle xOz = 30^\circ$. Số đo $\angle yOz$ là:

- A. 50° . B. 110° . C. 50° hoặc 110° . D. 80° .

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Bài 2: Cho 2021 tia chung gốc O (trong đó không có hai tia nào đối nhau). Hỏi có bao nhiêu góc có hai cạnh là hai trong 2021 tia đã cho?

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Bài 3: Cho $\angle xAy$, trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = 6 \text{ cm}$. Trên tia đối của tia Ax lấy điểm D sao cho $AD = 4 \text{ cm}$.

1. Tính BD .

2. Lấy C là một điểm trên tia Ay . Biết $\angle BCD = 80^\circ, \angle BCA = 45^\circ$. Tính $\angle ACD$.

3. Biết $AK = 2 \text{ cm}$ (K thuộc BD). Tính BK .

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Bài 4: Trên cùng nửa mặt phẳng cho trước có bờ Ox vẽ hai tia Oy, Oz sao cho $\angle xOy = 70^\circ, \angle yOz = 30^\circ$
Xác định số đo của $\angle xOz$

Trích đề HSG huyện Tĩnh Gia năm 2018-2019

Bài 5: Cho góc $\angle xBy = 55^\circ$. Trên các tia Bx, By lần lượt lấy các điểm A, C ($A \neq B, B \neq C$). Trên đoạn thẳng AC lấy điểm D sao cho $\angle ABD = 30^\circ$.

- a) Tính độ dài AC , biết $AD = 4cm, CD = 3cm$.
- b) Tính số đo góc DBC .
- c) Từ B vẽ tia Bz sao cho $DBz = 90^\circ$. Tính số đo ABz .

Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015 -2016

Bài 6: Cho hai góc xOy và yOz kề bù sao cho $xOy = 4 yOz$.

- a) Tính số đo mỗi góc có trên hình vẽ?
- b) Vẽ tia Ot sao cho $xOt = 108^\circ$. Tính góc tOy ?

Trích đề HSG huyện Vĩnh Tường năm 2021 - 2022

Bài 7: Cho xOy và yOz là hai góc kề bù. Góc yOz bằng 30°

- g) Vẽ tia Om nằm trong góc xOy sao cho $xOm = 75^\circ$; tia On nằm trong yOz sao cho $yOn = 15^\circ$
- h) Hình vẽ trên có mấy góc?
- i) Nếu có n tia chung gốc thì sẽ tạo nên bao nhiêu góc ?

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Bài 8: Cho góc bẹt xOy , trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 2cm$; trên tia Oy lấy hai điểm M và B sao cho $OM = 1cm; OB = 4cm$.

- c) Chứng tỏ điểm M nằm giữa hai điểm O và B . Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB
- d) Từ O kẻ hai tia Ot, Oz sao cho $tOy = 130^\circ; zOy = 30^\circ$. Tính số đo tOz

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Bài 9: Cho 10 đường thẳng đồng quy tại O . Hỏi có bao nhiêu góc ở đỉnh O được tạo thành (không kể góc bẹt)

Trích đề thi chọn HSG Tam Dương năm 2016-2017

Lời giải

Vì có 10 đường thẳng đồng quy tại O nên có 20 tia gốc O . Chọn ra một tia, tia đó tạo với mỗi tia trong $(20-1)$ tia tạo thành một góc. Làm như thế với 20 tia ta có $20 \cdot (20-1) = 380$ góc, trong đó mỗi góc đã được tính hai lần.

Do đó số góc tạo thành là: $380 : 2 = 190$ (góc)

Bài 10: Trên cùng nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox vẽ hai tia Oy, Oz sao cho $xOy = 50^\circ; xOz = 100^\circ$. Vẽ tia Oy' là tia đối của tia Oy . Tính số đo $y'Oz$

Trích đề chọn HSG Nga Sơn năm 2017-2018

Bài 11: Cho tam giác ABC có $\angle ABC = 55^\circ$, trên cạnh AC lấy điểm D (D không trùng với A và C)

- c) Tính số đo DBC biết $\angle ABD = 30^\circ$
- d) Từ B dựng tia Bx sao cho $\angle DBx = 90^\circ$. Tính số đo $\angle ABx$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018 -2019

Bài 12: Cho điểm O thuộc đường thẳng xy . Vẽ các tia OA, OB sao cho góc $AOx = 40^\circ$, $BOy = 60^\circ$.
 Tính số đo AOB .

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Bài 13: Cho $xOy = 80^\circ$, tia Oz nằm giữa hai tia Ox, Oy sao cho $xOz = 30^\circ$. Số đo yOz là bao nhiêu

Trích đề HSG huyện Lâm Thao, năm 2018- 2019

Bài 14: Trên đường thẳng AM lấy một điểm O (O nằm giữa A và M). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AM vẽ các tia OB, OC sao cho $MOC = 115^\circ, BOC = 70^\circ$. Trên nửa mặt phẳng đối diện dựng tia OD (D không cùng nằm trong nửa mặt phẳng với B, C qua bờ là AM) sao cho $AOD = 45^\circ$.

- Tia OB nằm giữa hai tia OM, OC không ?
- Tính MOB, AOC
- Chứng tỏ rằng 3 điểm D, O, B thẳng hàng.

Trích đề 59 HSG huyện năm 2018- 2019

Bài 15: Cho tam giác ABC có $BAC = 120^\circ$. Điểm E nằm giữa B và C sao cho $BAE = 30^\circ$. Trên mặt phẳng có bờ AC chứa điểm B kẻ tia Ax sao cho $CAX = 30^\circ$, tia Ax cắt BC ở F

Tính số đo của EAF

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Bài 16: Cho góc tù xOy . Bên trong góc xOy , vẽ tia Om sao cho $xOm = 90^\circ$ và vẽ tia On sao cho $yOn = 90^\circ$. Chứng minh $xOn = yOm$

Trích đề HSG trường Nguyễn Khuyến năm 20...-20...

Bài 17: Cho tia Oz nằm trong góc vuông xOy . Vẽ tia Ot sao cho Ox là tia phân giác của tOz . Vẽ tia Om sao cho tia Oy là phân giác của zOm .

- Chứng minh rằng tia Om và tia Ot là hai tia đối nhau.
- Gọi Ox' là tia đối của tia Ox , biết $x'Om = 30^\circ$. Tính tOz .
- Vẽ thêm 2014 tia phân biệt gốc O (không trùng với các tia Ox, Oz, Oy, Om, Ox' và Ot).
 Hỏi trong hình vẽ có tất cả bao nhiêu góc?

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021-2022

Bài 18: 1) Trong các hình sau đây: Hình chữ nhật, hình thang, hình bình hành, hình thoi, hình vuông, hình tròn, hình lục giác đều. Hình nào có trục đối xứng, hình nào có tâm đối xứng? (nếu có, hãy chỉ ra trục đối xứng, tâm đối xứng đó). Hình nào không có trục đối xứng, hình nào không có tâm đối xứng?

2) Cho $xOy = 60^\circ$. Trên tia Oy lấy điểm A sao cho $OA = 5\text{cm}$. Trên tia Ox lấy điểm B và C sao cho $OB = 6\text{cm}, BC = 2\text{cm}$. Nối AB, AC . Hỏi:

- Có mấy tam giác được tạo thành? Gọi tên các tam giác đó.

- b) Vẽ tia Om là tia đối với tia Ox . Tính số đo góc mOy .
 c) Tính độ dài đoạn thẳng OC .

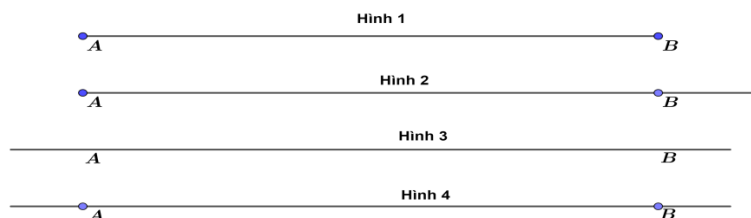
Trích đề HSG Thanh Ba năm 2021-2022

Bài 19: 1) Trong hình vẽ dưới, có bao nhiêu đoạn thẳng phân biệt:



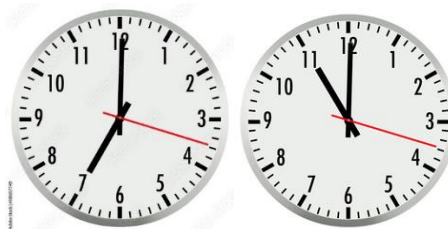
- A. 4. B. 6. C. 8. D. 10.

2) Đây là hình vẽ đúng của đường thẳng AB :



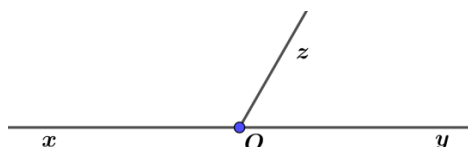
- A. Hình 1. B. Hình 3 và hình 4. C. Hình 4. D. Tất cả 4 hình.

3) Buổi sáng, bạn Trang vào lớp thi đồng hồ trên tường chỉ 7h đúng. Đến khi tan trường đồng hồ chỉ đúng 11h trưa. Hỏi kim giờ trên đồng hồ đã quay được một góc bao nhiêu độ?



- A. 100° . B. 110° . C. 120° . D. 130° .

4) Trong hình vẽ sau:



Góc yOz bằng 50% góc xOz và tia Ox, Oy là hai tia đối nhau. Số đo góc yOz là:

- A. 70° . B. 80° . C. 50° . D. 60° .

Trích đề HSG Quận Thanh Ba năm 2021-2022

IV. Các bài toán về chu vi, diện tích

Dạng toán: Giải các bài toán về chu vi diện tích

Bài 1: Bác An muốn làm hàng rào cho khu vườn hình vuông trồng hoa hồng của mình. Biết khu vườn có cạnh 5 m, tính độ dài hàng rào?

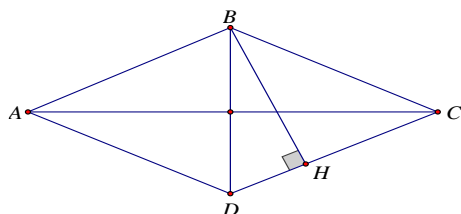
- A. 25 m. B. 20 m. C. 10 m. D. 5 m.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 2: Một hình chữ nhật có chiều dài là 12m, chiều rộng là 8m, một hình vuông có chu vi bằng chu vi hình chữ nhật. Diện tích hình vuông đó là:

- A. 96 m^2 . B. 25 m^2 . C. 40 m^2 . D. 100 m^2 .

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022



Hình vẽ 1

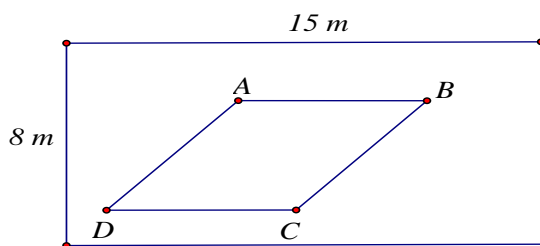
Bài 3:

Cho hình thoi $ABCD$ có độ dài cạnh là 30cm

(Hình vẽ 1). Tổng độ dài hai đường chéo là 84cm, hiệu độ dài hai đường chéo là 12cm. Tính độ dài đường cao BH .

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

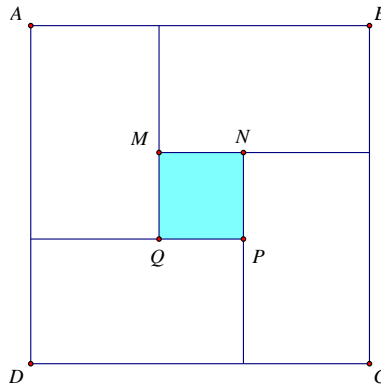
Bài 4: Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài 15m, chiều rộng 8m. Người ta trồng một vườn hoa hình thoi ở trong mảnh đất đó, biết diện tích phần còn lại là 75 m^2 . Tính độ dài đường chéo AC , biết $BD = 9 \text{ m}$.

**Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đông (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022**

Bài 5: Một thửa ruộng hình thang có diện tích là 1155 m^2 và có đáy bé kém đáy lớn 33m. Người ta kéo dài đáy bé thêm 20m và kéo dài đáy lớn thêm 5m về cùng một phía để được hình thang mới. Diện tích hình thang mới này bằng diện tích của một hình chữ nhật có chiều rộng là 30m và chiều dài 51m. Hãy tính đáy bé, đáy lớn của thửa ruộng ban đầu.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 6: Người ta xếp bốn hình chữ nhật bằng nhau có chiều rộng mỗi hình là 5cm; chiều dài là 8cm để được một hình vuông $ABCD$ và bên trong có là một hình vuông $MNPQ$ (như hình vẽ). Tính diện tích hình vuông $MNPQ$.



Trích đề HSG Trường THCS Hoài Ân năm 2021 - 2022

Bài 7: Sân nhà Nam là hình chữ nhật có chiều dài 10,25 mét và chiều rộng 6,9 mét. Bố bạn Nam đang tính toán để mua gạch lát sân. Tại cửa hàng vật liệu xây dựng có loại gạch lát kích thước 500x500mm (mỗi viên gạch hình vuông cạnh 500mm). Gạch được bán nguyên thùng, mỗi thùng có 4 viên. Biết rằng khi lát sân, nếu gặp khoảng trống nhỏ hơn kích thước viên gạch thì người thợ phải cắt viên gạch để có kích thước vừa khít với khoảng trống và loại bỏ phần dư của viên gạch nếu phần dư đó không dùng đủ cho khoảng trống khác. Em hãy tính giúp bố bạn Nam xem cần mua ít nhất bao nhiêu thùng gạch mới đủ để lát sân trên.

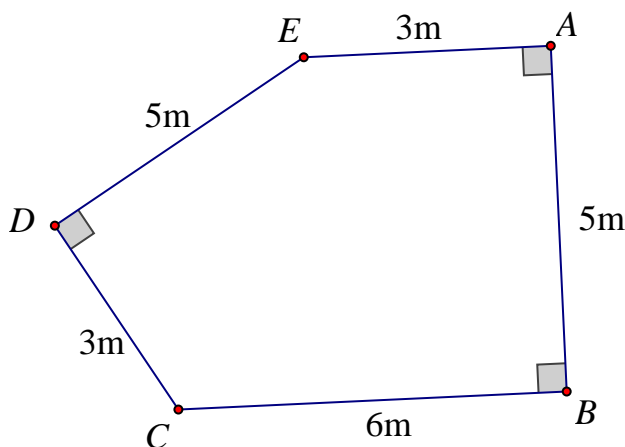
Trích đề HSG huyện Kỳ Anh năm 2021-2022

Bài 8: Để đảm bảo đủ ánh sáng phòng học của con, gia đình ông Nam đã sửa căn phòng có nền là hình chữ nhật với kích thước là 4,2 m và 5,4 m , có hai cửa sổ hình chữ nhật kích thước là 1m và 1,6 m và một cửa ra vào hình chữ nhật có kích thước là 1,2 m và 2 m .

- Hỏi căn phòng trên sau khi sửa có đạt chuẩn về ánh sáng hay không? Biết căn phòng đạt mức chuẩn về ánh sáng nếu tổng diện tích các cửa lớn hơn hoặc bằng 20% diện tích nền.
- Trên thị trường có các loại gạch với kích thước như sau 50cm×50cm ; 60cm×60cm ; 80cm×80cm . Gia đình ông Nam muốn lát kín căn phòng trên bằng một loại gạch có cùng kích thước mà không phải cắt (các viên gạch phải lát liền nhau, coi như không có khe hở). Em hãy giúp gia đình ông Nam chọn loại gạch có kích thước phù hợp và tính xem cần bao nhiêu viên gạch để vừa đủ?

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Bài 9: . Một mảnh đất được vẽ trên giấy như hình vẽ bên dưới.
Hỏi diện tích mảnh đất là bao nhiêu mét vuông?



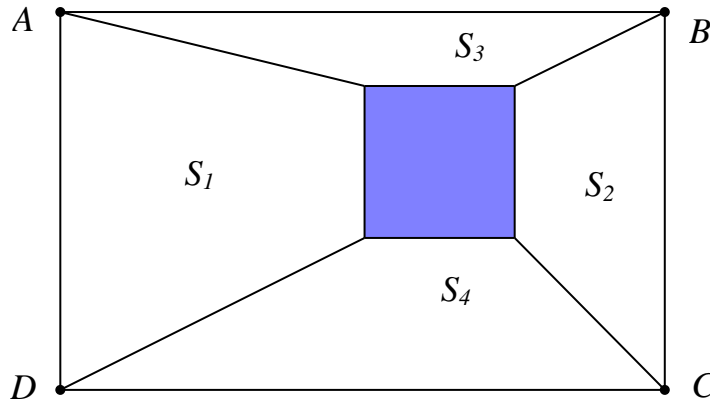
Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Bài 10. Người ta mở rộng một cái ao hình vuông để được một cái ao hình chữ nhật có chiều dài gấp 2 lần chiều rộng. Sau khi mở rộng, diện tích ao tăng thêm 600m² và diện tích ao mới gấp 4 lần ao cũ.

Hỏi phải dùng bao nhiêu chiếc cọc để đủ rào xung quanh ao mới? Biết rằng cọc nọ cách cọc kia 1 m và ở một góc ao người ta để lối lên xuống rộng 2 m .

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Bài 11: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài AB hơn chiều rộng BC là 4cm . Hình chữ nhật được chia thành một hình vuông và bốn hình thang (H1). Biết rằng 4 hình thang có diện tích là $S_1; S_2; S_3; S_4$ và $S_1 + S_2 = 49\text{ cm}^2$; $S_3 + S_4 = 41\text{ cm}^2$. Tính cạnh của hình vuông.

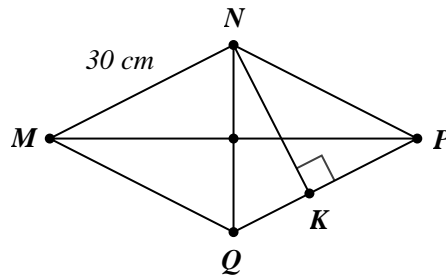


Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021 - 2022

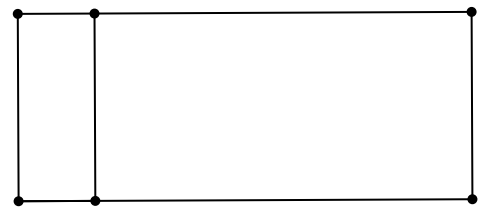
Bài 12: Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài 15 m, chiều rộng 8 m. Người ta trồng một vườn hoa hình thoi ở trong mảnh đất đó, biết diện tích phần còn lại là 75 m^2 . Tính độ dài đường chéo AC , biết $BD = 9\text{ m}$.

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021-2022

Bài 13: 1. Cho hình thoi $MNPQ$ có độ dài cạnh là 30 cm (Hình vẽ 1). Tổng độ dài hai đường chéo là 84 , hiệu độ dài hai đường chéo là 12 cm . Tính độ dài chiều cao NK .



Hình vẽ 1



Hình vẽ 2

2. Một thửa ruộng hình chữ nhật được chia thành hai mảnh hình chữ nhật (Hình vẽ 2), một mảnh nhỏ trồng rau và mảnh còn lại trồng ngô. Diện tích của mảnh trồng ngô gấp 6 lần diện tích của mảnh trồng rau. Chu vi mảnh trồng ngô gấp 4 lần chu vi mảnh trồng rau. Tính diện tích thửa ruộng ban đầu, biết chiều rộng của nó là 5 mét.

3. Nếu giảm chiều dài của một hình chữ nhật đi 20% và muốn diện tích không thay đổi thì chiều rộng phải thay đổi như thế nào?

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

y đổi.

Bài 14: Cho tam giác ABC có diện tích bằng 42 cm^2 . Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $CE = \frac{1}{3}AE$, trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $BF = \frac{1}{2}FC$, đoạn EF cắt AB tại K .

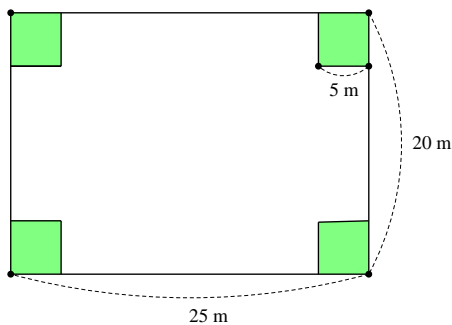
1. Tính diện tích của tam giác ABF và tam giác AEF ?
2. Tính tỉ số độ dài giữa KB và KA ?

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Bài 15: Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài 25 m, chiều rộng 20 m. Người ta trồng hoa hồng vào bốn hình vuông ở các góc vườn (như hình vẽ bên) và phần diện tích còn lại trồng hoa cúc.

- 1) Tính diện tích phần đất trồng hoa mỗi loại.
- 2) Biết mỗi mét vuông làm đất và trồng hoa hồng phải trả 50000 đồng tiền công, mỗi mét vuông làm đất và trồng hoa cúc phải trả 40000 đồng. Tính số tiền công phải trả để trồng hoa cho cả mảnh vườn đó.

Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-2022



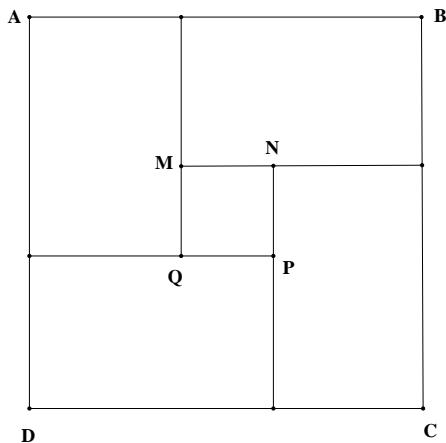
Bài 16: Minh có hai tờ giấy hình vuông mà số đo các cạnh hơn kém nhau 8 cm. Minh đem đặt tờ giấy hình vuông nhỏ nằm trọn trong tờ giấy hình vuông lớn thì phần diện tích còn lại không bị che của tờ giấy hình vuông lớn là 96 cm^2 . Tính độ dài cạnh của mỗi tờ giấy.

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Bài 17: Hình thang vuông $ABCD$ có góc A và D vuông. Đường chéo AC cắt đường cao BH tại I . So sánh diện tích tam giác IDC và diện tích tam giác BHC .

Trích đề HSG tỉnh Bắc Ninh năm 2016 - 2017

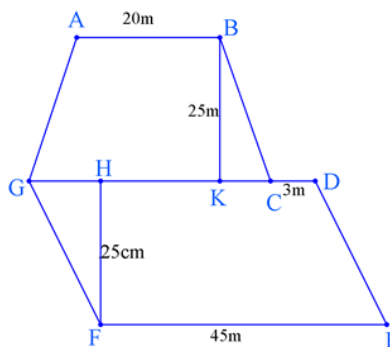
Bài 18: Người ta xếp bốn hình chữ nhật bằng nhau có chiều rộng mỗi hình là 5 cm; chiều dài là 8 cm để được một hình vuông $ABCD$ và bên trong có là một hình vuông $MNPQ$ (như hình vẽ). Tính diện tích hình vuông $MNPQ$.



Trích đề HSG huyện Hà Trung năm 2021-2022

Bài 19: Một khu đất hình chữ nhật có chu vi là $132m$. Nếu giảm chiều rộng đi $5m$ và tăng chiều dài lên $5m$ thì chiều dài gấp đôi chiều rộng. Người ta dùng 30% diện tích khu đất để trồng rau, $\frac{11}{30}$ diện tích khu đất để trồng cây ăn quả, diện tích còn lại để xây nhà. Hỏi diện tích xây nhà là bao nhiêu?

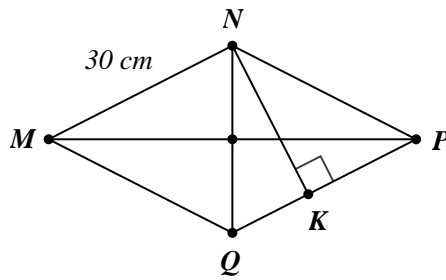
Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2022-2023



Bài 20: Bác Hai có một thửa ruộng có dạng như hình bên (độ dài đoạn thẳng CD bằng 3 mét). Bác Hai trồng lúa trên toàn bộ thửa ruộng đó. Nếu trên mỗi mét vuông bác Hai thu được $0.8kg$ thóc thì số tiền bác Hai thu được là bao nhiêu? Biết mỗi tạ thóc có giá 700.000 đồng.

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

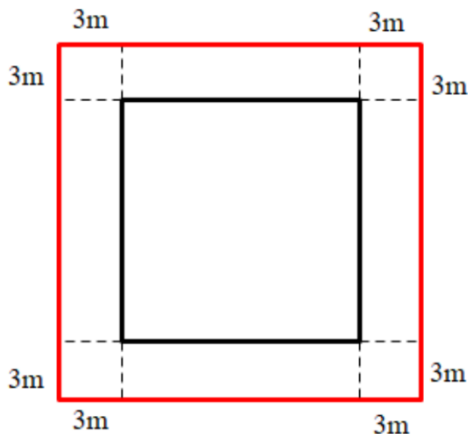
Bài 21: Cho hình thoi $MNPQ$ có độ dài cạnh là $30cm$ (Hình vẽ 1). Tổng độ dài hai đường chéo là $84cm$, hiệu độ dài hai đường chéo là $12cm$. Tính độ dài chiều cao NK .



Hình vẽ 1

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Bài 22: Một thửa ruộng hình chữ nhật được chia thành 2 mảnh hình chữ nhật (hình vẽ 2), một mảnh nhỏ trồng rau và mảnh còn lại trồng ngô. Diện tích của mảnh trồng ngô gấp 6 lần diện tích của mảnh trồng rau. Chu vi mảnh trồng ngô gấp 4 lần chu vi mảnh trồng rau. Tính diện tích thửa ruộng ban đầu, biết chiều rộng của nó là 5 mét.



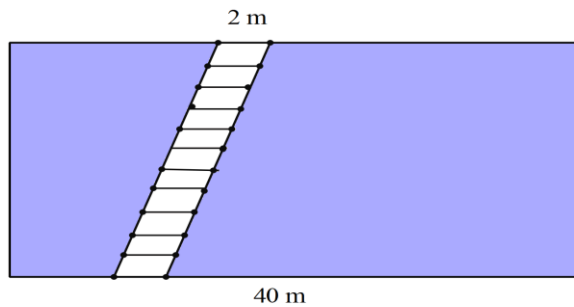
Nếu giảm chiều dài của một hình chữ nhật đi 20% và muốn diện tích không thay đổi thì chiều rộng phải thay đổi như thế nào?

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Bài 23: Một bác nông dân có một khu vườn hình vuông. Ông ấy mở rộng vườn thêm 3m về mỗi phía như hình bên và thấy rằng diện tích khu vườn rộng thêm $84m^2$. Tìm diện tích của khu vườn ban đầu.

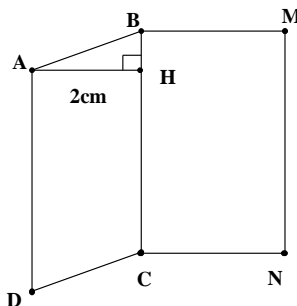
Trích đề HSG THCS Quỳnh Thiện năm 2022 - 2023

Bài 24: Nhà bác Sơn có một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng 40 mét và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Trong khu vườn, bác Sơn làm một lối đi để tiện chăm sóc và tưới cho cây với kích thước được cho như hình vẽ. Bác dùng lưới B40 rào xung quanh khu vườn. Chi phí để làm cho mỗi mét hàng rào là 150000 đồng và cho mỗi mét vuông làm lối đi là 350000 đồng (bao gồm cả tiền công thợ và tiền vật liệu). Hỏi bác Sơn phải trả bao nhiêu tiền để làm hàng rào và làm lối đi cho khu vườn?



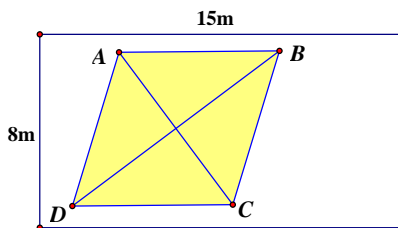
Trích đề HSG huyệnnăm 20...-20...

Bài 25: Tìm diện tích của hình H gồm hình bình hành $ABCD$ và hình chữ nhật $BMNC$, biết hình chữ nhật $BMNC$ có chu vi bằng 18cm và chiều dài MN gấp hai lần chiều rộng BM .

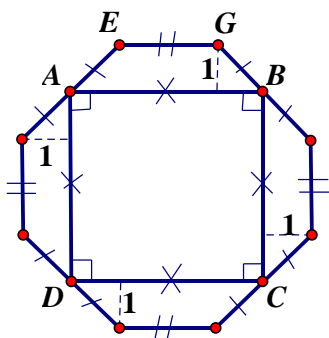


Trích đề HSG TX Sơn Tây năm 2021-2022

Bài 26: Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài 15m , chiều rộng 8m . Người ta trồng một vườn hoa hình thoi ở trong mảnh đất đó, biết diện tích phần còn lại là 75m^2 . Tính độ dài đường chéo AC , biết $BD=9\text{m}$.



Trích đề HSG huyện Tân Kỳ (Nghĩa Đông) và huyện Hậu Lộc năm 2021-2022



Bài 27: Muốn cắt một miếng bìa có diện tích là 28cm^2 như hình bên. Biết chu vi hình vuông $ABCD$ là 16cm . Tính độ dài cạnh EG . (số liệu trên hình vẽ đơn vị là cm)

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2021-2022

Bài 28: Một khu đất hình chữ nhật có chu vi là 132 m . Nếu giảm chiều rộng đi 5 m và tăng chiều dài lên 5 m thì chiều dài gấp đôi chiều rộng.

- Tính diện tích khu đất hình chữ nhật ban đầu.
- Người ta dùng 30% diện tích khu đất ban đầu để trồng rau, chi phí cho mỗi mét vuông trồng rau là 35000 đồng. Tính số tiền cần chi phí để trồng rau?

Trích đề HSG huyện Sóc Sơn năm 2021-2022

Bài 29: Người ta muốn lát gạch và trồng cỏ cho sân vườn hình vuông. Biết diện tích phần trồng cỏ bằng $\frac{1}{4}$ diện tích sân vườn và diện tích phần lát gạch là 48m^2 .

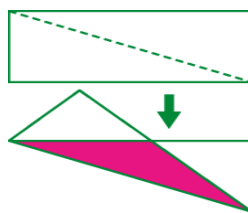
- Tính diện tích sân vườn.
- Tính diện tích trồng cỏ.
- Giá 1m^2 cỏ là 60000 đồng, nhưng khi mua lại được giảm giá 10% . Vậy số tiền cần mua cỏ là bao nhiêu?
- Người ta cắm cọc làm hàng rào xung quanh sân vườn, khoảng cách giữa các cọc đều nhau là 0,8 m . Hỏi phải dùng bao nhiêu chiếc cọc?

Trích đề HSG Quận Hà Đông năm 2021-2022

Bài 30: Một nền nhà hình chữ nhật có chiều rộng 5 m và chiều dài gấp 4 lần chiều rộng. Người ta lát nền nhà bằng những viên gạch hình vuông cạnh 4 dm . Tổng số tiền mua gạch là 11875000 đồng thì vừa đủ để lát . Hỏi giá mỗi viên gạch lát nền là bao nhiêu ?

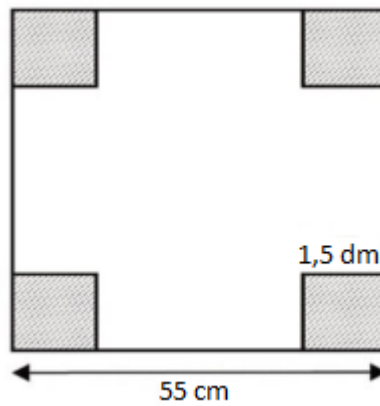
Trích đề HSG Huyện Tiên Du năm 2021-2022

Bài 31: Một tờ giấy hình chữ nhật được gấp theo đường chéo như hình vẽ. Diện tích hình nhận được bằng $\frac{5}{8}$ diện tích hình chữ nhật ban đầu. Biết diện tích phần tô màu là 18cm^2 . Tính diện tích tờ giấy ban đầu.



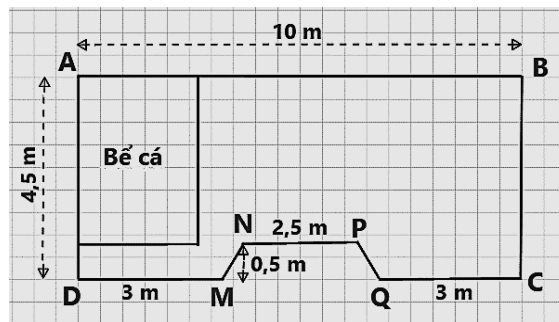
Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Bài 32: Một miếng tôn hình vuông có độ dài 1 cạnh là 55 cm . Người ta cắt đi bốn góc theo các hình vuông nhỏ có độ dài cạnh là 1,5 dm . Tính chu vi và diện tích phần tôn còn lại (*không yêu cầu học sinh vẽ hình*)



Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

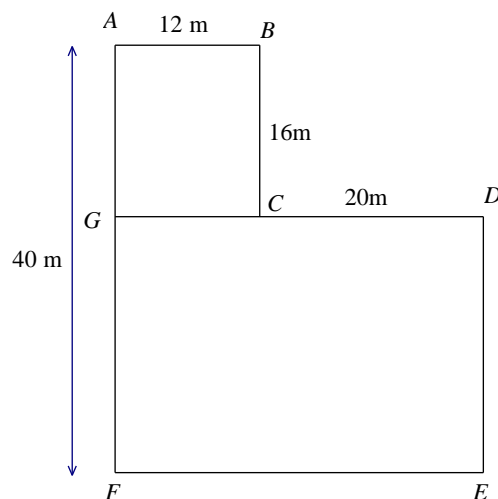
Bài 33: Nhà bác Bình có một mảnh sân như hình bên. Trong sân, bác xây một bể cá có dạng hình chữ nhật dài 3m, rộng 2m. Phần còn lại của sân bác lát gạch. Biết công làm bể cá là 500000 đồng/m², công lát gạch là 100000 đồng/m². Tính tổng tiền công bác Bình cần trả cho thợ để hoàn thiện sân.



(Học sinh không phải vẽ lại hình vào bài làm)

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Bài 34: Khu vườn nhà anh Minh có dạng và kích thước như hình vẽ.

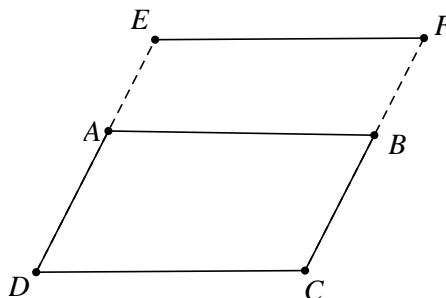


a) Anh Minh muốn dùng lưới B40 để rào cả khu vườn. Hỏi anh Minh phải trả bao nhiêu tiền để rào cả khu vườn, biết giá trọn gói (gồm tiền lưới và tiền công) cho mỗi mét lưới (theo chiều dài) là 150000 đồng?

b) Trên phần đất $ABCG$, anh Minh trồng rau mùng toi, còn trên mảnh đất $GDEF$ anh trồng rau cải. Hỏi sau khi anh Minh thu hoạch hết toàn bộ rau mùng toi và rau cải trong khu vườn thì anh thu được bao nhiêu tiền? Biết rằng cứ 1 m^2 thì anh thu hoạch được 2 kg rau cải và 3 kg rau mùng toi. Giá mỗi kilogram rau mùng toi là 8000 đồng, giá mỗi kilogram rau cải là 7500 đồng.

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021-2022

Bài 35: Cho hình bình hành $ABCD$ ($AB > AD$) có chu vi là 32 cm. Nếu thêm vào mỗi cạnh AD và BC của hình bình hành 4 cm thì được hình thoi $CDEF$ (hình vẽ). Biết hình thoi $CDEF$ có diện tích là 54 cm^2 . Tính diện tích hình bình hành $ABCD$.



Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Bài 36: Nhà ông Minh có một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi bằng 600m và chiều dài bằng $\frac{3}{2}$ chiều rộng. Trên mảnh vườn đó, để tiện cho việc chăm bón và thu hoạch ông Minh đã làm một lối đi xung quanh rộng 1m, phần diện tích còn lại dùng để trồng cam.

1. Tính diện tích mảnh vườn nhà ông Minh?
2. Tính diện tích ông Minh dùng để trồng cam.
3. Trung bình cứ 4 m^2 ông Minh trồng một cây cam. Dự định sau 3 năm mỗi cây sẽ cho thu hoạch khoảng 50kg. Nếu giá thị trường là 25000 đồng/kg và trừ đi 40% chi phí thì ông Minh thu được bao nhiêu tiền?

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2020-2021

Bài 37: Bác An đào cái ao hình vuông trong mảnh đất hình chữ nhật có chiều rộng 10m và chiều dài 15m. Biết rằng sau khi đào ao diện tích đất còn lại quanh cái ao là 50 m^2 . Tính độ dài cạnh cái ao.

Trích đề HSG huyện Tiền Hải năm 2020-2021

CHỦ ĐỀ: HÌNH HỌC**C. SỬU TÀM CÁC BÀI TRONG CÁC ĐỀ CỦA NHỮNG NĂM TRƯỚC ĐÓ****(Phần này lấy các câu từ những năm trước, trước năm 2020-2021, tối thiểu 10 bài)**

Bài 1: Cho 2010 đường thẳng trong đó bất kì hai đường thẳng nào cũng cắt nhau. Không có ba đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng.

*Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019***Lời giải**

Mỗi đường thẳng cắt 2009 đường thẳng còn lại nên tạo ra 2009 giao điểm.

Có 2010 đường thẳng nên có : $2010 \cdot 2009 = 4038090$ (giao điểm).

Do mỗi giao điểm được tính hai lần nên số giao điểm là :

$$4038090 : 2 = 2019045 \text{ (giao điểm).}$$

Vậy số giao điểm là: 2019045 (giao điểm).

Bài 2: Cho k đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy (cùng đi qua 1 điểm), biết tổng số giao điểm là 820. Tìm k ?

*Trích đề HSG huyện Yên Thế (Bắc Giang) năm 2015-2016***Lời giải**

Mỗi đường thẳng cắt $k-1$ đường thẳng còn lại tạo nên $k-1$ giao điểm.

Có n đường thẳng nên có $k(k-1)$ giao điểm

Nhưng mỗi giao điểm đã được tính 2 lần nên số giao điểm là $\frac{k(k-1)}{2}$

Vậy với n đường thẳng, trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy có giao điểm $\frac{k(k-1)}{2}$.

Theo bài ta có:

$$\frac{k(k-1)}{2} = 820$$

$$k \cdot (k-1) = 1640$$

$$k \cdot (k-1) = 41 \cdot 40$$

$$k = 41$$

Vậy $k = 41$.

Bài 3: Cho n điểm ($n \geq 2$). Nối từng cặp hai điểm trong n điểm đó thành các đoạn thẳng.

- Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng nếu trong n điểm đó không có ba điểm nào thẳng hàng?
- Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng nếu trong n điểm đó có đúng ba điểm nào thẳng hàng?
- Tính n biết rằng có tất cả 1770 đoạn thẳng.

Lời giải

a) Chọn một điểm. Nối điểm đó với từng điểm trong $n - 1$ điểm còn lại, ta vẽ được $n - 1$ đoạn thẳng. Làm như vậy với n điểm, ta được $n(n - 1)$ đoạn thẳng. Nhưng mỗi đoạn thẳng đã được tính hai lần, do đó tất cả chỉ có $\frac{n(n-1)}{2}$ đoạn thẳng.

b) Tuy trong hình vẽ có đúng ba điểm thẳng hàng nhưng số đoạn thẳng phải đếm vẫn không thay đổi. Do đó vẫn có $\frac{n(n-1)}{2}$ đoạn thẳng.

c) Ta có $\frac{n(n-1)}{2} = 1770$ suy ra $n(n-1) = 2.1770$

$$n(n-1) = 2^2.3.5.59$$

$$n(n-1) = 60.59$$

$$\text{suy ra } n = 60.$$

Bài 4: Tìm đa giác có số đường chéo bằng số cạnh của nó.

Lời giải

Giả sử có đa giác n đỉnh thỏa mãn yêu cầu đề bài. (Điều kiện: n là số nguyên, $n > 3$). Khi đó đa giác có n cạnh.

Qua hai đỉnh của đa giác, ta vẽ một đoạn thẳng thì có tất cả $\frac{n(n-1)}{2}$ đoạn thẳng mà mỗi đoạn thẳng

này hoặc là cạnh hoặc là đường chéo của đa giác đó. Suy ra số đường chéo của đa giác là $\frac{n(n-1)}{2} - n$.

Vì số đường chéo bằng số cạnh nên $\frac{n(n-1)}{2} - n = n$ suy ra $n(n-5) = 0$ do đó $\begin{cases} n = 0 \\ n = 5 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện $n > 3$ ta có $n = 5$. Vậy ngũ giác là đa giác cần tìm.

Bài 5: Cho trước một số đường thẳng, trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và có 15 đường thẳng đồng quy, biết số giao điểm nhiều nhất có thể vẽ được là 1121 giao điểm. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng cho trước?

Lời giải

Gọi số đường thẳng cho trước là n , ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)

Giả sử trong n đường thẳng, bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào đồng quy nên số giao điểm vẽ được là: $\frac{n(n-1)}{2}$ (giao điểm)

Do có 15 đường thẳng đồng quy nên số đường thẳng bị giảm đi là:

$$\frac{15.14}{2} - 1 = 104 \text{ giao điểm}$$

Theo yêu cầu của bài toán thì ta phải có

$$\frac{n(n-1)}{2} - 104 = 1121$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 1225$$

$$n(n-1) = 2450 = 49.50$$

suy ra $n = 50$

Vậy có 50 đường thẳng cho trước.

Bài 6: Cho 2014 điểm trong đó chỉ có 5 điểm thẳng hàng với nhau, các điểm còn lại không có ba điểm nào thẳng hàng với nhau. Hỏi khi nối tất cả các điểm đó với nhau thì được tổng số bao nhiêu đoạn thẳng?

Lời giải

Qua hai điểm luôn vẽ được 1 đoạn thẳng, nên cứ mỗi điểm trong 2014 điểm đã cho ta luôn tạo được với 2013 điểm còn lại 2013 đoạn thẳng.

Từ 2014 điểm đã cho có:

$$2014 \cdot 2013 = 4054182 \text{ (đoạn thẳng)}$$

Nhưng như vậy mỗi đoạn thẳng được tính hai lần. Vậy số đoạn được tạo nên bởi 2014 điểm đã cho là:

$$2014 \cdot 2013 : 2 = 2027091 \text{ (đoạn thẳng)}$$

Bài 7: Cho 2006 đường thẳng trong đó bất kỳ 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau. Không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Mỗi đường thẳng cắt 2005 đường thẳng còn lại tạo nên 2005 giao điểm. Mà có 2006 đường thẳng nên có: $2006 \cdot 2005$ (giao điểm). Nhưng mỗi giao điểm được tính 2 lần nên số giao điểm thực tế là:

$$(2006 \cdot 2005) : 2 = 2011015 \text{ (giao điểm)}$$

Bài 8: Trên đoạn thẳng AB lấy 2006 điểm khác nhau đặt tên theo thứ tự từ A đến B là $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2006}$. Từ điểm M không nằm trên đoạn thẳng AB ta nối M với các điểm $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2006}; B$. Tính số tam giác tạo thành.

Trích đề HSG cấp trường năm 2019-2020

Lời giải

Trên đoạn thẳng AB có các điểm $A; A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2006}; B$ do đó, tổng số điểm trên AB là 2007 điểm suy ra có 2006 đoạn thẳng nối từ M đến các điểm đó.

Mỗi đoạn thẳng (ví dụ MA) có thể kết hợp với 2005 đoạn thẳng còn lại và các đoạn thẳng tương ứng trên AB để tạo thành 2005 tam giác.

Do đó 2006 đoạn thẳng sẽ tạo thành $2006 \cdot 2005 = 4022030$ (tam giác) (nhưng lưu ý là MA kết hợp với MA_1 để được 1 tam giác thì MA_1 cũng kết hợp với MA được tam giác và hai tam giác này chỉ là 1)

Do đó số tam giác thực có là: $4022030 : 2 = 2011015$ (tam giác).

Bài 9. Cho 101 đường thẳng trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Tính số giao điểm của chúng.

Lời giải

Mỗi đường thẳng cắt 100 đường thẳng còn lại nên tạo ra 100 giao điểm

Có 101 đường thẳng nên có: $101 \cdot 100 = 10100$ giao điểm

Do mỗi giao điểm được tính 2 lần nên số giao điểm: $10100 : 2 = 5050$ giao điểm.

Bài 10. Cho 25 điểm trong đó không có 3 điểm thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm ta vẽ 1 đường thẳng. Hỏi tất cả có bao nhiêu đường thẳng?
Nếu thay 25 điểm bằng n điểm thì số đường thẳng là bao nhiêu?

Lời giải

Có $\frac{24 \cdot 25}{2} = 300$ đường thẳng.

Với n điểm có $\frac{n(n-1)}{2}$ đường thẳng.

Bài 11: Cho đoạn thẳng $AB = 10\text{cm}$. Trên tia AB lấy điểm C sao cho $AC = 4\text{cm}$, trên tia BA lấy điểm D sao cho $BD = 4\text{cm}$. Tính độ dài đoạn CD ?

Lời giải



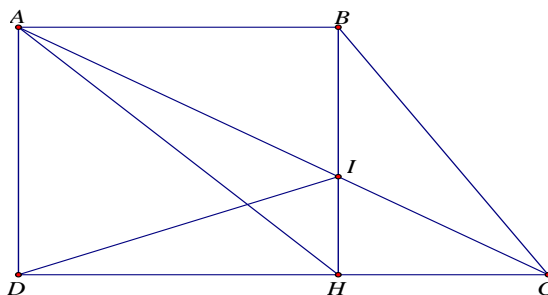
Ta có: C nằm trên đoạn thẳng AB nên ta có: $AC + CB = AB$; $BC = 10 - 4 = 6\text{cm}$

T có D nằm giữa C và B khi đó ta có: $BD + DC = BC$

$$CD = 6\text{cm} - 4\text{cm} = 2\text{cm}$$

Bài 12: Hình thang vuông $ABCD$ có góc A và D vuông. Đường chéo AC cắt đường cao BH tại điểm I .

- Hãy so sánh diện tích tam giác IDC với diện tích tam giác BHC .
- Cho $AD = 9\text{cm}$, $AB = 10\text{cm}$, $DC = 12\text{cm}$. Hãy tính diện tích ΔBIC .



Trích đề HSG trường THCS Quế Phú (Quế Sơn) năm 2018 - 2019

Lời giải

Tam giác AIH và tam giác DIH có đường cao bằng nhau và có cạnh đáy bằng nhau (IH chung) nên có diện tích bằng nhau.

Suy ra các tam giác IDC , AHC có diện tích bằng nhau (do cùng cộng thêm diện tích tam giác IHC)

Tam giác BHC và tam giác AHC có đường cao bằng nhau và cạnh đáy bằng nhau (HC chung) nên có diện tích bằng nhau.

Suy ra các tam giác IDC , BHC có diện tích bằng nhau (do cùng bằng diện tích tam giác AHC)

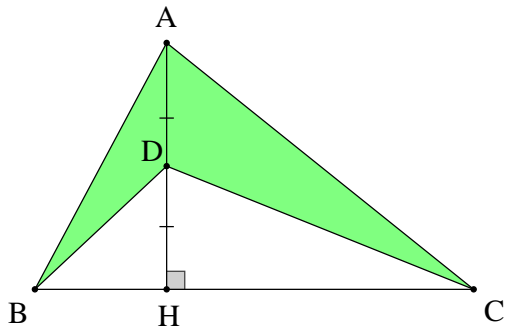
Tính được $HC = 2\text{cm}$

Tính được diện tích tam giác BHC là $(2 \cdot 9) : 2 = 9(\text{cm}^2)$

Diện tích tam giác IDC bằng diện tích tam giác BIC bằng 9cm^2

Tính được
$$IH = \frac{2S_{IDC}}{DC} = \frac{2 \cdot 9}{12} = \frac{3}{2} \text{ (cm)}$$

$$S_{BIC} = \frac{BI \cdot CH}{2} = \frac{\left(9 - \frac{3}{2}\right) \cdot 2}{2} = \frac{15}{2} \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Bài 13: Cho tam giác ABC có đường cao AH . D là trung điểm của AH . Tính diện tích phần tô màu như hình biết diện tích tam giác DBC bằng 6cm^2 .

Lời giải

Tam giác BDA và tam giác BHD có chung chiều cao từ B xuống AH và cạnh đáy $AD = DH$ nên

$$S_{ABD} = S_{HBD}$$

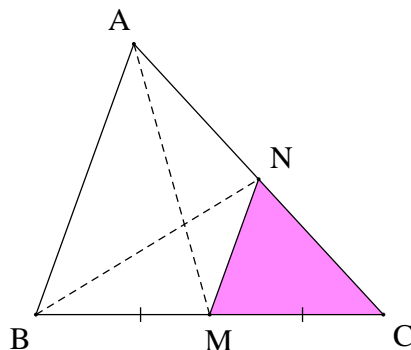
Tam giác CDA và tam giác CDH có chung chiều cao từ C xuống AH và cạnh đáy $AD = DH$ nên

$$S_{CDA} = S_{CDH}$$

Khi đó $S_{ABD} + S_{ACD} = S_{BDH} + S_{CDH} = S_{DBC} = 6\text{cm}^2$ $S_{ABD} + S_{ACD} = S_{BDH} + S_{CDH} = S_{DBC} = 6\text{cm}^2$

Vậy diện tích phần tô màu là 6cm^2 .

Bài 14: Tam giác ABC có diện tích là 144cm^2 . Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = MC$, từ M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại N . Tính diện tích tam giác MNC .



Lời giải

Tam giác ABM và tam giác AMC có cùng chiều cao từ A xuống BC và cạnh đáy $BM = CM$ nên

$$S_{ABM} = S_{ACM} = \frac{S_{ABC}}{2} = \frac{144}{2} = 72\text{cm}^2$$

Tam giác NMC và tam giác NMB có cùng chiều cao từ N xuống BC và cạnh đáy $BM = CM$ nên

$$S_{NMC} = S_{NMB} \quad (1)$$

Tam giác BMN và tam giác AMN có cùng chiều cao từ A xuống MN và chung cạnh đáy MN nên

$$S_{BMN} = S_{AMN} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $S_{AMN} = S_{CMN} = \frac{S_{AMC}}{2} = \frac{72}{2} = 31\text{cm}^2$

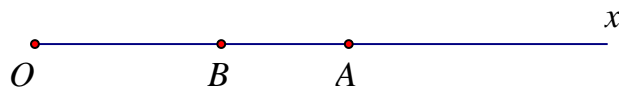
Bài 15: Trên tia Ox , xác định các điểm A và B sao cho $OA = a(\text{cm})$, $OB = b(\text{cm})$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AB , biết $b < a$.

b) Xác định điểm M trên tia Ox sao cho $OM = \frac{1}{2}(a+b)$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2017-2018

Lời giải



a) Vì điểm B nằm giữa hai điểm O và A .

Do đó: $OB + BA = OA \Rightarrow AB = a - b$.

b) Vì M nằm trên tia Ox , $OM = \frac{1}{2}(a+b)$

$$OM = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{a+b}{2} = \frac{2b+a-b}{2} = b + \frac{a-b}{2} = OB + \frac{OA-OB}{2} = OB + \frac{1}{2}AB$$

$\Rightarrow M$ chính là điểm thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AM = MB$.

Bài 16:

a) Cho 6 tia chung gốc. Có bao nhiêu góc trong hình vẽ? Vì sao?

b) Vậy với n tia chung gốc. Có bao nhiêu góc trong hình vẽ?

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

a) Vì mỗi tia với một tia còn lại tạo thành 1 góc.

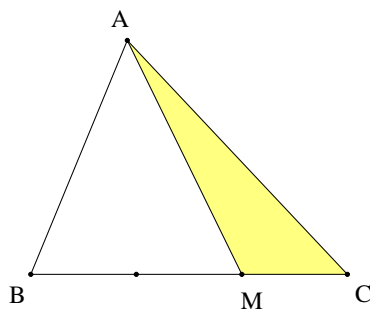
Xét 1 tia, tia đó cùng với 5 tia còn lại tạo thành 5 góc.

Làm như vậy với 6 tia ta được 5.6 (góc).

Nhưng mỗi góc đã được tính 2 lần, do đó số góc là $\frac{5.6}{2} = 15$ (góc).

b) Từ câu a suy ra: Với n tia chung gốc có $\frac{n(n-1)}{2}$ (góc).

Bài 17: Cho tam giác ABC , trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 2CM$. Biết diện tích tam giác ABM là 18cm^2 . Tính diện tích tam giác ACM .

**Lời giải**

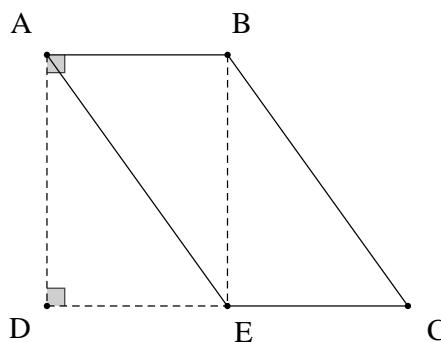
Tam giác ABM và tam giác ACM chung chiều cao

Từ A xuống BC và cạnh đáy $BM = 2CM$ nên

$$S_{ACM} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vậy diện tích tam giác ABM là 9 cm^2 .

Bài 18: Một tấm tôn hình bình hành có diện tích 14 dm^2 , sau khi người ta hàn thêm vào một miếng tôn hình tam giác vuông có cạnh đáy bằng với cạnh đáy của hình bình hành thì được một hình thang vuông. Tính diện tích của miếng tôn lúc này.

**Lời giải**

Hình bình hành $ABCD$ và tam giác ADE chung đường cao và cạnh đáy $DE = CE$

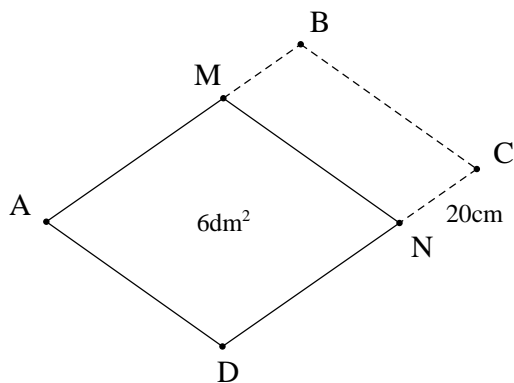
Nên diện tích tam giác ADE bằng $\frac{1}{2}$ diện tích HBH $ABCD$

$$\text{Khi đó } S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7 \text{ (dm}^2\text{)}.$$

Khi đó diện tích miếng tôn là $14 + 7 = 21 \text{ (dm}^2\text{)}$.

Bài 19: Một miếng bìa hình bình hành có chu vi bằng 2 m . Nếu bớt chiều dài đi 20 cm thì ta được miếng bìa hình thoi có diện tích 6 dm^2 . Tìm diện tích miếng bìa hình bình hành đó.

Lời giải



Đổi $2\text{ m} = 20\text{ dm}$ và $20\text{ cm} = 2\text{ dm}$

Nửa chu vi của hình bình hành $ABCD$ là

$$AB + BC = 20 : 2 = 10 \text{ (dm)}.$$

Do bớt chiều dài đi 2 dm nên ta còn

$$AM + MN = 10 - 2 = 8 \text{ (dm)}$$

Vì $AMND$ là hình thoi nên có bốn cạnh bằng nhau

$$\Rightarrow AM = MN = 8 : 2 = 4 \text{ (dm)}.$$

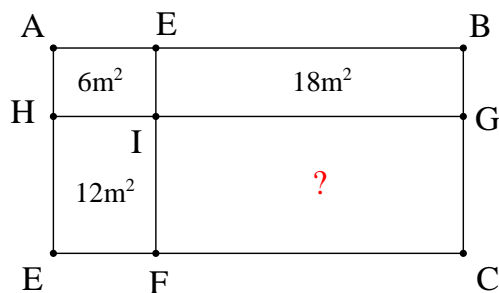
Hình thoi $AMND$ cũng là hình bình hành nên

Chiều cao từ D xuống AM là $6 : 4 = \frac{3}{2}$ (dm).

Hình thoi $AMND$ và hình bình hành $ABCD$ có chung chiều cao từ D xuống AB nên

Khi đó diện tích hình bình hành ban đầu là $AB \cdot \frac{3}{2} = 6 \cdot \frac{3}{2} = 9 \text{ (dm}^2\text{)}$.

Bài 20: Một HCN được chia thành 4 hình chữ nhật nhỏ hơn có diện tích như hình vẽ
Hãy tính diện tích của hình chữ nhật.



Lời giải

Hình chữ nhật $AEIH$ và hình chữ nhật $HIFE$

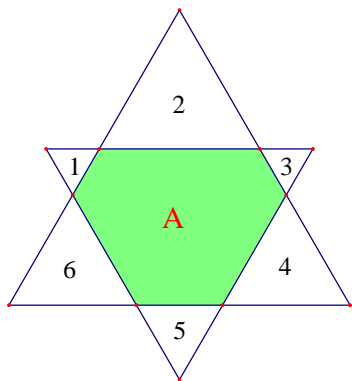
Có chung HI

Mà $S_{HIFE} = 2 \cdot S_{AEIH}$ nên $IF = 2 \cdot IE$.

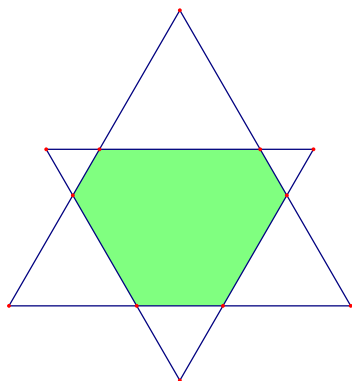
Hình chữ nhật $EBGI$ và hình chữ nhật $IGCF$

Có chung cạnh IG mà $IF = 2 \cdot IE$ nên

$$S_{IGCF} = 2 \cdot S_{EBGI} = 2 \cdot 18 = 36 \text{ (m}^2\text{)}$$



Bài 21: Cho hai tam giác đều được xếp chồng lên nhau như hình vẽ. Chu vi của hai tam giác này là 744 cm và 930 cm. Tính chu vi phần tô đậm.



Lời giải

Nhận thấy các tam giác 1, 2, 3, 4, 5, 6 là các tam giác đều.

Tổng chu vi của các tam giác 1, 2, 3, 4, 5, 6 là $744 + 930 = 1674$ (cm)

Tổng chu vi của các tam giác 1, 2, 3, 4, 5, 6 gấp 2 lần chu vi của hình A.

Nên chu vi của hình A là $1674 : 2 = 837$ (cm).

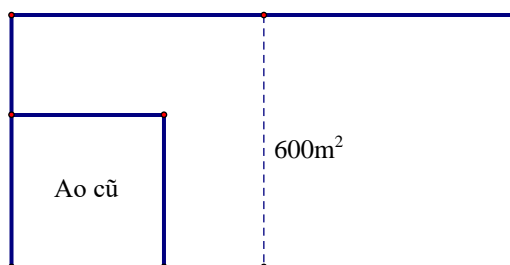
Bài 22: Người ta mở rộng một cái ao hình vuông để được một cái ao hình chữ nhật có chiều dài gấp hai lần chiều rộng. Sau khi mở rộng, diện tích ao tăng thêm 600 m^2 và diện tích ao mới gấp 4 lần ao cũ. Tính chu vi của ao mới.

Lời giải

Diện tích ao cũ

Diện tích ao mới

600 m^2



Diện tích của ao mới là: $(600 : 3) \cdot 4 = 800 \text{ (m}^2\text{)}$.

Mà ao mới là hình chữ nhật có chiều dài gấp hai lần chiều rộng nên một nửa của ao mới là một hình vuông.

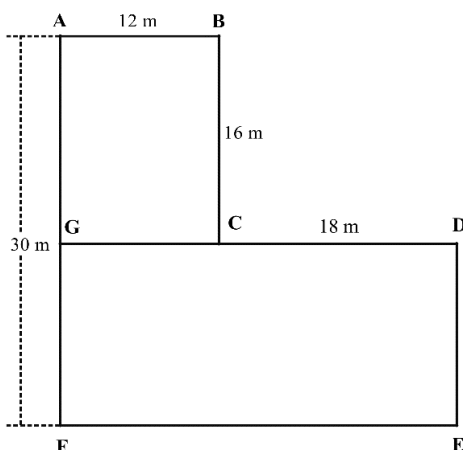
Diện tích hình vuông đó là $800 : 2 = 400 \text{ (m}^2\text{)}$.

Vì $400 = 20 \cdot 20$ nên cạnh của hình vuông đó là 20 m.

Chiều dài của ao mới là $20 \cdot 2 = 40 \text{ (m)}$.

Chu vi của ao mới là $(20 + 40) \cdot 2 = 120 \text{ (m)}$.

Bài 23: Khu vườn nhà anh Sơn có dạng như hình vẽ.



a) Anh Sơn muốn dùng lưới B40 để rào cả khu vườn thì cần dùng tất cả bao nhiêu mét lưới (theo chiều dài) và anh phải trả bao nhiêu tiền để rào khu vườn, biết giá trọn gói (gồm tiền lưới và tiền công) cho mỗi mét lưới (theo chiều dài) là 150.000 đồng.

b) Trên phần đất $ABCG$, anh Sơn trồng rau xà lách, còn trên mảnh đất $GDEF$ anh trồng rau cải xanh. Hỏi sau khi anh Sơn thu hoạch hết toàn bộ rau xà lách và rau cải xanh trong khu vườn thì anh thu được bao nhiêu tiền? Biết rằng cứ 1m^2 thì anh thu hoạch được 2kg rau xà lách và 3kg rau cải xanh. Giá mỗi kilôgam rau xà lách là 5000 đồng, giá mỗi kilôgam rau cải xanh là 4500 đồng.

Lời giải:

a) Số mét lưới B40 anh Sơn cần dùng để rào toàn bộ khu vườn là

$$12 + 16 + 18 + (30 - 16) + (12 + 18) + 30 = 120 \text{ (m)}$$

Số tiền anh Sơn phải trả để rào hết khu vườn là $120 \cdot 150000 = 18.000.000$ (đồng).

b) Diện tích phần đất $ABCG$ anh Sơn dùng để trồng rau xà lách là: $S_{ABCG} = 12 \cdot 16 = 192 \text{ (m}^2\text{)}$

Độ dài đoạn DE là $30 - 16 = 14 \text{ (m)}$.

Độ dài đoạn EF là $12 + 18 = 30 \text{ (m)}$.

Diện tích phần đất $GDEF$ anh Sơn dùng để trồng rau cải xanh là $S_{GDEF} = 14 \cdot 30 = 420 \text{ (m}^2\text{)}$

Khối lượng rau xà lách thu được trên phần đất $ABCG$ là $2.192 = 384(\text{kg})$.

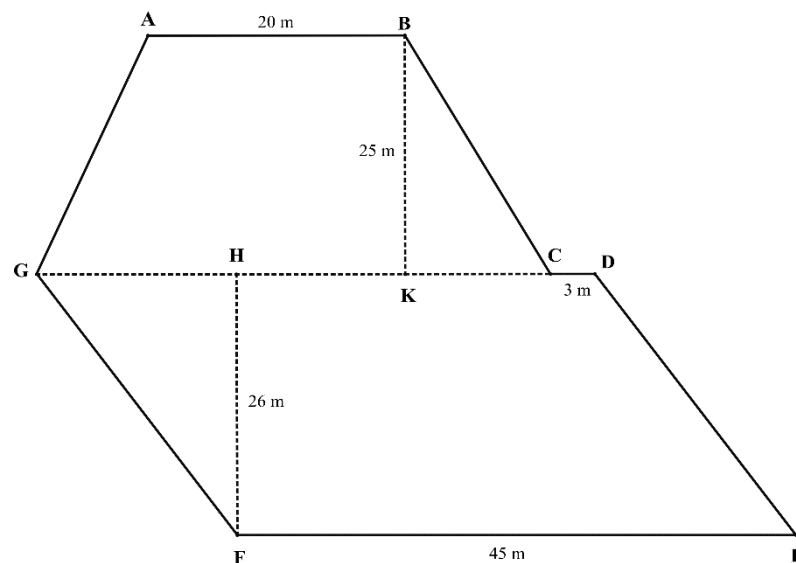
Khối lượng rau cải xanh thu được trên phần đất $GDEF$ là $3.420 = 1260(\text{kg})$.

Số tiền anh Sơn thu được từ rau xà lách là $384.5000 = 1.920.000$ (đồng).

Số tiền anh Sơn thu được từ rau cải xanh là $1260.4500 = 5.670.000$ (đồng).

Tổng số tiền anh Sơn thu được là $1.920.000 + 5.670.000 = 7.590.000$ (đồng).

Bài 24: Bác Hai có một thửa ruộng có dạng như hình bên (độ dài đoạn thẳng CD bằng 3 mét). Bác Hai trồng lúa trên toàn bộ thửa ruộng đó. Nếu trên mỗi mét vuông bác Hai thu được 0,8kg thóc thì số tiền bác Hai thu được là bao nhiêu? Biết mỗi tạ thóc có giá 700.000 đồng.



Lời giải:

Độ dài đoạn thẳng GD là $GD = EF = 45$ (m).

Độ dài đoạn thẳng GC là $GC = 45 - 3 = 42$ (m).

Diện tích phần thửa ruộng hình thang $ABCG$ là $S_{ABCG} = \frac{(20 + 42) \cdot 25}{2} = 775(\text{m}^2)$.

Diện tích phần thửa ruộng hình bình hành $GDEF$ là $S_{GDEF} = 45 \cdot 26 = 1170(\text{m}^2)$

Diện tích thửa ruộng là $S = S_{ABCG} + S_{GDEF} = 775 + 1170 = 1945(\text{m}^2)$.

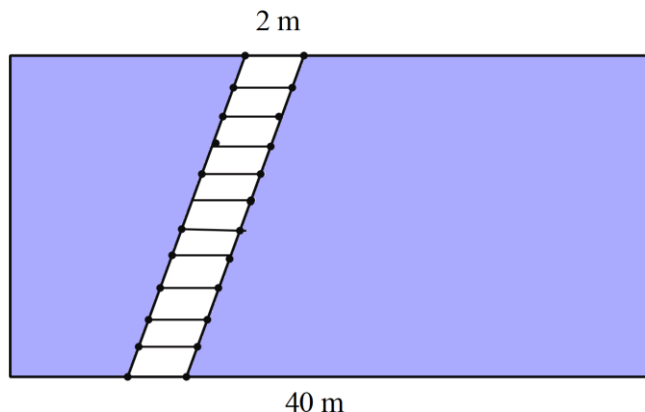
Số kilôgam thóc bác Hai thu hoạch được trên thửa ruộng là $1945 \cdot 0,8 = 1556(\text{kg})$.

Đổi $1556\text{kg} = 15,56$ tạ

Số tiền bác Hai thu được là $15,56 \times 700.000 = 10.892.000$ (đồng).

Bài 25: Nhà bác Sơn có một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng 40 mét và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Trong khu vườn, bác Sơn làm một lối đi để tiện chăm sóc và tưới cho cây với kích thước được cho như hình vẽ. Bác dùng lưới B40 rào xung quanh khu vườn. Chi phí để làm cho mỗi mét

hàng rào là 150.000 đồng và cho mỗi mét vuông làm lối đi là 350.000 đồng (bao gồm cả tiền công thợ và tiền vật liệu). Hỏi bác Sơn phải trả bao nhiêu tiền để làm hàng rào và làm lối đi cho khu vườn?



Lời giải:

Chiều rộng khu vườn là $40 : 2 = 20$ (m).

Chiều dài lưới B40 dùng để rào khu vườn là $(40 + 20) \cdot 2 = 120$ (m).

Diện tích của lối đi là $S_{\text{lối đi}} = 2 \cdot 20 = 40$ (m²).

Chi phí để làm hàng rào là $120 \times 150.000 = 18.000.000$ (đồng).

Chi phí để làm lối đi là $40 \times 350.000 = 14.000.000$ (đồng).

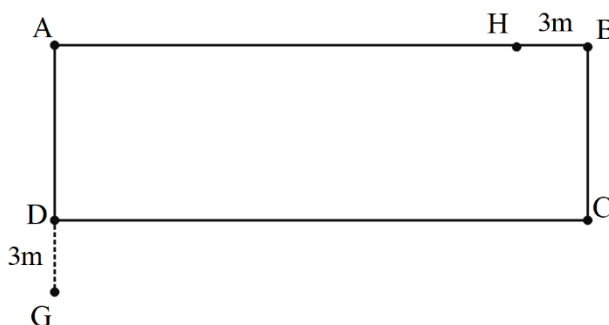
Số tiền bác Sơn phải trả để làm hàng rào và làm lối đi cho khu vườn là:

$$18.000.000 + 14.000.000 = 32.000.000 \text{ (đồng)}.$$

Bài 26: Một khu đất hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng. Nếu giảm chiều dài đi 3m và tăng chiều rộng thêm 3m thì diện tích được tăng thêm 75m². Tính các cạnh của khu đất.

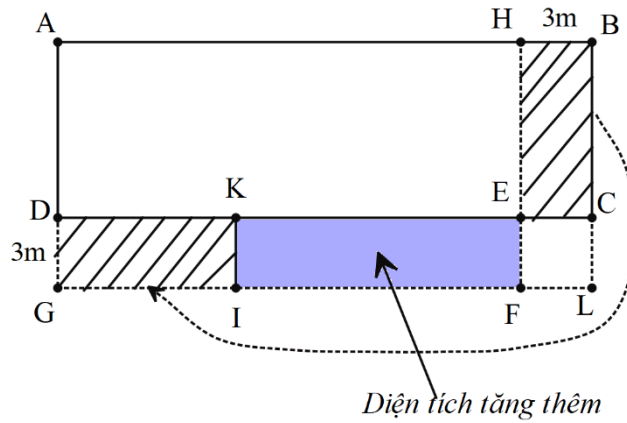
Lời giải:

Gọi khu đất hình chữ nhật là hình chữ nhật $ABCD$. Giảm chiều dài đi 3m tức là vẽ điểm H nằm trên cạnh AB sao cho $HB = 3\text{m}$ và tăng chiều rộng thêm 3m tức là trên cạnh AD kéo dài vẽ điểm G sao cho $DG = 3\text{m}$.



Vẽ các hình chữ nhật $HBCE$ và $DGFE$. Khi đó $EC = EF = 3\text{m}$. Vẽ hình vuông $ELCF$.

Vẽ hình chữ nhật $DGIK$ sao cho $DK = BC$.



Ta thấy diện tích tăng thêm là diện tích của hình chữ nhật $EFIK$ có chiều rộng là $IK = DG = 3\text{m}$. Do đó, chiều dài KE của hình chữ nhật đó là $KE = 75:3 = 25\text{m}$.

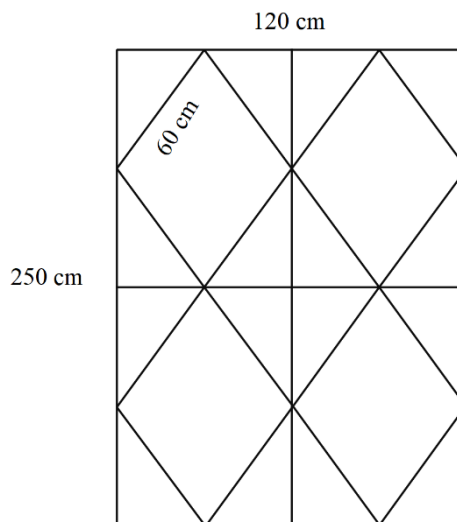
Chiều dài này khi tăng thêm 3m là $KE + EC = KC \Rightarrow KC = 25 + 3 = 28\text{m}$.

Do đó chiều dài hình chữ nhật ban đầu là $DC = DK + KC = BC + KC = 3BC \Rightarrow KC = 2BC$. Chiều dài KC gấp đôi chiều rộng ban đầu BC của khu đất.

Chiều rộng ban đầu của khu đất là $BC = KC : 2 = 28 : 2 = 14\text{ (m)}$.

Chiều dài ban đầu của khu đất là $AB = BC.3 = 14.3 = 42\text{ (m)}$.

Bài 27: Anh Tâm làm 4 khung cửa sắt có kích thước và hình dạng như hình bên. Khung sắt bên ngoài là hình chữ nhật có chiều dài 250 cm, chiều rộng là 120 cm. Phía trong là các hình thoi có độ dài cạnh 60 cm. Hỏi anh Tâm cần dùng bao nhiêu mét dây thép để làm được bốn khung cửa như vậy?



Lời giải:

Số mét thép dùng để làm khung sắt bên ngoài là $(250 + 120) \cdot 2 = 740\text{ (cm)} = 7,4\text{ (m)}$.

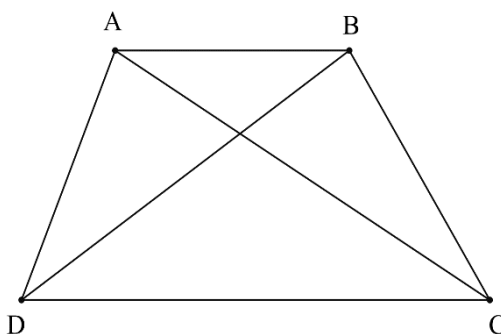
Chu vi của một hình thoi là $4 \cdot 60 = 240\text{ (cm)}$

Số mét thép dùng để làm 4 hình thoi là $4 \cdot 240 = 960\text{ (cm)} = 9,6\text{ (m)}$

Số mét thép anh Tâm dùng để làm một khung cửa là $7,4 + 9,6 + 2,5 + 1,2 = 20,7\text{ (m)}$

Số mét thép anh Tâm dùng để làm được bốn khung cửa là $20,7.4 = 82,8$ (m).

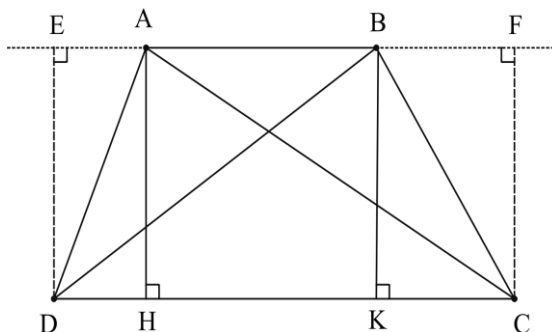
Bài 28: Cho hình thang $ABCD$ (hình vẽ) có $S_{ABD} = 10 \text{ cm}^2$; $S_{CBD} = 20 \text{ cm}^2$. Tính diện tích các tam giác ABC và ACD .



Lời giải:

Từ A, B lần lượt hạ các đường cao AH, BK tương ứng xuống cạnh đáy DC .

Từ D, C lần lượt hạ các đường cao DE, CF tương ứng xuống cạnh đáy AB .



Khi đó, ta có $AH = BK = DE = CF$ (bằng chiều cao hình thang $ABCD$).

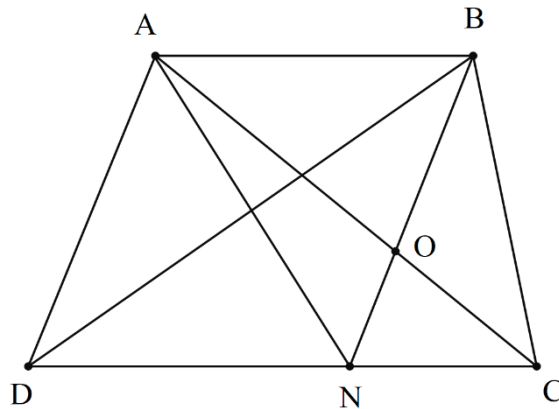
Xét hai tam giác ABD và tam giác ABC có chung đáy AB , chiều cao tương ứng đều bằng chiều cao hình thang nên $S_{ABC} = S_{ABD}$.

Ta suy ra $S_{ABC} = 10 \text{ cm}^2$.

Xét hai tam giác ACD và tam giác BCD có chung đáy CD , chiều cao tương ứng đều bằng chiều cao hình thang nên $S_{ACD} = S_{BCD}$.

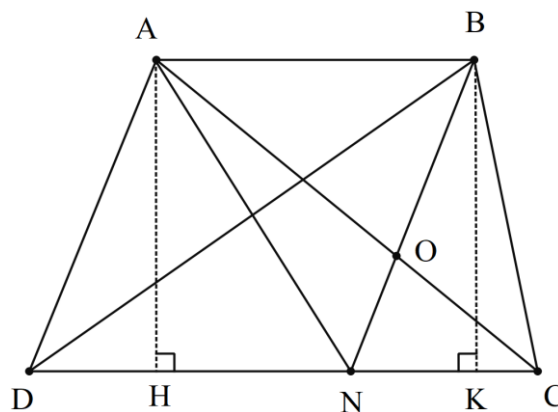
Ta suy ra $S_{ACD} = 20 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Bài 29: Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$ và điểm N nằm trên cạnh CD (như hình vẽ). Biết diện tích tam giác BND bằng 18 cm^2 , diện tích tam giác BOC bằng 7 cm^2 . Tính diện tích tứ giác $AOND$.



Lời giải:

Từ A, B lần lượt hạ các đường cao AH, BK tương ứng xuống cạnh đáy DC .



Ta có $AH = BK$ (bằng chiều cao hình thang $ABCD$).

Khi đó, ta có: $S_{AND} = S_{BND}$ (vì cùng chung đáy ND và có chiều cao bằng chiều cao hình thang).

$S_{ANC} = S_{BNC}$ (vì cùng chung đáy NC và có chiều cao bằng chiều cao hình thang).

$$\Rightarrow S_{ANC} - S_{ONC} = S_{BNC} - S_{ONC}$$

$$\Rightarrow S_{AON} = S_{BOC}$$

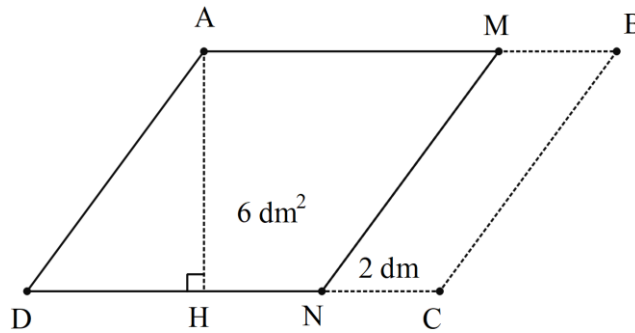
Khi đó diện tích của tứ giác $AOND$ là $S_{AOND} = S_{AND} + S_{AON} = S_{AND} + S_{BOC}$

$$\Rightarrow S_{AOND} = 18 + 7 = 25 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vậy $S_{AOND} = 25 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Bài 30: Một miếng bìa hình bình hành có chu vi là 2m. Nếu bớt một cạnh đi 20 cm thì ta được miếng bìa hình thoi có diện tích 6 dm². Tìm diện tích miếng bìa hình bình hành đó.

Lời giải:



Đổi $2\text{ m} = 20\text{ dm}$; $20\text{ cm} = 2\text{ dm}$.

Khi bớt một cạnh của hình bình hành đi 2 dm thì chu vi hình bình hành giảm đi $2 \cdot 2 = 4\text{ (dm)}$ trở thành chu vi của hình thoi.

Chu vi của hình thoi là $20 - 4 = 16\text{ (dm)}$.

Cạnh của hình thoi là $DN = 20 : 4 = 4\text{ (dm)}$.

Khi đó chiều cao AH của hình thoi $AMND$ là $6 : 4 = 1,5\text{ (dm)}$.

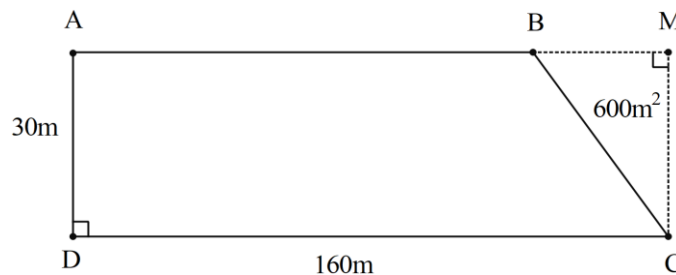
AH cũng là chiều cao của hình bình hành $ABCD$.

Độ dài cạnh của hình bình hành $ABCD$ là $DC = DN + NC = 4 + 2 = 6\text{ (dm)}$.

Vậy diện tích miếng bìa hình bình hành $ABCD$ là $S = 1,5 \cdot 6 = 9\text{ (dm}^2\text{)}$

Bài 31: Cô Trâm trồng hoa trên một thửa ruộng hình thang vuông có đáy lớn bằng 160 m và chiều cao bằng 30 m . Nếu mở rộng thửa ruộng thành mảnh đất hình chữ nhật mà vẫn giữ nguyên đáy lớn thì diện tích thửa ruộng tăng thêm 600 m^2 . Hỏi cô Trâm bán được bao nhiêu tiền hoa trên thửa ruộng đó biết rằng trung bình mỗi hecta hoa bán được $140.000.000$ đồng.

Lời giải:



Ta có $AD = CM$ nên AD chính là độ dài đường cao của tam giác BCM hạ từ đỉnh C .

Từ công thức $S_{BCM} = \frac{1}{2} BM \cdot CM = \frac{1}{2} BM \cdot AD$ suy ra độ dài cạnh đáy BM là

$$BM = \frac{2 \cdot S_{BCM}}{AD} = \frac{2 \cdot 600}{30} = 40\text{ (m)}.$$

Độ dài đáy bé AB là $160 - 40 = 120\text{ (m)}$.

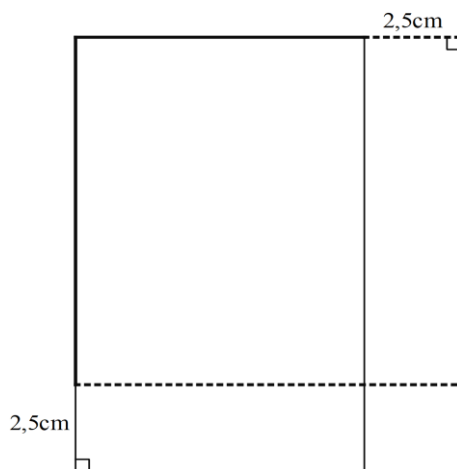
Diện tích của hình thang $ABCD$ là $S = \frac{(120 + 160) \cdot 30}{2} = 4200\text{ (m}^2\text{)}$.

Đổi $4200\text{ m}^2 = 0,42\text{ ha}$

Số tiền cô Trâm thu được trên thửa ruộng đó là $0,42 \times 140.000.000 = 58.800.000$ (đồng).

Bài 32: Một hình chữ nhật có chu vi 54 cm. Nếu tăng chiều rộng thêm 2,5 cm và giảm chiều dài 2,5 cm thì được một hình vuông. Tính diện tích hình chữ nhật đó.

Lời giải:



Nửa chu vi hình chữ nhật là $54 : 2 = 27$ (cm).

Khi tăng chiều rộng thêm 2,5 cm và giảm chiều dài 2,5 cm thì được hình vuông nên chiều dài hơn chiều rộng là $2,5 + 2,5 = 5$ (cm).

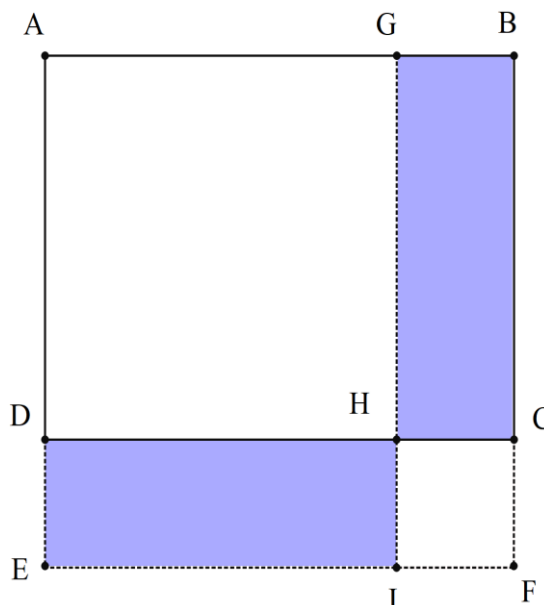
Do đó, chiều dài hình chữ nhật là $(27 + 5) : 2 = 16$ (cm).

Chiều rộng hình chữ nhật là $27 - 16 = 11$ (cm).

Vậy diện tích hình chữ nhật là $16 \cdot 11 = 176$ (cm²).

Bài 33: Một hình chữ nhật nếu tăng chiều rộng để bằng chiều dài của nó thì diện tích tăng thêm 20 cm², khi giảm chiều dài cho bằng chiều rộng thì diện tích giảm đi 16 cm². Tính diện tích hình chữ nhật ban đầu.

Lời giải:



Khi tăng chiều rộng bằng chiều dài, diện tích tăng thêm 20 cm^2 chính là diện tích của hình chữ nhật $DCFE$.

Khi giảm chiều dài bằng chiều rộng, diện tích giảm đi 16 cm^2 chính là diện tích của hình chữ nhật $GBCD$

Vẽ hình chữ nhật $DHIE$.

Ta có $HC = HI$ (cùng bằng hiệu chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật ban đầu). Hiệu của diện tích tăng lên và diện tích giảm đi chính bằng diện tích của hình vuông $HCFI$. Hiệu đó là $20 - 16 = 4 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Do $4 = 2.2$ nên độ dài cạnh HC là 2 cm .

Cạnh DH hay chiều rộng của hình chữ nhật ban đầu là $16 : 2 = 8 \text{ (cm)}$.

Chiều dài của hình chữ nhật ban đầu là $8 + 2 = 10 \text{ (cm)}$.

Diện tích hình chữ nhật ban đầu là $8.10 = 80 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Bài 34. Cho đoạn thẳng $AB = 8 \text{ cm}$. Điểm C thuộc đường thẳng AB sao cho $BC = 4 \text{ cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng AC .

Lời giải

Xét hai trường hợp:

*Th1: C thuộc tia đối của tia BA

Hai tia BA, BC là hai tia đối nhau suy ra B nằm giữa A và C

$$AC = AB + BC = 12 \text{ cm}$$

*Th2: C thuộc tia BA

C nằm giữa A và B (vì $BA > BC$) suy ra:

$$AC + BC = BA$$

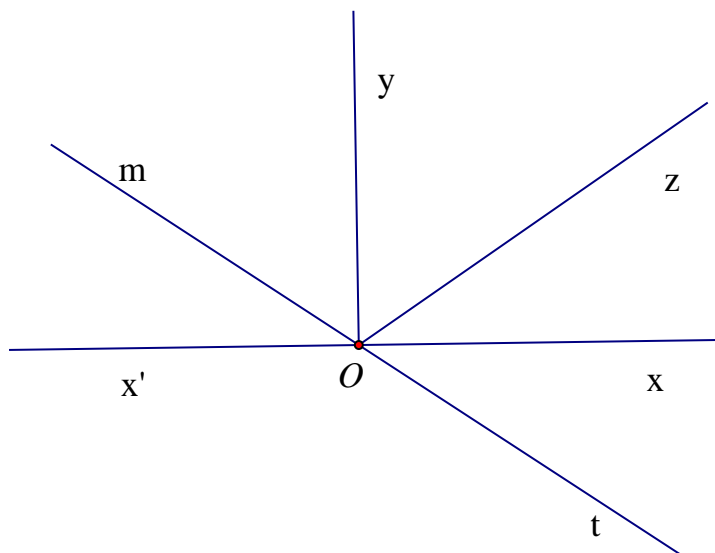
$$AC = AB - BC = 4 \text{ cm}$$

Bài 35. Cho tia Oz nằm trong góc vuông xOy . Vẽ tia Ot sao cho Ox là tia phân giác của tOz . Vẽ tia Om sao cho tia Oy là phân giác của zOm

a) Chứng minh rằng tia Om và tia Ot là hai tia đối nhau

b) Gọi Ox' là tia đối của tia Ox , biết rằng $x'Om = 30^\circ$. Tính tOz

c) Vẽ thêm 2014 tia phân biệt gốc O (không trùng với các tia Ox, Oz, Oy, Om, Ox' và Ot). Hỏi trong hình vẽ có tất cả bao nhiêu góc?



Lời giải

a) Tia Oz nằm trong góc xOy nên:

$$xOz + zOy = xOy = 90^\circ$$

Theo giả thiết ta có các tia phân giác nên $xOz = \frac{1}{2}tOz$; $zOy = \frac{1}{2}zOm$

Từ đó suy ra: $\frac{1}{2}tOz + \frac{1}{2}zOm = 90^\circ$ hay $tOz + zOm = 180^\circ$

Suy ra: $tOz; zOm$ là hai góc kề nhau

b) Chứng minh $tOz = mOx' = 30^\circ$ (cùng kề bù với mOx) suy ra:

$$tOx = xOz = 30^\circ$$

Suy ra: $tOz = 60^\circ$

c) Giả sử vẽ thêm n tia phân biệt gốc O không trùng với các tia Ox, Oy, Oz, Ot, Om, Ox' . Tất cả trong hình vẽ có $n+6$ tia phân biệt

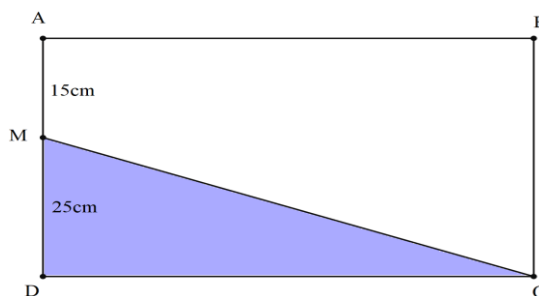
Cứ 1 tia trong $n+6$ tia đó tạo với $n+5$ tia còn lại thành $n+5$ góc

Có $n+6$ tia tạo thành $(n+5)(n+6)$ góc, nhưng như thế mỗi góc được tính 2 lần

Vậy có tất cả là $\frac{(n+5)(n+6)}{2}$ góc

Thay $n = 2014$ ta được số góc là: $(2014+6)(2014+5) : 2 = 2039190$ (góc)

Bài 36. Cho hình vẽ dưới đây, biết diện tích hình chữ nhật là 2400 cm^2 . Tính diện tích hình tam giác MCD



Lời giải:

Chiều rộng của hình chữ nhật là: $25 + 15 = 40$ (cm)

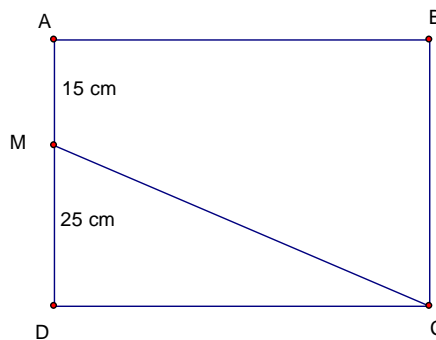
Chiều dài hình chữ nhật là: $2400 : 40 = 60$ (cm)

Diện tích hình tam giác MCD là: $60 \cdot 25 : 2 = 750$ (cm^2)

Bài 37. Cho hình vẽ sau đây biết diện tích hình tam giác MCD là 1500 cm^2 .

a) Tìm diện tích hình chữ nhật $ABCD$?

b) Tìm diện tích tứ giác $AMCB$?



Lời giải:

Chiều dài DC của hình chữ nhật $ABCD$.

$$1500 \cdot 2 : 25 = 120 \text{ (cm)}$$

Chiều rộng hình chữ nhật $ABCD$ là:

$$25 + 15 = 40 \text{ (cm)}$$

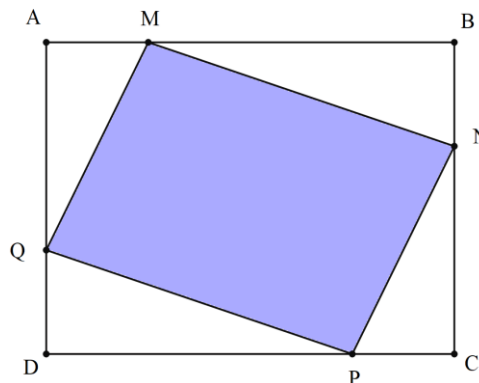
Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là:

$$120 \cdot 40 = 4800 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Diện tích hình tứ giác $AMCB$ là:

$$(15 + 40) \cdot 120 : 2 = 3300 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Bài 38. Cho hình vẽ với các số đo như sau



Tính diện tích hình bình hành $MNPQ$ vẽ trong hình chữ nhật $ABCD$. Biết $AB = 28 \text{ cm}$; $CB = 18 \text{ cm}$;

$$AM = CP = \frac{1}{4} AB ; BN = DQ = \frac{1}{3} BC ;$$

Lời giải:

Diện tích hình bình hành $MNPQ$ bằng diện tích hình chữ nhật $ABCD$ trừ đi tổng diện tích của bốn hình tam giác MAQ , MBN , PCN và QDP .

Ta có:

$$AM = GP = 28 : 4 = 7 \text{ (cm)}$$

$$BN = DQ = 18 : 3 = 6 \text{ (cm)}$$

$$MB = 28 - 7 = 21 \text{ (cm)}$$

$$AQ = 18 - 6 = 12 \text{ (cm)}$$

Diện tích hình tam giác MBN (hoặc tam giác QDP) là:

$$21 \cdot 6 : 2 = 63 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Diện tích hình tam giác AMQ (hoặc tam giác PCN) là:

$$7.12 : 2 = 42 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là:

$$28.18 = 504 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Diện tích hình bình hành $MNPQ$ là:

$$504 - (42.2 + 63.2) = 294 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Bài 39. Một thửa ruộng hình chữ nhật có chiều rộng 22,5 m và có diện tích bằng diện tích một cái sân hình vuông cạnh 27 m. Tính chu vi thửa ruộng đó?



Lời giải:

Diện tích hình chữ nhật là: $27.27 = 729 \text{ (m}^2\text{)}$

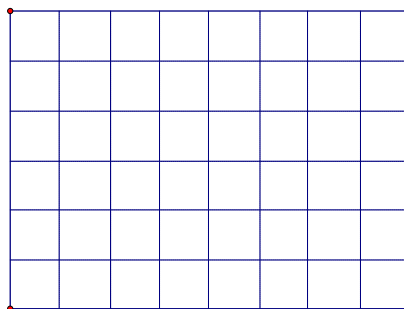
Chiều dài hình chữ nhật là: $729 : 22,5 = 32,4 \text{ (m)}$

Chu vi hình chữ nhật là: $(32,4 + 22,5).2 = 109,8 \text{ (m)}$

Bài 40. Một nền nhà hình chữ nhật có nửa chu vi là 22,5 m, chiều rộng 4,5 m. Người ta lát nền nhà bằng loại gạch men hình vuông có cạnh 3 dm.

a) Tính diện tích nền nhà.

b) Tìm số viên gạch cần dùng để lát nền nhà đó (Coi diện tích khe giữa các viên gạch không đáng kể)



Lời giải:

a) Chiều dài hình chữ nhật là: $22,5 - 4,5 = 18 \text{ (m)}$

Diện tích nền nhà là: $18.4,5 = 81 \text{ (m}^2\text{)}$

Đổi 3 dm = 0,3 m

b) Diện tích viên gạch men là: $0,3.0,3 = 0,09 \text{ (m}^2\text{)}$

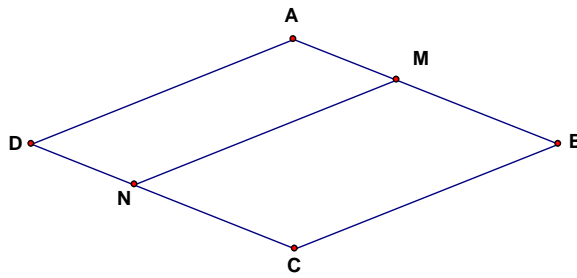
Số viên gạch cần dùng để lát nền nhà đó là: $81 : 0,09 = 900 \text{ (viên)}$

Bài 41. Cho hình thoi $ABCD$ có diện tích là 216 cm^2 và chu vi là 60 cm.

Đoạn thẳng MN chia hình thoi thành hai hình bình hành $AMND$ và $MBCN$ (như hình vẽ), biết độ dài cạnh MB hơn độ dài cạnh AM là 5 cm. Tính:

a) Chu vi hình bình hành $MBCN$.

b) Diện tích hình bình hành $AMND$.

**Lời giải:**

Cạnh AB của hình thoi có độ dài là: $60:4 = 15$ (cm)

Độ dài cạnh MB là: $(15+5):2 = 10$ (cm)

Độ dài cạnh AM là: $15-10 = 5$ (cm)

a) Chu vi hình bình hành $MBCN$ là: $(10+15) \cdot 2 = 50$ cm

b) Có $\frac{AM}{AB} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ hay diện tích hình bình hành $AMND$ bằng $\frac{1}{3}$ diện tích hình bình hành $ABCD$. (vì có cùng chiều cao hạ từ N xuống AB)

Diện tích hình bình hành $AMND$ là: $216 \cdot \frac{1}{3} = 72$ (cm²)

Bài 42: Cho 1000 điểm phân biệt, trong đó có đúng 3 điểm thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng tạo bởi hai trong 1000 điểm đó?

Lời giải

Số đường thẳng tạo bởi 1000 điểm phân biệt là: $\frac{1000 \cdot 999}{2} = 499500$ (đường thẳng).

Số đường thẳng tạo bởi 3 điểm không thẳng hàng là: $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ (đường thẳng).

Theo bài ra vì có 3 điểm thẳng hàng nên số đường thẳng giảm đi là: $3-1 = 2$ (đường thẳng).

Vậy số đường thẳng tạo thành là: $499500-2 = 499498$ (đường thẳng)

Bài 43:

1. Trên tia Oy , lấy điểm M và H sao cho $OM = 5$ cm, $OH = 10$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng HM .

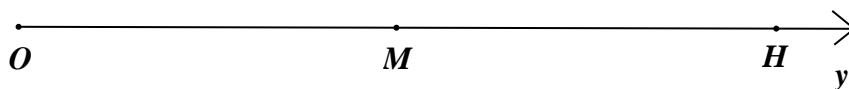
Điểm M có là trung điểm của đoạn thẳng OH không? Vì sao?

2. Cho đoạn thẳng AB . Điểm C thuộc tia đối của tia BA . Gọi M , N theo thứ tự là trung điểm của

AB và AC . Chứng minh rằng: $CM = \frac{CA+CB}{2}$ và $MN = \frac{BC}{2}$.

Lời giải

1)

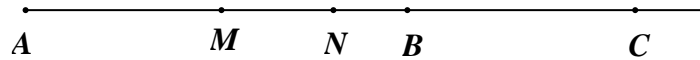


Ta có M nằm giữa O và H .

Nên $OM + MH = OH \Rightarrow MH = 10 - 5 = 5\text{cm}$

Điểm M có là trung điểm của đoạn thẳng OH vì : M nằm giữa O và H và $MH = MO (= 5\text{cm})$

2) Chứng minh rằng: $CM = \frac{CA + CB}{2}$ và $MN = \frac{BC}{2}$.



Vì M là trung điểm của AB , điểm C thuộc tia đối của tia BA nên M nằm giữa A và C .

Suy ra: $CA = CM + AM$

$$\Rightarrow CM = AC - AM \quad (1)$$

Lại có B nằm giữa M và C

$$\Rightarrow CM = CB + BM \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2CM = AC - AM + BC + MB = AC + BC$ (do $AM = MB$)

$$\text{Vậy } CM = \frac{CA + CB}{2}$$

Lại có N là trung điểm của $AC \Rightarrow CN = \frac{AC}{2}$

Có $AB < AC$, M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và $AC \Rightarrow AM < AN$

$$\Rightarrow M \text{ nằm giữa } A \text{ và } N \Rightarrow AN = AM + MN$$

$$\Rightarrow MN = AN - AM = \frac{AC - AB}{2} = \frac{BC}{2}$$

Bài 45: Nhà Hoàng cách trường học 3400m. Hằng ngày trên đường đến trường Hoàng phải đi qua UBND xã sau đó đến một siêu thị cách trường 800m .



Nhà Hoàng

UBND xã

Siêu thị

Trường

Hỏi quãng đường từ UBND xã đến siêu thị dài bao nhiêu m? Biết rằng UBND xã nằm chính giữa nhà Hoàng và trường học.

Trích đề HSG huyện Mỹ Lộc năm 2021 - 2022

Lời giải

Vì UBND xã nằm chính giữa nhà Hoàng và trường học nên khoảng cách từ UBND xã đến trường học là : $3400 : 2 = 1700$ (m)

Vì siêu thị cách trường $800m$ nên khoảng cách từ UBND xã đến siêu thị là :

$$1700 - 800 = 900m$$

Vậy khoảng cách từ UBND xã đến siêu thị là $900m$

Bài 46: Người ta trồng cây ở hai bên đường của một đoạn đường dài $1500m$. Biết khoảng cách giữa các cây đều nhau là $2m$ và ở cả 2 đầu của đoạn đường đều có trồng cây. Tính số cây phải trồng ở cả 2 bên của đoạn đường đó

Trích đề HSG huyện Trục Ninh, năm 2021 - 2022

Lời giải

Số cây phải trồng ở 1 bên của đoạn đường đó là: $1500 : 2 + 1 = 751$ (cây)

Số cây phải trồng ở cả 2 bên của đoạn đường đó là: $751. 2 = 1502$ (cây)

Đáp số: 1502 cây.

Bài 47: Cho 20 điểm phân biệt trong đó có a điểm thẳng hàng cứ qua 2 điểm ta vẽ được 1 đường thẳng. Tìm a biết số đường thẳng tạo thành là 421 đường thẳng.

Lời giải

Giả sử trong 20 điểm không có 3 điểm nào thẳng hàng

Gọi 20 điểm đó là $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{20}$

Vì cứ qua 2 điểm ta vẽ được 1 đường thẳng nên

Qua điểm A_1 và từng điểm trong 19 điểm còn lại A_2, A_3, \dots, A_{20} ta vẽ được 19 đường thẳng.

Qua điểm A_2 và từng điểm trong 18 điểm còn lại A_3, A_4, \dots, A_{20} ta vẽ được 18 đường thẳng.

.....

Qua điểm A_{19} và điểm A_{20} ta vẽ được 1 đường thẳng.

Do đó số đường thẳng tạo thành là: $1 + 2 + 3 + \dots + 19 + 20 = 190$ (đường thẳng)

Với a điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng thì ta có số đường thẳng tạo thành là

$$1 + 2 + 3 + \dots + (a-1) = \frac{a \cdot (a-1)}{2}$$

Với a điểm thẳng hàng ta chỉ vẽ được 1 đường thẳng.

Vậy trong 20 điểm mà có a điểm thẳng hàng thì số đường thẳng giảm đi là:

$$(a-1)a : 2 - 1 = 190 - 170$$

$$(a-1)a : 2 = 21 \Rightarrow a(a-1) = 42 = 6.7 \Rightarrow a = 7$$

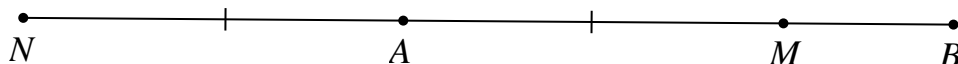
Bài 48: Trên đoạn thẳng $AB = 3$ cm lấy điểm M . Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $AM = AN$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng BN khi $BM = 1$ cm.

b. Hãy xác định vị trí của M (trên đoạn thẳng AB) để BN có độ dài lớn nhất.

Lời giải

a)



- M nằm giữa hai điểm A, B nên $MA = AB - MB = 3 - 1 = 2 \text{ (cm)}$

Suy ra $AN = AM = 2 \text{ (cm)}$.

- A nằm giữa hai điểm N, B nên $BN = AN + AB = 2 + 3 = 5 \text{ (cm)}$.

b) $BN = AN + AB$, AB không đổi nên BN lớn nhất khi AN lớn nhất.

+) AN lớn nhất khi AM lớn nhất.

+) AM lớn nhất khi $AM = AB$.

- Lúc đó M trùng với B và BN bằng 6(cm).

Bài 49: Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Biết rằng tổng số giao điểm mà n đường thẳng đó cắt nhau tạo ra bằng 465. Tìm n .

Lời giải

Có n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy, nên mỗi đường thẳng sẽ cắt $n-1$ đường thẳng còn lại tạo ra $n-1$ giao điểm phân biệt.

Do đó n đường thẳng thì có $n(n-1)$ giao điểm nhưng mỗi giao điểm đã được tính 2 lần.

Vậy thực tế chỉ có giao điểm.

Theo bài ra ta có:

$$\Rightarrow n(n-1) = 930 = 31 \cdot 30$$

$$\Rightarrow n = 31$$

Vậy $n = 31$

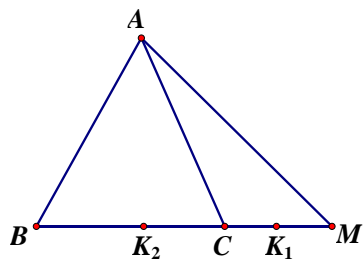
Bài 50: Cho tam giác ABC có $BC = 5,5 \text{ cm}$. Điểm M thuộc tia đối của tia CB sao cho $CM = 3 \text{ cm}$

a. Tính độ dài BM

b. Biết $\widehat{BAM} = 80^\circ$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính CAM

c. Tính độ dài BK thuộc đoạn BM biết $CK = 1 \text{ cm}$

Lời giải



a) C nằm giữa B và M $\Rightarrow BC + CM = BM \Rightarrow BM = 3 + 5,5 = 8,5$

b) C nằm giữa B và M nên AC là tia nằm giữa 2 tia AB, AM

$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{CAM} = \widehat{BAM}$.

$\Rightarrow \widehat{CAM} = \widehat{BAM} - \widehat{BAC} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$

c. Xét 2 trường hợp:

+ Nếu K nằm giữa C và M ta tính được: $BK = BC + CK = 5,5 + 1 = 6,5$ (cm)

+ Nếu K nằm giữa C và B $\Rightarrow BK = 4,5$ cm

Bài 51: Cho góc $\widehat{xBy} = 55^\circ$. Trên các tia Bx, By lần lượt lấy các điểm A, C ($A \neq B, B \neq C$). Trên đoạn thẳng AC lấy điểm D sao cho $\widehat{ABD} = 30^\circ$

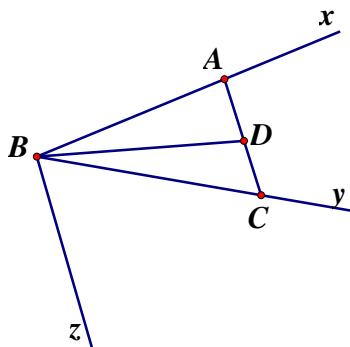
a) Tính độ dài AC, biết $AD = 4$ cm, $CD = 3$ cm

b) Tính số đo góc \widehat{DBC}

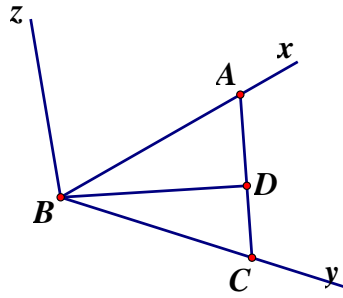
c) Từ B vẽ tia Bz sao cho $\widehat{DBz} = 90^\circ$. Tính số đo \widehat{ABz}

Lời giải

TH1:



TH2:



a. Vì D thuộc đoạn thẳng AC nên D nằm giữa A và C

$$AC = AD + CD = 4 + 3 = 7 \text{ cm}$$

b. Chứng minh được tia BD nằm giữa hai tia BA và BC

$$\text{Ta có đẳng thức: } \angle ABC = \angle ABD + \angle DBC \Rightarrow \angle DBC = \angle ABC - \angle ABD = 25^\circ$$

c. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Tia BA nằm giữa hai tia Bz và BD

$$\text{Tính được } \angle ABz = 90^\circ - \angle ABD = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

Trường hợp 2: Tia BD nằm giữa hai tia Bz và BA .

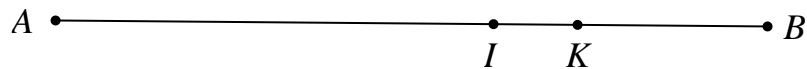
$$\text{Tính được } \angle ABz = 90^\circ + \angle ABD = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

Bài 52:

a) Cho đoạn thẳng $AB = 7 \text{ cm}$. Trên tia AB lấy điểm I sao cho $AI = 4 \text{ cm}$. Trên tia BA lấy điểm K sao cho $BK = 2 \text{ cm}$. Tính IK

b) Trên tia Ox cho 4 điểm A, B, C, D , biết rằng A nằm giữa B và C , B nằm giữa C và D , $OA = 5 \text{ cm}$, $OD = 2 \text{ cm}$, $BC = 4 \text{ cm}$ và độ dài AC gấp đôi độ dài BD . Tính độ dài các đoạn BD , AC .

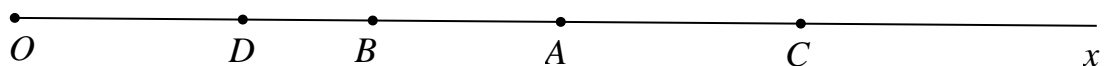
Lời giải



a. Ta có điểm K nằm giữa A và B . Suy ra: $AK + KB = AB \Rightarrow AK = 7 - 2 = 5 \text{ cm}$

Ta có điểm I nằm giữa A và K .

$$\text{Do } I \text{ nằm giữa } A \text{ và } K \text{ nên } AI + IK = AK \Rightarrow 4 + IK = 5 \Rightarrow IK = 1(\text{cm})$$



b)

$$\text{Vì } A \text{ nằm giữa } B \text{ và } C \text{ nên } BA + AC = BC \Rightarrow BA + AC = 4 \quad (1)$$

Ta có B nằm giữa A và D

Theo giả thiết $OD < OA \Rightarrow D$ nằm giữa O và A .

$$\text{Mà } OD + DA = OA \Rightarrow 2 + DA = 5 \Rightarrow DA = 3\text{cm}$$

$$\text{Ta có } DB + BA = DA \Rightarrow DB + BA = 3(2)$$

$$\text{Lấy (1) - (2): } AC - DB = 1 \quad (3)$$

Theo đề ra : $AC = 2BD$ thay vào (3)

$$\text{Ta có: } 2BD - BD = 1 \Rightarrow BD = 1(\text{cm}) \Rightarrow AC = 2BD = 2(\text{cm})$$

Bài 53: Cho 20 điểm, trong đó có a điểm thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm, ta vẽ một đường thẳng. Tìm a , biết vẽ được tất cả 170 đường thẳng.

Lời giải

Giả sử trong 20 điểm, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Khi đó, số đường thẳng vẽ được là:

$$19 \cdot 20 : 2 = 190.$$

Trong a điểm không có 3 điểm nào thẳng hàng. Số đường thẳng vẽ được là: $(a-1)a : 2$.

Vì có a điểm thẳng hàng nên qua a điểm này ta chỉ vẽ được 1 đường thẳng.

$$\text{Ta có: } 190 - (a-1)a : 2 + 1 = 170$$

$$(a-1)a : 2 = 21$$

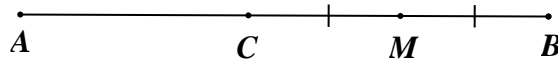
$$(a-1)a = 42$$

$$(a-1)a = 6 \cdot 7$$

$$\text{Vậy } a = 7.$$

Bài 54: Cho đoạn thẳng $AB = 7$ cm. Gọi C là điểm nằm giữa A và B , $AC = 3$ cm. M là trung điểm của BC . Tính BM .

Lời giải:



Vì điểm C nằm giữa hai điểm A và B

$$\text{Nên } AC + BC = AB$$

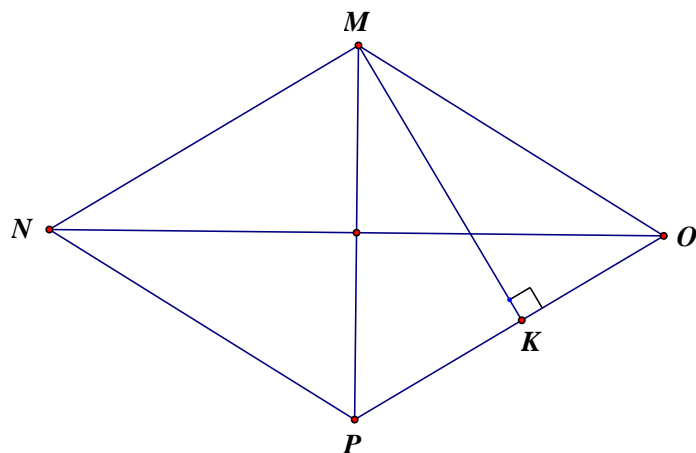
$$3 + BC = 7$$

$$\text{Suy ra } BC = 7 - 3 = 4 \text{ (cm)}$$

Vì M là trung điểm của đoạn thẳng BC

$$\text{Nên } BM = \frac{BC}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ (cm).}$$

Bài 55: Cho hình vẽ sau:



Hình thoi $MNPQ$ có độ dài cạnh là 30 cm . Tổng độ dài hai đường chéo là 84 cm , hiệu độ dài hai đường chéo là 12 cm . Tính độ dài chiều cao NK .

Lời giải

Độ dài đường chéo thứ nhất của hình thoi là:

$$(84 + 12) : 2 = 48(\text{cm})$$

Độ dài đường chéo thứ hai của hình thoi là:

$$48 - 12 = 36(\text{cm})$$

Diện tích hình thoi $MNPQ$ là:

$$48 \cdot 36 : 2 = 864(\text{cm}^2)$$

Diện tích hình thoi còn được tính như sau: $S_{MNPQ} = NK \cdot PQ$

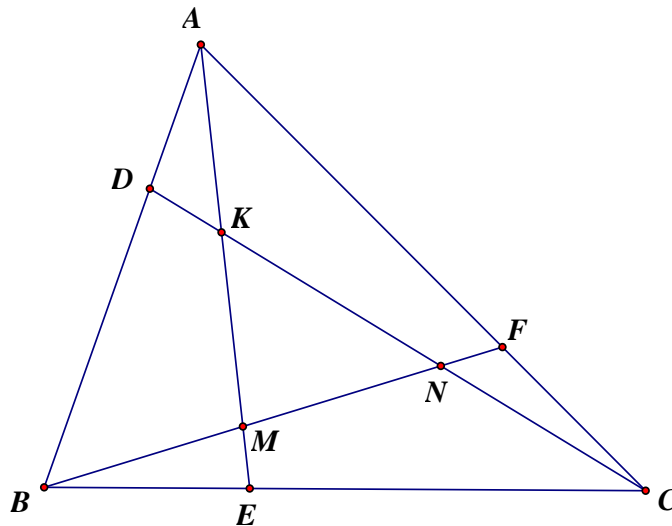
$$\Rightarrow NK = S_{MNPQ} : PQ = 864 : 30 = 28,8(\text{cm})$$

Vậy $NK = 28,8\text{ cm}$

Bài 56: Cho tam giác ABC . Lấy các điểm D, E, F theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CA sao cho $AD = \frac{1}{3}AB, BE = \frac{1}{3}BC, CF = \frac{1}{3}CA$. Các đoạn thẳng AE, BF, CD cắt nhau tạo thành một tam giác.

Chứng minh rằng diện tích tam giác này bằng $\frac{1}{7}$ diện tích tam giác ABC .

Lời giải



Đặt $S_{AKD} = a$ thì

$$S_{AKB} = 3S_{ADK} = 3a \text{ (vì } AD = \frac{1}{3}AB \text{)}$$

Ta có $S_{ABE} = \frac{1}{2}S_{AEC}$ (vì $BE = \frac{1}{2}EC$)

$$S_{BKE} = \frac{1}{2}S_{KEC} \text{ (vì } BE = \frac{1}{2}EC \text{)}$$

$$\Rightarrow S_{ABK} = \frac{1}{2}S_{AKC} \Rightarrow S_{AKC} = 2S_{ABK} = 2 \cdot 3a = 6a$$

$$S_{ADC} = S_{ADC} + S_{AKC} = 7a$$

$$S_{ABC} = 3S_{ADC} = 3 \cdot 7a = 21a \text{ (vì } AD = \frac{1}{3}AB \text{)}$$

$$\Rightarrow S_{AKC} = \frac{6}{21}S_{ABC} = \frac{2}{7}S_{ABC}$$

Chứng minh tương tự $S_{BMA} = S_{CNB} = \frac{2}{7}S_{ABC}$

$$\text{Do đó } S_{AKC} + S_{CNB} + S_{BMA} = \frac{6}{7}S_{ABC} \Rightarrow S_{MKN} = \frac{1}{7}S_{ABC}$$

Bài 57:

- Cho 40 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được bao nhiêu đường thẳng?
- Cho 40 điểm trong đó có đúng 10 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được bao nhiêu đường thẳng?
- Cho n điểm ($n \in \mathbb{N}$). Trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, cứ qua hai điểm ta được 1 đường thẳng. Biết rằng có tất cả 105 đường thẳng. Tìm n ?

Trích đề HSG Huyện Gia Lai năm 2018-2019

Lời giải

a) Kể từ 1 điểm bất kỳ với các điểm còn lại được: 39 đường thẳng.

Làm như vậy với 40 điểm ta được $39 \cdot 40 = 1560$ (đường thẳng)

Nhưng mỗi đường thẳng được tính hai lần do vậy số đường thẳng thực sự là:

$$1560 : 2 = 780 \text{ (đường thẳng)}$$

b) Nếu 40 điểm không có ba điểm nào thẳng hàng thì sẽ vẽ được 780 đường thẳng.

Với 10 điểm, không có ba điểm nào thẳng hàng thì vẽ được: $10 \cdot 9 : 2 = 45$ (đường thẳng)

Số đường thẳng cần tìm là: $780 - 44 = 736$ (đường thẳng)

c) Ta có:

$$n \cdot (n-1) : 2 = 105$$

$$n(n-1) = 210$$

$$n(n-1) = 15 \cdot 14$$

Vậy $n = 15$.

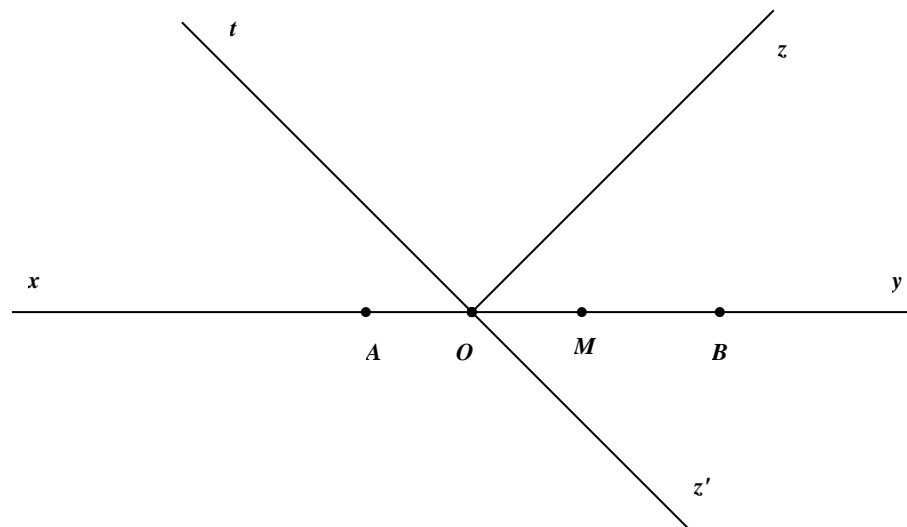
Bài 58: Cho góc bẹt xOy , trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 2\text{cm}$, trên tia Oy lấy hai điểm M và B sao cho $OM = 1\text{cm}$, $OB = 4\text{cm}$.

a) Chứng tỏ: điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

b) Từ O kẻ hai tia Ot, Oz sao cho $tOy = 130^\circ$, $zOy = 30^\circ$. Tính số đo tOz ?

Trích đề HSG Huyện Bá Thước năm 2018-2019

Lời giải



a) Ta có M là điểm nằm giữa O và B .

$$OM + MB = OB$$

$$MB = OB - OM = 4 - 1 = 3(\text{cm})$$

Do O nằm giữa hai điểm A và M suy ra:

$$OM + OA = MA = 2 + 1 = 3(\text{cm})$$

Mặt khác do M nằm giữa A và B , Vậy M là trung điểm của AB .

b) TH1: Tia Ot, Oz trên cùng một nửa mặt phẳng.

Do $yOt = 130^\circ$, $yOz = 30^\circ$ suy ra tia Oz nằm giữa hai tia Ot, Oy .

Ta có: $tOz = tOy - yOz = 130^\circ - 30^\circ = 100^\circ$.

TH2: Tia Ot và tia Oz không nằm cùng một phía với xy .

Suy ra tia Oy nằm giữa 2 tia Ot, Oz .

Ta có: $tOz = tOy + yOz = 130^\circ + 30^\circ = 160^\circ$.

Bài 59: Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng 2cm. Lấy điểm C thuộc đường thẳng AB sao cho $BC = 5$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng AC .

Trích đề HSG Huyện Trục Ninh năm 2017-2018

Lời giải

Trường hợp điểm C thuộc tia đối của tia BA .



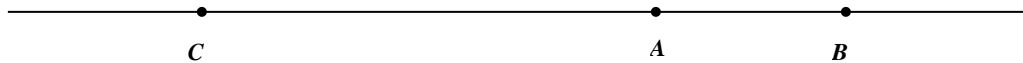
Điểm C thuộc tia đối của tia BA nên hai tia BA và BC đối nhau, suy ra điểm B nằm giữa hai điểm A và C .

Ta có:

$$AB + BC = AC$$

$$AC = 2\text{cm} + 5\text{cm} = 7\text{cm}.$$

Trường hợp điểm C thuộc tia BA



Trên tia BA , $BA < BC$ ($2\text{cm} < 5\text{cm}$) nên điểm A nằm giữa hai điểm B và C .

Ta có:

$$AB + AC = BC$$

$$AC = BC - AB = 5\text{cm} - 2\text{cm} = 3\text{cm}.$$

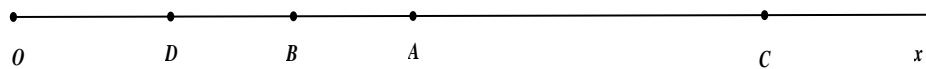
Bài 60: Trên tia Ox , cho 4 điểm A, B, C, D . Biết rằng A nằm giữa B và C ; B nằm giữa C và D ; $OA = 7$ cm; $OD = 3$ cm; $BC = 8$ cm và $AC = 3BD$.

a) Tính độ dài AC

b) Chứng tỏ rằng: Điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AD .

Trích đề HSG Huyện Nga Sơn năm 2017-2018

Lời giải



a) Đặt $BD = x$ (cm) suy ra $AC = 3x$ (cm).

Vì D nằm giữa O và A (Do $OD < OA$) nên: $OD + DA = OA$ suy ra $DA = 4$.

$$\text{Suy ra } DB + BA = 4 \text{ suy ra } x + BA = 4 \quad (1)$$

Vì A nằm giữa B và C nên: $BA + AC = BC$ hay $3x + BA = 8 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có: $(3x + BA) - (x + BA) = 8 - 4$ suy ra $2x = 4$ suy ra $x = 2$

Suy ra $AC = 3.2 = 6$ (cm)

b) Theo (1) ta có: $x + BA = 4$ mà $x = 2$ suy ra $BA = 2$.

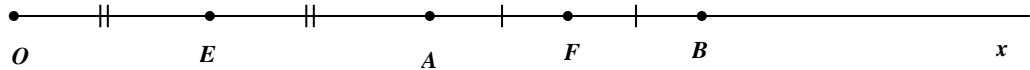
Mà $BD = x = 2$ suy ra $BD = BA (= 2)$ suy ra B là trung điểm của đoạn thẳng AD .

Bài 61:

- a) Trên tia Ox lấy 2 điểm A, B sao cho $OA = 6\text{cm}, OB = 10\text{cm}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của OA, AB . Tính độ dài đoạn thẳng EF .
- b) Vẽ tia Ox, Oy, Oz sao cho Oy nằm giữa hai tia Ox, Oz và $xOy = 50^\circ; xOz = 100^\circ$. Vẽ tia Oy' là tia đối của tia Oy . Tính số đo $y'Oz$.
- c) Cho 2018 điểm phân biệt trong đó có đúng 3 điểm thẳng hàng. Qua hai điểm ta kẻ được một đường thẳng. Tính số đường thẳng kẻ được.

Trích đề HSG Huyện Kinh Môn năm 2017-2018

a)



Vì điểm A nằm giữa hai điểm O và B suy ra $OA + AB = OB$.

Thay số: $6 + AB = 10$ suy ra $AB = 4\text{cm}$. Vậy $AB = 4\text{cm}$.

Vì E là trung điểm OA nên $EA = \frac{OA}{2}$, thay số $EA = 6 : 2 = 3\text{cm}$.

F là trung điểm của AB nên $AF = \frac{AB}{2}$.

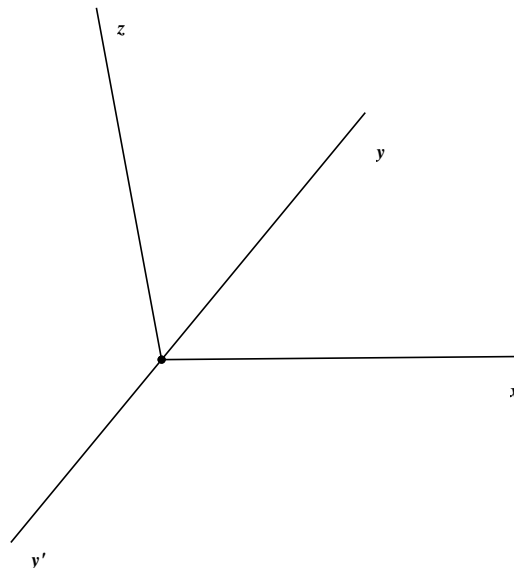
Thay số: $AF = 4 : 2 = 2\text{cm}$.

Do A nằm giữa O và B . Mà E là trung điểm của OA , F là trung điểm của AB nên điểm A nằm giữa hai điểm E và F .

Suy ra $EF = EA + AF = 3 + 2 = 5(\text{cm})$.

Vậy $EF = 5\text{cm}$.

b)



Tia Oy nằm giữa hai tia Ox và Oz suy ra $xOy + yOz = xOz$.

Thay số $50^\circ + yOz = 100^\circ$ suy ra $yOz = 50^\circ$.

Do tia Oy' là tia đối của tia Oy suy ra $y'Oz, yOz$ là hai góc kề bù.

Suy ra $y'Oz + yOz = 180^\circ$.

Thay số: $y'Oz + 50^\circ = 180^\circ$ suy ra $y'Oz = 130^\circ$.

Vậy $y'Oz = 130^\circ$.

c) Giả sử trong 2018 điểm không có ba điểm nào thẳng hàng

Từ 1 điểm ta nối với 2017 điểm còn lại ta được 2017 đường thẳng. Làm như vậy với 2018 điểm ta được $2018 \cdot 2017 = 4070306$ đường thẳng.

Vì mỗi đường thẳng được tính hai lần, do đó số đường thẳng kẻ được là: 2035153 đường thẳng.

Số đường thẳng đi qua 3 điểm không thẳng hàng là 3.

Số đường thẳng đi qua 3 điểm phân biệt thẳng hàng là 1.

Khi thay 3 điểm phân biệt không thẳng hàng thành 3 điểm phân biệt thẳng hàng thì số đường thẳng giảm đi là: $3 - 1 = 2$ (đường thẳng)

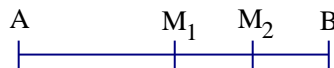
Do trong 2018 điểm phân biệt trên có đúng ba điểm thẳng hàng nên số đường thẳng thực tế kẻ được là: $2035153 - 2 = 2035151$ (đường thẳng)

Vậy ta kẻ được tất cả là 2035151 đường thẳng.

Bài 62: Cho đoạn thẳng $AB = 2^{2008}$ (cm). Gọi M_1 là trung điểm của đoạn thẳng AB ; M_2 là trung điểm của đoạn thẳng M_1B ; M_3 là trung điểm của đoạn thẳng M_2B ; ... ; M_{2008} là trung điểm của đoạn thẳng $M_{2007}B$. Tính độ dài đoạn thẳng $M_{2008}B$.

Trích đề HSG Huyện năm 2021-2022

Lời giải



M_1 là trung điểm của AB nên $M_1B = \frac{AB}{2} = \frac{2^{2008}}{2} = 2^{2007}$ (cm)

M_2 là trung điểm của M_1B nên $M_2B = \frac{M_1B}{2} = \frac{2^{2007}}{2} = 2^{2006}$ (cm)

Như vậy: $M_1B = \frac{2^{2008}}{2^1}$; $M_2B = \frac{2^{2008}}{2^2}$; $M_3B = \frac{2^{2008}}{2^3}$; ...

Do đó $M_{2007}B = \frac{2^{2008}}{2^{2007}} = 2$ (cm)

M_{2008} là trung điểm của $M_{2007}B$ nên $M_{2008}B = \frac{M_{2007}B}{2} = \frac{2}{2} = 1$ (cm)

Bài 63: Trên tia Ox lấy hai điểm A, B sao cho $OA = 3$ cm, $OB = 5$ cm.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AB .

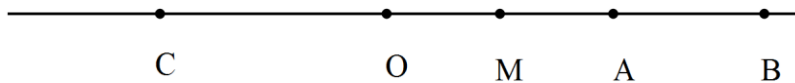
b) Trên tia đối của tia Ox lấy điểm C sao cho O là trung điểm của đoạn thẳng AC . Lấy điểm

M thuộc đoạn thẳng OA sao cho $OM = \frac{1}{2}OA$. Hỏi M có là trung điểm của đoạn thẳng BC

không? Vì sao?

Trích đề HSG Huyện năm 2020-2021

Lời giải



a) Ta có điểm A nằm giữa hai điểm B và O .

Do đó, ta có: $OA + AB = OB$ suy ra $AB = OB - OA$.

Mà $OA = 3\text{ cm}$; $OB = 5\text{ cm}$ nên: $AB = 5 - 3 = 2\text{ cm}$.

Vậy $AB = 2\text{ cm}$.

b) Vì điểm O là trung điểm của đoạn thẳng AC nên $OC = OA = 3\text{ cm}$.

Vì điểm M là trung điểm của đoạn thẳng OA nên $OM = MA = 3 : 2 = 1,5(\text{cm})$.

Vì điểm O nằm giữa hai điểm C ; M

Do đó ta có:

$$CO + OM = CM$$

$$3 + 1,5 = CM$$

$$CM = 4,5(\text{cm})$$

Trên tia Ox có $OM < OB$ ($1,5\text{ cm} < 5\text{ cm}$) nên điểm M nằm giữa hai điểm O và B .

Do đó: $OM + MB = OB$ suy ra $MB = OB - OM$.

Mà $OM = 1,5\text{ cm}$; $OB = 5\text{ cm}$ nên: $MB = 5 - 1,5 = 3,5\text{ cm}$.

Ta thấy $MB \neq MC$ ($3,5\text{ cm} \neq 4,5\text{ cm}$) nên điểm M không là trung điểm của đoạn thẳng BC .

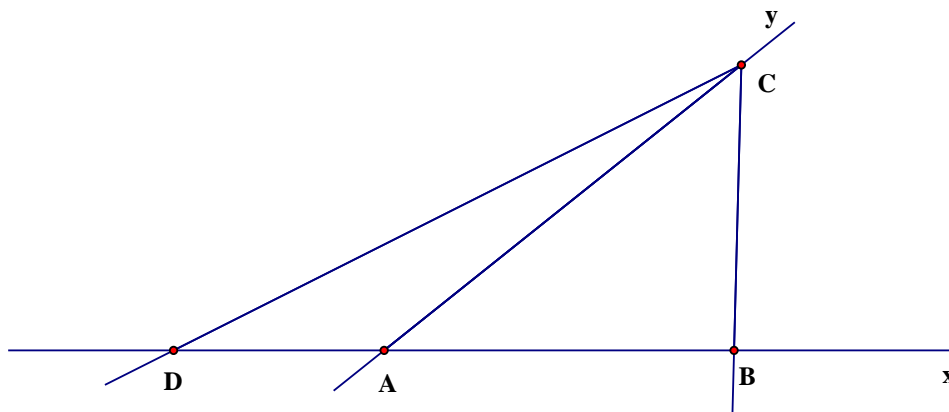
Bài 64: Cho xAy , trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = 5\text{ cm}$. Trên tia đối của tia Ax lấy điểm D sao cho $AD = 3\text{ cm}$, C là một điểm trên tia Ay .

a) Tính BD .

b) Biết $BCD = 85^\circ$, $BCA = 50^\circ$. Tính ACD ?

Trích đề HSG Huyện năm 2020-2021

Lời giải



a) Ta có điểm A nằm giữa hai điểm B và D .

Suy ra $BA + AD = BD$

Suy ra $BD = 5 + 3 = 8(\text{cm})$

Vậy $BD = 8\text{ cm}$

b) Vì tia CA nằm giữa hai tia CB và CD .

$$BCA + ACD = BCD$$

$$50^\circ + ACD = 85^\circ$$

$$ACD = 35^\circ$$

Vậy $ACD = 35^\circ$.

Bài 66:

1. Trên tia Ox lấy các điểm A và B sao cho $OA = 3\text{ cm}$, $OB = 7\text{ cm}$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng OA , K là trung điểm của đoạn thẳng AB .

a) Tính độ dài các đoạn AB và IK .

b) Gọi M là một điểm nằm ngoài đường thẳng AB , biết $OMB = 110^\circ$ và $OMA = \frac{2}{3}AMB$.

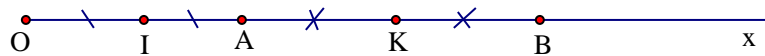
Tính số đo góc AMB .

2. Cho 30 điểm phân biệt trong đó có đúng 10 điểm thẳng hàng, cứ qua 2 điểm vẽ được một đường thẳng. Hỏi có tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Trích đề HSG Huyện năm 2020-2021

Lời giải

1.



a) Ta có: $AB = OB - OA = 7 - 3 = 4(\text{cm})$

$$\text{Ta có } IA = \frac{OA}{2}; AK = \frac{AB}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } IK = \frac{OA}{2} + \frac{AB}{2} = \frac{OB}{2} = \frac{7}{2} = 3,5(\text{cm})$$

b) Ta có: $AMB = OMB - OMA$

$$\text{Suy ra: } AMB = OMB - \frac{2}{3}AMB \text{ (Vì } OMA = \frac{2}{3}AMB)$$

$$\text{Suy ra: } AMB + \frac{2}{3}AMB = OMB$$

$$\text{Suy ra: } AMB = \frac{2}{5}.OMB = \frac{2}{5}.110^\circ = 44^\circ.$$

2. Qua 30 điểm phân biệt vẽ được số đường thẳng là: $30.29 = 870$ (đường thẳng)

Qua 10 điểm phân biệt ta vẽ được số đường thẳng là: $10.9 = 90$ (đường thẳng)

Mà ta có 10 điểm thẳng hàng nên số đường thẳng vẽ được là: $870 - 90 = 780$ (đường thẳng)

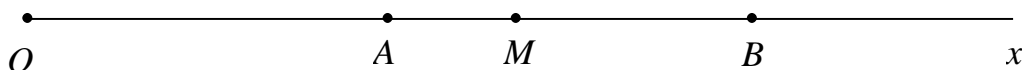
Bài 67: Trên tia Ox lấy hai điểm A và B sao cho $OA = a(\text{cm})$, $OB = b(\text{cm})$, $b > a > 0$

a) Tính độ dài đoạn thẳng AB với $a = 2, b = 5$.

b) Tìm vị trí của điểm M trên tia Ox sao cho $OM = \frac{1}{2}(a + b)$.

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021- 2022

Lời giải



a) Vì điểm A nằm giữa hai điểm O và B .

$$\text{Do đó } OA + AB = OB$$

$$\text{Thay số, ta có } 2 + AB = 5 \Rightarrow AB = 5 - 2 = 3 \text{ (cm)}$$

$$\text{b) Vì } OM = \frac{1}{2}(a+b)$$

$$\Rightarrow OM = \frac{a+b}{2} = \frac{2a+b-a}{2} = a + \frac{b-a}{2} = OA + \frac{OB-OA}{2} = OA + \frac{1}{2}AB$$

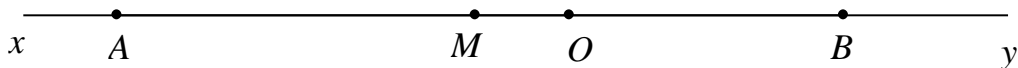
$$\text{Mặt khác, do } A \text{ nằm giữa } O \text{ và } M \text{ nên } OM = OA + AM \Rightarrow AM = \frac{1}{2}AB.$$

Mà M nằm giữa A và B nên M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Bài 68: Cho hai tia Ox và Oy đối nhau, trên tia Ox lấy hai điểm A và M sao cho $OA = 5 \text{ cm}$, $OM = 1 \text{ cm}$; trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OB = 3 \text{ cm}$. Chứng tỏ điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trích đề HSG huyện Bình Lục năm 2022-2023

Lời giải



Vì điểm M nằm giữa O và A , suy ra $OM + MA = OA$

$$AM = OAMO$$

$$\text{Hay } MA = 5 - 1 = 4 \text{ (cm).}$$

Vì điểm O nằm giữa hai điểm M và B . Khi đó: $OM + OB = MB$

$$\text{Hay } M = 1 + 3 = 4 \text{ (cm)}$$

Vì điểm M nằm giữa hai điểm A và B và $MA + MB = 4$

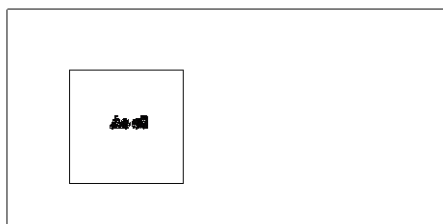
Nên M là trung điểm của đoạn thẳng AB

Bài 69: Gia đình bạn Bình mở rộng một cái ao hình vuông để được một cái ao hình chữ nhật có chiều dài gấp 2 lần chiều rộng. Sau khi mở rộng diện tích ao tăng thêm 600 m^2 và diện tích ao mới gấp 4 lần ao cũ. Hỏi phải dùng bao nhiêu chiếc cọc để đủ rào xung quanh ao mới. Biết rằng cọc nọ cách cọc kia 1 m

Trích đề HSG huyện Bình Lục năm 2022-2023

Lời giải

Vẽ hình đúng



PHIẾU BÀI TẬP SỐ 2

Bài 1: Cho 2010 đường thẳng trong đó bất kì hai đường thẳng nào cũng cắt nhau. Không có ba đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Bài 2: Cho k đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy (cùng đi qua 1 điểm), biết tổng số giao điểm là 820. Tìm k ?

Trích đề HSG huyện Yên Thế (Bắc Giang) năm 2015-2016

Bài 3: Cho n điểm ($n \geq 2$). Nối từng cặp hai điểm trong n điểm đó thành các đoạn thẳng.

- Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng nếu trong n điểm đó không có ba điểm nào thẳng hàng?
- Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng nếu trong n điểm đó có đúng ba điểm nào thẳng hàng?
- Tính n biết rằng có tất cả 1770 đoạn thẳng.

Bài 4: Tìm đa giác có số đường chéo bằng số cạnh của nó.

Bài 5: Cho trước một số đường thẳng, trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và có 15 đường thẳng đồng quy, biết số giao điểm nhiều nhất có thể vẽ được là 1121 giao điểm. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng cho trước?

Bài 6: Cho 2014 điểm trong đó chỉ có 5 điểm thẳng hàng với nhau, các điểm còn lại không có ba điểm nào thẳng hàng với nhau. Hỏi khi nối tất cả các điểm đó với nhau thì được tổng số bao nhiêu đoạn thẳng?

Bài 7: Cho 2006 đường thẳng trong đó bất kỳ 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau. Không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 8: Trên đoạn thẳng AB lấy 2006 điểm khác nhau đặt tên theo thứ tự từ A đến B là $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2004}$. Từ điểm M không nằm trên đoạn thẳng AB ta nối M với các điểm $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2004}; B$. Tính số tam giác tạo thành.

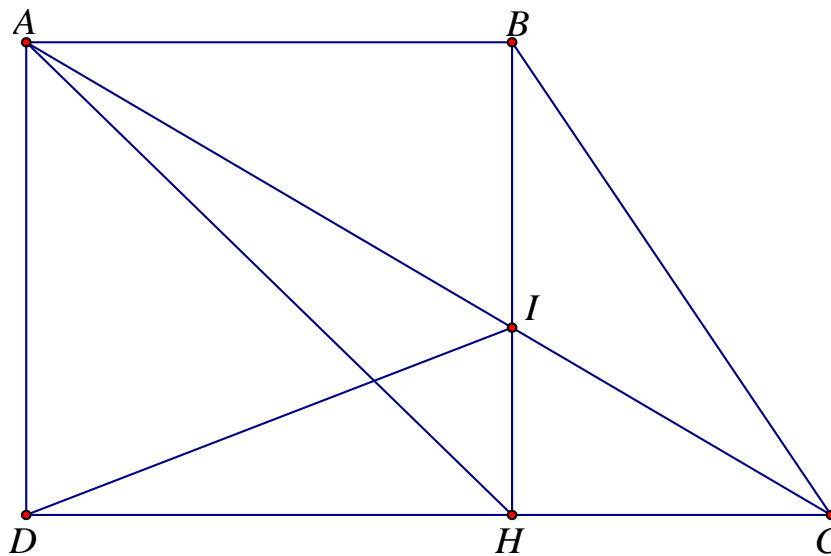
Trích đề HSG cấp trường năm 2019-2020

Bài 9. Cho 101 đường thẳng trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Tính số giao điểm của chúng.

Bài 11: Cho đoạn thẳng $AB = 10\text{cm}$. Trên tia AB lấy điểm C sao cho $AC = 4\text{cm}$, trên tia BA lấy điểm D sao cho $BD = 4\text{cm}$. Tính độ dài đoạn CD ?

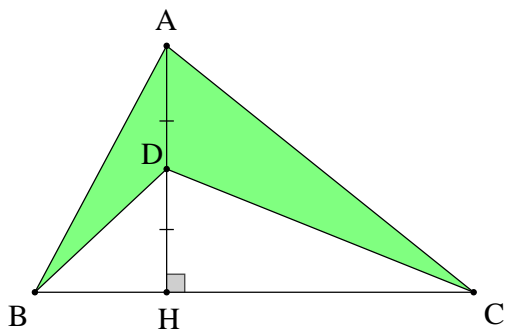
Bài 12: Hình thang vuông $ABCD$ có góc A và D vuông. Đường chéo AC cắt đường cao BH tại điểm I .

- Hãy so sánh diện tích tam giác IDC với diện tích tam giác BHC .
- Cho $AD = 9\text{cm}$, $AB = 10\text{cm}$, $DC = 12\text{cm}$. Hãy tính diện tích ΔBIC .

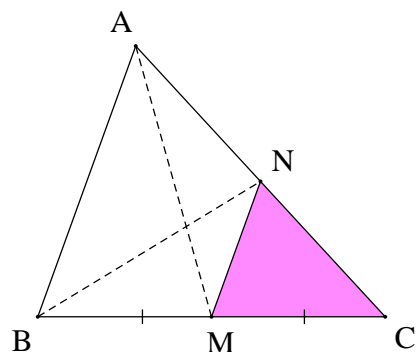


Trích đề HSG trường THCS Quế Phú (Quế Sơn) năm 2018 - 2019

Bài 13: Cho tam giác ABC có đường cao AH . D là trung điểm của AH . Tính diện tích phần tô màu như hình biết diện tích tam giác DBC bằng 6cm^2 .



Bài 14: Tam giác ABC có diện tích là 144cm^2 . Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = MC$, từ M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại N . Tính diện tích tam giác MNC .



Bài 15: Trên tia Ox , xác định các điểm A và B sao cho $OA = a(cm)$, $OB = b(cm)$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AB , biết $b < a$.

b) Xác định điểm M trên tia Ox sao cho $OM = \frac{1}{2}(a + b)$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2017-2018

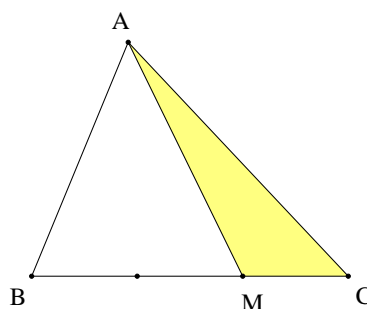
Bài 16:

a) Cho 6 tia chung gốc. Có bao nhiêu góc trong hình vẽ? Vì sao?

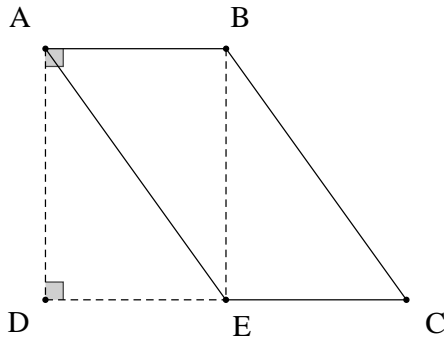
b) Vậy với n tia chung gốc. Có bao nhiêu góc trong hình vẽ?

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Bài 17: Cho tam giác ABC , trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 2CM$. Biết diện tích tam giác ABM là $18cm^2$. Tính diện tích tam giác ACM .

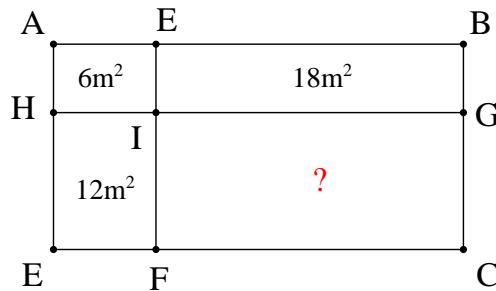


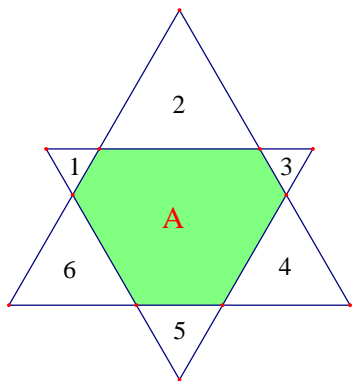
Bài 18: Một tấm tôn hình bình hành có diện tích 14 dm^2 , sau khi người ta hàn thêm vào một miếng tôn hình tam giác vuông có cạnh đáy bằng với cạnh đáy của hình bình hành thì được một hình thang vuông. Tính diện tích của miếng tôn lúc này.



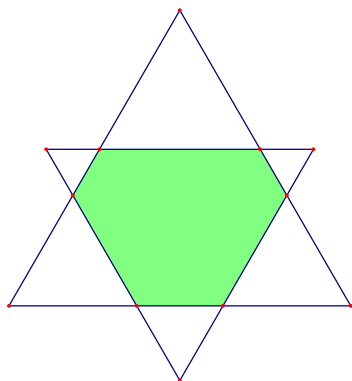
Bài 19: Một miếng bìa hình bình hành có chu vi bằng 2 m . Nếu bớt chiều dài đi 20 cm thì ta được miếng bìa hình thoi có diện tích 6 dm^2 . Tìm diện tích miếng bìa hình bình hành đó.

Bài 20: Một HCN được chia thành 4 hình chữ nhật nhỏ hơn có diện tích như hình vẽ. Hãy tính diện tích của hình chữ nhật.

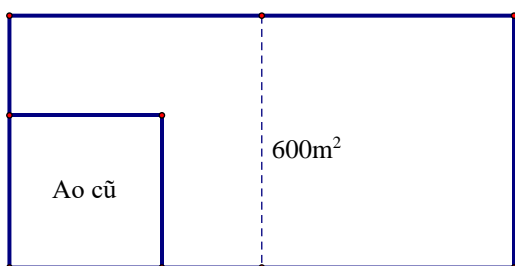




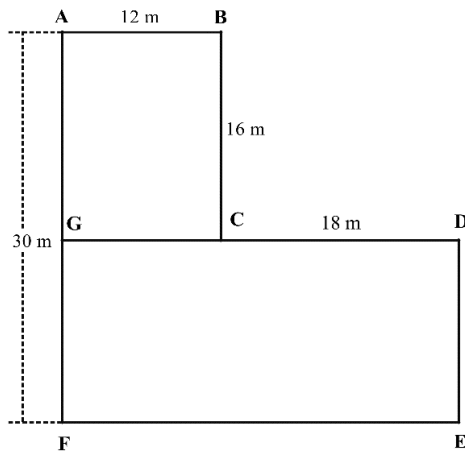
Bài 21: Cho hai tam giác đều được xếp chồng lên nhau như hình vẽ. Chu vi của hai tam giác này là 744 cm và 930 cm. Tính chu vi phần tô đậm.



Bài 22: Người ta mở rộng một cái ao hình vuông để được một cái ao hình chữ nhật có chiều dài gấp hai lần chiều rộng. Sau khi mở rộng, diện tích ao tăng thêm 600 m^2 và diện tích ao mới gấp 4 lần ao cũ. Tính chu vi của ao mới.



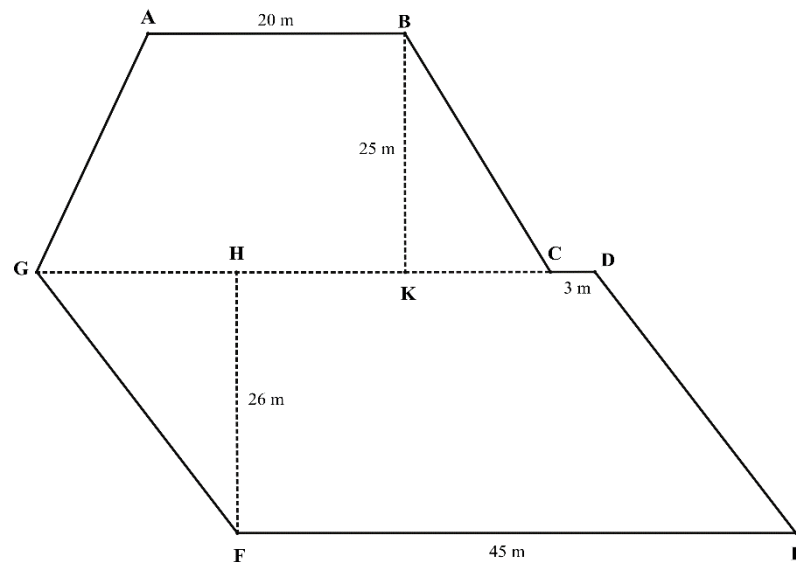
Bài 23: Khu vườn nhà anh Sơn có dạng như hình vẽ.



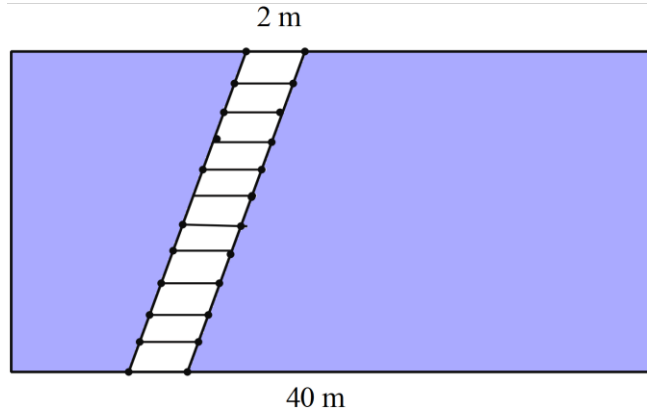
a) Anh Sơn muốn dùng lưới B40 để rào cả khu vườn thì cần dùng tất cả bao nhiêu mét lưới (theo chiều dài) và anh phải trả bao nhiêu tiền để rào khu vườn, biết giá trọn gói (gồm tiền lưới và tiền công) cho mỗi mét lưới (theo chiều dài) là 150.000 đồng.

b) Trên phần đất $ABCG$, anh Sơn trồng rau xà lách, còn trên mảnh đất $GDEF$ anh trồng rau cải xanh. Hỏi sau khi anh Sơn thu hoạch hết toàn bộ rau xà lách và rau cải xanh trong khu vườn thì anh thu được bao nhiêu tiền? Biết rằng cứ 1m^2 thì anh thu hoạch được 2kg rau xà lách và 3kg rau cải xanh. Giá mỗi kilôgam rau xà lách là 5000 đồng, giá mỗi kilôgam rau cải xanh là 4500 đồng.

Bài 24: Bác Hai có một thửa ruộng có dạng như hình bên (độ dài đoạn thẳng CD bằng 3 mét). Bác Hai trồng lúa trên toàn bộ thửa ruộng đó. Nếu trên mỗi mét vuông bác Hai thu được 0,8kg thóc thì số tiền bác Hai thu được là bao nhiêu? Biết mỗi tạ thóc có giá 700.000 đồng.

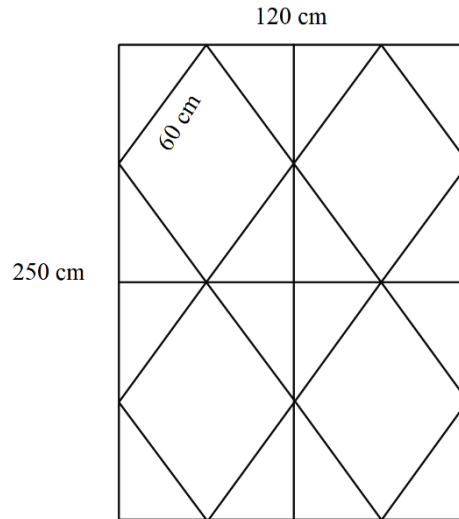


Bài 25: Nhà bác Sơn có một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng 40 mét và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Trong khu vườn, bác Sơn làm một lối đi để tiện chăm sóc và tưới cho cây với kích thước được cho như hình vẽ. Bác dùng lưới B40 rào xung quanh khu vườn. Chi phí để làm cho mỗi mét hàng rào là 150.000 đồng và cho mỗi mét vuông làm lối đi là 350.000 đồng (bao gồm cả tiền công thợ và tiền vật liệu). Hỏi bác Sơn phải trả bao nhiêu tiền để làm hàng rào và làm lối đi cho khu vườn?

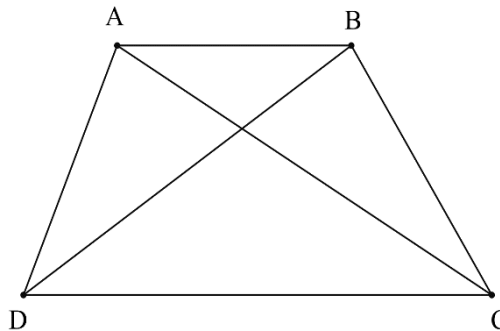


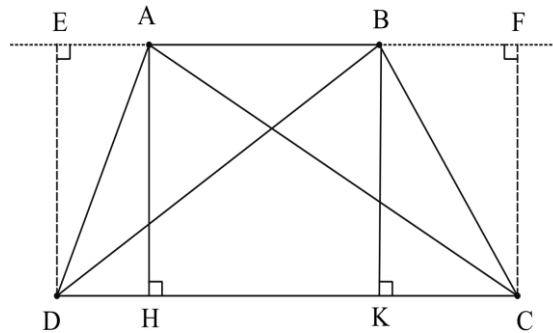
Bài 26: Một khu đất hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng. Nếu giảm chiều dài đi 3m và tăng chiều rộng thêm 3m thì diện tích được tăng thêm 75m^2 . Tính các cạnh của khu đất.

Bài 27: Anh Tâm làm 4 khung cửa sắt có kích thước và hình dạng như hình bên. Khung sắt bên ngoài là hình chữ nhật có chiều dài 250 cm, chiều rộng là 120 cm. Phía trong là các hình thoi có độ dài cạnh 60 cm. Hỏi anh Tâm cần dùng bao nhiêu mét dây thép để làm được bốn khung cửa như vậy?

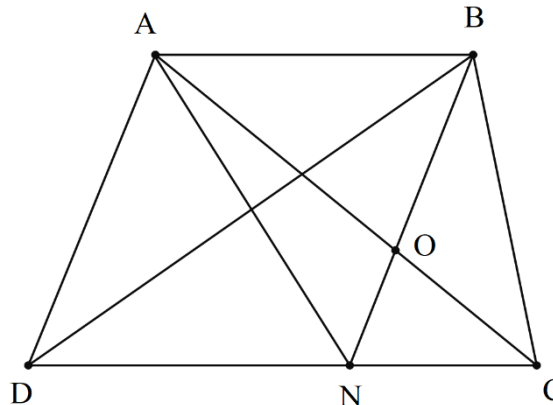


Bài 28: Cho hình thang $ABCD$ (hình vẽ) có $S_{ABD} = 10\text{ cm}^2$; $S_{CBD} = 20\text{ cm}^2$. Tính diện tích các tam giác ABC và ACD .



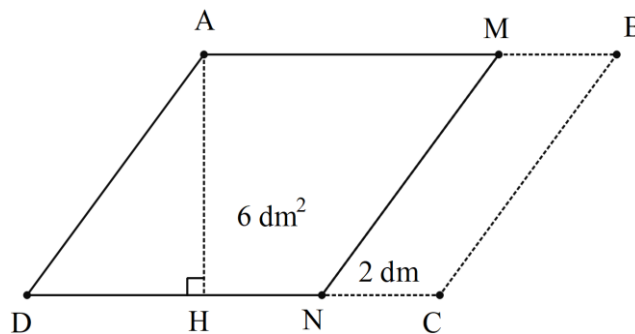


Bài 29: Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$ và điểm N nằm trên cạnh CD (như hình vẽ). Biết diện tích tam giác BND bằng 18 cm^2 , diện tích tam giác BOC bằng 7 cm^2 . Tính diện tích tứ giác $AOND$.



Bài 30: Một miếng bìa hình bình hành có chu vi là 2 m . Nếu bớt một cạnh đi 20 cm thì ta được miếng bìa hình thoi có diện tích 6 dm^2 . Tìm diện tích miếng bìa hình bình hành đó.

Lời giải:



Bài 31: Cô Trâm trồng hoa trên một thửa ruộng hình thang vuông có đáy lớn bằng 160 m và chiều cao bằng 30 m . Nếu mở rộng thửa ruộng thành mảnh đất hình chữ nhật mà vẫn giữ nguyên đáy lớn thì diện tích thửa ruộng tăng thêm 600 m^2 . Hỏi cô Trâm bán được bao nhiêu tiền hoa trên thửa ruộng đó biết rằng trung bình mỗi hec-ta hoa bán được $140.000.000$ đồng.

Bài 32: Một hình chữ nhật có chu vi 54 cm . Nếu tăng chiều rộng thêm $2,5 \text{ cm}$ và giảm chiều dài $2,5 \text{ cm}$ thì được một hình vuông. Tính diện tích hình chữ nhật đó.

Bài 33: Một hình chữ nhật nếu tăng chiều rộng để bằng chiều dài của nó thì diện tích tăng thêm 20 cm^2 , khi giảm chiều dài cho bằng chiều rộng thì diện tích giảm đi 16 cm^2 . Tính diện tích hình chữ nhật ban đầu.

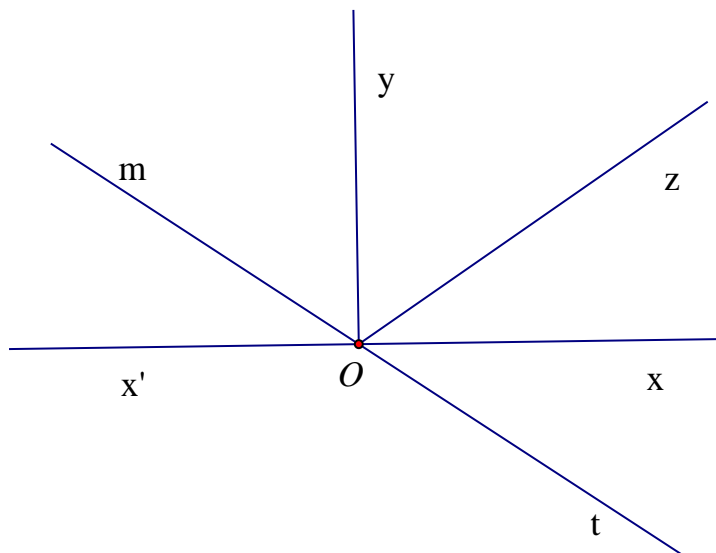
Bài 34. Cho đoạn thẳng $AB = 8\text{cm}$. Điểm C thuộc đường thẳng AB sao cho $BC = 4\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng AC .

Bài 35. Cho tia Oz nằm trong góc vuông xOy . Vẽ tia Ot sao cho Ox là tia phân giác của tOz . Vẽ tia Om sao cho tia Oy là phân giác của zOm

a) Chứng minh rằng tia Om và tia Ot là hai tia đối nhau

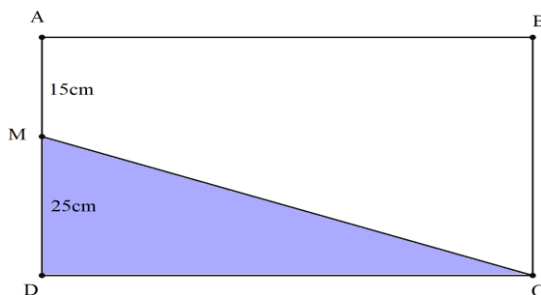
b) Gọi Ox' là tia đối của tia Ox , biết rằng $x'Om = 30^\circ$. Tính tOz

c) Vẽ thêm 2014 tia phân biệt gốc O (không trùng với các tia Ox, Oz, Oy, Om, Ox' và Ot). Hỏi trong hình vẽ có tất cả bao nhiêu góc?



Bài 36. Trên tia Ox cho 4 điểm A, B, C, D . Biết rằng A nằm giữa B và C ; B nằm giữa C và D ; $OA = 5\text{cm}$, $OD = 2\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$ và độ dài AC gấp đôi độ dài BD . Tìm độ dài đoạn BD, AC

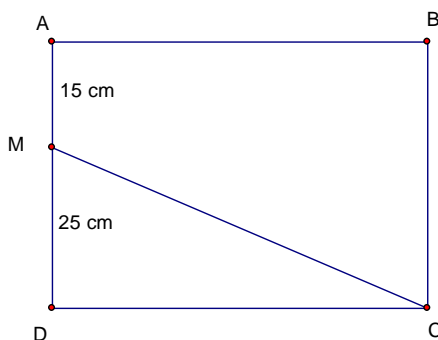
Bài 37. Cho hình vẽ dưới đây, biết diện tích hình chữ nhật là 2400cm^2 . Tính diện tích hình tam giác MCD



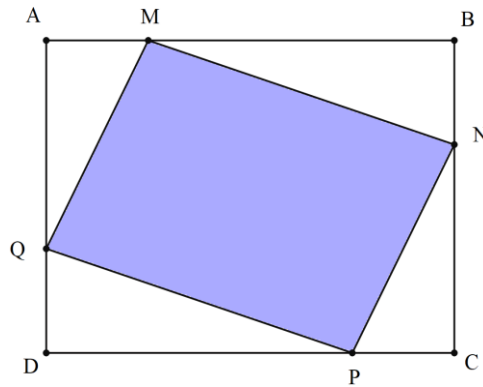
Bài 38. Cho hình vẽ sau đây biết diện tích hình tam giác MCD là 1500cm^2 .

a) Tìm diện tích hình chữ nhật $ABCD$?

b) Tìm diện tích tứ giác $AMCB$?

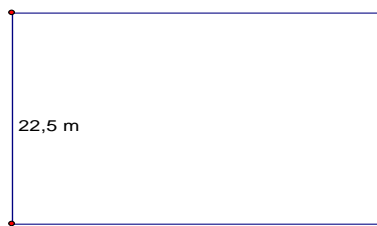


Bài 39. Cho hình vẽ với các số đo như sau



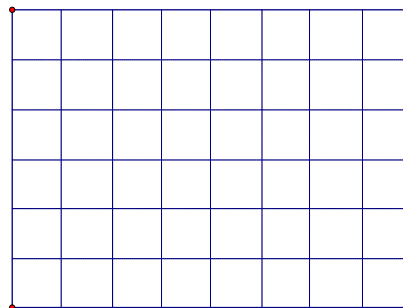
Tính diện tích hình bình hành $MNPQ$ vẽ trong hình chữ nhật $ABCD$. Biết $AB = 28$ cm; $CB = 18$ cm;
 $AM = CP = \frac{1}{4} AB$; $BN = DQ = \frac{1}{3} BC$;

Bài 40. Một thửa ruộng hình chữ nhật có chiều rộng 22,5 m và có diện tích bằng diện tích một cái sân hình vuông cạnh 27 m. Tính chu vi thửa ruộng đó?



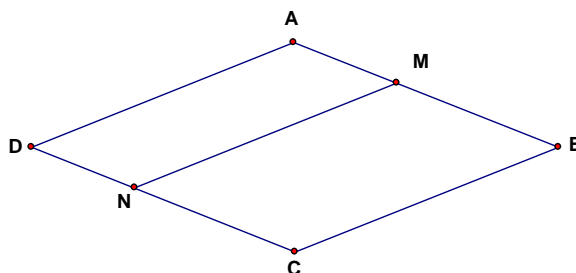
Bài 41. Một nền nhà hình chữ nhật có nửa chu vi là 22,5 m, chiều rộng 4,5 m. Người ta lát nền nhà bằng loại gạch men hình vuông có cạnh 3 dm.

- Tính diện tích nền nhà.
- Tìm số viên gạch cần dùng để lát nền nhà đó (Coi diện tích khe giữa các viên gạch không đáng kể)



Bài 42. Cho hình thoi $ABCD$ có diện tích là 216 cm^2 và chu vi là 60 cm. Đoạn thẳng MN chia hình thoi thành hai hình bình hành $AMND$ và $MBCN$ (như hình vẽ), biết độ dài cạnh MB hơn độ dài cạnh AM là 5 cm. Tính:

- Chu vi hình bình hành $MBCN$.
- Diện tích hình bình hành $AMND$.



Bài 43: Cho 1000 điểm phân biệt, trong đó có đúng 3 điểm thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng tạo bởi hai trong 1000 điểm đó?

Bài 44:

1. Trên tia Oy , lấy điểm M và H sao cho $OM = 5\text{cm}$, $OH = 10\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng HM .
Điểm M có là trung điểm của đoạn thẳng OH không? Vì sao?

2. Cho đoạn thẳng AB . Điểm C thuộc tia đối của tia BA . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và AC . Chứng minh rằng: $CM = \frac{CA + CB}{2}$ và $MN = \frac{BC}{2}$.

Bài 45: Nhà Hoàng cách trường học 3400m . Hằng ngày trên đường đến trường Hoàng phải đi qua UBND xã sau đó đến một siêu thị cách trường 800m .



Nhà Hoàng

UBND xã

Siêu thị

Trường

Hỏi quãng đường từ UBND xã đến siêu thị dài bao nhiêu m? Biết rằng UBND xã nằm chính giữa nhà Hoàng và trường học.

Trích đề HSG huyện Mỹ Lộc năm 2021 - 2022

Bài 46: Người ta trồng cây ở hai bên đường của một đoạn đường dài 1500m . Biết khoảng cách giữa các cây đều nhau là 2m và ở cả 2 đầu của đoạn đường đều có trồng cây. Tính số cây phải trồng ở cả 2 bên của đoạn đường đó

Trích đề HSG huyện Trục Ninh, năm 2021 - 2022

Bài 47: Cho 20 điểm phân biệt trong đó có a điểm thẳng hàng cứ qua 2 điểm ta vẽ được 1 đường thẳng. Tìm a biết số đường thẳng tạo thành là 421 đường thẳng.

Bài 48: Trên đoạn thẳng $AB = 3\text{cm}$ lấy điểm M . Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $AM = AN$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng BN khi $BM = 1\text{cm}$.

b. Hãy xác định vị trí của M (trên đoạn thẳng AB) để BN có độ dài lớn nhất.

Bài 49: Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Biết rằng tổng số giao điểm mà n đường thẳng đó cắt nhau tạo ra bằng 465. Tìm n .

Bài 50: Cho tam giác ABC có $BC = 5,5\text{cm}$. Điểm M thuộc tia đối của tia CB sao cho $CM = 3\text{cm}$

a. Tính độ dài BM

b. Biết $\angle BAM = 80^\circ, \angle BAC = 60^\circ$. Tính $\angle CAM$

c. Tính độ dài BK thuộc đoạn BM biết $CK = 1\text{cm}$

Bài 51: Cho góc $xBy = 55^\circ$. Trên các tia Bx, By lần lượt lấy các điểm A, C ($A \neq B, B \neq C$). Trên đoạn thẳng AC lấy điểm D sao cho $ABD = 30^\circ$

- Tính độ dài AC , biết $AD = 4\text{cm}, CD = 3\text{cm}$
- Tính số đo góc DBC
- Từ B vẽ tia Bz sao cho $DBz = 90^\circ$. Tính số đo ABz

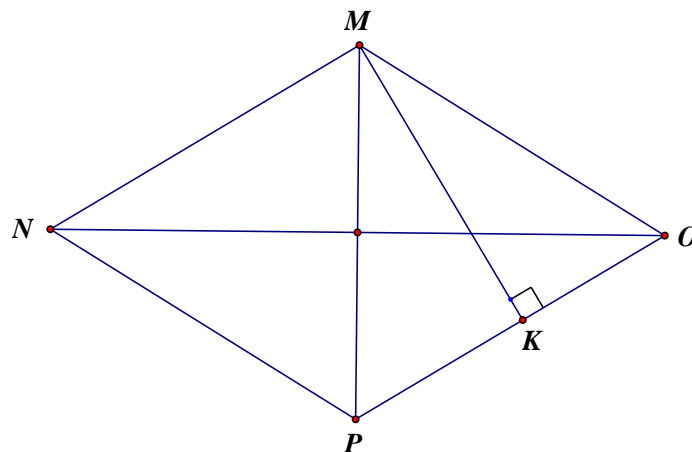
Bài 52:

- Cho đoạn thẳng $AB = 7\text{cm}$. Trên tia AB lấy điểm I sao cho $AI = 4\text{cm}$. Trên tia BA lấy điểm K sao cho $BK = 2\text{cm}$. Hãy chứng tỏ rằng I nằm giữa A và K . Tính IK
- Trên tia Ox cho 4 điểm A, B, C, D . biết rằng A nằm giữa B và C , B nằm giữa C và D . $OA = 5\text{cm}, OD = 2\text{cm}, BC = 4\text{cm}$ và độ dài AC gấp đôi độ dài BD . Tính độ dài các đoạn BD, AC .

Bài 53: Cho 20 điểm, trong đó có a điểm thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm, ta vẽ một đường thẳng. Tìm a , biết vẽ được tất cả 170 đường thẳng.

Bài 54: Cho đoạn thẳng $AB = 7\text{cm}$. Gọi C là điểm nằm giữa A và B , $AC = 3\text{cm}$. M là trung điểm của BC . Tính BM .

Bài 55: Cho hình vẽ sau:



Hình thoi $MNPQ$ có độ dài cạnh là 30cm . Tổng độ dài hai đường chéo là 84cm , hiệu độ dài hai đường chéo là 12cm . Tính độ dài chiều cao NK .

Bài 56: Cho tam giác ABC . Lấy các điểm D, E, F theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CA sao cho $AD = \frac{1}{3}AB, BE = \frac{1}{3}BC, CF = \frac{1}{3}CA$. Các đoạn thẳng AE, BF, CD cắt nhau tạo thành một tam giác. Chứng minh rằng diện tích tam giác này bằng $\frac{1}{7}$ diện tích tam giác ABC .

Bài 57:

- Cho 40 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được bao nhiêu đường thẳng?

- b) Cho 40 điểm trong đó có đúng 10 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được bao nhiêu đường thẳng?
 c) Cho n điểm ($n \in \mathbb{N}$). Trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, cứ qua hai điểm ta được 1 đường thẳng. Biết rằng có tất cả 105 đường thẳng. Tìm n ?

Trích đề HSG Huyện Gia Lai năm 2018-2019

Bài 58: Cho góc bẹt xOy , trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 2\text{cm}$, trên tia Oy lấy hai điểm M và B sao cho $OM = 1\text{cm}$, $OB = 4\text{cm}$.

a) Chứng tỏ: Điểm M nằm giữa hai điểm O và B ; điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

b) Từ O kẻ hai tia Ot, Oz sao cho $tOy = 130^\circ$, $zOy = 30^\circ$. Tính số đo tOz ?

Trích đề HSG Huyện Bá Thước năm 2018-2019

Bài 59: Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng 2 cm. Lấy điểm C thuộc đường thẳng AB sao cho $BC = 5\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng AC .

Trích đề HSG Huyện Trục Ninh năm 2017-2018

Bài 60: Trên tia Ox , cho 4 điểm A, B, C, D . Biết rằng A nằm giữa B và C ; B nằm giữa C và D ; $OA = 7\text{cm}$; $OD = 3\text{cm}$; $BC = 8\text{cm}$ và $AC = 3BD$.

a) Tính độ dài AC

b) Chứng tỏ rằng: Điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AD .

Trích đề HSG Huyện Nga Sơn năm 2017-2018

Bài 61:

a) Trên tia Ox lấy 2 điểm A, B sao cho $OA = 6\text{cm}$, $OB = 10\text{cm}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của OA, AB . Tính độ dài đoạn thẳng EF .

b) Vẽ Ox, Oy, Oz sao cho tia Oy nằm giữa Ox, Oz và $xOy = 50^\circ$; $xOz = 100^\circ$. Vẽ tia Oy' là tia đối của tia Oy . Tính số đo $y'Oz$.

c) Cho 2018 điểm phân biệt trong đó có đúng 3 điểm thẳng hàng. Qua hai điểm ta kẻ được một đường thẳng. Tính số đường thẳng kẻ được.

Trích đề HSG Huyện Kinh Môn năm 2017-2018

Bài 62: Cho đoạn thẳng $AB = 2^{2008}$ (cm). Gọi M_1 là trung điểm của đoạn thẳng AB ; M_2 là trung điểm của đoạn thẳng M_1B ; M_3 là trung điểm của đoạn thẳng M_2B ; ... ; M_{2008} là trung điểm của đoạn thẳng $M_{2007}B$. Tính độ dài đoạn thẳng $M_{2008}B$.

Trích đề HSG Huyện năm 2021-2022

Bài 63: Trên tia Ox lấy hai điểm A, B sao cho $OA = 3\text{cm}$, $OB = 5\text{cm}$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AB .

b) Trên tia đối của tia Ox lấy điểm C sao cho O là trung điểm của đoạn thẳng AC . Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng OA sao cho $OM = \frac{1}{2}OA$. Hỏi M có là trung điểm của đoạn thẳng BC không? Vì sao?

Trích đề HSG Huyện năm 2020-2021

Bài 64: Cho xAy , trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = 5\text{cm}$. Trên tia đối của tia Ax lấy điểm D sao cho $AD = 3\text{cm}$, C là một điểm trên tia Ay .

a) Tính BD .

b) Biết $BCD = 85^\circ$, $BCA = 50^\circ$. Tính ACD ?

Trích đề HSG Huyện năm 2020-2021

Bài 65:

1. Trên tia Ox lấy các điểm A và B sao cho $OA = 3\text{ cm}$, $OB = 7\text{ cm}$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng OA , K là trung điểm của đoạn thẳng AB .

a) Tính độ dài các đoạn AB và IK .

b) Gọi M là một điểm nằm ngoài đường thẳng AB , biết $OMB = 110^\circ$ và $OMA = \frac{2}{3}AMB$.

Tính số đo góc AMB .

2. Cho 30 điểm phân biệt trong đó có đúng 10 điểm thẳng hàng, cứ qua 2 điểm vẽ được một đường thẳng. Hỏi có tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Trích đề HSG Huyện năm 2020-2021

Bài 66: Trên tia Ox lấy hai điểm A và B sao cho $OA = a$ (cm), $OB = b$ (cm), $b > a > 0$

a) Tính độ dài đoạn thẳng AB với $a = 2, b = 5$.

b) Tìm vị trí của điểm M trên tia Ox sao cho $OM = \frac{1}{2}(a + b)$.

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021- 2022

Bài 67: Cho hai tia Ox và Oy đối nhau, trên tia Ox lấy hai điểm A và M sao cho

$OA = 5\text{ cm}$, $OM = 1\text{ cm}$; trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OB = 3\text{ cm}$. Chứng tỏ điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trích đề HSG huyện Bình Lục năm 2022-2023

Bài 68: Gia đình bạn Bình mở rộng một cái ao hình vuông để được một cái ao hình chữ nhật có chiều dài gấp 2 lần chiều rộng. Sau khi mở rộng diện tích ao tăng thêm 600 m^2 và diện tích ao mới gấp 4 lần ao cũ. Hỏi phải dùng bao nhiêu chiếc cọc để đủ rào xung quanh ao mới. Biết rằng cọc nọ cách cọc kia 1 m

Trích đề HSG huyện Bình Lục năm 2022-2023

CHỦ ĐỀ: HÌNH HỌC**A. PHẦN NỘI DUNG****I. Số điểm, số đoạn thẳng, số đường thẳng****Dạng toán: Đếm số điểm, số đường thẳng, số đoạn thẳng**

Bài 1: Cho 100 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm vẽ một đường thẳng. Số đường thẳng vẽ được là:

- A. 200. B. 4950. C. 5680. D. 9900.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: B. 4950.

Bài 2: Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Biết rằng tổng số giao điểm mà n đường thẳng đó cắt nhau tạo ra bằng 465. Tìm n .

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Lời giải

Có n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy, nên mỗi đường thẳng sẽ cắt $n-1$ đường thẳng còn lại tạo ra $n-1$ giao điểm phân biệt.

Do đó n đường thẳng thì có $n(n-1)$ giao điểm.

Nhưng mỗi giao điểm đã được tính 2 lần nên thực tế chỉ có $\frac{n(n-1)}{2}$ giao điểm.

Theo bài ra ta có: $\frac{n(n-1)}{2} = 465$

Suy ra: $n(n-1) = 930 = 31.30$ do đó $n = 31$

Vậy $n = 31$.

Bài 3: Có 25 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Nếu thay 25 điểm bởi n điểm ($n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$) thì số đường thẳng là bao nhiêu?

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

Lời giải

Lấy 1 điểm nối với 24 điểm còn lại ta được 24 đường thẳng.

Vì có 25 điểm nên có 25.24 đường thẳng nhưng mỗi đường thẳng được tính 2 lần.

Vậy số đường thẳng vẽ được là $\frac{25.24}{2} = 300$ (đường thẳng)

Nếu thay 25 điểm bởi n điểm ($n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$) thì số đường thẳng là $\frac{n(n-1)}{2}$.

Bài 4: Cho 30 điểm trong đó có đúng 5 điểm thẳng hàng (ngoài ra không còn 3 điểm nào thẳng hàng). Qua 2 điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi có tất cả bao nhiêu đường thẳng.

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Lời giải

Giả sử có 30 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng thì số đường thẳng là: $\frac{30 \cdot 29}{2} = 435$ (đường thẳng).

Với 5 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng thì vẽ được $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ (đường thẳng).

Nhưng 5 điểm này thẳng hàng nên chỉ vẽ được 1 đường thẳng.

Do đó số đường thẳng giảm đi là: $10 - 1 = 9$ (đường thẳng).

Vậy vẽ được $435 - 9 = 426$ (đường thẳng).

Bài 5: Cho trước n điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Nếu bớt đi 1 điểm thì số đường thẳng vẽ được qua các cặp điểm giảm đi 10 đường thẳng. Tìm n .

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021 - 2022

Lời giải

Từ 1 điểm bất kì nối với $(n-1)$ điểm còn lại được n đường thẳng.

suy ra n điểm nối với $(n-1)$ điểm còn lại được $n(n-1)$ đường thẳng.

Mà mỗi đường thẳng được lặp lại 2 lần

Nên số đường thẳng tạo thành từ n điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng là: $\frac{n(n-1)}{2}$ đường thẳng.

Tương tự: Số đường thẳng tạo thành từ $n-1$ điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng là: $\frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$ đường thẳng.

Vì số đường thẳng giảm đi 10 đường nên ta có:

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2} = 10$$

$$n(n-1) - (n-1)(n-2) = 20$$

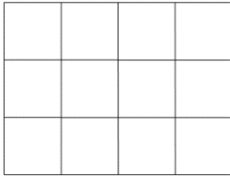
$$n^2 - n - (n^2 - n - 2n + 2) = 20$$

$$n^2 - n - n^2 + n + 2n - 2 = 20$$

$$2n - 2 = 20$$

$$n = 11$$

Vậy $n = 11$.



Bài 6: Cho hình chữ nhật có chiều dài 4 cm, chiều rộng 3 cm. Chia các cạnh của hình chữ nhật thành những đoạn thẳng bằng nhau có độ dài mỗi đoạn là 1 cm. Nối các điểm chia như hình vẽ bên. Hỏi trong hình vẽ có tất cả bao nhiêu hình vuông.

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Lời giải

Quan sát hình vẽ ta thấy:

Số các hình vuông có độ dài cạnh bằng 1 cm là: $4.3 = 12$ hình vuông.

Số các hình vuông có độ dài cạnh bằng 2 cm là: $3.2 = 6$ hình vuông.

Số các hình vuông có độ dài cạnh bằng 3 cm là: $2.1 = 2$ hình vuông.

Tổng số hình vuông là: $12 + 6 + 2 = 20$ hình vuông.

Bài 7: Cho n điểm phân biệt, trong đó có đúng 10 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm ta vẽ được một đường thẳng. Có tất cả 256 đường thẳng. Tính số điểm n .

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Lời giải

Với n điểm phân biệt, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng thì số các đường thẳng kẻ được là $\frac{n(n-1)}{2}$.

Với 10 điểm phân biệt, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng thì số các đường thẳng kẻ được là $\frac{10.9}{2} = 45$.

Do 7 điểm thẳng hàng nên qua 7 điểm chỉ vẽ được 1 đường thẳng.

Vậy qua n điểm phân biệt, trong đó có đúng 10 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có 3 điểm nào thẳng hàng ta vẽ được số đường thẳng là: $\frac{n(n-1)}{2} - 45 + 1$.

Do vẽ được 256 đường thẳng ta có $\frac{n(n-1)}{2} - 44 = 256$

$\frac{n(n-1)}{2} = 300$ suy ra $n(n-1) = 600 = 25.24$

Vậy $n = 25$

Bài 8. a) Cho 40 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được bao nhiêu đường thẳng ?

b) Cho 40 điểm trong đó có đúng 10 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được bao nhiêu đường thẳng.

c) Cho n điểm ($n \in \square$). Trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, cứ qua hai điểm ta được 1 đường thẳng. Biết rằng có tất cả 105 đường thẳng. Tìm n ?

Trích đề HSG Trần Phú Gia Lai năm 2018-2019

Lời giải

a) Kể từ 1 điểm bất kỳ với các điểm còn lại được : 39 đường thẳng

Làm như vậy với 40 điểm ta được $39.40 = 1560$ (đường thẳng)

Nhưng mỗi đường thẳng được tính hai lần

Do vậy số đường thẳng thực sự là : $1560 : 2 = 780$ (đường thẳng)

b) Nếu 40 điểm không có ba điểm nào thẳng hàng thì sẽ vẽ được 780 đường thẳng.

*Với 10 điểm, không có ba điểm nào thẳng hàng thì vẽ được:

$10.9 : 2 = 45$ (đường thẳng)

Số đường thẳng cần tìm là : $780 - 44 = 736$ (đường thẳng)

c) Ta có:

$$n.(n-1):2=105$$

$$n(n-1)=210$$

$$n(n-1)=15.14$$

Bài 9: Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Biết rằng tổng số giao điểm mà n đường thẳng đó cắt nhau tạo ra bằng 465. Tìm n .

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Lời giải

Có n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy, nên mỗi đường thẳng sẽ cắt $n-1$ đường thẳng còn lại tạo ra $n-1$ giao điểm phân biệt.

Do đó n đường thẳng thì có $n(n-1)$ giao điểm.

Nhưng mỗi giao điểm đã được tính 2 lần nên thực tế chỉ có $\frac{n(n-1)}{2}$ giao điểm.

Theo bài ra ta có: $\frac{n(n-1)}{2} = 465$

$$n(n-1) = 930 = 31.30$$

$$n = 31$$

Vậy $n = 31$

Bài 10: Cho 2010 đường thẳng trong đó bất kỳ 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau. Không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Lời giải

Mỗi đường thẳng cắt 2009 đường thẳng còn lại tạo nên 2009 giao điểm

Mà có 2010 đường thẳng nên có: 2009.2010 giao điểm

Nhưng mỗi giao điểm được tính 2 lần

Do đó số giao điểm thực tế là: $(2009.2010):2 = 2019045$ (giao điểm)

Vậy có 2019045 giao điểm.

Bài 11: Cho 30 điểm trong đó có đúng 5 điểm thẳng hàng, ngoài ra không còn có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ một đường thẳng. Hỏi có tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021-2022

Lời giải

Giả sử không có 5 điểm thẳng hàng thì vẽ được: $\frac{30.29}{2} = 435$ (đường thẳng)

Có 5 điểm thẳng hàng nên số đường thẳng giảm đi là: $\frac{5.4}{2} - 1 = 9$ (đường thẳng)

Vậy số đường thẳng vẽ được là: $435 - 9 = 426$ (đường thẳng).

Bài 12: Cho 20 điểm phân biệt, trong đó có n điểm thẳng hàng. Cứ qua hai điểm vẽ được một đường thẳng. Hãy tìm n , biết rằng vẽ được tổng cộng 170 đường thẳng.

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021 -2022

Lời giải

Giả sử 20 điểm phân biệt, không có bất kì ba điểm nào thẳng hàng

Chọn ra một điểm, kẻ các đường thẳng từ điểm này tới $20-1$ đường thẳng còn lại thì được tất cả $20-1$ đường thẳng.

Làm tương tự với các đường thẳng còn lại, ta được tất cả $20(20-1)$ đường thẳng.

Nhưng mỗi đường thẳng được tính hai lần nên số đường thẳng vẽ được là:

$$\frac{20 \cdot (20-1)}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190 \text{ đường thẳng.}$$

Nếu trong n điểm, không có bất kì ba điểm nào thẳng hàng. Với cách làm tương tự như trên thì số đường thẳng vẽ được là $\frac{n(n-1)}{2}$ đường thẳng.

Nhưng theo bài toán thì có n điểm thẳng hàng nên số đường thẳng bị giảm đi là $\frac{n(n-1)}{2} - 1$ đường thẳng.

Do đó với 20 điểm mà có n điểm thẳng hàng thì vẽ được số đường thẳng là

$$190 - \left(\frac{n(n-1)}{2} - 1 \right) \text{ đường thẳng.}$$

Theo bài toán ta có: $190 - \left(\frac{n(n-1)}{2} - 1 \right) = 170$

$$190 - \frac{n(n-1)}{2} + 1 = 170$$

$$191 - \frac{n(n-1)}{2} = 170$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 21$$

$$n(n-1) = 42$$

$$n(n-1) = 7 \cdot 6$$

$$n = 7$$

Vậy $n = 7$.

Bài 13: Cho n điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Biết rằng có tất cả 105 đường thẳng. Tính n

Trích đề HSG huyện Ngọc Lặc năm 2018-2019

Lời giải

Tính được số đường thẳng: $\frac{n(n-1)}{2} = 105$

$$n(n-1) = 210 = 15.14$$

$$n = 15$$

Bài 14: Cho 20 điểm phân biệt trong đó có đúng 7 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi từ 20 điểm đó vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Trích đề HSG huyện Hoài Nhơn năm 2015-2016

Lời giải

Nếu trong 20 điểm không có ba điểm nào thẳng hàng thì vẽ được $\frac{20 \cdot (20-1)}{2} = 190$. (Đường thẳng).

Trong 7 điểm không có ba điểm nào thẳng hàng thì tạo thành $\frac{7 \cdot (7-1)}{2} = 21$ (Đường thẳng).

Vì 7 điểm thẳng hàng tạo thành 1 đường thẳng nên số đường thẳng giảm $21 - 1 = 20$ (Đường thẳng).
Vậy có $190 - 20 = 170$ (Đường thẳng).

Bài 15: a) Cho 40 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được bao nhiêu đường thẳng?

b) Cho 40 điểm trong đó có đúng 10 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được bao nhiêu đường thẳng.

c) Cho n điểm ($n \in \mathbb{N}$). Trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, cứ qua hai điểm ta được 1 đường thẳng. Biết rằng có tất cả 105 đường thẳng. Tìm n ?

Trích đề HSG cấp trường Trần Phú năm 2018-2019

Lời giải

a) Kể từ 1 điểm bất kỳ với các điểm còn lại được: 39 đường thẳng

Làm như vậy với 40 điểm ta được $39 \cdot 40 = 1560$ (đường thẳng)

Nhưng mỗi đường thẳng được tính hai lần

Do vậy số đường thẳng thực sự là : $1560 : 2 = 780$ (đường thẳng)

b) Nếu 40 điểm không có ba điểm nào thẳng hàng thì sẽ vẽ được 780 đường thẳng.

*Với 10 điểm, không có ba điểm nào thẳng hàng thì vẽ được: $10 \cdot 9 : 2 = 45$ (đường thẳng)

Số đường thẳng cần tìm là : $780 - 44 = 736$ (đường thẳng)

c) Ta có: $n \cdot (n-1) : 2 = 105$

$$n(n-1) = 210$$

$$n(n-1) = 15.14$$

$$n = 15$$

Vậy $n = 15$

Bài 16: Cho 2018 điểm phân biệt trong đó có đúng 3 điểm thẳng hàng. Qua hai điểm ta kẻ được một đường thẳng. Tính số đường thẳng kẻ được.

Trích đề chọn HSG Nga Sơn năm 2017-2018

Lời giải

Giả sử trong 2018 điểm không có ba điểm nào thẳng hàng

Từ 1 điểm ta nối với 2017 điểm còn lại ta được 2017 đường thẳng. Làm như vậy với 2018 điểm ta được $2018 \cdot 2017 = 4070306$ (đường thẳng)

Vì mỗi đường thẳng được tính hai lần, do đó số đường thẳng kẻ được là :

$$4070306 : 2 = 2035153 \text{ (đường thẳng)}$$

Số đường thẳng đi qua 3 điểm không thẳng hàng là 3; Số đường thẳng đi qua 3 điểm phân biệt thẳng hàng là 1; Khi thay 3 điểm phân biệt không thẳng hàng thành 3 điểm phân biệt thẳng hàng thì số đường thẳng giảm đi là : $3 - 1 = 2$

Do trong 2018 điểm phân biệt trên có đúng ba điểm thẳng hàng nên số đường thẳng thực tế kẻ được là: $2035153 - 2 = 2035151$

Vậy ta kẻ được tất cả là 2035151 đường thẳng.

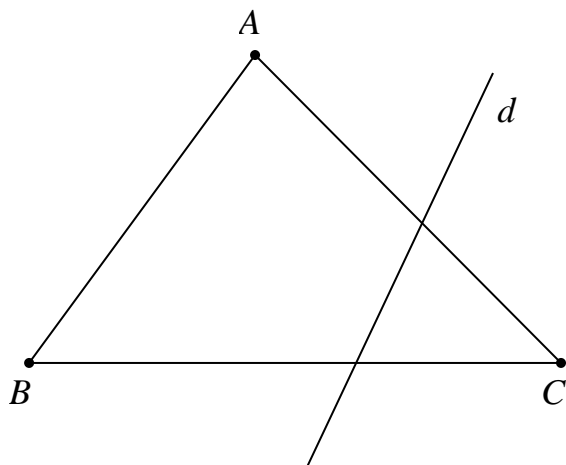
Bài 17: Cho tam giác ABC và một đường thẳng d không đi qua bất kỳ đỉnh nào của tam giác và cắt cạnh BC của tam giác. Hãy chứng tỏ rằng đường thẳng d cắt một và chỉ một trong hai cạnh AB và AC của tam giác ABC

Trích đề KSCL HSG Ba Vì năm 2017-2018

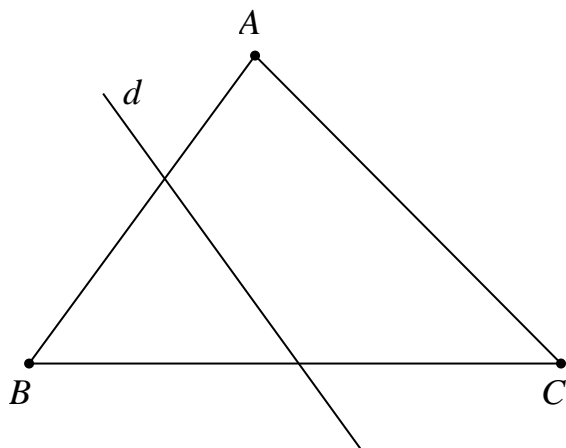
Lời giải

Đường thẳng d cắt cạnh BC và $B, C \notin d$

TH1: Nếu A và B nằm cùng phía với d thì d cắt cạnh AC mà không cắt cạnh AB



Th2: Nếu A và C nằm cùng phía với d thì d cắt cạnh AB mà không cắt cạnh AC



*** Tính số góc, số tam giác được tạo ra**

Bài 18: Trên đoạn thẳng AB lấy 2006 điểm khác nhau đặt tên theo thứ tự từ A đến B là $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2004}$. Từ điểm M không nằm trên đoạn thẳng AB ta nối M với các điểm $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2004}; B$. Tính số tam giác tạo thành.

Lời giải

Trên đoạn thẳng AB có các điểm $A; A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2004}; B$ do đó, tổng số điểm trên AB là 2006 điểm suy ra có 2006 đoạn thẳng nối từ M đến các điểm đó.

Mỗi đoạn thẳng (ví dụ MA) có thể kết hợp với 2005 đoạn thẳng còn lại và các đoạn thẳng tương ứng trên AB để tạo thành 2005 tam giác.

Do đó 2006 đoạn thẳng sẽ tạo thành $2005 \cdot 2006 = 4022030$ tam giác (nhưng lưu ý là MA kết hợp với MA_1 để được 1 tam giác thì MA_1 cũng kết hợp với MA được tam giác và hai tam giác này chỉ là 1)

Do đó số tam giác thực có là: $4022030 : 2 = 2011015$

Bài 19: Cho 10 đường thẳng đồng quy tại O . Hỏi có bao nhiêu góc ở đỉnh O được tạo thành (không kể góc bẹt) ?

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015 -2016

Lời giải

10 đường thẳng đồng quy tại O

Do đó có 20 tia gốc O .

Chọn ra một tia, tia đó tạo với mỗi tia trong 19 tia còn lại thành 1 góc.

Làm như thế với 20 tia ta có $20 \cdot 19 = 380$ (góc), trong đó mỗi góc đã được tính hai lần.

Do đó số góc tạo thành là: $380 : 2 = 190$ (góc).

Số góc tạo thành khác góc bẹt là: $190 - 10 = 180$ (góc).

Bài 20: Cho 200 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm vẽ một đường thẳng. Số đường thẳng vẽ được là bao nhiêu?

A. 1990

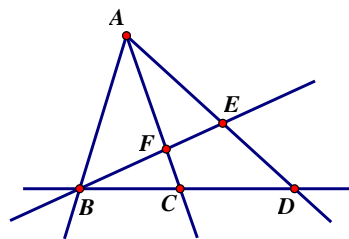
B. 19900

C. 39800

D. 40000

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 21: Trên hình vẽ sau có bao nhiêu bộ ba điểm thẳng hàng?



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 22: Cho 20 điểm phân biệt trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có thể kẻ được bao nhiêu đoạn thẳng?

A. 190

B. 180

C. 380

D. 200

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 23: Vẽ đường thẳng d không đi qua O . Trên đường thẳng d lấy 2015 điểm phân biệt. Tính số các góc có đỉnh O và cạnh đi qua 2 điểm bất kỳ trên đường thẳng d .

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Lời giải

Cứ 2 điểm trên đường thẳng d nối với điểm O được 1 góc đỉnh O

\Rightarrow có bao nhiêu đoạn thẳng trên đường thẳng d thì có bấy nhiêu góc đỉnh O

\Rightarrow Số góc đỉnh O đi qua 2 điểm bất kỳ trên đường thẳng d là:

$$\frac{2015 \cdot 2014}{2} = 4058210 \text{ (góc)}. \text{ Vậy có } 4058210 \text{ góc.}$$

Bài 24: Cho 6 đường thẳng đôi một cắt nhau. Hỏi 6 đường thẳng đó có thể cắt nhau ít nhất tại bao nhiêu điểm, nhiều nhất tại bao nhiêu điểm.

Trích đề HSG Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020

Lời giải

6 đường thẳng đề cho có thể cắt nhau ít nhất tại 1 điểm (nếu 6 đường thẳng đó đồng quy)

Nếu không có 3 đường thẳng nào đồng quy thì mỗi đường thẳng sẽ cắt 5 đường thẳng còn lại tại thành 5 giao điểm.

Có 6 đường thẳng nên có $6 \cdot 5 = 30$ giao điểm

Nhưng mỗi giao điểm lại được tính 2 lần, nên chỉ có $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ giao điểm.

Bài 25: Trên cùng một nửa mặt chứa tia Oy , có bờ chứa tia Ox . Cần vẽ thêm bao nhiêu tia phân biệt góc O và không trùng với các tia đã vẽ trong hình để tạo thành 630 góc đỉnh O (chỉ tính các góc thuộc nửa mặt phẳng nói trên).

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Lời giải

Với n tia chung gốc O vẽ được: $\frac{n(n-1)}{2}$ góc đỉnh O

ta phải có: $n(n-1) = 1260 = 36 \cdot 35 \Rightarrow n = 36$

Vậy phải vẽ thêm: $36 - 5 = 31$ tia góc O như yêu cầu đề bài.

Bài 26: Cho 2010 đường thẳng trong đó bất kỳ 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau. Không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018 - 2019

Lời giải

Mỗi đường thẳng cắt 2009 đường thẳng còn lại tạo nên 2009 giao điểm

Mà có 2010 đường thẳng \Rightarrow có: $2009 \cdot 2010$ giao điểm

Nhưng mỗi giao điểm được tính 2 lần \Rightarrow Số giao điểm thực tế là:

$$(2009 \cdot 2010) : 2 = 2019045 \text{ (giao điểm)}$$

Bài 27: Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Biết rằng tổng số giao điểm mà n đường thẳng đó cắt nhau tạo ra bằng 465. Tìm n .

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Lời giải

Có n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy, nên mỗi đường thẳng sẽ cắt $n-1$ đường thẳng còn lại tạo ra $n-1$ giao điểm phân biệt.

Do đó n đường thẳng thì có $n(n-1)$ giao điểm.

Nhưng mỗi giao điểm đã được tính 2 lần nên thực tế chỉ có $\frac{n(n-1)}{2}$ giao điểm.

Theo bài ra ta có: $\frac{n(n-1)}{2} = 465$

$$\Rightarrow n(n-1) = 930 = 31.30 \Rightarrow n = 31$$

Vậy $n = 31$

Bài 28: Cho 100 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm vẽ một đường thẳng. Số đường thẳng vẽ được là:

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Lời giải

Lấy một điểm bất kì trong 100 điểm. Qua điểm đó và 99 điểm còn lại, ta vẽ được 99 đường thẳng.

Với 100 điểm ta có:

$$99 \cdot 100 = 9900 \text{ đường thẳng}$$

Mà mỗi đường thẳng được tính hai lần

$$\Rightarrow \text{Số đường thẳng có tất cả là: } 9900 : 2 = 4950 \text{ đường thẳng}$$

Bài 29: Cho góc xOy và góc yOz là hai góc kề bù. Góc yOz bằng 30°

- Vẽ tia Om nằm trong góc xOy sao cho $xOm = 75^\circ$; tia On nằm trong góc yOz sao cho $yOn = 15^\circ$
- Hình vẽ trên có mấy góc?
- Nếu có n tia chung gốc thì sẽ tạo nên bao nhiêu góc ?

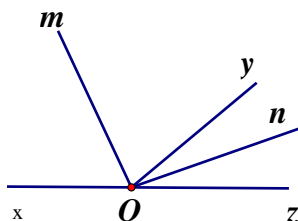
Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Lời giải

- Vẽ được góc xOy và góc yOz kề bù và $yOz = 30^\circ$

Vẽ được tia Om thỏa mãn điều kiện

Vẽ được tia On thỏa mãn điều kiện



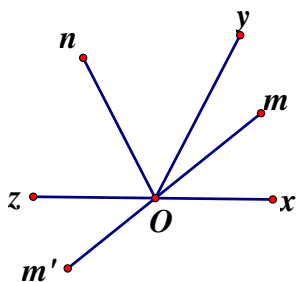
b) Hình vẽ trên có 10 góc

c) Lập luận : từ hình vẽ trên ta có mỗi tia với 1 tia còn lại tạo thành 1 góc. Xét 1 tia, tia đó cùng với 4 tia còn lại tạo thành 4 góc. Làm như vậy với 5 tia ta được 5.4 góc. Nhưng mỗi góc đã được tính 2 lần, do đó có tất cả là

$$\frac{5.4}{2} = 10 \text{ góc}$$

Từ đó suy ra tổng quát: với n tia chung gốc có $n \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)$ (góc)

Bài 30: Cho hình vẽ:



Cần vẽ thêm bao nhiêu tia phân biệt chung gốc O và không trùng với các tia đã vẽ trong hình để tạo thành tất cả 300 góc.

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Lời giải

Giả sử cần vẽ thêm n tia phân biệt chung gốc O và không trùng với các tia đã vẽ trong hình để tạo thành tất cả 300 góc. Khi đó tổng số tia gốc O trên hình là $n+6$

Cứ 1 tia gốc O tạo với $n+5$ tia gốc O còn lại thành $n+5$ góc, mà có $n+6$ tia như vậy nên tạo thành: $(n+5)(n+6)$ góc

Vì tia này tạo với tia kia và ngược lại nên mỗi góc được tính 2 lần, suy ra số góc tạo thành:

$\frac{(n+5)(n+6)}{2}$ góc. Vì có 300 góc nên ta có:

$$\frac{(n+5)(n+6)}{2} = 300 \Rightarrow (n+5)(n+6) = 600 = 24.25 \Rightarrow n = 19$$

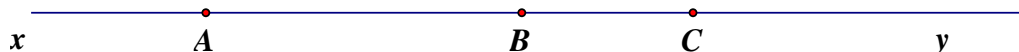
Bài 31: Cho đường thẳng xy , trên đó lấy ba điểm phân biệt A, B, C .

a) Biết $AB = 5\text{cm}$, $AC = 3\text{cm}$. Tính BC .

b) Trên xy lấy 4 điểm phân biệt (không trùng với A, B, C) và điểm O không nằm trên đường thẳng xy . Hỏi có thể vẽ được tất cả bao nhiêu tam giác có đỉnh là ba trong các điểm đã có trên hình vẽ.

Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 - 2022

Lời giải



a) Vì $A \in xy, B \in xy, C \in xy$ và $AC < AB$ nên điểm C nằm giữa 2 điểm A và B

$$\Rightarrow AC + CB = AB$$

$$\Rightarrow BC = AB - AC$$

$$\Rightarrow BC = 5 - 3$$

Vậy $BC = 2\text{cm}$

b) Ta có 7 điểm phân biệt trên đường thẳng xy và điểm 1 điểm không nằm trên xy

Chọn 1 điểm, nối điểm đó lần lượt với 7 điểm còn lại được 7 đoạn thẳng.

Làm như vậy với 8 điểm ta được $7 \cdot 8 = 56$ (đoạn thẳng).

Như vậy mỗi đoạn thẳng được tính 2 lần. Do đó chỉ có $56 : 2 = 28$ (đoạn thẳng)

Vì qua 3 điểm không thẳng hàng ta vẽ được một tam giác nên cứ nối 2 điểm đầu của một đoạn thẳng nằm trên đường thẳng xy với điểm O nằm ngoài xy ta được 1 tam giác.

Vậy số tam giác vẽ được bằng số đoạn thẳng nằm trên đường thẳng xy là 28 tam giác.

Bài 32: Lấy thêm 19 điểm phân biệt trên đường thẳng xy (các điểm này không trùng với điểm O) và một điểm A nằm ngoài đường thẳng xy . Hỏi vẽ được bao nhiêu tam giác nhận 3 trong các điểm trên làm đỉnh.

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2018 - 2019

Lời giải

Xét 20 điểm trên đường thẳng xy

Chọn một điểm nối điểm đó với lần lượt 19 điểm còn lại ta vẽ được 19 đoạn thẳng. Làm như vậy với 20 điểm ta được 19.20 đường thẳng.

Như vậy mỗi đường thẳng đã được tính 2 lần, do đó chỉ có $19.20 : 2$ đoạn thẳng

Vì qua ba điểm không thẳng hàng ta vẽ được một tam giác

Nên cứ nối hai điểm đầu của một đoạn thẳng nằm trên đường thẳng xy với điểm A nằm ngoài đường thẳng xy ta sẽ vẽ được một tam giác.

Vậy số tam giác vẽ được bằng số đoạn thẳng nằm trên đường thẳng xy .

Như vậy ta có 190 tam giác.

Bài 33: Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Biết rằng tổng số giao điểm mà n đường thẳng đó cắt nhau tạo ra bằng 465. Tìm n .

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Lời giải

Có n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy, nên mỗi đường thẳng sẽ cắt $n-1$ đường thẳng còn lại tạo ra $n-1$ giao điểm phân biệt.

Do đó n đường thẳng thì có $n(n-1)$ giao điểm.

Nhưng mỗi giao điểm đã được tính 2 lần nên thực tế chỉ có $\frac{n(n-1)}{2}$ giao điểm.

Theo bài ra ta có: $\frac{n(n-1)}{2} = 465$ suy ra suy ra $n(n-1) = 930 = 31.30$ suy ra $n = 31$.

Vậy $n = 31$.

Bài 34: Cho 2010 đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau. Không có ba đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng?

Trích đề HSG huyệnnăm 20...-20...

Lời giải

Mỗi đường thẳng cắt 2009 đường thẳng còn lại tạo nên 2009 giao điểm.

Mà có 2010 đường thẳng suy ra có 2009.2010 giao điểm.

Nhưng mỗi giao điểm được tính hai lần \Rightarrow Số giao điểm thực tế là:

$(2009.2010) : 2 = 2019045$ (giao điểm)

Vậy số giao điểm là 2019045.

Bài 35: Cho n đường thẳng, trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy. Biết rằng số giao điểm của các đường thẳng đó là 903. Tính n ?

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2021-2022

Lời giải

Từ n đường thẳng không có ba đường thẳng nào đồng quy ta có số giao điểm là $\frac{n(n-1)}{2}$.

Khi đó $\frac{n(n-1)}{2} = 903$ suy ra $n(n-1) = 1806 = 43.42$ suy ra $n = 43$.

Bài 36: Cho 30 điểm trong đó có đúng 5 điểm thẳng hàng (ngoài ra không còn 3 điểm nào thẳng hàng). Qua 2 điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi có tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2021-2022

Lời giải

Giả sử có 30 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng thì số đường thẳng là:

$30.29 : 2 = 435$ (đường thẳng)

Với 5 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng thì vẽ được $5.4 : 2 = 10$ (đường thẳng)

Nhưng 5 điểm này thẳng hàng nên chỉ vẽ được 1 đường thẳng.

Do đó số đường thẳng giảm đi là: $10-1=9$ (đường thẳng)

Vậy vẽ được $435-9=426$ (đường thẳng)

Bài 37: Cho 25 điểm trong đó có đúng 8 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Hỏi vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Trích đề HSG huyện Sóc Sơn năm 2021-2022

Lời giải

Nếu 25 điểm đã cho không có ba điểm nào thẳng hàng thì số đường thẳng vẽ được $25.24 : 2 = 300$ (đường thẳng).

Với 8 điểm, không có điểm nào thẳng hàng vẽ được: $8.7 : 2 = 28$ (đường thẳng)

Còn nếu 8 điểm này thẳng hàng thì chỉ vẽ được 1 đường thẳng.

Do vậy số đường thẳng bị giảm đi là: $28 - 1 = 27$ (đường thẳng)

Số đường thẳng cần tìm là: $300 - 27 = 273$ (đường thẳng)

Bài 38: Cho 100 điểm (trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng). Nối từng cặp hai điểm trong 100 điểm đó thành các đoạn thẳng. Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng?

Trích đề HSG huyện Tiên Du năm 2021-2022

Lời giải

Kẻ từ 1 điểm bất kỳ đến 99 điểm còn lại ta được 99 (đoạn thẳng). Ta làm như vậy với tất cả 100 điểm nên được 100.99 (đoạn thẳng).

Nhưng theo cách đó mỗi đoạn thẳng được tính 2 lần. Do đó số đoạn thẳng thực vẽ được là:

$$\frac{100.99}{2} = 4950 \text{ (đoạn thẳng)}$$

Vậy có tất cả 4950 đoạn thẳng.

Bài 39: Cho 25 điểm trong đó có đúng 8 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Hỏi vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Lời giải

Nếu 25 điểm đã cho không có ba điểm nào thẳng hàng thì số đường thẳng vẽ được $25.24 : 2 = 300$ đường thẳng .

Với 8 điểm, không có điểm nào thẳng hàng vẽ được: $8.7 : 2 = 28$ (đường thẳng)

Còn nếu 8 điểm này thẳng hàng thì chỉ vẽ được 1 đường thẳng.

Do vậy số đường thẳng bị giảm đi là: $28 - 1 = 27$ (đường thẳng)

Số đường thẳng cần tìm là: $300 - 27 = 273$ (đường thẳng)

Bài 40: Cho $n(n > 2, n \in \mathbb{N})$ điểm phân biệt trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Tính n biết vẽ được tất cả 300 đường thẳng.

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Lời giải

Chọn 1 điểm bất kì trong n điểm đó, qua điểm này và $(n-1)$ điểm còn lại ta kẻ được $(n-1)$ đường thẳng.

Cứ làm như vậy với n điểm thì số đường thẳng tạo thành là: $(n-1).n$ (đường thẳng).

Nhưng như vậy mỗi đường thẳng sẽ được tính 2 lần.

Do đó chỉ có số đường thẳng tạo thành là: $\frac{(n-1).n}{2}$ (đường thẳng)

Theo bài ta có tất cả 300 đường thẳng nên:

$$\frac{(n-1).n}{2} = 300$$

$$(n-1).n = 600$$

$$(n-1).n = 24.25$$

Do n là số tự nhiên nên $n = 25$.

Vậy $n = 25$.

Bài 41: Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Biết rằng tổng số giao điểm mà n đường thẳng đó cắt nhau tạo ra bằng 465. Tìm n .

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Lời giải

Có n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy, nên mỗi đường thẳng sẽ cắt $n-1$ đường thẳng còn lại tạo ra $n-1$ giao điểm phân biệt.

Do đó n đường thẳng thì có $n(n-1)$ giao điểm.

Nhưng mỗi giao điểm đã được tính 2 lần nên thực tế chỉ có $\frac{n(n-1)}{2}$ giao điểm.

Theo bài ra ta có: $\frac{n(n-1)}{2} = 465$

$$\Rightarrow n(n-1) = 930 = 31.30 \Rightarrow n = 31$$

Vậy $n = 31$

Bài 42: Cho 50 điểm phân biệt sao cho có đúng 3 điểm thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm phân biệt ta kẻ được 1 đường thẳng. Hỏi kẻ được tất cả bao nhiêu đường thẳng từ 50 điểm trên?

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Lời giải

Nếu 50 điểm đã cho không có 3 điểm nào thẳng hàng:

Qua mỗi điểm ta kẻ các đường thẳng với 49 điểm còn lại, ta được 49 đường thẳng. Mà có tất cả 50 điểm như thế và mỗi đường thẳng đã được tính 2 lần nên số đường thẳng tạo thành là $50.49 : 2 = 1225$ đường thẳng.

Qua 3 điểm không thẳng hàng thì ta vẽ được 3 đường thẳng.

Qua 3 điểm thẳng hàng ta vẽ được 1 đường thẳng.

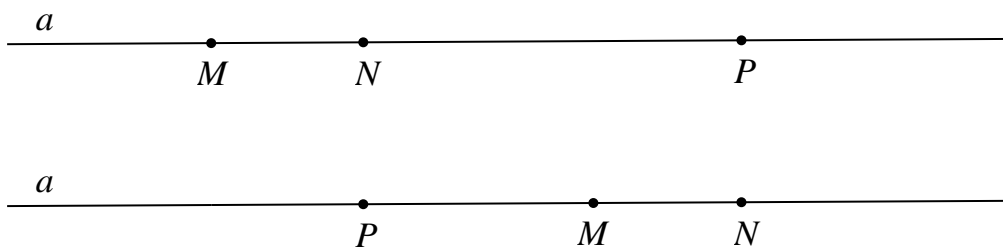
Vậy số đường thẳng tạo thành từ 50 điểm đã cho là:

$$1225 - 3 + 1 = 1223 \text{ đường thẳng}$$

II. Trung điểm của đoạn thẳng

Dạng toán: Tính độ dài đoạn thẳng, chứng minh trung điểm của đoạn thẳng.

Bài 1: Trên đường thẳng a lấy ba điểm M, N, P sao cho: $MN = 2$ cm, $NP = 5$ cm. Khi đó độ dài đoạn thẳng MP bằng:



- A. 3 cm. B. 7 cm. C. 3 cm hoặc 7 cm. D. 3,5 cm.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

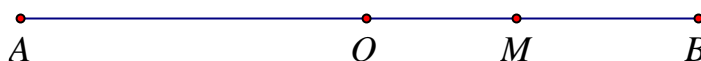
Đáp án: C. 3 cm hoặc 7 cm.

Bài 2: Cho ba điểm A, O, B sao cho $OA = 2\text{cm}$, $OB = 3\text{cm}$ và $AB = 5\text{cm}$. Lấy điểm M nằm trên đường thẳng AB sao cho $OM = 1\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

Lời giải

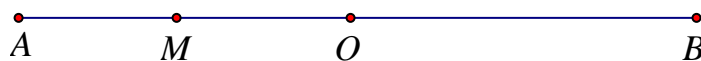
TH1: Điểm M thuộc tia OB . Ta có hình vẽ



Ta có O nằm giữa điểm A và M nên $OA + OM = AM$ hay $2 + 1 = AM$

Suy ra $AM = 3$ (cm).

TH2: Điểm M thuộc tia OA . Ta có hình vẽ



Ta có M nằm giữa điểm A và O nên $AM + OM = OA$ hay $AM + 1 = 2$

suy ra $AM = 1$ (cm).

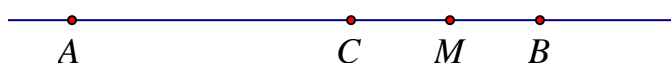
Vậy $AM = 3$ (cm) hoặc $AM = 1$ (cm).

Bài 3: Cho hai điểm A và B cùng nằm trên đường thẳng xy sao cho $AB = 5\text{cm}$. Trên tia Ax lấy điểm C sao cho $AC = 3\text{cm}$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính độ dài đoạn thẳng AM .

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Lời giải

TH1: B, C nằm cùng phía với nhau so với điểm A .



Ta có: $AC < AB$ ($3 < 5$) nên C nằm giữa hai điểm A và B

$$AC + CB = AB$$

$$3 + CB = 5$$

$$CB = 5 - 3 = 2 \text{ (cm)}$$

Vì M là trung điểm của BC nên M nằm giữa hai điểm C và B và $MC = MB = \frac{BC}{2} = 1 \text{ (cm)}$

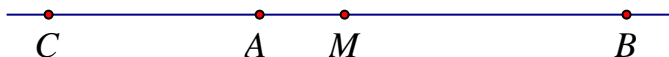
Mặt khác C nằm giữa hai điểm A và M

$$AC + CM = AM$$

$$AM = 3 + 1$$

$$AM = 4 \text{ (cm)}$$

TH2: B, C nằm khác phía so với điểm A .



Vì A nằm giữa B và C

Nên $CB = CA + AB$

$$CB = 3 + 5$$

$$CB = 8 \text{ (cm)}$$

Vì M là trung điểm của BC nên M nằm giữa hai điểm C và B và $MC = MB = \frac{BC}{2} = 4 \text{ (cm)}$

Vì $AC < CM$ ($3 < 4$) nên A nằm giữa hai điểm C và M

$$CA + AM = CM$$

$$3 + AM = 4$$

$$AM = 4 - 3 = 1 \text{ (cm)}$$

Bài 4: Cho hai tia Ox và Oy đối nhau, trên tia Ox lấy hai điểm A và M sao cho $OA = 5\text{cm}$, $OM = 1\text{cm}$; trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OB = 3\text{cm}$. Chứng tỏ: Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Lời giải



Vì điểm M nằm giữa O và A ,

suy ra $OM + MA = OA$

$$MA = OA - OM = 5 - 1 = 4 \text{ (cm)}$$

Vì điểm O nằm giữa hai điểm M và B .

Khi đó: $OM + OB = MB$

hay $MB = 1 + 3 = 4 \text{ (cm)}$.

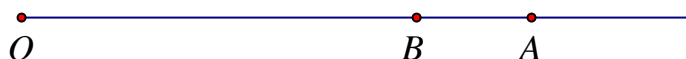
Vì điểm M nằm giữa hai điểm A và B và $MA = MB = 4$ (cm) nên M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Bài 5: Trên tia Ox lấy hai điểm A và B sao cho $OA = 8$ cm, $AB = 2$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng OB .

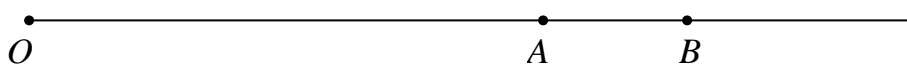
Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

TH1: Ta có $OB = OA - AB = 8 - 2 = 6$ (cm)



TH2: Ta có $OB = OA + AB = 8 + 2 = 10$ (cm)



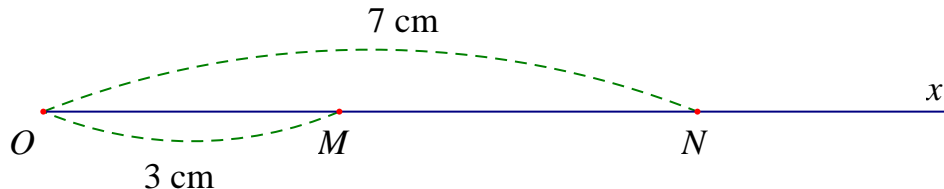
Bài 6: Trên tia Ox lấy hai điểm M và N sao cho $OM = 3$ cm, $ON = 7$ cm.

a) Tính độ dài đoạn thẳng MN .

b) Gọi P là điểm thuộc tia Ox sao cho $MP = 2$ cm. Hỏi P có phải là trung điểm của đoạn thẳng MN không? Vì sao?

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021 - 2022

Lời giải

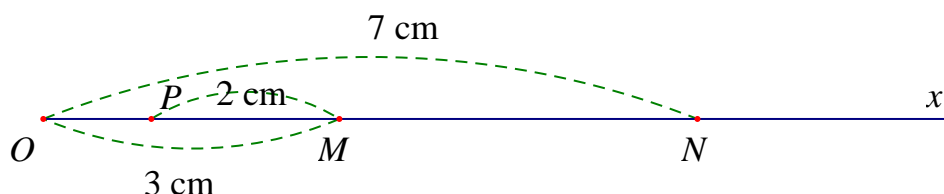


a) Vì M nằm giữa O và N nên $ON = OM + MN$

suy ra $MN = ON - OM = 7 - 3$

Vậy $MN = 4$ cm.

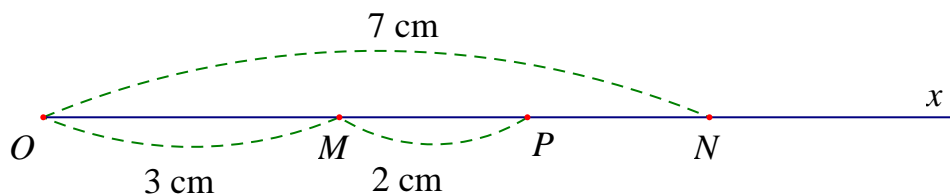
b) TH1: Điểm M và N nằm cùng phía đối với điểm P .



Vì M nằm giữa P và N

suy ra $PM \neq MN$ (vì $2 \neq 4$) nên P không là trung điểm của MN .

TH2: Điểm M và N nằm khác phía đối với điểm P .



M và N nằm khác phía đối với điểm P nên P nằm giữa M và N .

$$MN = MP + PN$$

$$PN = MN - MP$$

$$PN = 4 - 2$$

$$PN = 2 \text{ (cm)}$$

Vì P nằm giữa M và N và $MP = PN$ ($= 2 \text{ cm}$)

suy ra P là trung điểm của MN .

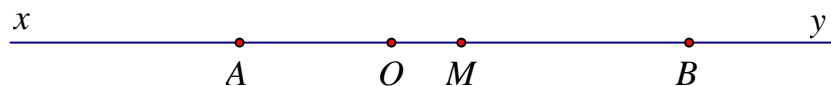
Bài 7: Lấy điểm O trên đường thẳng xy . Trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 2 \text{ cm}$. Trên tia Oy lấy hai điểm M và B sao cho $OM = 1 \text{ cm}$; $OB = 4 \text{ cm}$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng BM .

b) Chứng tỏ rằng M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Lời giải



a) Vì N nằm giữa O và B

Do đó: $OM + MB = OB$

$$1 + MB = 4$$

$$MB = 4 - 1 = 3 \text{ (cm)}$$

Vậy $MB = 3 \text{ cm}$.

b) Vì O nằm giữa A và M

$$MA = OM + OA$$

$$MA = 1 + 2 = 3 \text{ cm}$$

Ta thấy: $MA = MB = 3 \text{ cm}$

Mà M nằm giữa A và B .

Vậy M là trung điểm của AB .

Bài 8: Lấy điểm O trên đường thẳng xy . Trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 2\text{cm}$. Trên tia Oy lấy hai điểm M và B sao cho $OM = 1\text{cm}; OB = 4\text{cm}$.

- Tính độ dài đoạn thẳng BM .
- Chứng tỏ rằng M là trung điểm của đoạn thẳng AB .
- Cho điểm Q không thuộc đường thẳng xy và lấy thêm 2017 điểm phân biệt khác thuộc đường thẳng xy và không trùng với 4 điểm A, B, M, O . Hỏi có thể vẽ được bao nhiêu đoạn thẳng có 2 đầu mút là 2 điểm trong số các điểm đã cho?

Trích đề HSG huyện Chí Linh năm 2021-2022

Lời giải



a) Vì M nằm giữa O và B nên $OM + MB = OB$

Từ đó tính được $MB = 3\text{cm}$

b) Tính được độ dài $AB = 6\text{cm}$

Tính được độ dài đoạn $AM = 3\text{cm}$

Suy ra $AM = MB = \frac{AB}{2}$ nên M là trung điểm của AB .

c) Tổng số điểm trên đường thẳng xy là 2021 điểm

Gọi tên các điểm đó là $A, B, M, O, P_1, P_2, P_3, \dots, P_{2017}$

Từ Q vẽ được 2021 đoạn thẳng khi nối với các điểm còn lại

Từ A vẽ được 2020 đoạn thẳng khi nối với các điểm còn lại (trừ điểm Q)

Từ B vẽ được 2019 đoạn thẳng khi nối với các điểm còn lại (trừ điểm A, Q)

Vậy tổng số đoạn thẳng vẽ được là:

$$2021 + 2020 + 2019 + \dots + 3 + 2 + 1$$

$$= 2022 \cdot 1010 + 1011$$

$$= 2043231$$

Bài 9: Trên tia Ox lấy hai điểm M và N , sao cho $OM = 5\text{cm}$ và $ON = 9\text{cm}$.

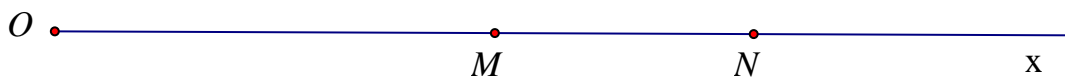
a) Tính độ dài đoạn thẳng MN .

b) Lấy điểm P trên tia Ox , sao cho $MP = 2\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng OP .

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Lời giải

a)



a) vì M nằm giữa hai điểm O và N .

Suy ra $OM + MN = ON$.

Suy ra $5 + MN = 9$ suy ra $MN = 9 - 5 = 4\text{ (cm)}$.

Vậy $MN = 4\text{ (cm)}$.

b)

TH1: P nằm giữa M và N .



Vì M nằm giữa O và P
 Suy ra $OP = OM + MP$
 Suy ra $OP = 5 + 2 = 7$ (cm)

TH2: P nằm giữa O và M .



Vì P nằm giữa O và M nên $OM = OP + PM$
 Suy ra $5 = OP + 2$ suy ra $OP = 3$ (cm).

Bài 10: Trên tia Ox lấy hai điểm A, B (điểm A không trùng với điểm O và độ dài OB lớn hơn độ dài OA). Gọi M là trung điểm của OA . Hãy so sánh độ dài MB với trung bình cộng độ dài OB, AB

Trích đề HSG huyện Tĩnh Gia năm 2018-2019

Lời giải



Ta có trung bình cộng BO, BA là $\frac{BO + AB}{2} = \frac{BO}{2} + \frac{BA}{2}$

Ta lại có $BO = BA + AO$ nên $\frac{BO + BA}{2} = \frac{BA}{2} + \frac{AO}{2} + \frac{BA}{2} = \frac{AO}{2} + BA$ (1)

Mặt khác ta có: $BM = BA + AM$ mà M là trung điểm của OA nên $BM = \frac{AO}{2} + BA$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BM = \frac{BO + BA}{2}$. hay số đo BA bằng trung bình cộng số đo BO, BA

Bài 11: Trên đường thẳng xy lấy điểm O và hai điểm M, N sao cho $OM = 2\text{cm}$, $ON = 3\text{cm}$. Vẽ các điểm A, B trên đường thẳng xy sao cho M là trung điểm của OA ; N là trung điểm của OB . Tính độ dài AB .

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021 - 2022

Lời giải

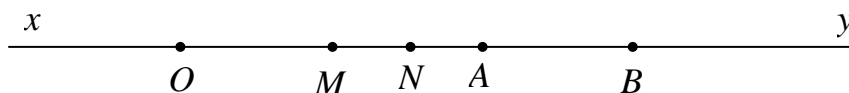
N là trung điểm của OB nên: $ON = \frac{OB}{2}$

Do đó: $OB = 2ON = 2.3 = 6\text{cm}$

M là trung điểm của OA nên: $OM = \frac{OA}{2}$

Do đó: $OA = 2OM = 2.2 = 4\text{cm}$

TH1: M nằm giữa hai điểm O và N .

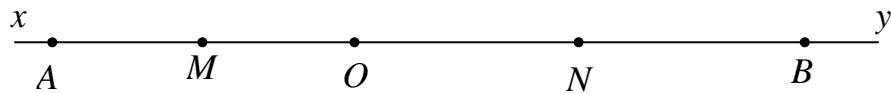


A nằm giữa O và B nên:

$$OA + AB = OB$$

$$AB = OB - OA = 6 - 4 = 2 \text{ cm}$$

TH2: O nằm giữa hai điểm N và M .



A nằm giữa O và B nên:

$$AB = OB + OA = 6 + 4 = 10 \text{ cm}$$

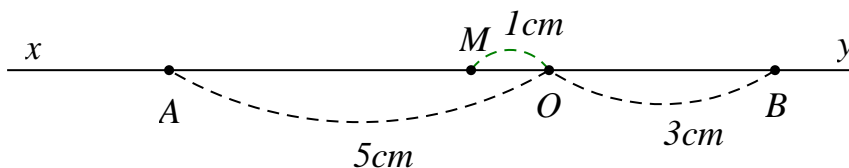
Nếu M nằm giữa hai điểm O và N thì $AB = 2 \text{ cm}$.

Nếu O nằm giữa hai điểm N và M thì $AB = 10 \text{ cm}$.

Bài 12: Cho hai tia Ox và Oy đối nhau. Trên tia Ox lấy hai điểm A và M sao cho $OA = 5 \text{ cm}$, $OM = 1 \text{ cm}$. Trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OB = 3 \text{ cm}$. Chỉ ra: M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021-2022

Lời giải



Điểm M nằm giữa O và A nên: $OM + MA = OA$.

$$MA = OA - OM = 5 - 1 = 4 \text{ (cm)}$$

Điểm O nằm giữa hai điểm M và B .

Khi đó: $OM + OB = MB$ hay $MB = 1 + 3 = 4 \text{ (cm)}$.

Điểm M nằm giữa hai điểm A và B

$$\text{Mà } MA = MB = 4 \text{ cm}$$

Do đó M là trung điểm AB .

Bài 13: Cho đường thẳng xy . Trên xy , lấy ba điểm A, B, C sao cho $AB = a \text{ (cm)}$, $AC = b \text{ (cm)}$ ($b > a$). Gọi I là trung điểm của AB .

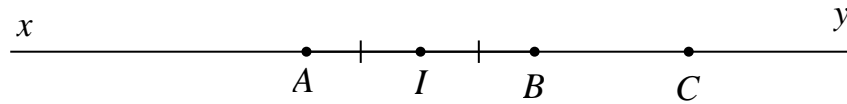
a) Tính IC .

b) Lấy 4 điểm M, N, P, Q nằm ngoài đường thẳng xy . Chứng tỏ rằng đường thẳng xy không cắt hoặc cắt ba, hoặc cắt bốn đoạn thẳng trong các đoạn thẳng sau: MN, MP, MQ, NP, NQ, PQ .

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2019 -2020

Lời giải

a) TH1: B, C nằm cùng phía với nhau so với A



I là trung điểm của AB nên: $IA = IB = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$

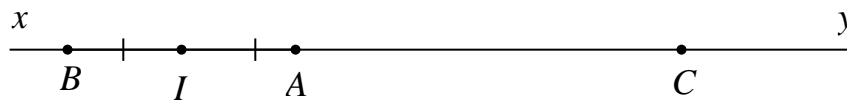
Trên xy , lấy ba điểm A, B, C sao cho $AB = a$ (cm), $AC = b$ (cm) mà ($b > a$).

B nằm giữa A và C nên:

$$BC = AC - AB = b - a$$

$$IC = IB + BC = \frac{a}{2} + b - a = b - \frac{a}{2} \text{ (cm)}$$

Th2: B, C nằm khác phía so với điểm A



Học sinh tính được: $IC = b + \frac{a}{2}$

b) TH1: Nếu cả 4 điểm cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng xy thì đường thẳng xy không cắt các đoạn thẳng: MN, MP, MQ, NP, NQ, PQ .

*Th2: Nếu có 3 điểm (giả sử M, N, P) cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng xy còn 1 điểm Q nằm khác phía bờ là đường thẳng xy thì đường thẳng xy cắt 3 đoạn thẳng sau: MQ, NQ, PQ

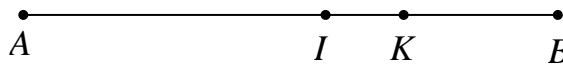
*Th3: Nếu có 2 điểm (giả sử M, N) cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng còn 2 điểm (P, Q) nằm khác phía bờ là đường thẳng xy thì đường thẳng xy cắt 4 đoạn sau: MP, MQ, NP, NQ .

Bài 14: a) Cho đoạn thẳng $AB = 7\text{cm}$. Trên tia AB lấy điểm I sao cho $AI = 4\text{cm}$. Trên tia BA lấy điểm K sao cho $BK = 2\text{cm}$. Tính IK .

b) Trên tia Ox cho 4 điểm A, B, C, D . Biết rằng A nằm giữa B và C , B nằm giữa C và D ; $OA = 5\text{cm}, OD = 2\text{cm}, BC = 4\text{cm}$ và độ dài AC gấp đôi độ dài BD . Tính độ dài các đoạn BD, AC .

Trích đề HSG huyện Hoằng Hóa năm 2017 -2018

Lời giải



a) Điểm K nằm giữa A và B nên: $AK + KB = AB$

$$AK = 7 - 2 = 5\text{cm}$$

Điểm I nằm giữa A và K nên: $AI + IK = AK$

$$4 + IK = 5$$

$$IK = 5 - 4 = 1 \text{ (cm)}$$

b) Điểm A nằm giữa B và C nên: $BA + AC = BC$

$$BA + AC = 4 \quad (1)$$

Điểm D nằm giữa O và A nên: $OD + DA = OA$

$$2 + DA = 5$$

$$DA = 5 - 2 = 3 \text{ cm}$$

Ta có : $DB + BA = DA$

$$DB + BA = 3 \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có: $AC - DB = 1$

Mà theo đề bài ta có: $AC = 2BD$

Ta có: $2BD - BD = 1$.

$$BD = 1(\text{cm})$$

$$AC = 2BD = 2(\text{cm})$$

Bài 15: Cho tam giác ABC có $BC = 6 \text{ cm}$. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $BD = 3 \text{ cm}$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng CD .

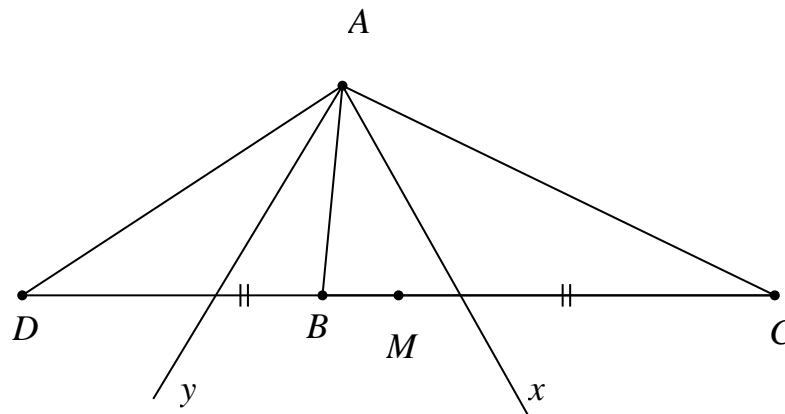
b) Gọi M là trung điểm của CD . Tính độ dài đoạn thẳng BM .

c) Biết góc $DAC = 120^\circ$. Vẽ Ax và Ay lần lượt là các tia nằm chính giữa của góc BAC và góc BAD .

d) Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB không chứa điểm D , nếu vẽ thêm n tia gốc A phân biệt không trùng với các tia AB, AC, Ax thì có tất cả bao nhiêu góc đỉnh A được tạo thành?

Trích đề HSG huyện Phù Ninh năm 2015 -2016

Lời giải



a) Vì điểm D thuộc tia đối của tia BC nên điểm B nằm giữa hai điểm C và D , ta có:

$$CD = BC + BD = 6 + 3 = 9 \text{ (cm)}.$$

b) Vì M là trung điểm của đoạn CD nên $CM = MD = \frac{CD}{2} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ (cm)}$

điểm M nằm giữa hai điểm C và B .

Ta có: $BC = BM + CM$

$$BM = BC - CM = 6 - 4,5 = 1,5 \text{ (cm)}.$$

c) Vì Ax là các tia nằm chính giữa của BAC

Vì Ay là các tia nằm chính giữa của BAD

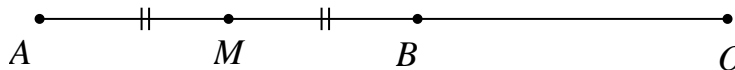
d) Ta có: $n + 3$ tia gốc A phân biệt (kể cả các tia AB, AC, Ax)

Mỗi tia trong $n+3$ tia hợp với $n+2$ tia còn lại một góc. Có $n+3$ tia như vậy nên có tất cả $(n+3)(n+2)$ góc. Tính như thế mỗi góc đã được tính hai lần nên có tất cả $(n+3)(n+2):2$ góc đỉnh A .

Bài 16: Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trên tia đối của tia BA lấy O (O khác B). So sánh độ dài đoạn thẳng OM và trung bình cộng của hai đoạn thẳng OA và OB .

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015 -2016

Lời giải



M là trung điểm của đoạn thẳng AB nên M nằm giữa A và B và $MA = MB$ (1)

Vì B nằm giữa O và M

Ta có $OM = OB + BM$ (2).

Vì M nằm giữa A và O .

Vậy $OM + MA = OA$

$OM = OA - MA$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $2OM = OA + OB$ hay $OM = \frac{OA + OB}{2}$.

Bài 17: Cho đoạn thẳng $AB = 5\text{cm}$. Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng AB , trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $AN = AM$.

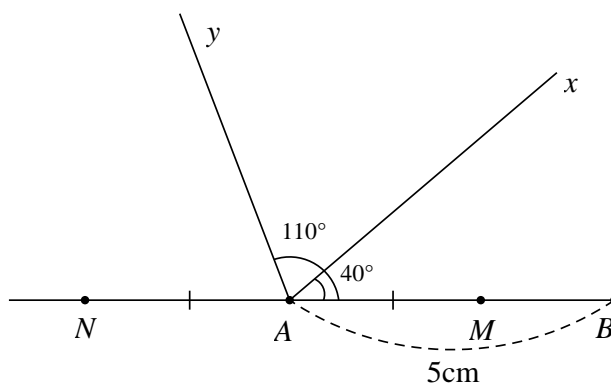
a) Tính BN khi $BM = 2\text{cm}$.

b) Vẽ các tia Ax và Ay sao cho tia Ax nằm giữa hai tia Ay và AB , $BAx = 40^\circ$, $BAy = 110^\circ$. Tính yAx , NyA .

c) Xác định vị trí của điểm M trên đoạn thẳng AB để đoạn thẳng BN có độ dài lớn nhất.

Trích đề HSG THCS Ái Thượng năm 2021-2022

Lời giải



a) Vì M thuộc AB nên

$$AM + MB = AB \Rightarrow AM + 2 = 5 \Rightarrow AM = 3\text{cm}$$

Có $AN = AM \Rightarrow AN = 3cm$

Do N thuộc tia đối của tia AB nên điểm A nằm giữa N và B

$BN = AB + AN = 5 + 3 = 8cm$. Vậy $BN = 8cm$

b) Tia Ax nằm giữa hai tia AB và Ay nên ta có: $BAx + xAy = BAy$ hay $40^\circ + xAy = 110^\circ$

$xAy = 110^\circ - 40^\circ = 70^\circ$

+ ta có BAy và NAy là hai góc kề bù

Ta có $BAy + NAy = 180^\circ$

hay $110^\circ + NAy = 180^\circ$

$NAy = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

c) Vì $BN = AB + AN = 5 + AN \Rightarrow BN$ có độ dài lớn nhất khi AN có độ dài lớn nhất

Mà $AN = AM$ nên BN có độ dài lớn nhất khi AM có độ dài lớn nhất

Có $AM \leq AB$ nên AM lớn nhất khi $AM = AB$ khi đó điểm M trùng với điểm B .

Vậy khi điểm M trùng với điểm B thì BN có độ dài lớn nhất.

Bài 18: Trên đường thẳng xy lấy điểm O . Trên tia Ox lấy điểm A , trên tia Oy lấy điểm B, C sao cho $OA = OC = 2cm$ và $OB = 7cm$.

1) Vẽ hình sau đó:

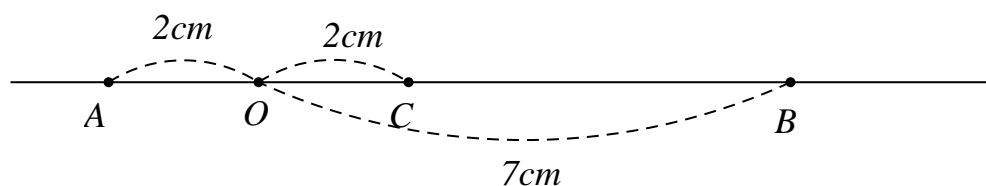
a) Tính độ dài đoạn thẳng BC .

b) Cho biết điểm O có là trung điểm đoạn thẳng AC không? Vì sao?

2) Cần lấy thêm trên đường thẳng xy bao nhiêu điểm phân biệt không trùng với các điểm đã cho để trên đường thẳng có 465 đoạn thẳng mà mỗi đoạn thẳng có mút là hai trong các điểm đó.

Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Lời giải



1) a) Vì điểm C nằm giữa điểm O và điểm B nên ta có: $OC + CB = OB$

$BC = OB - OC = 7 - 2 = 5(cm)$.

Vậy $BC = 5cm$.

b) Ta có điểm O nằm giữa hai điểm A và C và $OA = OC = 2cm$

Vậy điểm O là trung điểm của đoạn thẳng AC .

2) Trên đường thẳng có n điểm thì số đoạn thẳng được tạo thành là: $\frac{(n-1)n}{2}$ đoạn thẳng;

Theo bài ra, ta có: $\frac{(n-1).n}{2} = 465$

$$(n-1).n = 930$$

$$(n-1).n = 30.31$$

$$n = 31$$

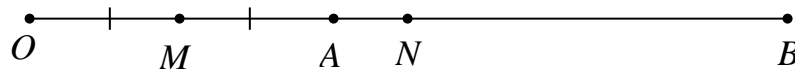
Vậy để có 465 đoạn thẳng thì cần có 31 điểm mà đã có 4 điểm nên ta phải thêm vào 27 điểm nữa là đạt yêu cầu của đầu bài.

Bài 19: Cho đoạn thẳng AB , điểm O thuộc tia đối của tia AB . Gọi M, N thứ tự là trung điểm OA, OB

- Chứng tỏ rằng $OA < OB$
- Chứng tỏ rằng độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào vị trí điểm O (O thuộc tia đối tia AB)

Trích đề HSG cấp trường THCS Hà Huy Tập năm 2018-2019

Lời giải



a) Vì O thuộc tia đối của tia AB nên A nằm giữa O và B
Ta có $OA + AB = OB$ nên $OA < OB$ (vì độ dài các đoạn thẳng là số dương)

b) Vì điểm M nằm giữa hai điểm O và N nên ta có: $OM + MN = ON$

$$MN = ON - OM$$

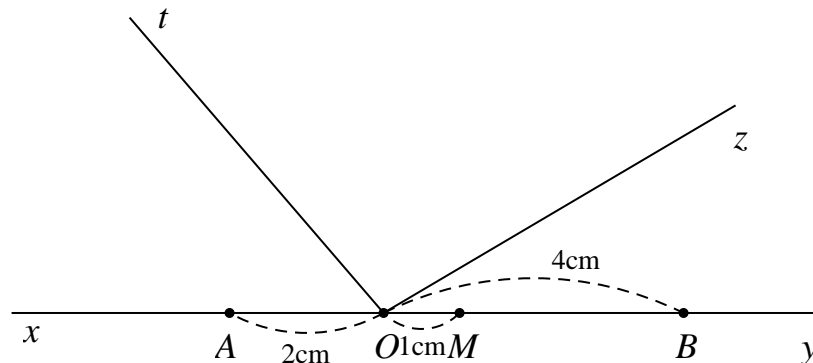
$$MN = \frac{OB - OA}{2} = \frac{AB}{2}$$

Vì AB có độ dài không đổi, nên MN có độ dài không đổi, hay độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào vị trí của điểm O (O thuộc tia đối của tia AB)

Bài 20: Cho góc bẹt xOy , trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 2\text{cm}$; trên tia Oy lấy hai điểm M và B sao cho $OM = 1\text{cm}, OB = 4\text{cm}$. Chứng tỏ điểm M nằm giữa hai điểm O và B . Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Lời giải



Vì M nằm giữa O và B

$$\text{Ta có } MO + MB = OB$$

$$MB = OB - MO = 3cm \quad (1)$$

Vì Ox, Oy đối nhau, $A \in Ox, M \in Oy$ nên O nằm giữa A và M

$$AM = AO - OM = 3cm \quad (2)$$

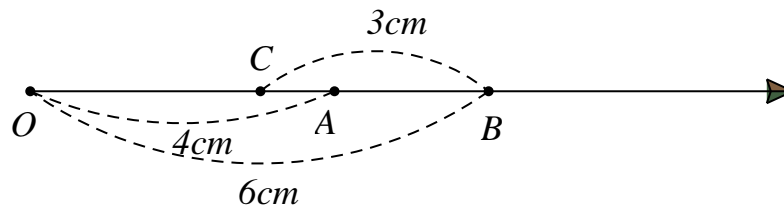
Từ (1) và (2) suy ra $MB = MA = 3(cm)$

Vậy M là trung điểm của AB

Bài 21: Gọi A và B là hai điểm trên tia Ox sao cho $OA = 4cm, OB = 6cm$. Trên tia BA lấy điểm C sao cho $BC = 3cm$. So sánh AB với AC .

Trích đề HSG cấp trường vòng 2 THCS Tân Lập năm 2018-2019

Lời giải



Vì điểm A nằm giữa O và B suy ra

$$AB = OB - OA = 6 - 4 = 2(cm)$$

Vì điểm A nằm giữa hai điểm B và C

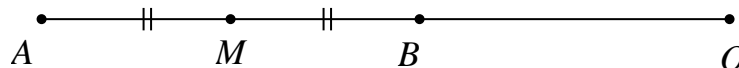
$$\text{Suy ra: } AC = BC - BA = 3 - 2 = 1(cm)$$

Vậy $AB > AC$ ($2 > 1$)

Bài 22: Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trên tia đối của tia BA lấy O (O khác B). So sánh độ dài đoạn thẳng OM và trung bình cộng của hai đoạn thẳng OA và OB

Trích đề thi chọn HSG Tam Dương năm 2016-2017

Lời giải



M là trung điểm của đoạn thẳng AB nên M nằm giữa A và B ; $MA = MB$ (1)

Mà B nằm giữa O và M

$$\text{Ta có } OM = OB + BM \quad (2)$$

Vì M nằm giữa A và O

$$\text{Vậy } OM + MA = OA$$

$$\text{Do đó } OM = OA - MA \quad (3)$$

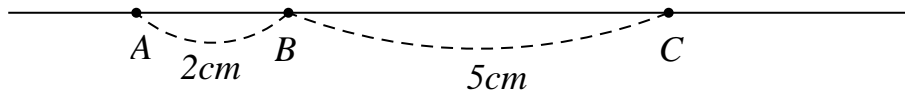
Từ (1), (2) và (3) suy ra $2OM = OA + OB$ hay $OM = \frac{OA + OB}{2}$

Bài 23: Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng 2 cm. Lấy điểm C thuộc đường thẳng AB sao cho $BC = 5cm$. Tính độ dài đoạn thẳng AC

Trích đề chọn HSG Trực Ninh năm 2017-2018

Lời giải

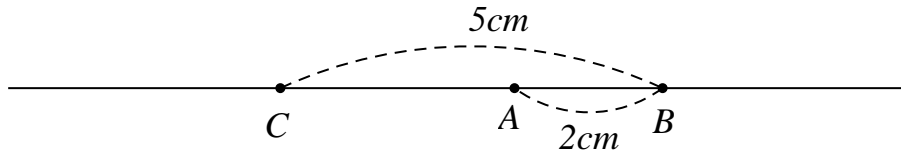
a) Trường hợp điểm C thuộc tia đối của tia BA



Vì điểm B nằm giữa hai điểm A và C

Ta có: $AB + BC = AC$ thay số tính được $AC = 7\text{ cm}$

Trường hợp điểm C thuộc tia BA



Trên tia BA , $BA < BC$ ($2\text{ cm} < 5\text{ cm}$) nên điểm A nằm giữa hai điểm B và C

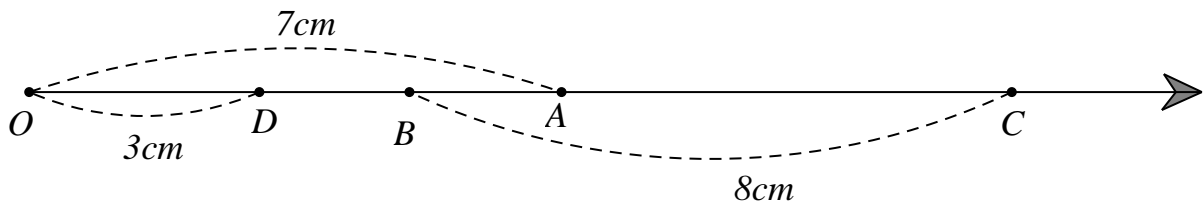
Ta có: $AB + AC = BC$ Thay số tính được $AC = 3\text{ cm}$

Bài 24: Trên tia Ox cho 4 điểm A, B, C, D . Biết rằng A nằm giữa B và C ; B nằm giữa C và D ; $OA = 7\text{ cm}$; $OD = 3\text{ cm}$; $BC = 8\text{ cm}$ và $AC = 3BD$

- Tính độ dài AC
- Chứng tỏ rằng: Điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AD

Trích đề chọn HSG Nga Sơn năm 2017-2018

Lời giải



a) Đặt $BD = x(\text{ cm}) \Rightarrow AC = 3x(\text{ cm})$

Vì D nằm giữa O và A nên: $OD + DA = OA \Rightarrow DA = 4$

$$DB + BA = 4 \text{ hay } x + BA = 4 \quad (1)$$

Vì A nằm giữa B và C nên: $BA + AC = BC$ hay $3x + BA = 8 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $(3x + BA) - (x + BA) = 8 - 4$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

$$AC = 3 \cdot 2 = 6(\text{ cm})$$

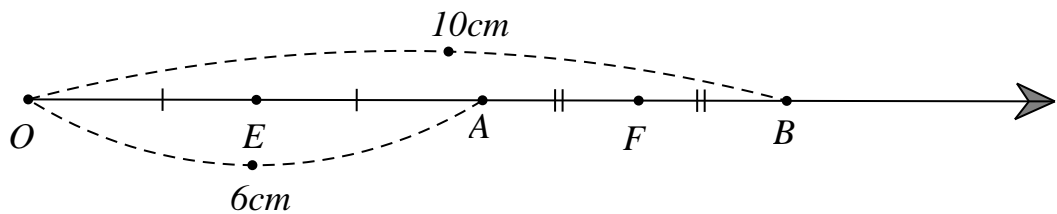
b) Theo (1) ta có: $x + BA = 4$ mà $x = 2$ nên $BA = 2$

Mà $BD = x = 2$ nên $BD = BA = 2$. Do đó B là trung điểm của đoạn thẳng AD

Bài 25: Trên tia Ox lấy 2 điểm A, B sao cho $OA = 6\text{ cm}$, $OB = 10\text{ cm}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của OA, AB . Tính độ dài đoạn thẳng EF .

Trích đề chọn HSG Nga Sơn năm 2017-2018

Lời giải



Vì điểm A nằm giữa hai điểm O và B . Do đó $OA + AB = OB$

Thay số $6 + AB = 10$

$$AB = 4$$

Vậy $AB = 4\text{cm}$

Vì E là trung điểm OA nên $EA = \frac{OA}{2}$, thay số $EA = 6 : 2 = 3\text{cm}$

F là trung điểm của AB nên $AF = \frac{AB}{2}$

Thay số: $AF = 4 : 2 = 2\text{cm}$

Do điểm A nằm giữa hai điểm E và F

Ta có $EF = EA + AF = 3 + 2 = 5(\text{cm})$

Vậy $EF = 5\text{cm}$.

Bài 26: Trên đường thẳng a lấy 3 điểm M, N, P sao cho $MN = 2\text{cm}$, $NP = 5\text{cm}$. Khi đó độ dài đoạn thẳng MP bằng:

- A. 3 cm B. 3 cm hoặc 7 cm C. 7 cm D. 3,5 cm

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 27: Cho đoạn thẳng $AB = 12\text{cm}$. Biết điểm M thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AM = 7\text{cm}$, khi đó $AM - MB$ bằng:

- A. 3 cm B. 4 cm C. 2 cm D. 5 cm

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 28: Cho đoạn thẳng $CD = 20\text{cm}$. Gọi M là trung điểm của CD , I là trung điểm của MC , K là trung điểm của MD , khi đó IK có độ dài là

- A. 10 cm B. 5 cm C. 6 cm D. 2,5 cm

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 29: Cho đoạn thẳng $AB = a$; điểm C nằm giữa hai điểm A và B , điểm M là trung điểm của AC ,

điểm N là trung điểm của CB . Hãy chứng tỏ rằng $MN = \frac{a}{2}$

Trích đề HSG tỉnh Bắc Ninh năm 2016 - 2017

Lời giải



M là trung điểm của AC nên: $AM = MC = \frac{1}{2} AC$

N là trung điểm CB nên: $CN = NB = \frac{1}{2} CB \Rightarrow MC + CN = \frac{1}{2}(AC + CB)$

C nằm giữa A và B nên C nằm giữa M và N

C nằm giữa M và N $\Rightarrow MC + CN = MN$

C nằm giữa A và B $\Rightarrow AC + CB = AB = a$

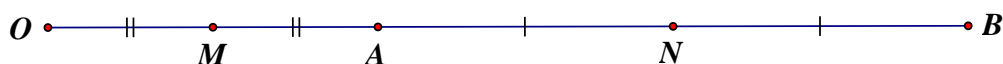
Do đó $MN = \frac{a}{2}$

Bài 30: Cho đoạn thẳng AB, điểm O thuộc tia đối của tia AB. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của OA, OB.

- Chứng tỏ rằng $OA < OB$
- Chứng tỏ rằng độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào vị trí của điểm O (O thuộc tia đối của tia AB)

Trích đề HSG Toán 6 năm 2019 -2020

Lời giải



- Hai tia AO, AB đối nhau, nên điểm A nằm giữa hai điểm O và B, suy ra:

$$\Rightarrow OA < OB$$

- Từ hình vẽ ta có

$$OM + MN = ON \Rightarrow MN = ON - OM \Rightarrow MN = \frac{OB - OA}{2} = \frac{AB}{2}$$

Vì AB có độ dài không đổi nên MN có độ dài không đổi, hay độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào vị trí của điểm O (O thuộc tia đối của tia AB)

Bài 31: Cho đoạn thẳng AB = 8cm. Lấy điểm C nằm giữa hai điểm A và B sao cho BC = 4,5 cm. Tính độ dài đoạn thẳng AC.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Lời giải



Vì điểm C nằm giữa hai điểm A và B nên ta có

$$AC + CB = AB \Rightarrow AC = AB - CB$$

Thay AB = 8cm, BC = 4,5cm ta được $AC = 8 - 4,5 = 3,5$ (cm)

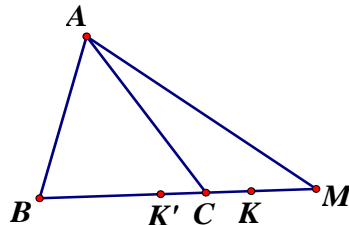
Vậy AC = 3,5 cm.

Bài 32: Cho ΔABC có $BC = 5,5$ cm. Điểm M thuộc tia đối của tia CB sao cho $CM = 3$ cm

- Tính độ dài đoạn thẳng BM
- Biết $BAM = 80^\circ$, $BAC = 60^\circ$ Tính CAM
- Tính độ dài đoạn thẳng BK thuộc đoạn BM biết $CK = 1$ cm

Trích đề HSG huyệnnăm 2019-2020

Lời giải



- a) C nằm giữa B và M

$$\Rightarrow BC + CM = BM$$

$$\Rightarrow BM = 3 + 5,5 = 8,5 \text{ (cm)}$$

- b) C nằm giữa B và $M \Rightarrow AC$ là tia nằm giữa hai tia AB , AM

$$\Rightarrow BAC + CAM = BAM$$

$$\Rightarrow CAM = BAM - BAC$$

$$\Rightarrow CAM = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$$

- c) Xét 2 trường hợp:

+ Nếu K nằm giữa C và M tính được: $BK = BC + CM = 5,5 + 1 = 6,5$ cm

+ Nếu K nằm giữa C và B tính được: $BK = 4,5$ cm

Bài 33: Cho đoạn thẳng $AB = 8$ cm và C là trung điểm của nó, lấy điểm D là trung điểm của CB , E là trung điểm của CD . Tính độ dài đoạn thẳng EB .

Trích đề HSG Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020

Lời giải

Hình vẽ:



C là trung điểm của AB nên: $CB = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ (cm)

D là trung điểm của CB nên: $DB = \frac{1}{2} CB = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ (cm)

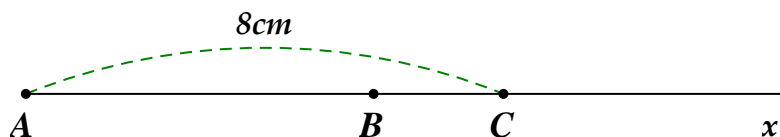
E là trung điểm của CD nên: $ED = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ (cm)

$$EB = ED + DB = 1 + 2 = 3 \text{ (cm)}$$

Bài 34: Vẽ tia Ax . Trên tia Ax xác định hai điểm B và C sao cho B nằm giữa A, C và $AC = 8\text{cm}$, $AB = 3BC$. Tính độ dài các đoạn AB, BC .

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải



Có điểm nằm giữa $A, C \Rightarrow AB + BC = AC$

$$\Rightarrow 3BC + BC = 8$$

$$\Rightarrow 4BC = 8$$

$$\Rightarrow BC = 2 \Rightarrow AB = 6$$

Vậy $AB = 6\text{ cm}; BC = 2\text{ cm}$

Bài 35: Trên đường thẳng a lấy ba điểm M, N, P sao cho $MN = 2\text{cm}, NP = 5\text{cm}$. Khi đó độ dài đoạn MP bằng bao nhiêu

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Lời giải

TH1: M nằm giữa N và P



Từ hình vẽ ta có: $NP = MN + MP$

$$\Rightarrow 5 = 2 + MP$$

$$\Rightarrow MP = 3(\text{cm})$$

TH2: N nằm giữa M và P



Từ hình vẽ ta có: $MP = MN + NP$

$$\Rightarrow MP = 2 + 5$$

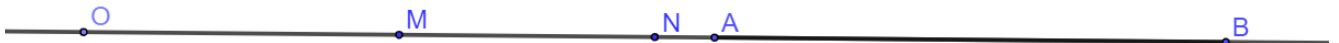
$$\Rightarrow MP = 7(\text{cm})$$

Bài 36: Cho đoạn thẳng AB; điểm O thuộc tia đối của tia AB, Gọi M, N thứ tự là trung điểm của OA, OB.

Chứng tỏ rằng độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào vị trí của điểm O (O thuộc tia đối của tia AB)

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Lời giải



Vì M là trung điểm OA nên $OM = \frac{OA}{2}$

Vì N là trung điểm OB nên $ON = \frac{OB}{2}$.

$$MN = ON - OM = \frac{OB - OA}{2} = \frac{AB}{2}$$

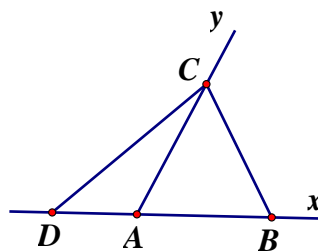
$MN = \frac{AB}{2}$. Vì AB có độ dài không đổi nên MN có độ dài không đổi.

Bài 37: Cho góc xAy, trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = 6\text{cm}$. Trên tia đối của tia Ax lấy điểm D sao cho $AD = 4\text{cm}$.

- Tính BD
- Lấy C là một điểm trên tia Ay. Biết $\angle BCD = 80^\circ, \angle BCA = 45^\circ$. Tính góc ACD
- Biết $AK = 2\text{cm}$ (K thuộc BD). Tính BK.

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

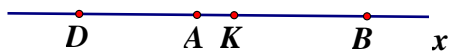
Lời giải



- Vì B thuộc tia Ax, D thuộc tia đối của tia Ax $\Rightarrow A$ nằm giữa D và B
 $\Rightarrow BD = BA + AD = 6 + 4 = 10(\text{cm})$
- Vì A nằm giữa D và B \Rightarrow tia CA nằm giữa hai tia CB, CD.

$$\Rightarrow ACD + ACB = BCD \Rightarrow ACD = BCD - ACB = 80^\circ - 45^\circ = 35^\circ$$

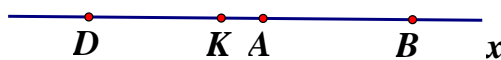
c) Trường hợp 1: K thuộc tia Ax



- Lập luận chỉ ra được K nằm giữa A và B
- Suy ra $AK + KB = AB \Rightarrow KB = AB - AK = 6 - 2 = 4(cm)$

Trường hợp 2: K thuộc tia đối của tia Ax

- Lập luận chỉ ra được A nằm giữa K và B



Suy ra $KB = KA + AB \Rightarrow KB = 6 + 2 = 8(cm)$

Kết luận : Vậy $KB = 4cm$ hoặc $KB = 8cm$.

Bài 38: Cho đoạn thẳng AB, điểm O thuộc tia đối của tia AB. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của OA, OB.

- a) Chứng tỏ rằng $OA < OB$
- b) Chứng tỏ rằng độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào vị trí của điểm O (O thuộc tia đối của tia AB)

Trích đề HSG huyện Nông Cống năm 2019-2020

Lời giải



a) Hai tia AO, AB đối nhau, nên điểm A nằm giữa hai điểm O và B, suy ra:

$$\Rightarrow OA < OB$$

b) Vì điểm M nằm giữa hai điểm O và N, nên ta có:

$$\Rightarrow OM + MN = ON \Rightarrow MN = ON - OM \Rightarrow MN = \frac{OB - OA}{2} = \frac{AB}{2}$$

Vì AB có độ dài không đổi nên MN có độ dài không đổi, hay độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào vị trí của điểm O (O thuộc tia đối của tia AB)

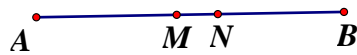
Bài 40: Vẽ đoạn thẳng $AB = 5cm$

- a) Trên đoạn thẳng AB lấy hai điểm M, N sao cho $MN = 1cm$. Tính $AM + BN$?
- b) Trên đoạn thẳng AB lấy hai điểm M, N sao cho $AM + BN = 7cm$. Tính MN?

Trích đề HSG huyện Quế Sơn năm 2018-2019

Lời giải

Trường hợp 1:

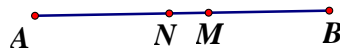


M nằm giữa hai điểm A, N : $AM + MN = AN \Rightarrow AM = AN - MN$

N nằm giữa hai điểm A, B nên $AN + NB = AB \Rightarrow BN = AB - AN$

$$\Rightarrow AM + BN = AB - AN + AN - MN = AB - MN = 5 - 1 = 4\text{cm}$$

Trường hợp 2



N nằm giữa A, M : $AN + NM = AM$ hay $AM = AN + MN$

N nằm giữa hai điểm A, B nên:

$$\begin{aligned} AN + NB = AB &\Rightarrow BN = AB - AN \Rightarrow AM + BN = AB - AN + AN + MN \\ &= AB + MN = 5 + 1 = 6\text{cm} \end{aligned}$$

$$AM + BN = 7\text{cm} \quad (*)$$

$AN + BN = 5\text{cm} \Rightarrow AM > AN \Rightarrow N$ nằm giữa hai điểm A, M

N nằm giữa hai điểm A, M được: $AM = AN + NM$

Thay vào (*) được: $AN + NM + BN = 7\text{cm}$

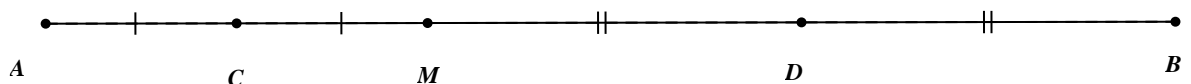
N nằm giữa hai điểm A, B nên $AN + BN = AB = 5\text{cm}$

Thay vào trên được: $5 + NM = 7 \Rightarrow MN = 7 - 5 = 2\text{cm}$

Bài 41: Cho đoạn thẳng $AB = 6\text{cm}$. M là điểm nằm giữa hai điểm A và B . Gọi C và D lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AM và MB . Tính độ dài đoạn thẳng CD .

Trích đề HSG huyện Sơn Tây năm 2021-2022

Lời giải



Vì điểm M nằm giữa hai điểm A và B nên $AM + MB = AB$.

Vì C và D lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AM và MB nên ta có:

$$CM = \frac{AM}{2}, MD = \frac{MB}{2}.$$

Vì M nằm giữa A và B , C nằm giữa A và M , D nằm giữa M và B , suy ra M nằm giữa C và D .

$$\text{Do đó: } CD = CM + MD = \frac{AM}{2} + \frac{MB}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3(\text{cm}).$$

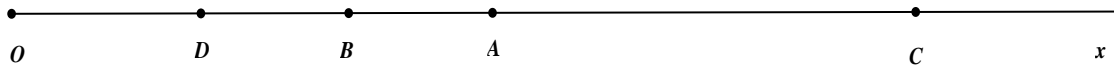
Bài 42: Trên tia Ox cho 4 điểm A, B, C, D . Biết rằng B nằm giữa A và D ; A nằm giữa B và C ; $OA = 7\text{cm}$; $OD = 3\text{cm}$; $BC = 8\text{cm}$ và $AC = 3BD$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AD ?

b) Chứng tỏ rằng: Điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AD .

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2021-2022

Lời giải



a) Vì D nằm giữa O và A nên:

$$OA = OD + DA$$

$$7 = 3 + DA$$

$$DA = 4 \text{ cm.}$$

b) Ta có: $OA + BC = 7 + 8$

$$OD + DB + BA + BA + AC = 15$$

$$3 + DB + BA + BA + 3DB = 15$$

$$2DA + 2DB = 12$$

$$8 + 2DB = 12$$

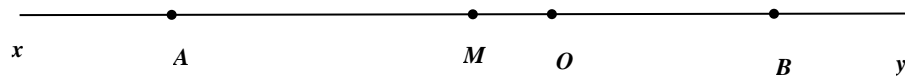
$$DB = 2 \text{ cm.}$$

Suy ra $DB = \frac{DA}{2} = 2 \text{ cm}$ và B nằm giữa A và D nên điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AD .

Bài 43: Cho hai tia Ox và Oy đối nhau, trên tia Ox lấy hai điểm A và M sao cho $OA = 5 \text{ cm}$; $OM = 1 \text{ cm}$ trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OB = 3 \text{ cm}$. Chứng tỏ: Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2021-2022

Lời giải



Vì điểm M nằm giữa O và A , suy ra:

$$OM + MA = OA$$

$$MA = OA - OM = 5 - 1 = 4 (\text{cm}).$$

Vì điểm O nằm giữa hai điểm M và B . Khi đó:

$$OM + OB = MB$$

$$MB = 1 + 3 = 4 (\text{cm}).$$

Vì điểm M nằm giữa hai điểm A và B và $MA = MB = 4 (\text{cm})$ nên M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Bài 44: Trên đường thẳng xy lấy điểm O . Trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 5 \text{ cm}$. Trên tia Oy lấy hai điểm B và C sao cho $OB = 5 \text{ cm}$ và $OC = a (\text{cm})$, với $0 < a < 5$.

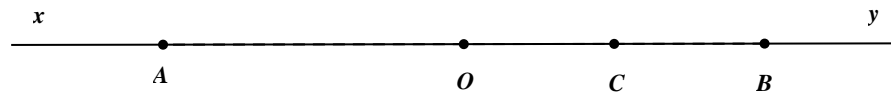
a) Điểm O có là trung điểm của đoạn thẳng AB không? Vì sao?

b) Xác định giá trị của a để C là trung điểm của đoạn thẳng OB .

c) Trên đường thẳng xy lấy thêm 15 điểm phân biệt (không trùng với A, B, O, C). Tính tất cả số đoạn thẳng phân biệt được tạo thành từ các điểm trên hình.

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2021-2022

Lời giải



a) Điểm O là trung điểm của đoạn thẳng AB vì O nằm giữa A và B và $OA = OB = 5$ cm.

b) C là trung điểm của đoạn thẳng OB khi $OC = BC = \frac{OB}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$ (cm).

Vậy $a = 2,5$ (cm).

c) Trên hình vẽ có tất cả $15 + 4 = 19$ (điểm)

Cứ 1 điểm nối với 18 điểm còn lại ta được 18 đoạn thẳng.

Có 19 điểm như thế nên được số đoạn thẳng là $18 \cdot 19$, nhưng do mỗi đoạn thẳng được tính 2 lần. Do đó số đoạn thẳng vẽ được là $18 \cdot 19 : 2 = 171$ (đoạn thẳng)

Bài 45: Cho đoạn thẳng AB bằng 1 đơn vị độ dài.

a) Lấy C_1 là trung điểm của AB . Tính tỷ số $\frac{AB}{AC_1}$.

b) Tương tự, lấy các điểm $C_2; C_3; \dots; C_{2022}$ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $AC_1; AC_2; AC_3; \dots; AC_{2021}$. Đặt $F = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2022}$. So sánh F với 2^{2023} .

Trích đề HSG Thanh Ba năm 2021-2022

Lời giải

a. Vì C_1 là trung điểm của AB nên $AC_1 = \frac{1}{2} AB$ suy ra $AB = 2AC_1$ suy ra $\frac{AB}{AC_1} = \frac{2AC_1}{AC_1} = 2$.

b. Từ câu a) ta có $AB = 2AC_1$. Tương tự:

$$AC_1 = 2AC_2 \text{ suy ra } AB = 2^2 AC_2$$

$$AC_2 = 2AC_3 \text{ suy ra } AB = 2^3 AC_3$$

...

$$AC_{2021} = 2AC_{2022} \text{ suy ra } AB = 2^{2022} AC_{2022}$$

$$\text{Suy ra } F = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2022}$$

$$\text{Suy ra } 2F = 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2022} + 2^{2023}$$

$$\text{Suy ra } 2F - F = 2^{2023} - 2$$

$$\text{Suy ra } F = 2^{2023} - 2 < 2^{2023}$$

Vậy $F < 2^{2023}$.

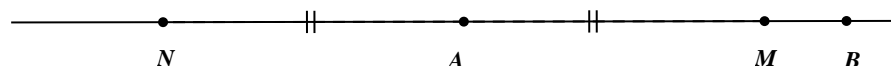
Bài 46: Trên đoạn thẳng $AB = 4$ cm lấy điểm M , trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $AM = AN$.

a) Nếu $BM = 1$ cm. Tính BN .

b) Xác định vị trí của điểm M để BN có độ dài lớn nhất. Giá trị lớn nhất đó là bao nhiêu?

Trích đề HSG Kim Sơn (Quang Thiện) năm 2021-2022

Lời giải



a) Vì M thuộc đoạn thẳng AB nên:

$$AM + MB = AB$$

$$AM = AB - MB = 4 - 1 = 3 \text{ cm.}$$

$$AN = AM = 3 \text{ cm}$$

Vì N thuộc tia đối của tia AB nên A nằm giữa N và B

$$\text{Suy ra: } BN = AB + AN = 4 + 3 = 7 \text{ cm.}$$

$$\text{b) } BN = AB + AN = AB + AM = 4 + AM$$

Suy ra BN lớn nhất khi AM lớn nhất.

AM lớn nhất khi và chỉ khi M trùng với B suy ra $AM = AB = 4 \text{ cm.}$

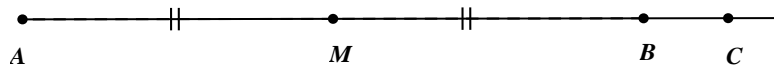
Khi đó $BN = 8 \text{ cm.}$

Bài 47: Cho đoạn thẳng AB . Điểm C thuộc tia đối của tia BA . M là trung điểm của đoạn thẳng

$$AB. \text{ Chứng tỏ rằng: } CM = \frac{CA + CB}{2}.$$

Trích đề HSG Tiên Du năm 2021-2022

Lời giải



Do M là trung điểm của AB , và C là điểm thuộc tia đối của tia BA .

Theo hình vẽ điểm M nằm giữa A và C nên: $CA = MA + MC$ (1)

Ta có B nằm giữa M và C nên $CB = CM - MB$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $CA + CB = MA + MC + CM - MB$

$$CA + CB = 2CM \text{ (Do } MA = MB \text{)}$$

$$\text{Suy ra: } MC = \frac{CA + CB}{2}.$$

$$\text{Vậy } CM = \frac{CA + CB}{2}.$$

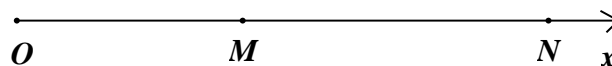
Bài 48: Trên tia Ox lấy hai điểm M và N , sao cho $OM = 3 \text{ cm}$ và $ON = 7 \text{ cm}$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng MN .

b) Lấy điểm P trên tia Ox , sao cho $MP = 2 \text{ cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng OP .

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Lời giải



a) Nhìn hình vẽ, ta thấy M nằm giữa hai điểm O và N

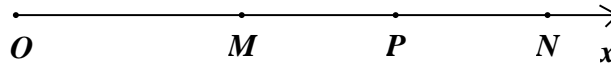
$$\Rightarrow OM + MN = ON$$

$$\Rightarrow 3 + MN = 7$$

$$\Rightarrow MN = 7 - 3 = 4 \text{ (cm)}$$

Vậy $MN = 4 \text{ (cm)}$.

b) TH1: P nằm giữa M và N .



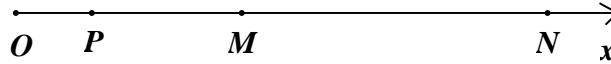
Vì P nằm giữa M và N mà M nằm giữa hai điểm O và N

Nên M nằm giữa O và P

$$\Rightarrow OP = OM + MP$$

$$\Rightarrow OP = 3 + 2 = 5 \text{ (cm)}$$

TH2: P nằm giữa O và M .



Vì P nằm giữa O và M

Nên $OM = OP + PM$

$$\Rightarrow 3 = OP + 2$$

$$\Rightarrow OP = 1 \text{ (cm)}.$$

Bài 49: Lấy điểm O trên đường thẳng xy . Trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA=2\text{cm}$. Trên tia Oy lấy hai điểm M và B sao cho $OM = 1\text{cm}; OB = 4\text{cm}$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng BM .

b) Chứng tỏ rằng điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Lời giải



a) Vì M nằm giữa O và B nên $OM + MB = OB$

Từ đó tính được $MB = 3 \text{ cm}$

b) Tính được độ dài $AB = 6 \text{ cm}$

Tính được độ dài đoạn $AM = 3 \text{ cm}$.

Suy ra $AM = MB = \frac{AB}{2}$ nên M là trung điểm của AB .

Bài 50: Trên đoạn thẳng $AB=12\text{cm}$ lấy điểm M nằm giữa A và B . Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AM ; K là trung điểm của đoạn thẳng AB .

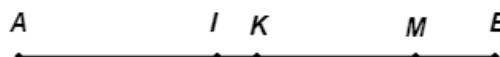
a) Biết $AM = 9\text{cm}$. Tính IK ?

b) Giả sử $AM = a(\text{cm})(0 < a < 12)$. Tìm a để K là trung điểm của đoạn thẳng IM .

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Lời giải

a) Theo bài ra ta có hình vẽ sau:



Vì K là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Rightarrow AK = \frac{1}{2} AB$

Mà $AB = 12\text{cm} \Rightarrow AK = 6\text{cm}$

Vì I là trung điểm của đoạn thẳng $AM \Rightarrow AI = \frac{1}{2} AM$

mà $AM = 9\text{cm} \Rightarrow AI = 4,5\text{cm}$

Ta có: $AI + IK = AK$

Thay số được: $4,5 + IK = 6 \Rightarrow IK = 6 - 4,5 = 1,5(\text{cm})$

b) Theo bài ra ta có hình vẽ sau:



Lập luận tương tự câu a, ta có: $AK = 6\text{cm}$; $AI = \frac{1}{2} a$

Theo hình vẽ ta có: $AI + IK = AK \Rightarrow IK = 6 - \frac{1}{2} a$

$AK + KM = AM \Rightarrow KM = a - 6$

Để K là trung điểm của đoạn thẳng IM thì $IK = KM$

$\Rightarrow 6 - \frac{1}{2} a = a - 6 \Rightarrow a = 8(\text{cm})$

Vậy khi $a = 8(\text{cm})$ thì K là trung điểm của đoạn thẳng IM .

Bài 51: Cho điểm A nằm giữa hai điểm B và C sao cho $AB = 3\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$. Chứng tỏ rằng điểm A là trung điểm của đoạn thẳng BC (*không cần vẽ hình*).

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Lời giải

Vì điểm A nằm giữa hai điểm B và C

$\Rightarrow AB + AC = BC$

$\Rightarrow 3 + AC = 6$

$\Rightarrow AC = 6 - 3 = 3(\text{cm})$ mà $AB = 3\text{cm} \Rightarrow AB = AC$

Vì $AB = AC$ và A nằm giữa hai điểm B và C

\Rightarrow Điểm A là trung điểm của đoạn thẳng BC .

Bài 52: Cho ba điểm $A, M; B$ thẳng hàng và $AM = 3\text{ cm}$; $AB = \frac{8}{3} AM$. Biết điểm N là trung điểm của đoạn thẳng MB . Tính độ dài đoạn thẳng NA ?

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021- 2022

Lời giải

1. Ta có: $AM = 3\text{ cm}$; $AB = \frac{8}{3} AM \Rightarrow AB = \frac{8}{3} . 3 = 8(\text{cm})$

TH1: Điểm M nằm giữa A và B

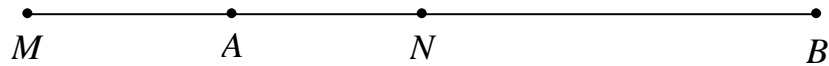


Theo hình vẽ ta có: $AM + MB = AB \Rightarrow MB = 8 - 3 = 5$ (cm)

Vì điểm N là trung điểm của đoạn thẳng MB nên $MN = NB = \frac{MB}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$ (cm)

Theo hình vẽ ta có: $AN + NB = AB \Rightarrow AN = 8 - 2,5 = 5,5$ (cm)

TH2: Điểm A nằm giữa M và B



Theo hình vẽ ta có: $MA + AB = MB \Rightarrow MB = 8 + 3 = 11$ (cm)

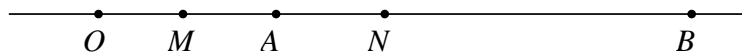
Vì điểm N là trung điểm của đoạn thẳng MB nên $MN = NB = \frac{MB}{2} = \frac{11}{2} = 5,5$ (cm)

Theo hình vẽ ta có: $AN + NB = AB \Rightarrow AN = 8 - 5,5 = 2,5$ (cm)

Bài 53: Cho đoạn thẳng AB dài 8 cm, điểm O thuộc tia đối của tia AB . Gọi M, N thứ tự là trung điểm của đoạn thẳng OA, OB . Tính độ dài đoạn thẳng MN .

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Lời giải



Vì điểm A nằm giữa hai điểm O và B , suy ra: $\Rightarrow OA < OB$

Ta có: M, N thứ tự là trung điểm OA, OB nên $\Rightarrow OM = \frac{OA}{2}; ON = \frac{OB}{2}$

Vì điểm M nằm giữa hai điểm O và N

Vì điểm M nằm giữa hai điểm O và N , nên ta có:

$$\Rightarrow OM + MN = ON \Rightarrow MN = ON - OM$$

$$\Rightarrow MN = \frac{OB - OA}{2} = \frac{AB}{2} = 4 \text{ cm}$$

Bài 54: Trên đường thẳng xy lấy điểm O . Trên tia Oy lấy điểm C , trên tia Ox lấy hai điểm A, B sao cho $OC = 3$ cm, $OA = 2$ cm và $OB = 4$ cm.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AB .

b) Gọi điểm I là trung điểm đoạn thẳng AB . Chứng tỏ điểm O là trung điểm của đoạn thẳng IC .

Trích đề HSG huyện Tiên Hải năm 2021-2022

Lời giải



Điểm A nằm giữa điểm O và điểm B

$$OB = OA + AB$$

$$\Rightarrow AB = OB - OA = 4 - 2 = 2 \text{ (cm)}$$

Vì I là trung điểm đoạn thẳng AB. $\Rightarrow AI = IB = AB : 2 = 2 : 2 = 1 \text{ (cm)}$.

Điểm I nằm giữa điểm B và điểm O

$$\Rightarrow BO = BI + IO \Rightarrow IO = BO - BI = 4 - 1 = 3 \text{ (cm)} \Rightarrow OI = OC \text{ (1)}$$

Vì điểm O nằm giữa điểm I và điểm C. (2)

Từ (1) và (2) suy ra điểm O là trung điểm của IC.

CHỦ ĐỀ: HÌNH HỌC

A. PHẦN NỘI DUNG

I. Số điểm, số đoạn thẳng, số đường thẳng

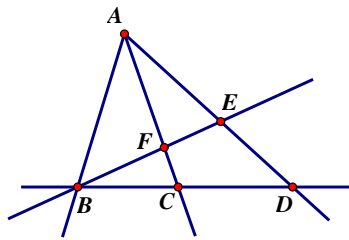
Dạng toán: Đếm số điểm, số đường thẳng, số đoạn thẳng

Bài 1: Cho 200 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm vẽ một đường thẳng. Số đường thẳng vẽ được là bao nhiêu?

- A. 1990 B. 19900 C. 39800 D. 40000

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 2: Trên hình vẽ sau có bao nhiêu bộ ba điểm thẳng hàng?



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 3: Cho 20 điểm phân biệt trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có thể kẻ được bao nhiêu đoạn thẳng?

- A. 190 B. 180 C. 380 D. 200

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 4: Vẽ đường thẳng d không đi qua O . Trên đường thẳng d lấy 2015 điểm phân biệt. Tính số các góc có đỉnh O và cạnh đi qua 2 điểm bất kỳ trên đường thẳng d .

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Lời giải

Cứ 2 điểm trên đường thẳng d nối với điểm O được 1 góc đỉnh O

⇒ có bao nhiêu đoạn thẳng trên đường thẳng d thì có bấy nhiêu góc đỉnh O

⇒ Số góc đỉnh O đi qua 2 điểm bất kỳ trên đường thẳng d là:

$$\frac{2015 \cdot 2014}{2} = 4058210 \text{ (góc)}. \text{ Vậy có } 4058210 \text{ góc.}$$

Bài 5: Cho 6 đường thẳng đôi một cắt nhau. Hỏi 6 đường thẳng đó có thể cắt nhau ít nhất tại bao nhiêu điểm, nhiều nhất tại bao nhiêu điểm.

Trích đề HSG Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020

Lời giải

6 đường thẳng để cho có thể cắt nhau ít nhất tại 1 điểm (nếu 6 đường thẳng đó đồng quy)

Nếu không có 3 đường thẳng nào đồng quy thì mỗi đường thẳng sẽ cắt 5 đường thẳng còn lại tại thành 5 giao điểm.

Có 6 đường thẳng nên có $6 \cdot 5 = 30$ giao điểm

Nhưng mỗi giao điểm lại được tính 2 lần, nên chỉ có $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ giao điểm.

Bài 6:

Trên cùng một nửa mặt chứa tia Oy , có bờ chứa tia Ox . Cần vẽ thêm bao nhiêu tia phân biệt gốc O và không trùng với các tia đã vẽ trong hình để tạo thành 630 góc đỉnh O (chỉ tính các góc thuộc nửa mặt phẳng nói trên).

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Lời giải

Với n tia chung gốc O vẽ được: $\frac{n(n-1)}{2}$ góc đỉnh O

ta phải có: $n(n-1) = 1260 = 36 \cdot 35 \Rightarrow n = 36$

Vậy phải vẽ thêm: $36 - 5 = 31$ tia gốc O như yêu cầu đề bài.

Bài 7: Cho 2010 đường thẳng trong đó bất kỳ 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau. Không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018 - 2019

Lời giải

Mỗi đường thẳng cắt 2009 đường thẳng còn lại tạo nên 2009 giao điểm

Mà có 2010 đường thẳng \Rightarrow có: $2009 \cdot 2010$ giao điểm

Nhưng mỗi giao điểm được tính 2 lần \Rightarrow Số giao điểm thực tế là:

$$(2009 \cdot 2010) : 2 = 2019045 \text{ (giao điểm)}$$

Bài 8: Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Biết rằng tổng số giao điểm mà n đường thẳng đó cắt nhau tạo ra bằng 465. Tìm n .

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Lời giải

Có n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy, nên mỗi đường thẳng sẽ cắt $n-1$ đường thẳng còn lại tạo ra $n-1$ giao điểm phân biệt.

Do đó n đường thẳng thì có $n(n-1)$ giao điểm.

Nhưng mỗi giao điểm đã được tính 2 lần nên thực tế chỉ có $\frac{n(n-1)}{2}$ giao điểm.

Theo bài ra ta có: $\frac{n(n-1)}{2} = 465$

$$\Rightarrow n(n-1) = 930 = 31 \cdot 30 \Rightarrow n = 31$$

Vậy $n = 31$

Bài 9: Cho 100 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm vẽ một đường thẳng. Số đường thẳng vẽ được là:

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Lời giải

Lấy một điểm bất kì trong 100 điểm. Qua điểm đó và 99 điểm còn lại, ta vẽ được 99 đường thẳng.

Với 100 điểm ta có:

$$99 \cdot 100 = 9900 \text{ đường thẳng}$$

Mà mỗi đường thẳng được tính hai lần

$$\Rightarrow \text{Số đường thẳng có tất cả là: } 9900 : 2 = 4950 \text{ đường thẳng}$$

Bài 10: Cho góc xOy và góc yOz là hai góc kề bù. Góc yOz bằng 30°

a) Vẽ tia Om nằm trong góc xOy sao cho $xOm = 75^\circ$; tia On nằm trong góc yOz sao cho $yOn = 15^\circ$

b) Hình vẽ trên có mấy góc?

c) Nếu có n tia chung gốc thì sẽ tạo nên bao nhiêu góc ?

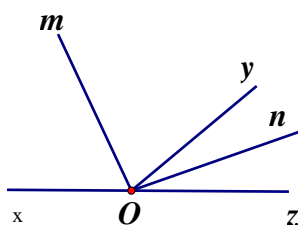
Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Lời giải

a) Vẽ được góc xOy và góc yOz kề bù và $yOz = 30^\circ$

Vẽ được tia Om thỏa mãn điều kiện

Vẽ được tia On thỏa mãn điều kiện



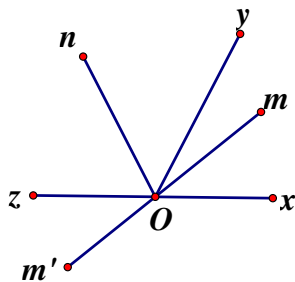
b) Hình vẽ trên có 10 góc

c) Lập luận : từ hình vẽ trên ta có mỗi tia với 1 tia còn lại tạo thành 1 góc. Xét 1 tia, tia đó cùng với 4 tia còn lại tạo thành 4 góc. Làm như vậy với 5 tia ta được 5.4 góc. Nhưng mỗi góc đã được tính 2 lần, do đó có tất cả là

$$\frac{5.4}{2} = 10 \text{ góc}$$

Từ đó suy ra tổng quát: với n tia chung gốc có $n \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)$ (góc)

Bài 11: Cho hình vẽ:



Cần vẽ thêm bao nhiêu tia phân biệt chung gốc O và không trùng với các tia đã vẽ trong hình để tạo thành tất cả 300 góc.

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Lời giải

Giả sử cần vẽ thêm n tia phân biệt chung gốc O và không trùng với các tia đã vẽ trong hình để tạo thành tất cả 300 góc. Khi đó tổng số tia gốc O trên hình là $n+6$

Cứ 1 tia gốc O tạo với $n+5$ tia gốc O còn lại thành $n+5$ góc, mà có $n+6$ tia như vậy nên tạo thành: $(n+5)(n+6)$ góc

Vì tia này tạo với tia kia và ngược lại nên mỗi góc được tính 2 lần, suy ra số góc tạo thành:

$\frac{(n+5)(n+6)}{2}$ góc. Vì có 300 góc nên ta có:

$$\frac{(n+5)(n+6)}{2} = 300 \Rightarrow (n+5)(n+6) = 600 = 24 \cdot 25 \Rightarrow n = 19$$

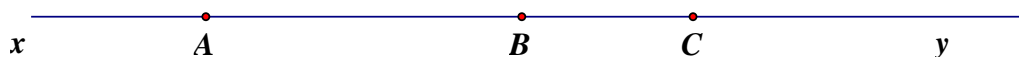
Bài 12: Cho đường thẳng xy , trên đó lấy ba điểm phân biệt A, B, C .

a) Biết $AB = 5\text{cm}$, $AC = 3\text{cm}$. Tính BC .

b) Trên xy lấy 4 điểm phân biệt (không trùng với A, B, C) và điểm O không nằm trên đường thẳng xy . Hỏi có thể vẽ được tất cả bao nhiêu tam giác có đỉnh là ba trong các điểm đã có trên hình vẽ.

Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 - 2022

Lời giải



a) Vì điểm C nằm giữa 2 điểm A và B

$$\Rightarrow AC + CB = AB$$

$$\Rightarrow BC = AB - AC$$

$$\Rightarrow BC = 5 - 3$$

Vậy $BC = 2\text{cm}$

b) Ta có 7 điểm phân biệt trên đường thẳng xy và điểm 1 điểm không nằm trên xy

Chọn 1 điểm, nối điểm đấy lần lượt với 7 điểm còn lại được 7 đoạn thẳng.

Làm như vậy với 8 điểm ta được $7 \cdot 8 = 56$ (đoạn thẳng).

Như vậy mỗi đoạn thẳng được tính 2 lần. Do đó chỉ có $56 : 2 = 28$ (đoạn thẳng)

Vì qua 3 điểm không thẳng hàng ta vẽ được một tam giác nên cứ nối 2 điểm đầu của một đoạn thẳng nằm trên đường thẳng xy với điểm O nằm ngoài xy ta được 1 tam giác.

Vậy số tam giác vẽ được bằng số đoạn thẳng nằm trên đường thẳng xy là 28 tam giác.

Bài 13: Lấy thêm 19 điểm phân biệt trên đường thẳng xy (các điểm này không trùng với điểm O) và một điểm A nằm ngoài đường thẳng xy . Hỏi vẽ được bao nhiêu tam giác nhận 3 trong các điểm trên làm đỉnh.

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2018 - 2019

Lời giải

Xét 20 điểm trên đường thẳng xy

Chọn một điểm nối điểm đó với lần lượt 19 điểm còn lại ta vẽ được 19 đoạn thẳng. Làm như vậy với 20 điểm ta được 19.20 đường thẳng.

Như vậy mỗi đường thẳng đã được tính 2 lần, do đó chỉ có $19.20 : 2$ đoạn thẳng

Vì qua ba điểm không thẳng hàng ta vẽ được một tam giác

Nên cứ nối hai điểm đầu của một đoạn thẳng nằm trên đường thẳng xy với điểm A nằm ngoài đường thẳng xy ta sẽ vẽ được một tam giác.

Vậy số tam giác vẽ được bằng số đoạn thẳng nằm trên đường thẳng xy .

Như vậy ta có 190 tam giác.

Bài 14: Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Biết rằng tổng số giao điểm mà n đường thẳng đó cắt nhau tạo ra bằng 465. Tìm n .

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Lời giải

Có n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy, nên mỗi đường thẳng sẽ cắt $n-1$ đường thẳng còn lại tạo ra $n-1$ giao điểm phân biệt.

Do đó n đường thẳng thì có $n(n-1)$ giao điểm.

Nhưng mỗi giao điểm đã được tính 2 lần nên thực tế chỉ có $\frac{n(n-1)}{2}$ giao điểm.

Theo bài ra ta có: $\frac{n(n-1)}{2} = 465$

$$n(n-1) = 930 = 31.30$$

$$n = 31$$

Vậy $n = 31$

Bài 15: Cho 2010 đường thẳng trong đó bất kỳ 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau. Không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Lời giải

Mỗi đường thẳng cắt 2009 đường thẳng còn lại tạo nên 2009 giao điểm

Mà có 2010 đường thẳng nên có: 2009.2010 giao điểm

Nhưng mỗi giao điểm được tính 2 lần

Do đó số giao điểm thực tế là: $(2009.2010):2 = 2019045$ (giao điểm)

Vậy có 2019045 giao điểm.

Bài 16: Cho 30 điểm trong đó có đúng 5 điểm thẳng hàng, ngoài ra không còn có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ một đường thẳng. Hỏi có tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021-2022

Lời giải

Giả sử không có 5 điểm thẳng hàng thì vẽ được: $\frac{30.29}{2} = 435$ (đường thẳng)

Có 5 điểm thẳng hàng nên số đường thẳng giảm đi là: $\frac{5.4}{2} - 1 = 9$ (đường thẳng)

Vậy số đường thẳng vẽ được là: $435 - 9 = 426$ (đường thẳng).

Bài 17: Cho 20 điểm phân biệt, trong đó có n điểm thẳng hàng. Cứ qua hai điểm vẽ được một đường thẳng. Hãy tìm n , biết rằng vẽ được tổng cộng 170 đường thẳng.

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021 -2022

Lời giải

Giả sử 20 điểm phân biệt, không có bất kì ba điểm nào thẳng hàng

Chọn ra một điểm, kẻ các đường thẳng từ điểm này tới $20-1$ đường thẳng còn lại thì được tất cả $20-1$ đường thẳng.

Làm tương tự với các đường thẳng còn lại, ta được tất cả $20(20-1)$ đường thẳng.

Nhưng mỗi đường thẳng được tính hai lần nên số đường thẳng vẽ được là:

$$\frac{20.(20-1)}{2} = \frac{20.19}{2} = 190 \text{ đường thẳng.}$$

Nếu trong n điểm, không có bất kì ba điểm nào thẳng hàng. Với cách làm tương tự như trên thì số đường thẳng vẽ được là $\frac{n(n-1)}{2}$ đường thẳng.

Nhưng theo bài toán thì có n điểm thẳng hàng nên số đường thẳng bị giảm đi là $\frac{n(n-1)}{2} - 1$ đường thẳng.

Do đó với 20 điểm mà có n điểm thẳng hàng thì vẽ được số đường thẳng là

$$190 - \left(\frac{n(n-1)}{2} - 1 \right) \text{ đường thẳng.}$$

Theo bài toán ta có: $190 - \left(\frac{n(n-1)}{2} - 1 \right) = 170$

$$190 - \frac{n(n-1)}{2} + 1 = 170$$

$$191 - \frac{n(n-1)}{2} = 170$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 21$$

$$n(n-1) = 42$$

$$n(n-1) = 7.6$$

$$n = 7$$

Vậy $n = 7$.

Bài 18: Cho n điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Biết rằng có tất cả 105 đường thẳng. Tính n

Trích đề HSG huyện Ngọc Lặc năm 2018-2019

Lời giải

Tính được số đường thẳng: $\frac{n(n-1)}{2} = 105$

$$n(n-1) = 210 = 15.14$$

$$n = 15$$

Bài 19: Cho 20 điểm phân biệt trong đó có đúng 7 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi từ 20 điểm đó vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Trích đề HSG huyện Hoài Nhơn năm 2015-2016

Lời giải

Nếu trong 20 điểm không có ba điểm nào thẳng hàng thì vẽ được $\frac{20 \cdot (20-1)}{2} = 190$. (Đường thẳng).

Trong 7 điểm không có ba điểm nào thẳng hàng thì tạo thành $\frac{7 \cdot (7-1)}{2} = 21$ (Đường thẳng).

Vì 7 điểm thẳng hàng tạo thành 1 đường thẳng nên số đường thẳng giảm $21 - 1 = 20$ (Đường thẳng).

Vậy có $190 - 20 = 170$ (Đường thẳng).

Bài 20: a) Cho 40 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được bao nhiêu đường thẳng ?

b) Cho 40 điểm trong đó có đúng 10 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được bao nhiêu đường thẳng.

c) Cho n điểm ($n \in \mathbb{N}$). Trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, cứ qua hai điểm ta được 1 đường thẳng. Biết rằng có tất cả 105 đường thẳng. Tìm n ?

Trích đề HSG cấp trường Trần Phú năm 2018-2019

Lời giải

a) Kể từ 1 điểm bất kỳ với các điểm còn lại được: 39 đường thẳng

Làm như vậy với 40 điểm ta được $39 \cdot 40 = 1560$ (đường thẳng)

Nhưng mỗi đường thẳng được tính hai lần

Do vậy số đường thẳng thực sự là : $1560 : 2 = 780$ (đường thẳng)

b) Nếu 40 điểm không có ba điểm nào thẳng hàng thì sẽ vẽ được 780 đường thẳng.
 *Với 10 điểm, không có ba điểm nào thẳng hàng thì vẽ được: $10.9 : 2 = 45$ (đường thẳng)
 Số đường thẳng cần tìm là : $780 - 44 = 736$ (đường thẳng)

c) Ta có: $n.(n-1) : 2 = 105$

$$n(n-1) = 210$$

$$n(n-1) = 15.14$$

$$n = 15$$

Vậy $n = 15$

Bài 21: Cho 2018 điểm phân biệt trong đó có đúng 3 điểm thẳng hàng. Qua hai điểm ta kẻ được một đường thẳng. Tính số đường thẳng kẻ được.

Trích đề chọn HSG Nga Sơn năm 2017-2018

Lời giải

Giả sử trong 2018 điểm không có ba điểm nào thẳng hàng

Từ 1 điểm ta nối với 2017 điểm còn lại ta được 2017 đường thẳng. Làm như vậy với 2018 điểm ta được $2018.2017 = 4070306$ (đường thẳng)

Vì mỗi đường thẳng được tính hai lần, do đó số đường thẳng kẻ được là :

$$4070306 : 2 = 2035153 \text{ (đường thẳng)}$$

Số đường thẳng đi qua 3 điểm không thẳng hàng là 3; Số đường thẳng đi qua 3 điểm phân biệt thẳng hàng là 1; Khi thay 3 điểm phân biệt không thẳng hàng thành 3 điểm phân biệt thẳng hàng thì số đường thẳng giảm đi là : $3 - 1 = 2$

Do trong 2018 điểm phân biệt trên có đúng ba điểm thẳng hàng nên số đường thẳng thực tế kẻ được là: $2035153 - 2 = 2035151$

Vậy ta kẻ được tất cả là 2035151 đường thẳng.

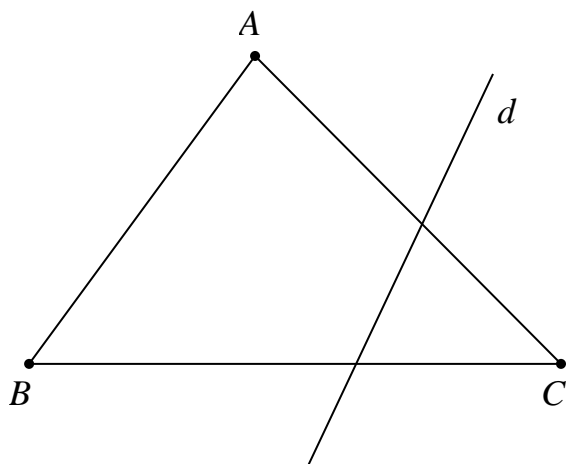
Bài 22: Cho tam giác ABC và một đường thẳng d không đi qua bất kỳ đỉnh nào của tam giác và cắt cạnh BC của tam giác. Hãy chứng tỏ rằng đường thẳng d cắt một và chỉ một trong hai cạnh AB và AC của tam giác ABC

Trích đề KSCL HSG Ba Vì năm 2017-2018

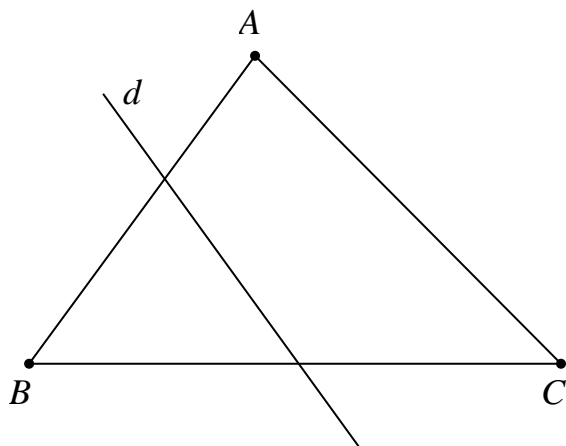
Lời giải

Đường thẳng d cắt cạnh BC và $B, C \notin d$ nên B và C nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là đường thẳng d

TH1: Nếu A thuộc nửa mặt phẳng chứa điểm B thì d cắt cạnh AC mà không cắt cạnh AB



Th2: Nếu A thuộc nửa mặt phẳng chứa C thì d cắt cạnh AB mà không cắt cạnh AC



*** Tính số góc, số tam giác được tạo ra**

Bài 23: Trên đoạn thẳng AB lấy 2006 điểm khác nhau đặt tên theo thứ tự từ A đến B là $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2004}$. Từ điểm M không nằm trên đoạn thẳng AB ta nối M với các điểm $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2004}; B$. Tính số tam giác tạo thành.

Trích đề HSG cấp trường năm 2019-2020

Lời giải

Trên đoạn thẳng AB có các điểm $A; A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2004}; B$ do đó, tổng số điểm trên AB là 2006 điểm suy ra có 2006 đoạn thẳng nối từ M đến các điểm đó.

Mỗi đoạn thẳng (ví dụ MA) có thể kết hợp với 2005 đoạn thẳng còn lại và các đoạn thẳng tương ứng trên AB để tạo thành 2005 tam giác.

Do đó 2006 đoạn thẳng sẽ tạo thành $2005 \cdot 2006 = 4022030$ tam giác (nhưng lưu ý là MA kết hợp với MA_1 để được 1 tam giác thì MA_1 cũng kết hợp với MA được tam giác và hai tam giác này chỉ là 1)

Do đó số tam giác thực có là: $4022030 : 2 = 2011015$

Bài 24: Cho 10 đường thẳng đồng quy tại O . Hỏi có bao nhiêu góc ở đỉnh O được tạo thành (không kể góc bẹt) ?

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015 -2016

Lời giải

10 đường thẳng đồng quy tại O

Do đó có 20 tia gốc O .

Chọn ra một tia, tia đó tạo với mỗi tia trong 19 tia còn lại thành 1 góc.

Làm như thế với 20 tia ta có $20 \cdot 19 = 380$ (góc), trong đó mỗi góc đã được tính hai lần.

Do đó số góc tạo thành là: $380 : 2 = 190$ (góc).

Số góc tạo thành khác góc bẹt là: $190 - 10 = 180$ (góc).

Bài 25: Cho 100 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm vẽ một đường thẳng. Số đường thẳng vẽ được là:

A. 200.

B. 4950.

C. 5680.

D. 9900.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: B. 4950.

Bài 26: Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Biết rằng tổng số giao điểm mà n đường thẳng đó cắt nhau tạo ra bằng 465. Tìm n .

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Lời giải

Có n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy, nên mỗi đường thẳng sẽ cắt $n-1$ đường thẳng còn lại tạo ra $n-1$ giao điểm phân biệt.

Do đó n đường thẳng thì có $n(n-1)$ giao điểm.

Nhưng mỗi giao điểm đã được tính 2 lần nên thực tế chỉ có $\frac{n(n-1)}{2}$ giao điểm.

Theo bài ra ta có: $\frac{n(n-1)}{2} = 465$

Suy ra: $n(n-1) = 930 = 31.30$ do đó $n = 31$

Vậy $n = 31$.

Bài 27: Có 25 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Nếu thay 25 điểm bởi n điểm ($n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$) thì số đường thẳng là bao nhiêu?

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

Lời giải

Lấy 1 điểm nối với 24 điểm còn lại ta được 24 đường thẳng.

Vì có 25 điểm nên có 25.24 đường thẳng nhưng mỗi đường thẳng được tính 2 lần.

Vậy số đường thẳng vẽ được là $\frac{25.24}{2} = 300$ (đường thẳng)

Nếu thay 25 điểm bởi n điểm ($n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$) thì số đường thẳng là $\frac{n(n-1)}{2}$.

Bài 28: Cho 30 điểm trong đó có đúng 5 điểm thẳng hàng (ngoài ra không còn 3 điểm nào thẳng hàng). Qua 2 điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi có tất cả bao nhiêu đường thẳng.

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Lời giải

Giả sử có 30 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng thì số đường thẳng là: $\frac{30.29}{2} = 435$ (đường thẳng).

Với 5 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng thì vẽ được $\frac{5.4}{2} = 10$ (đường thẳng).

Nhưng 5 điểm này thẳng hàng nên chỉ vẽ được 1 đường thẳng.

Do đó số đường thẳng giảm đi là: $10-1=9$ (đường thẳng).

Vậy vẽ được $435 - 9 = 426$ (đường thẳng).

Bài 29: Cho trước n điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Nếu bớt đi 1 điểm thì số đường thẳng vẽ được qua các cặp điểm giảm đi 10 đường thẳng. Tìm n .

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021 - 2022

Lời giải

Từ 1 điểm bất kì nối với $(n-1)$ điểm còn lại được n đường thẳng.

suy ra n điểm nối với $(n-1)$ điểm còn lại được $n(n-1)$ đường thẳng.

Mà mỗi đường thẳng được lập lại 2 lần

Nên số đường thẳng tạo thành từ n điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng là: $\frac{n(n-1)}{2}$ đường thẳng.

Tương tự: Số đường thẳng tạo thành từ $n-1$ điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng là: $\frac{(n-1).(n-2)}{2}$ đường thẳng.

Vì số đường thẳng giảm đi 10 đường nên ta có:

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1).(n-2)}{2} = 10$$

$$n(n-1) - (n-1)(n-2) = 20$$

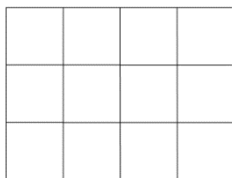
$$n^2 - n - (n^2 - n - 2n + 2) = 20$$

$$n^2 - n - n^2 + n + 2n - 2 = 20$$

$$2n - 2 = 20$$

$$n = 11$$

Vậy $n = 11$.



Bài 30: Cho hình chữ nhật có chiều dài 4 cm, chiều rộng 3 cm. Chia các cạnh của hình chữ nhật thành những đoạn thẳng bằng nhau có độ dài mỗi đoạn là 1 cm. Nối các điểm chia như hình vẽ bên. Hỏi trong hình vẽ có tất cả bao nhiêu hình vuông.

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Lời giải

Quan sát hình vẽ ta thấy:

Số các hình vuông có độ dài cạnh bằng 1 cm là: $4.3 = 12$ hình vuông.

Số các hình vuông có độ dài cạnh bằng 2 cm là: $3.2 = 6$ hình vuông.

Số các hình vuông có độ dài cạnh bằng 3 cm là: $2.1 = 2$ hình vuông.

Tổng số hình vuông là: $12 + 6 + 2 = 20$. hình vuông.

Bài 31: Cho n điểm phân biệt, trong đó có đúng 10 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm ta vẽ được một đường thẳng. Có tất cả 256 đường thẳng. Tính số điểm n .

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Lời giải

Với n điểm phân biệt, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng thì số các đường thẳng kẻ được là $\frac{n(n-1)}{2}$.

Với 10 điểm phân biệt, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng thì số các đường thẳng kẻ được là $\frac{10.9}{2} = 45$.

Do 7 điểm thẳng hàng nên qua 7 điểm chỉ vẽ được 1 đường thẳng.

Vậy qua n điểm phân biệt, trong đó có đúng 10 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có 3 điểm nào thẳng hàng ta vẽ được số đường thẳng là $\frac{n(n-1)}{2} - 45 + 1$.

Do vẽ được 256 đường thẳng ta có $\frac{n(n-1)}{2} - 44 = 256$

$\frac{n(n-1)}{2} = 300$ suy ra $n(n-1) = 600 = 25.24$

Vậy $n = 25$

Bài 32. a) Cho 40 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được bao nhiêu đường thẳng ?

b) Cho 40 điểm trong đó có đúng 10 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được bao nhiêu đường thẳng.

c) Cho n điểm ($n \in \mathbb{N}$). Trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, cứ qua hai điểm ta được 1 đường thẳng. Biết rằng có tất cả 105 đường thẳng. Tìm n ?

Trích đề HSG Trần Phú Gia Lai năm 2018-2019

Lời giải

a) Kể từ 1 điểm bất kỳ với các điểm còn lại được : 39 đường thẳng

Làm như vậy với 40 điểm ta được $39.40 = 1560$ (đường thẳng)

Nhưng mỗi đường thẳng được tính hai lần

Do vậy số đường thẳng thực sự là : $1560 : 2 = 780$ (đường thẳng)

b) Nếu 40 điểm không có ba điểm nào thẳng hàng thì sẽ vẽ được 780 đường thẳng.

*Với 10 điểm, không có ba điểm nào thẳng hàng thì vẽ được:

$10.9 : 2 = 45$ (đường thẳng)

Số đường thẳng cần tìm là : $780 - 44 = 736$ (đường thẳng)

c) Ta có:

$$n.(n-1) : 2 = 105$$

$$n(n-1) = 210$$

$$n(n-1) = 15.14$$

Vậy $n = 15$

II: Trung điểm của đoạn thẳng

Dạng toán: Tính độ dài đoạn thẳng, chứng minh trung điểm của đoạn thẳng.

Bài 1: Trên đường thẳng a lấy 3 điểm M, N, P sao cho $MN = 2cm, NP = 5cm$. Khi đó độ dài đoạn thẳng MP bằng:

A. 3 cm

B. 3 cm hoặc 7 cm

C. 7 cm

D. 3,5 cm

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 2: Cho đoạn thẳng $AB = 12\text{cm}$. Biết điểm M thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AM = 7\text{cm}$, khi đó $AM - MB$ bằng:

- A. 3 cm B. 4 cm C. 2 cm D. 5 cm

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 3: Cho đoạn thẳng $CD = 20\text{ cm}$. Gọi M là trung điểm của CD , I là trung điểm của MC , K là trung điểm của MD , khi đó IK có độ dài là

- A. 10 cm B. 5 cm C. 6 cm D. 2,5 cm

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 4: Cho đoạn thẳng $AB = a$; điểm C nằm giữa hai điểm A và B , điểm M là trung điểm của AC ,

điểm N là trung điểm của CB . Hãy chứng tỏ rằng $MN = \frac{a}{2}$

Trích đề HSG tỉnh Bắc Ninh năm 2016 - 2017

Lời giải



M là trung điểm của AC nên: $AM = MC = \frac{1}{2} AC$

N là trung điểm CB nên: $CN = NB = \frac{1}{2} CB \Rightarrow MC + CN = \frac{1}{2}(AC + CB)$

C nằm giữa A và B nên C nằm giữa M và N

C nằm giữa M và $N \Rightarrow MC + CN = MN$

C nằm giữa A và $B \Rightarrow AC + CB = AB = a$

Do đó $MN = \frac{a}{2}$

Bài 5: Cho đoạn thẳng AB , điểm O thuộc tia đối của tia AB . Gọi M, N thứ tự là trung điểm của OA, OB .

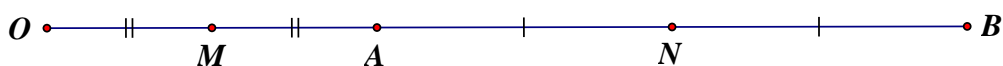
a) Chứng tỏ rằng $OA < OB$

b) Trong ba điểm O, M, N điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại ?

c) Chứng tỏ rằng độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào vị trí của điểm O (O thuộc tia đối của tia AB)

Trích đề HSG Toán 6 năm 2019 -2020

Lời giải



a) Điểm A nằm giữa hai điểm O và B , suy ra:

$$\Rightarrow OA < OB$$

b) Ta có: M, N thứ tự là trung điểm OA, OB nên $\Rightarrow OM = \frac{OA}{2}; ON = \frac{OB}{2}$

Theo hình vẽ ta có điểm M nằm giữa hai điểm O và N

c) Từ hình vẽ ta có

$$OM + MN = ON \Rightarrow MN = ON - OM \Rightarrow MN = \frac{OB - OA}{2} = \frac{AB}{2}$$

Vì AB có độ dài không đổi nên MN có độ dài không đổi, hay độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào vị trí của điểm O (O thuộc tia đối của tia AB)

Bài 6: Cho đoạn thẳng $AB = 8\text{cm}$. Lấy điểm C nằm giữa hai điểm A và B sao cho $BC = 4,5\text{ cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng AC .

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Lời giải



Vì điểm C nằm giữa hai điểm A và B nên ta có

$$AC + CB = AB \Rightarrow AC = AB - CB$$

Thay $AB = 8\text{cm}, BC = 4,5\text{cm}$ ta được $AC = 8 - 4,5 = 3,5\text{ (cm)}$

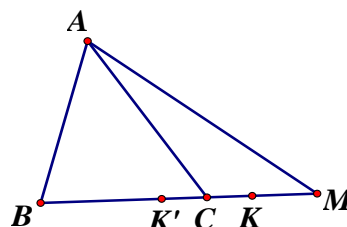
Vậy $AC = 3,5\text{ cm}$.

Bài 7: Cho $\triangle ABC$ có $BC = 5,5\text{ cm}$. Điểm M thuộc tia đối của tia CB sao cho $CM = 3\text{ cm}$

- Tính độ dài đoạn thẳng BM
- Biết $\angle BAM = 80^\circ, \angle BAC = 60^\circ$ Tính $\angle CAM$
- Tính độ dài đoạn thẳng BK thuộc đoạn BM biết $CK = 1\text{ cm}$

Trích đề HSG huyệnnăm 2019-2020

Lời giải



- C nằm giữa B và M
 $\Rightarrow BC + CM = BM$
 $\Rightarrow BM = 3 + 5,5 = 8,5\text{ (cm)}$
- C nằm giữa B và $M \Rightarrow AC$ là tia nằm giữa hai tia AB, AM
 $\Rightarrow \angle BAC + \angle CAM = \angle BAM$
 $\Rightarrow \angle CAM = \angle BAM - \angle BAC$

$$\Rightarrow \widehat{CAM} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$$

c) Xét 2 trường hợp:

+ Nếu K nằm giữa C và M tính được: $BK = BC + CM = 5,5 + 1 = 6,5$ cm

+ Nếu K nằm giữa C và B tính được: $BK = 4,5$ cm

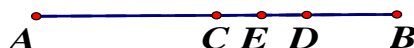
Bài 8:

Cho đoạn thẳng $AB = 8$ cm và C là trung điểm của nó, lấy điểm D là trung điểm của CB , E là trung điểm của CD . Tính độ dài đoạn thẳng EB .

Trích đề HSG Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020

Lời giải

Hình vẽ:



C là trung điểm của AB nên: $CB = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ (cm)

D là trung điểm của CB nên: $DB = \frac{1}{2} CB = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ (cm)

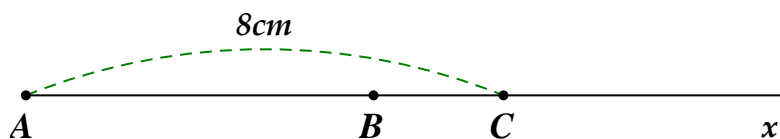
E là trung điểm của CD nên: $ED = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ (cm)

$$EB = ED + DB = 1 + 2 = 3 \text{ (cm)}$$

Bài 9: Vẽ tia Ax . Trên tia Ax xác định hai điểm B và C sao cho B nằm giữa A, C và $AC = 8$ cm, $AB = 3BC$. Tính độ dài các đoạn AB, BC .

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải



Có điểm B nằm giữa $A, C \Rightarrow AB + BC = AC$

$$\Rightarrow 3BC + BC = 8$$

$$\Rightarrow 4BC = 8$$

$$\Rightarrow BC = 2 \Rightarrow AB = 6$$

Vậy $AB = 6$ cm; $BC = 2$ cm

Bài 10: Trên đường thẳng a lấy ba điểm M, N, P sao cho $MN = 2$ cm, $NP = 5$ cm. Khi đó độ dài đoạn MP bằng bao nhiêu

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Lời giải

TH1: M nằm giữa N và P

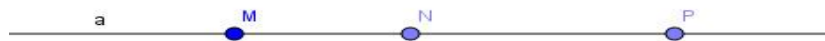


Từ hình vẽ ta có: $NP = MN + MP$

$$\Rightarrow 5 = 2 + MP$$

$$\Rightarrow MP = 3(\text{cm})$$

TH2: N nằm giữa M và P



Từ hình vẽ ta có: $MP = MN + NP$

$$\Rightarrow MP = 2 + 5$$

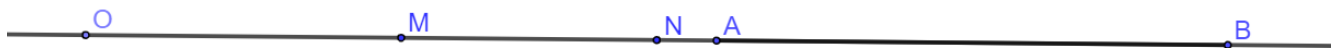
$$\Rightarrow MP = 7(\text{cm})$$

Bài 11: Cho đoạn thẳng AB ; điểm O thuộc tia đối của tia AB , Gọi M, N thứ tự là trung điểm của OA, OB .

Chúng tỏ rằng độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào vị trí của điểm O (O thuộc tia đối của tia AB)

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Lời giải



$$\text{Vì } M \text{ là trung điểm } OA \text{ nên } OM = \frac{OA}{2}$$

$$\text{Vì } N \text{ là trung điểm } OB \text{ nên } ON = \frac{OB}{2}$$

$$MN = ON - OM = \frac{OB - OA}{2} = \frac{AB}{2}$$

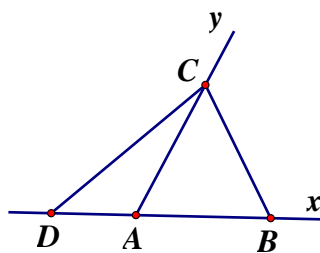
$$MN = \frac{AB}{2}. \text{ Vì } AB \text{ có độ dài không đổi nên } MN \text{ có độ dài không đổi.}$$

Bài 12: Cho góc xAy , trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = 6cm$. Trên tia đối của tia Ax lấy điểm D sao cho $AD = 4cm$.

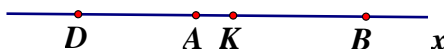
- Tính BD
- Lấy C là một điểm trên tia Ay . Biết $BCD = 80^\circ, BCA = 45^\circ$. Tính góc ACD
- Biết $AK = 2cm$ (K thuộc BD). Tính BK .

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Lời giải



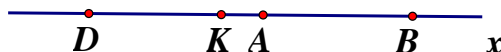
- A nằm giữa D và B
 $\Rightarrow BD = BA + AD = 6 + 4 = 10(cm)$
- Vì CA nằm giữa hai tia CB, CD .
 $\Rightarrow ACD + ACB = BCD \Rightarrow ACD = BCD - ACB = 80^\circ - 45^\circ = 35^\circ$
- Trường hợp 1: K thuộc tia Ax



- Nói được K nằm giữa A và B
- Suy ra $AK + KB = AB \Rightarrow KB = AB - AK = 6 - 2 = 4(cm)$

Trường hợp 2: K thuộc tia đối của tia Ax

- Nói được A nằm giữa K và B



Suy ra $KB = KA + AB \Rightarrow KB = 6 + 2 = 8(cm)$

Kết luận : Vậy $KB = 4cm$ hoặc $KB = 8cm$.

Bài 13: Cho đoạn thẳng AB , điểm O thuộc tia đối của tia AB . Gọi M, N thứ tự là trung điểm của OA, OB .

- Chứng tỏ rằng $OA < OB$
- Trong ba điểm O, M, N điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại ?

c) Chứng tỏ rằng độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào vị trí của điểm O (O thuộc tia đối của tia AB)

Trích đề HSG huyện Nông Công năm 2019-2020

Lời giải



a) Điểm A nằm giữa hai điểm O và B , suy ra: $\Rightarrow OA < OB$

b) Ta có: M, N thứ tự là trung điểm OA, OB nên $\Rightarrow OM = \frac{OA}{2}; ON = \frac{OB}{2}$

Vì $OA < OB$ nên $OM < ON$

Hai điểm M, N thuộc tia OB , mà $OM < ON$ nên điểm M nằm giữa hai điểm O và N

c) Vì điểm M nằm giữa hai điểm O và N , nên ta có:

$$\Rightarrow OM + MN = ON \Rightarrow MN = ON - OM \Rightarrow MN = \frac{OB - OA}{2} = \frac{AB}{2}$$

Vì AB có độ dài không đổi nên MN có độ dài không đổi, hay độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào vị trí của điểm O (O thuộc tia đối của tia AB)

Bài 14: Vẽ đoạn thẳng $AB = 5cm$

- Trên đoạn thẳng AB lấy hai điểm M, N sao cho $MN = 1cm$. Tính $AM + BN$?
- Trên đoạn thẳng AB lấy hai điểm M, N sao cho $AM + BN = 7cm$. Tính MN ?

Trích đề HSG huyện Quế Sơn năm 2018-2019

Lời giải

Trường hợp 1:

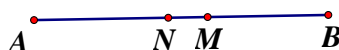


M nằm giữa hai điểm A, N : $AM + MN = AN \Rightarrow AM = AN - MN$

N nằm giữa hai điểm A, B nên $AN + NB = AB \Rightarrow BN = AB - AN$

$$\Rightarrow AM + BN = AB - AN + AN - MN = AB - MN = 5 - 1 = 4cm$$

Trường hợp 2



N nằm giữa A, M : $AN + NM = AM$ hay $AM = AN + MN$

N nằm giữa hai điểm A, B nên:

$$\begin{aligned} AN + NB = AB &\Rightarrow BN = AB - AN \Rightarrow AM + BN = AB - AN + AN + MN \\ &= AB + MN = 5 + 1 = 6cm \end{aligned}$$

$$AM + BN = 7cm \quad (*)$$

$AN + BN = 5cm \Rightarrow AM > AN \Rightarrow N$ nằm giữa hai điểm A, M

N nằm giữa hai điểm A, M được: $AM = AN + NM$

Thay vào (*) được: $AN + NM + BN = 7cm$

N nằm giữa hai điểm A, B nên $AN + BN = AB = 5cm$

Thay vào trên được: $5 + NM = 7 \Rightarrow MN = 7 - 5 = 2cm$

Bài 15: Trên đường thẳng xy lấy điểm O và hai điểm M, N sao cho $OM = 2cm, ON = 3cm$. Vẽ các điểm A, B trên đường thẳng xy sao cho M là trung điểm của OA ; N là trung điểm của OB . Tính độ dài AB .

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021 - 2022

Lời giải

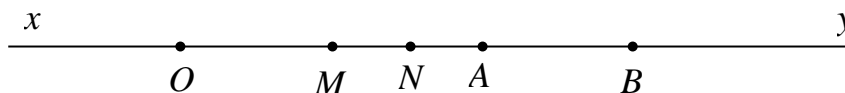
N là trung điểm của OB nên: $ON = \frac{OB}{2}$

Do đó: $OB = 2ON = 2.3 = 6cm$

M là trung điểm của OA nên: $OM = \frac{OA}{2}$

Do đó: $OA = 2OM = 2.2 = 4cm$

TH1: M nằm giữa hai điểm O và N .

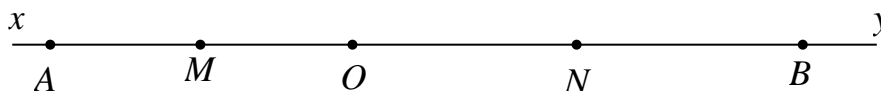


A nằm giữa O và B nên:

$$OA + AB = OB$$

$$AB = OB - OA = 6 - 4 = 2cm$$

TH2: O nằm giữa hai điểm N và M .



A nằm giữa O và B nên:

$$AB = OB + OA = 6 + 4 = 10cm$$

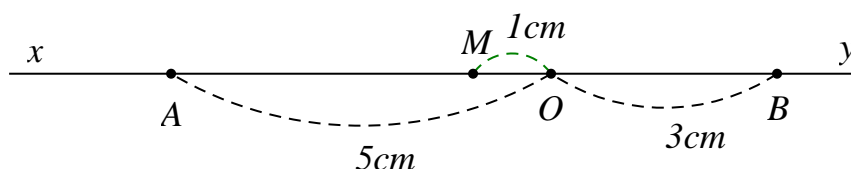
Nếu M nằm giữa hai điểm O và N thì $AB = 2cm$.

Nếu O nằm giữa hai điểm N và M thì $AB = 10cm$.

Bài 16: Cho hai tia Ox và Oy đối nhau. Trên tia Ox lấy hai điểm A và M sao cho $OA = 5cm, OM = 1cm$. Trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OB = 3cm$. Chỉ ra: M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021-2022

Lời giải



Điểm M nằm giữa O và A nên: $OM + MA = OA$.

$$MA = OA - OM = 5 - 1 = 4(\text{cm})$$

Điểm O nằm giữa hai điểm M và B .

Khi đó: $OM + OB = MB$ hay $MB = 1 + 3 = 4(\text{cm})$.

Điểm M nằm giữa hai điểm A và B

Mà $MA = MB = 4\text{cm}$

Do đó M là trung điểm AB .

Bài 17: Cho đường thẳng xy . Trên xy , lấy ba điểm A, B, C sao cho $AB = a(\text{cm})$, $AC = b(\text{cm})$ ($b > a$). Gọi I là trung điểm của AB .

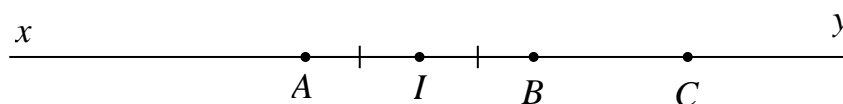
a) Tính IC .

b) Lấy 4 điểm M, N, P, Q nằm ngoài đường thẳng xy . Chứng tỏ rằng đường thẳng xy không cắt hoặc cắt ba, hoặc cắt bốn đoạn thẳng trong các đoạn thẳng sau: MN, MP, MQ, NP, NQ, PQ .

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2019 -2020

Lời giải

a) TH1: B, C nằm cùng phía với nhau so với A



$$I \text{ là trung điểm của } AB \text{ nên: } IA = IB = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$$

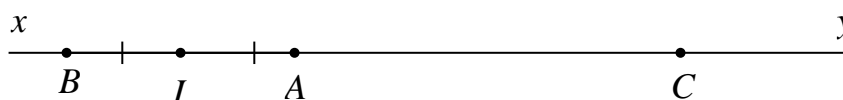
Trên xy , lấy ba điểm A, B, C sao cho $AB = a(\text{cm})$, $AC = b(\text{cm})$ mà ($b > a$).

B nằm giữa A và C nên:

$$BC = AC - AB = b - a$$

$$IC = IB + BC = \frac{a}{2} + b - a = b - \frac{a}{2} (\text{cm})$$

Th2: B, C nằm khác phía so với điểm A



$$\text{Học sinh tính được: } IC = b + \frac{a}{2}$$

b) TH1: Nếu cả 4 điểm cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng xy thì đường thẳng xy không cắt các đoạn thẳng: MN, MP, MQ, NP, NQ, PQ .

*Th2: Nếu có 3 điểm (giả sử M, N, P) cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng xy còn 1 điểm Q nằm khác phía bờ là đường thẳng xy thì đường thẳng xy cắt 3 đoạn thẳng sau: MQ, NQ, PQ

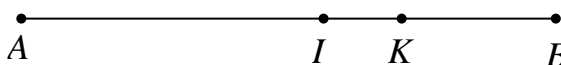
*Th3: Nếu có 2 điểm (giả sử M, N) cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng còn 2 điểm ($P; Q$) nằm khác phía bờ là đường thẳng xy thì đường thẳng xy cắt 4 đoạn sau: MP, MQ, NP, NQ .

Bài 18: a) Cho đoạn thẳng $AB = 7cm$. Trên tia AB lấy điểm I sao cho $AI = 4cm$. Trên tia BA lấy điểm K sao cho $BK = 2cm$. Tính IK .

b) Trên tia Ox cho 4 điểm A, B, C, D . Biết rằng A nằm giữa B và C , B nằm giữa C và D ; $OA = 5cm, OD = 2cm, BC = 4cm$ và độ dài AC gấp đôi độ dài BD . Tính độ dài các đoạn BD, AC .

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2017 -2018

Lời giải



a) Điểm K nằm giữa A và B nên: $AK + KB = AB$

$$AK = 7 - 2 = 5cm$$

Điểm I nằm giữa A và K nên: $AI + IK = AK$

$$4 + IK = 5$$

$$IK = 5 - 4 = 1 (cm)$$

b) Điểm A nằm giữa B và C nên: $BA + AC = BC$

$$BA + AC = 4 \quad (1)$$

Điểm D nằm giữa O và A nên: $OD + DA = OA$

$$2 + DA = 5$$

$$DA = 5 - 2 = 3cm$$

Ta có: $DB + BA = DA$

$$DB + BA = 3 \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có: $AC - DB = 1$

Mà theo đề bài ta có: $AC = 2BD$

Ta có: $2BD - BD = 1$.

$$BD = 1(cm)$$

$$AC = 2BD = 2(cm)$$

Bài 19: Cho tam giác ABC có $BC = 6cm$. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $BD = 3cm$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng CD .

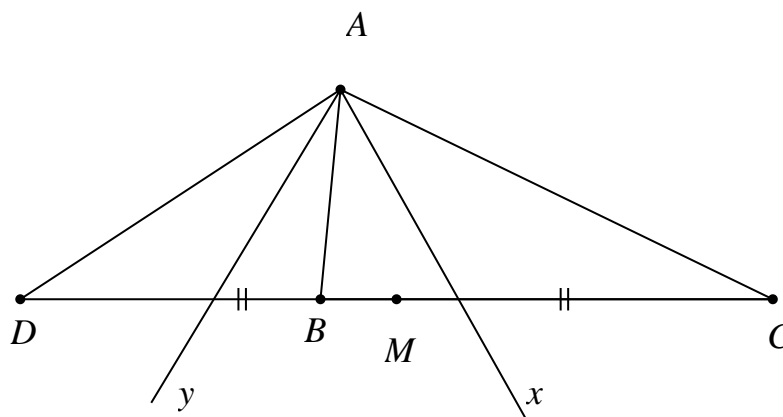
b) Gọi M là trung điểm của CD . Tính độ dài đoạn thẳng BM .

c) Biết góc $DAC = 120^\circ$. Vẽ Ax và Ay lần lượt là các tia nằm chính giữa của góc BAC và góc BAD .

d) Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB không chứa điểm D , nếu vẽ thêm n tia gốc A phân biệt không trùng với các tia AB, AC, Ax thì có tất cả bao nhiêu góc đỉnh A được tạo thành?

Trích đề HSG huyện Phù Ninh năm 2015 -2016

Lời giải



a) Vì điểm B nằm giữa hai điểm C và D , ta có:

$$CD = BC + BD = 6 + 3 = 9 \text{ (cm)}.$$

b) Vì M là trung điểm của đoạn CD nên $CM = MD = \frac{CD}{2} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ (cm)}$

Điểm M nằm giữa hai điểm C và B .

Ta có: $BC = BM + CM$

$$BM = BC - CM = 6 - 4,5 = 1,5 \text{ (cm)}.$$

c) Vì Ax là các tia nằm chính giữa của BAC

Vì Ay là các tia nằm chính giữa của BAD

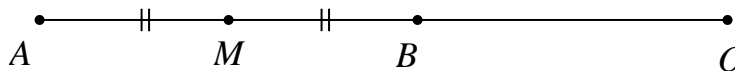
d) Ta có: $n+3$ tia góc A phân biệt (kể cả các tia AB, AC, Ax)

Mỗi tia trong $n+3$ tia hợp với $n+2$ tia còn lại một góc. Có $n+3$ tia như vậy nên có tất cả $(n+3)(n+2)$ góc. Tính như thế mỗi góc đã được tính hai lần nên có tất cả $(n+3)(n+2):2$ góc đỉnh A .

Bài 20: Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trên tia đối của tia BA lấy O (O khác B). So sánh độ dài đoạn thẳng OM và trung bình cộng của hai đoạn thẳng OA và OB .

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015 -2016

Lời giải



M là trung điểm của đoạn thẳng AB nên M nằm giữa A và B và $MA = MB$ (1)

Hai tia BM, BA trùng nhau; hai tia BO, BA đối nhau do đó B nằm giữa O và M

Ta có $OM = OB + BM$ (2).

M nằm giữa A và O do vậy $OM + MA = OA$

$$OM = OA - MA \text{ (3)}$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $2OM = OA + OB$ hay $OM = \frac{OA + OB}{2}$.

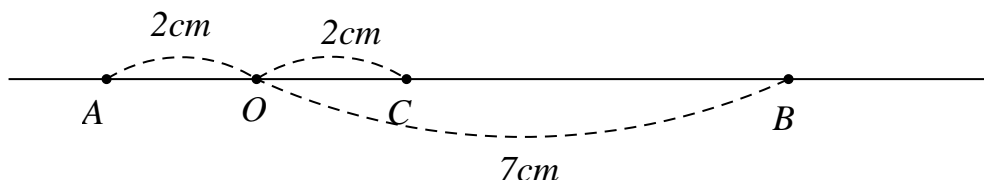
Bài 21: Trên đường thẳng xy lấy điểm O . Trên tia Ox lấy điểm A , trên tia Oy lấy điểm B, C sao cho $OA = OC = 2\text{cm}$ và $OB = 7\text{cm}$.

1) Vẽ hình sau đó:

- a) Tính độ dài đoạn thẳng BC .
- b) Cho biết điểm O có là trung điểm đoạn thẳng AC không? Vì sao?
- 2) Cần lấy thêm trên đường thẳng xy bao nhiêu điểm phân biệt không trùng với các điểm đã cho để trên đường thẳng có 465 đoạn thẳng mà mỗi đoạn thẳng có mút là hai trong các điểm đó.

Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Lời giải



- 1) a) Vì điểm C nằm giữa điểm O và điểm B nên ta có: $OC + CB = OB$
 $BC = OB - OC = 7 - 2 = 5(cm)$.

Vậy $BC = 5cm$.

- b) Ta có điểm O nằm giữa hai điểm A và C và $OA = OC = 2cm$
 Vậy điểm O là trung điểm của đoạn thẳng AC .

- 2) Trên đường thẳng có n điểm thì số đoạn thẳng được tạo thành là: $\frac{(n-1)n}{2}$ đoạn thẳng;

Theo bài ra, ta có: $\frac{(n-1)n}{2} = 465$

$$(n-1).n = 930$$

$$(n-1).n = 30.31$$

$$n = 31$$

Vậy để có 465 đoạn thẳng thì cần có 31 điểm mà đã có 4 điểm nên ta phải thêm vào 27 điểm nữa là đạt yêu cầu của đầu bài.

Bài 22: Cho đoạn thẳng AB và trung điểm M của nó. Chứng tỏ rằng nếu C là điểm nằm giữa M và

$$B \text{ thì: } CM = \frac{CA - CB}{2}$$

Trích đề HSG Trường Hưng Mỹ năm 2018-2019

Lời giải

$$\text{Ta có } CA = CM + MA \quad (1)$$

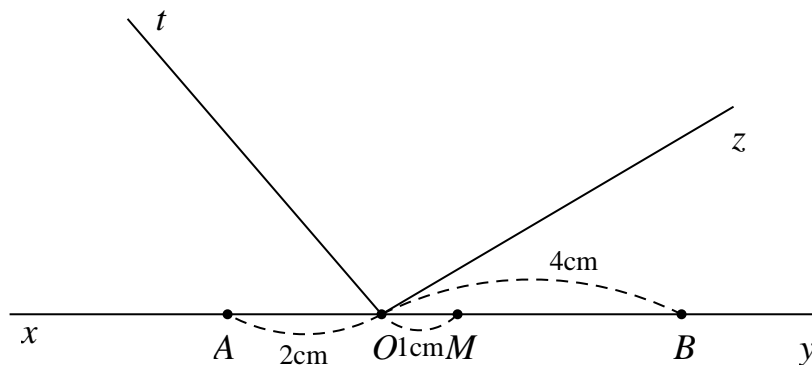
$$CB = MB - CM \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } CA - CB = 2CM \quad (MA = MB) \Rightarrow CM = \frac{CA - CB}{2}$$

Bài 23: Cho góc bẹt xOy , trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 2cm$; trên tia Oy lấy hai điểm M và B sao cho $OM = 1cm, OB = 4cm$. Chứng tỏ điểm M nằm giữa hai điểm O và B . Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Lời giải



Ta có M nằm giữa O và B

Ta có $MO + MB = OB$

$MB = OB - MO = 3cm$ (1)

Vì Ox, Oy đối nhau, $A \in Ox, M \in Oy$ nên O nằm giữa A và M

$AM = AO - OM = 3cm$ (2)

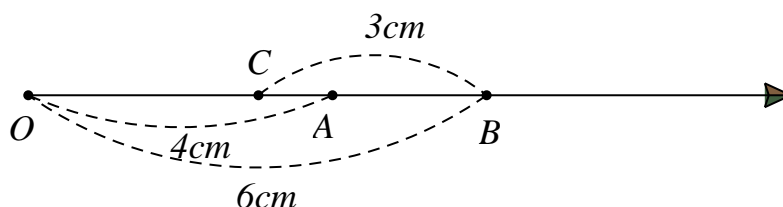
Từ (1) và (2) suy ra $MB = MA = 3(cm)$

Vậy M là trung điểm của AB

Bài 24: Gọi A và B là hai điểm trên tia Ox sao cho $OA = 4cm, OB = 6cm$. Trên tia BA lấy điểm C sao cho $BC = 3cm$. So sánh AB với AC .

Trích đề HSG cấp trường vòng 2 THCS Tân Lập năm 2018-2019

Lời giải



Hai điểm A, B trên tia Ox mà $OA < OB$ ($4 < 6$) nên điểm A nằm giữa O và B suy ra

$AB = OB - OA = 6 - 4 = 2(cm)$

Hai điểm A và C trên tia BA mà $BA < BC$ ($2cm < 3cm$) nên điểm A nằm giữa hai điểm B và C

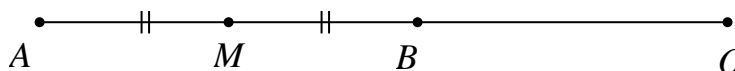
Suy ra : $AC = BC - BA = 3 - 2 = 1(cm)$

Vậy $AB > AC$ ($2 > 1$)

Bài 25: Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trên tia đối của tia BA lấy O (O khác B). So sánh độ dài đoạn thẳng OM và trung bình cộng của hai đoạn thẳng OA và OB

Trích đề thi chọn HSG Tam Dương năm 2016-2017

Lời giải



M là trung điểm của đoạn thẳng AB nên M nằm giữa A và B ; $MA = MB$ (1)

B nằm giữa O và M

Ta có $OM = OB + BM$ (2)

Hai tia MA, MB đối nhau, hai tia MB, MO trùng nhau suy ra hai tia MA, MO đối nhau do đó M nằm giữa A và O

Vậy $OM + MA = OA$

Do đó $OM = OA - MA$ (3)

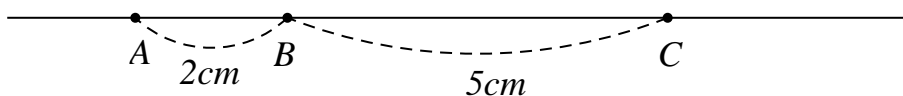
Từ (1), (2) và (3) suy ra $2OM = OA + OB$ hay $OM = \frac{OA + OB}{2}$

Bài 26: Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng 2 cm. Lấy điểm C thuộc đường thẳng AB sao cho $BC = 5$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng AC

Trích đề chọn HSG Trục Ninh năm 2017-2018

Lời giải

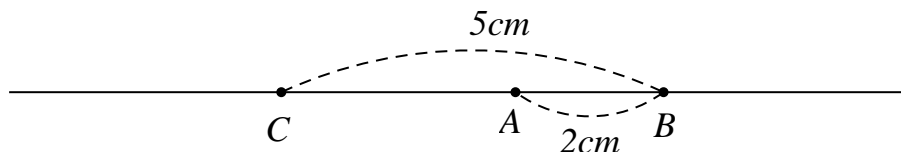
Trường hợp điểm C thuộc tia đối của tia BA



Điểm C thuộc tia đối của tia BA nên hai tia BA và BC đối nhau, suy ra điểm B nằm giữa hai điểm A và C

Ta có: $AB + BC = AC$ thay số tính được $AC = 7$ cm

Trường hợp điểm C thuộc tia BA



Trên tia BA , $BA < BC$ ($2\text{ cm} < 5\text{ cm}$) nên điểm A nằm giữa hai điểm B và C

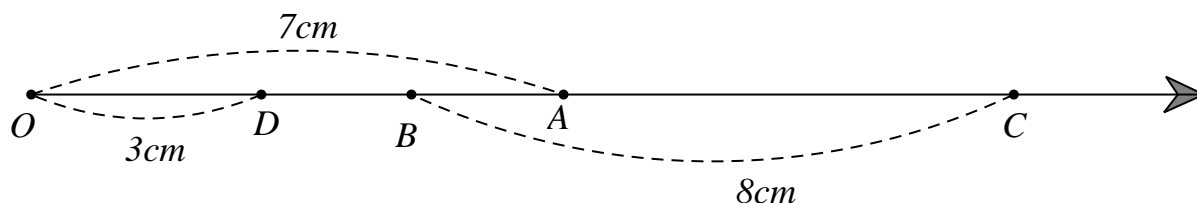
Ta có: $AB + AC = BC$ Thay số tính được $AC = 3$ cm

Bài 27: Trên tia Ox cho 4 điểm A, B, C, D . Biết rằng A nằm giữa B và C ; B nằm giữa C và D ; $OA = 7$ cm; $OD = 3$ cm; $BC = 8$ cm và $AC = 3BD$

- Tính độ dài AC
- Chứng tỏ rằng: Điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AD

Trích đề chọn HSG Nga Sơn năm 2017-2018

Lời giải



a) Đặt $BD = x$ (cm) $\Rightarrow AC = 3x$ (cm)

Vì D nằm giữa O và A (Do $OD < OA$) nên: $OD + DA = OA \Rightarrow DA = 4$

$DB + BA = 4$ hay $x + BA = 4$ (1)

Vì A nằm giữa B và C nên: $BA + AC = BC$ hay $3x + BA = 8$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $(3x + BA) - (x + BA) = 8 - 4$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

$$AC = 3.2 = 6(cm)$$

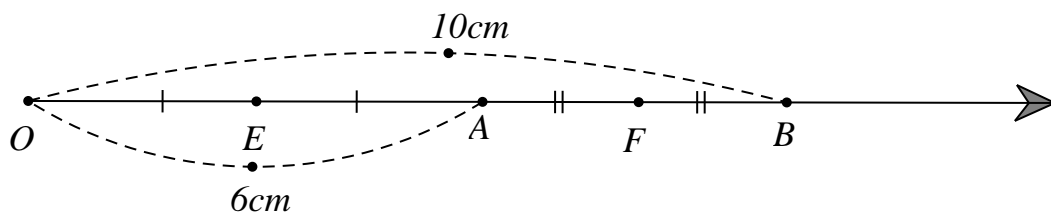
b) Theo (1) ta có: $x + BA = 4$ mà $x = 2$ nên $BA = 2$

Mà $BD = x = 2$ nên $BD = BA = 2$. Do đó B là trung điểm của đoạn thẳng AD

Bài 28: Trên tia Ox lấy 2 điểm A, B sao cho $OA = 6cm, OB = 10cm$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của OA, AB . Tính độ dài đoạn thẳng EF .

Trích đề chọn HSG Nga Sơn năm 2017-2018

Lời giải



Vì hai điểm A, B cùng nằm trên tia Ox mà $OA < OB$ ($6cm < 10cm$) nên điểm A nằm giữa hai điểm O và B . Do đó $OA + AB = OB$

Thay số $6 + AB = 10$

$$AB = 4$$

Vậy $AB = 4cm$

Vì E là trung điểm OA nên $EA = \frac{OA}{2}$, thay số $EA = 6 : 2 = 3cm$

F là trung điểm của AB nên $AF = \frac{AB}{2}$

Thay số: $AF = 4 : 2 = 2cm$

Do điểm A nằm giữa hai điểm O và B . Mà E là trung điểm của OA , F là trung điểm của AB nên điểm A nằm giữa hai điểm E và F

Ta có $EF = EA + AF = 3 + 2 = 5(cm)$

Vậy $EF = 5cm$.



Bài 29: Trên đường thẳng a lấy ba điểm M, N, P sao cho: $MN = 2cm, NP = 5cm$. Khi đó độ dài đoạn thẳng MP bằng:

- A. 3 cm. B. 7 cm. C. 3 cm hoặc 7 cm. D. 3,5 cm.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

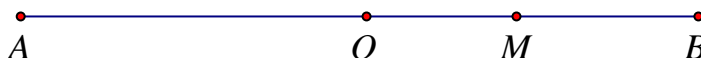
Đáp án: C. 3 cm hoặc 7 cm.

Bài 30: Cho ba điểm A, O, B sao cho $OA = 2cm, OB = 3cm$ và $AB = 5cm$. Lấy điểm M nằm trên đường thẳng AB sao cho $OM = 1cm$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .

Lời giải

Ta có $2\text{cm} + 3\text{cm} = 5\text{cm}$ hay $OA + OB = AB$ nên điểm O nằm giữa điểm A và điểm B

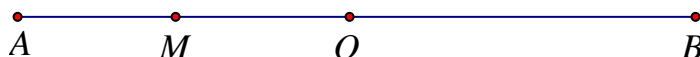
TH1: Điểm M thuộc tia OB . Ta có hình vẽ



Ta có O điểm nằm giữa điểm A và M nên $OA + OM = AM$ hay $2 + 1 = AM$

Suy ra $AM = 3$ (cm).

TH2: Điểm M thuộc tia OA . Ta có hình vẽ



Ta có M điểm nằm giữa điểm A và O nên $AM + OM = OA$ hay $AM + 1 = 2$

suy ra $AM = 1$ (cm).

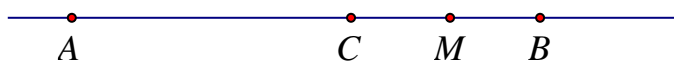
Vậy $AM = 3$ (cm) hoặc $AM = 1$ (cm).

Bài 31: Cho hai điểm A và B cùng nằm trên đường thẳng xy sao cho $AB = 5\text{cm}$. Trên tia Ax lấy điểm C sao cho $AC = 3\text{cm}$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính độ dài đoạn thẳng AM .

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Lời giải

TH1: B, C nằm cùng phía với nhau so với điểm A .



Ta có: $AC < AB$ ($3 < 5$) nên C nằm giữa hai điểm A và B

$$AC + CB = AB$$

$$3 + CB = 5$$

$$CB = 5 - 3 = 2(\text{cm})$$

Vì M là trung điểm của BC nên M nằm giữa hai điểm C và B và $MC = MB = \frac{BC}{2} = 1(\text{cm})$

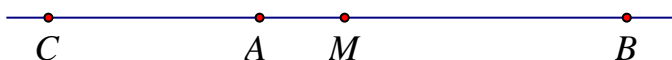
Mặt khác C nằm giữa hai điểm A và M

$$AC + CM = AM$$

$$AM = 3 + 1$$

$$AM = 4(\text{cm})$$

TH2: B, C nằm khác phía so với điểm A .



Vì A nằm giữa B và C

Nên $CB = CA + AB$

$$CB = 3 + 5$$

$$CB = 8 \text{ (cm)} .$$

Vì M là trung điểm của BC nên M nằm giữa hai điểm C và B và $MC = MB = \frac{BC}{2} = 4 \text{ (cm)}$

Vì $AC < CM$ ($3 < 4$) nên A nằm giữa hai điểm C và M

$$CA + AM = CM$$

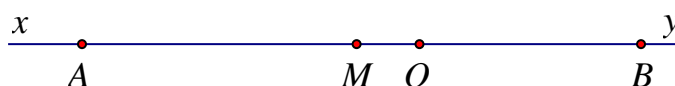
$$3 + AM = 4$$

$$AM = 4 - 3 = 1 \text{ (cm)} .$$

Bài 32: Cho hai tia Ox và Oy đối nhau, trên tia Ox lấy hai điểm A và M sao cho $OA = 5\text{cm}$, $OM = 1\text{cm}$; trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OB = 3\text{cm}$. Chứng tỏ: Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Lời giải



Vì điểm M nằm giữa O và A ,

suy ra $OM + MA = OA$

$$MA = OA - OM = 5 - 1 = 4 \text{ (cm)} .$$

Vì OA và OB là hai tia đối nhau, M thuộc OA nên OM và OB là hai tia đối nhau, suy ra điểm O nằm giữa hai điểm M và B .

Khi đó: $OM + OB = MB$

hay $MB = 1 + 3 = 4 \text{ (cm)}$.

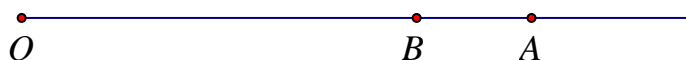
Vì điểm M nằm giữa hai điểm A và B và $MA = MB = 4 \text{ (cm)}$ nên M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Bài 33: Trên tia Ox lấy hai điểm A và B sao cho $OA = 8\text{cm}$, $AB = 2\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng OB .

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

TH1: Ta có $OB = OA - AB = 8 - 2 = 6 \text{ (cm)}$



TH2: Ta có $OB = OA + AB = 8 + 2 = 10 \text{ (cm)}$

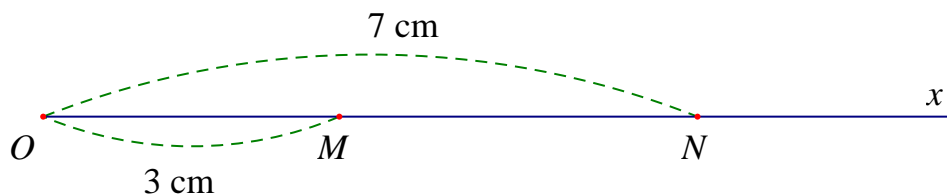
Bài 34: Trên tia Ox lấy hai điểm M và N sao cho $OM = 3\text{cm}$, $ON = 7\text{cm}$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng MN .

b) Gọi P là điểm thuộc tia Ox sao cho $MP = 2\text{cm}$. Hỏi P có phải là trung điểm của đoạn thẳng MN không? Vì sao?

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021 - 2022

Lời giải

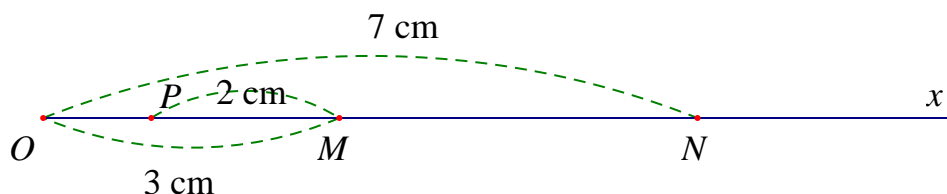


a) Vì M nằm giữa O và N nên $ON = OM + MN$

suy ra $MN = ON - OM = 7 - 3$

Vậy $MN = 4\text{cm}$.

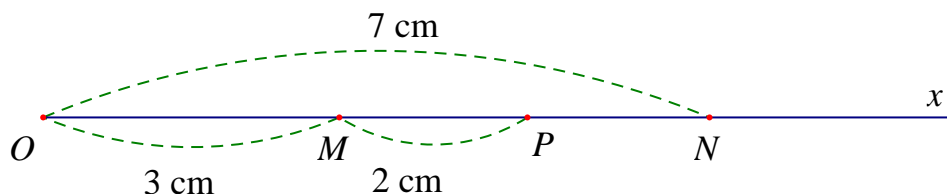
b) TH1: Điểm M và N nằm cùng phía đối với điểm P .



M và N nằm cùng phía đối với điểm P , suy ra M nằm giữa P và N

suy ra $PM \neq MN$ (vì $2 \neq 4$) nên P không là trung điểm của MN .

TH2: Điểm M và N nằm khác phía đối với điểm P .



M và N nằm khác phía đối với điểm P nên P nằm giữa M và N .

$$MN = MP + PN$$

$$PN = MN - MP$$

$$PN = 4 - 2$$

$$PN = 2 \text{ (cm)}$$

Vì P nằm giữa M và N và $MP = PN$ ($= 2\text{ cm}$)

suy ra P là trung điểm của MN .

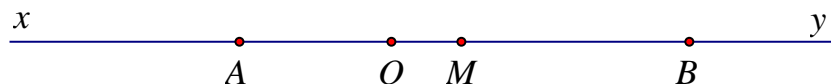
Bài 35: Lấy điểm O trên đường thẳng xy . Trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 2\text{cm}$. Trên tia Oy lấy hai điểm M và B sao cho $OM = 1\text{cm}$; $OB = 4\text{cm}$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng BM .

b) Chứng tỏ rằng M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Lời giải



a) Nằm giữa O và B

Do đó: $OM + MB = OB$

$$1 + MB = 4$$

$$MB = 4 - 1 = 3 \text{ (cm)}$$

Vậy $MB = 3 \text{ cm}$.

b) O nằm giữa A và M

$$MA = OM + OA$$

$$MA = 1 + 2 = 3\text{cm}$$

Ta thấy: $MA = MB = 3\text{cm}$

Vì A thuộc tia Mx , B thuộc tia My ; Mx và My là hai tia đối nhau

$\Rightarrow M$ nằm giữa A và B .

Vậy M là trung điểm của AB .

Bài 36: Lấy điểm O trên đường thẳng xy . Trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 2\text{cm}$. Trên tia Oy lấy hai điểm M và B sao cho $OM = 1\text{cm}$; $OB = 4\text{cm}$.

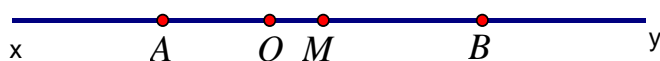
a) Tính độ dài đoạn thẳng BM .

b) Chứng tỏ rằng M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

c) Cho điểm Q không thuộc đường thẳng xy và lấy thêm 2017 điểm phân biệt khác thuộc đường thẳng xy và không trùng với 4 điểm A, B, M, O . Hỏi có thể vẽ được bao nhiêu đoạn thẳng có 2 đầu mút là 2 điểm trong số các điểm đã cho?

Trích đề HSG huyện Chí Linh năm 2021-2022

Lời giải



a) Vì M nằm giữa O và B nên $OM + MB = OB$

Từ đó tính được $MB = 3$ cm

b) Tính được độ dài $AB = 6$ cm

Tính được độ dài đoạn $AM = 3$ cm

Suy ra $AM = MB = \frac{AB}{2}$ nên M là trung điểm của AB .

c) Tổng số điểm trên đường thẳng xy là 2021 điểm

Gọi tên các điểm đó là $A, B, M, O, P_1, P_2, P_3, \dots, P_{2017}$

Từ Q vẽ được 2021 đoạn thẳng khi nối với các điểm còn lại

Từ A vẽ được 2020 đoạn thẳng khi nối với các điểm còn lại (trừ điểm Q)

Từ B vẽ được 2019 đoạn thẳng khi nối với các điểm còn lại (trừ điểm A, Q)

Vậy tổng số đoạn thẳng vẽ được là:

$$2021 + 2020 + 2019 + \dots + 3 + 2 + 1$$

$$= 2022 \cdot 1010 + 1011$$

$$= 2043231$$

Bài 37: Trên tia Ox lấy hai điểm M và N , sao cho $OM = 5$ cm và $ON = 9$ cm.

a) Tính độ dài đoạn thẳng MN .

b) Lấy điểm P trên tia Ox , sao cho $MP = 2$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng OP .

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Lời giải

a)



a) Trên tia Ox , ta có: $OM < ON$ ($5 < 9$) nên M nằm giữa hai điểm O và N .

Suy ra $OM + MN = ON$.

Suy ra $5 + MN = 9$ suy ra $MN = 9 - 5 = 4$ (cm).

Vậy $MN = 4$ (cm).

b)

TH1: P nằm giữa M và N .

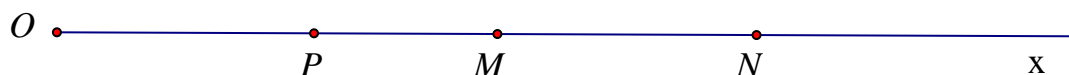


Vì P nằm giữa M và N mà M nằm giữa hai điểm O và N nên M nằm giữa O và P

Suy ra $OP = OM + MP$

Suy ra $OP = 5 + 2 = 7$ (cm)

TH2: P nằm giữa O và M .



Vì P nằm giữa O và M nên $OM = OP + PM$

Suy ra $5 = OP + 2$ suy ra $OP = 3$ (cm).

Bài 38: Trên tia Ox lấy hai điểm A, B (điểm A không trùng với điểm O và độ dài OB lớn hơn độ dài OA). Gọi M là trung điểm của OA . Hãy so sánh độ dài MB với trung bình cộng độ dài OB, AB

Trích đề HSG huyện Tỉnh Gia năm 2018-2019

Lời giải



Ta có trung bình cộng BO, BA là $\frac{BO + BA}{2} = \frac{BO}{2} + \frac{BA}{2}$

Ta lại có $BO = BA + AO$ nên $\frac{BO + BA}{2} = \frac{BA}{2} + \frac{AO}{2} + \frac{BA}{2} = \frac{AO}{2} + BA$ (1)

Mặt khác ta có: $BM = BA + AM$ mà M là trung điểm của OA nên $BM = \frac{AO}{2} + BA$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BM = \frac{BO + BA}{2}$. hay số đo BA bằng trung bình cộng số đo BO, BA

III: Độ lớn góc

Dạng toán: Tính số đo góc

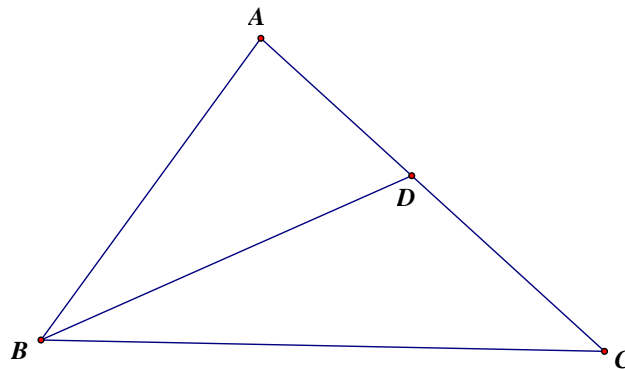
Bài 1: Cho tam giác ABC có $\angle ABC = 55^\circ$, trên cạnh AC lấy điểm D (D không trùng với A và C)

a) Tính số đo $\angle DBC$ biết $\angle ABD = 30^\circ$

b) Từ B dựng tia Bx sao cho $\angle DBx = 90^\circ$. Tính số đo $\angle ABx$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018 -2019

Lời giải

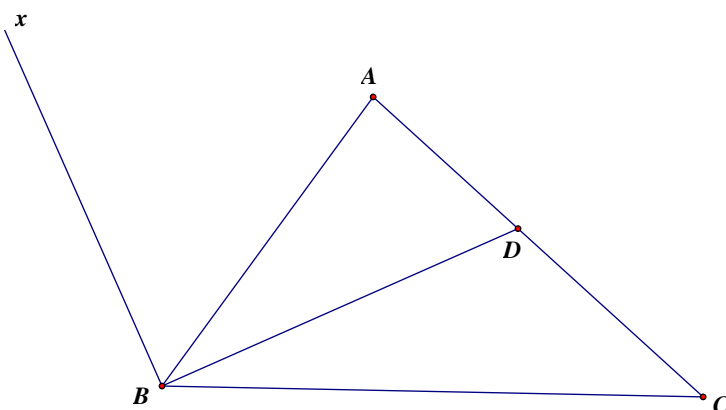


a) Tia BD nằm giữa hai tia BA và BC nên $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$

$$\Rightarrow \angle DBC = \angle ABC - \angle ABD = 55^\circ - 30^\circ = 25^\circ$$

b) Xét hai trường hợp:

- Trường hợp 1: Tia Bx và BD nằm về hai phía nửa mặt phẳng có bờ là AB

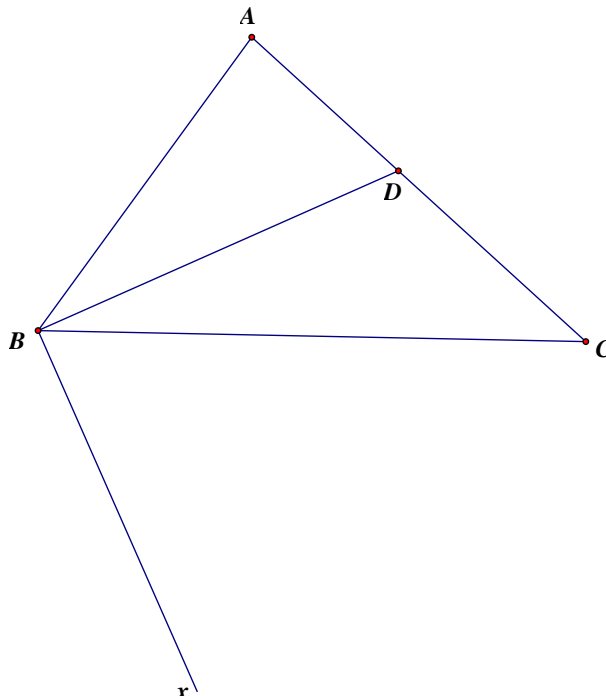


Tính được: $ABx = 90^\circ - ABD$

Mặt khác tia BD nằm giữa hai tia BA, BC nên $0^\circ < ABD < 55^\circ$

$$\Rightarrow 90^\circ - 55^\circ < ABx < 90^\circ - 0^\circ \Leftrightarrow 35^\circ < ABx < 90^\circ$$

- Trường hợp 2: Tia Bx, BD nằm về cùng nửa mặt phẳng có bờ là AB



Tính được: $ABx = 90^\circ + ABD$

Lập luận tương tự trường hợp 1 chỉ ra được: $90^\circ < ABx < 145^\circ$

Vậy $35^\circ < ABx < 145^\circ, ABx \neq 90^\circ$

Bài 2: Cho điểm O thuộc đường thẳng xy . Vẽ các tia OA, OB sao cho góc $AOx = 40^\circ, BOy = 60^\circ$

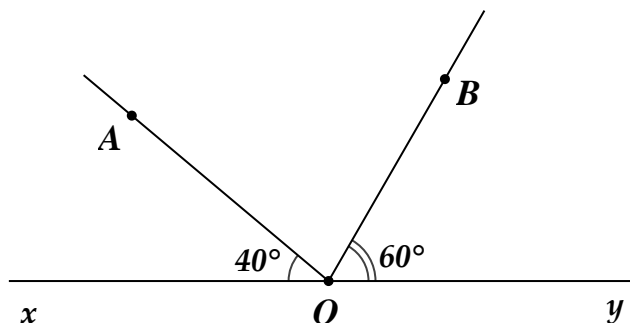
. Tính số đo AOB .

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có hai trường hợp hình vẽ:

Trường hợp 1:



Hai góc $xOB; BOy$ kề bù $\Rightarrow xOB + BOy = 180^\circ$

$$\Rightarrow xOB + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow xOB = 120^\circ$$

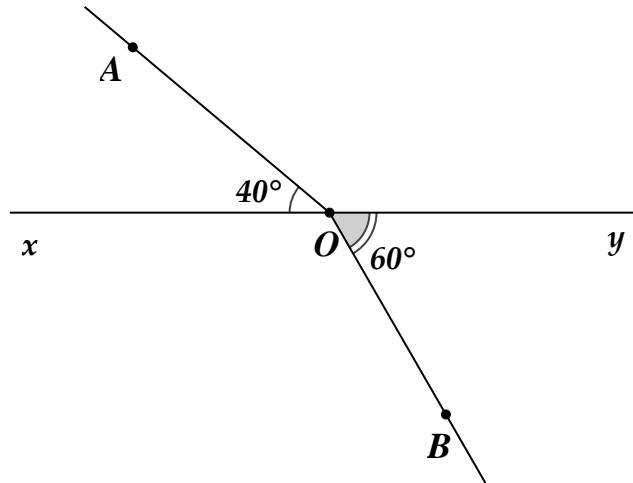
Tia OA nằm giữa hai tia $Ox; OB$

$$\Rightarrow xOA + AOB = xOB$$

$$\Rightarrow 40^\circ + AOB = 120^\circ$$

$$\Rightarrow AOB = 80^\circ$$

Trường hợp 2:



Hai góc $xOB; BOy$ kề bù $\Rightarrow xOB + BOy = 180^\circ$

$$\Rightarrow xOB + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow xOB = 120^\circ$$

Từ hình vẽ ta có: $xOA + xOB = AOB$

$$\Rightarrow 40^\circ + 120^\circ = AOB$$

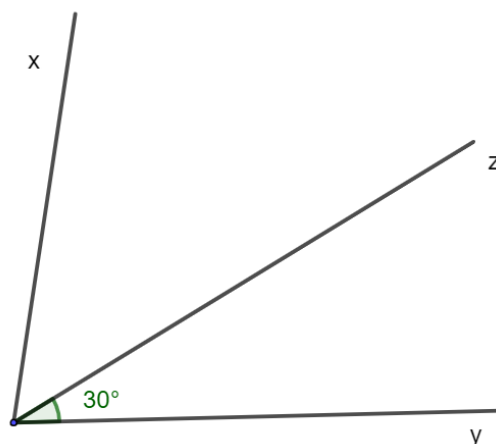
$$\Rightarrow AOB = 160^\circ$$

Vậy $AOB = 80^\circ$ hoặc $AOB = 160^\circ$

Bài 3: Cho $xOy = 80^\circ$, tia Oz nằm giữa hai tia Ox, Oy sao cho $xOz = 30^\circ$. Số đo yOz là bao nhiêu

Trích đề HSG huyện Lâm Thao, năm 2018- 2019

Lời giải



Từ hình vẽ ta có: $\angle xOy = \angle xOz + \angle zOy$

$$\Rightarrow 80^\circ = 30^\circ + \angle zOy$$

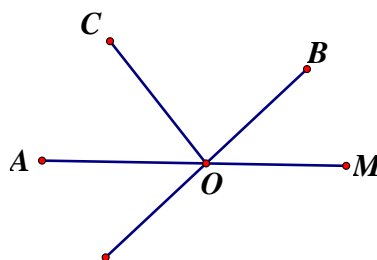
$$\Rightarrow \angle zOy = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ$$

Bài 4: Trên đường thẳng AM lấy một điểm O (O nằm giữa A và M). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AM vẽ các tia OB, OC sao cho $\angle MOC = 115^\circ, \angle BOC = 70^\circ$. Trên nửa mặt phẳng đối diện dựng tia OD (D không cùng nằm trong nửa mặt phẳng với B, C qua bờ là AM) sao cho $\angle AOD = 45^\circ$.

- Tia OB nằm giữa hai tia OM, OC không?
- Tính $\angle MOB, \angle AOC$
- Chứng tỏ rằng 3 điểm D, O, B thẳng hàng.

Trích đề 59 HSG huyện năm 2018- 2019

Lời giải



- Nếu OB nằm giữa hai tia OA, OC thì $\angle MOC + \angle COB = \angle MOB = 185^\circ$ (vô lý)
 Vậy OB nằm giữa hai tia OM, OC
- Từ hình vẽ ta có: $\angle MOB + \angle BOC = \angle MOC$
 $\Rightarrow \angle MOB = \angle MOC - \angle BOC = 115^\circ - 70^\circ = 45^\circ$
 Hai góc $\angle AOC, \angle COM$ là hai góc kề bù nên $\angle AOC + \angle COM = 180^\circ$
 $\Rightarrow \angle AOC = 180^\circ - \angle COM = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$

c) Hai góc AOB, BOM là hai góc kề bù $\Rightarrow AOB + BOM = 180^\circ$

$$\Rightarrow AOB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

Hai góc DOA, AOB là 2 góc có cạnh chung OA . Còn 2 cạnh OD, OB nằm 2 nửa mặt phẳng đối nhau bờ AM nên:

$$DOA + AOB = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ \Rightarrow OD, OB \text{ là hai tia đối nhau}$$

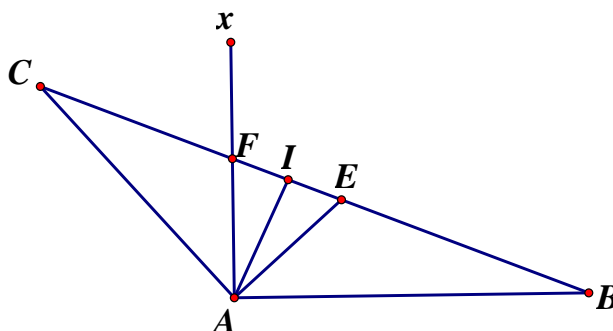
$\Rightarrow D, O, B$ thẳng hàng

Bài 5: Cho tam giác ABC có $BAC = 120^\circ$. Điểm E nằm giữa B và C sao cho $BAE = 30^\circ$. Trên mặt phẳng có bờ AC chứa điểm B kẻ tia Ax sao cho $CAx = 30^\circ$, tia Ax cắt BC ở F

Tính số đo của EAF

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Lời giải



Ta có: $BAE + EAC = BAC$

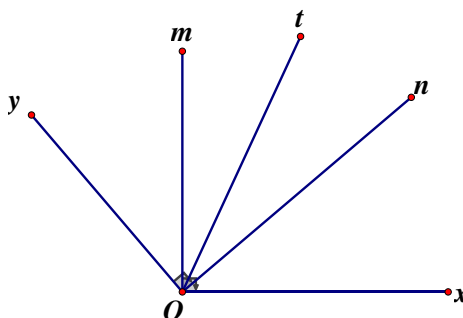
$$\text{Hay } 30^\circ + EAC = 120^\circ \Rightarrow EAC = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$$

Xét nửa mặt phẳng bờ AC có chứa điểm B

$$CAF + FAE = CAE \Rightarrow 30^\circ + FAE = 90^\circ \Rightarrow FAE = 60^\circ$$

Bài 6: Cho góc tù xOy . Bên trong góc xOy , vẽ tia Om sao cho $xOm = 90^\circ$ và vẽ tia On sao cho $yOn = 90^\circ$. Chứng minh $xOn = yOm$

Lời giải



Lập luận được $xOm + mOy = xOy$ hay $90^\circ + mOy = xOy$

$$yOn + nOx = xOy \text{ hay } 90^\circ + nOx = xOy$$

$$\Rightarrow xOn = yOm$$

Bài 7: Cho góc $xBy = 55^\circ$. Trên các tia Bx, By lần lượt lấy các điểm A, C ($A \neq B, B \neq C$). Trên đoạn thẳng AC lấy điểm D sao cho $ABD = 30^\circ$.

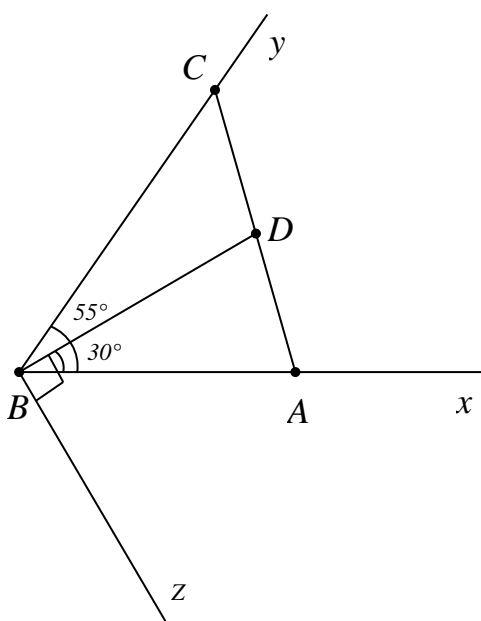
a) Tính độ dài AC , biết $AD = 4\text{cm}, CD = 3\text{cm}$.

b) Tính số đo góc DBC .

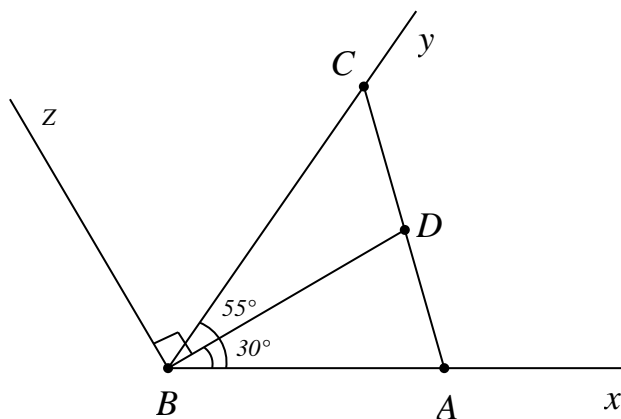
c) Từ B vẽ tia Bz sao cho $DBz = 90^\circ$. Tính số đo ABz .

Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015 -2016

Lời giải



Trường hợp 1



Trường hợp 2

a) Vì D thuộc đoạn thẳng AC nên D nằm giữa A và C .

$$AC = AD + CD = 4 + 3 = 7\text{cm}$$

Chứng minh được tia BD nằm giữa hai tia AB và BC

Ta có đẳng thức: $ABC = ABD + DBC$

$$DBC = ABC - ABD = 25^\circ$$

b) Xét hai trường hợp:

- Trường hợp 1: Tia Bz và tia BD nằm về hai phía nửa mặt phẳng có bờ là AB nên tia BA nằm giữa hai tia Bz và BD .

Tính được $ABz = 90^\circ - ABD = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

- Trường hợp 2: Tia Bz và tia BD nằm về cùng nửa mặt phẳng có bờ là AB nên tia BD nằm giữa hai tia Bz và BA .

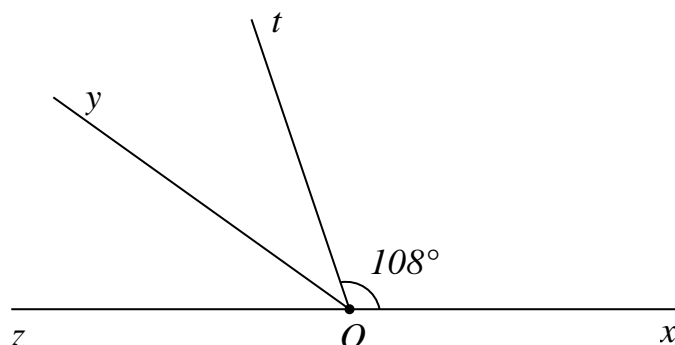
c) Tính được $ABz = 90^\circ + ABD = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$.

Bài 8: Cho hai góc xOy và yOz kề bù sao cho $xOy = 4 yOz$.

- a) Tính số đo mỗi góc có trên hình vẽ?
 b) Vẽ tia Ot sao cho $xOt = 108^\circ$. Tính góc tOy ?

Trích đề HSG huyện Vĩnh Tường năm 2021 - 2022

Lời giải



- a) Có góc xOy và yOz là hai góc kề bù

$$xOy + yOz = 180^\circ$$

Mà $xOy = 4 yOz$

$$4 yOz + yOz = 180^\circ$$

$$5 yOz = 180^\circ$$

$$yOz = 36^\circ$$

$$xOy = 4.36 = 144^\circ.$$

Vậy $xOy = 144^\circ$; $yOz = 36^\circ$.

- b) Có $xOt = 108^\circ$ nên $xOt < xOy$

Do đó O nằm giữa Ox và Oy .

Ta có $xOt + tOy = xOy$

$$108^\circ + tOy = 144^\circ$$

$$tOy = 144 - 108 = 36^\circ.$$

Vậy $tOy = 36^\circ$.

Bài 9: Cho xOy và yOz là hai góc kề bù. Góc yOz bằng 30°

- a) Vẽ tia Om nằm trong góc xOy sao cho $xOm = 75^\circ$; tia On nằm trong yOz sao cho $yOn = 15^\circ$
 b) Hình vẽ trên có mấy góc?
 c) Nếu có n tia chung gốc thì sẽ tạo nên bao nhiêu góc ?

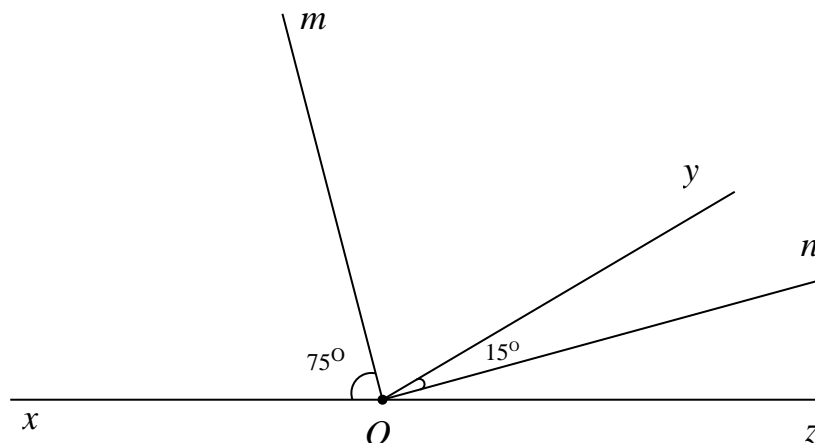
Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Lời giải

- a) Vẽ được góc xOy và góc yOz kề bù và $yOz = 30^\circ$

Vẽ được tia Om thỏa mãn điều kiện

Vẽ được tia On thỏa mãn điều kiện



b) Hình vẽ trên có 10 góc

c) Lập luận : từ hình vẽ trên ta có mỗi tia với 1 tia còn lại tạo thành 1 góc. Xét 1 tia, tia đó cùng với 4 tia còn lại tạo thành 4 góc. Làm như vậy với 5 tia ta được 5.4 góc. Nhưng mỗi góc đã được tính 2 lần, do đó có tất cả là $\frac{5.4}{2} = 10$ góc

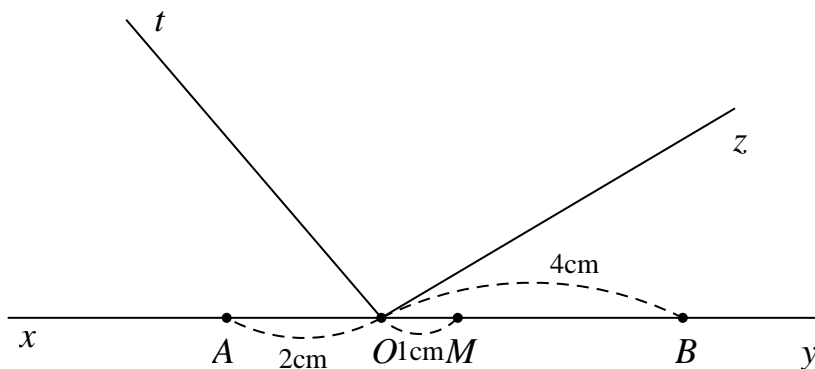
Từ đó suy ra tổng quát: với n tia chung gốc có $n \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)$ (góc)

Bài 10: Cho góc bẹt xOy , trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 2cm$; trên tia Oy lấy hai điểm M và B sao cho $OM = 1cm$; $OB = 4cm$.

- Chứng tỏ điểm M nằm giữa hai điểm O và B . Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB
- Từ O kẻ hai tia Ot, Oz sao cho $tOy = 130^\circ$; $zOy = 30^\circ$. Tính số đo tOz

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Lời giải



- M nằm giữa O và B
 $MO + MB = OB$

$$MB = OB - MO = 3cm \quad (1)$$

Vì Ox, Oy đối nhau, $A \in Ox, M \in Oy$ nên O nằm giữa A và M

$$AM = AO - OM = 3cm \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $MB = MA = 3cm \Leftrightarrow M$ là trung điểm của AB

- Ta có 2 trường hợp

Ot, Oz cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ xy : $tOz = 100^\circ$

Ox, Oz không nằm trên nửa mặt phẳng bờ $xy : tOz = 160^\circ$

Bài 11: Cho 10 đường thẳng đồng quy tại O . Hỏi có bao nhiêu góc ở đỉnh O được tạo thành (không kể góc bẹt)

Trích đề thi chọn HSG Tam Dương năm 2016-2017

Lời giải

Vì có 10 đường thẳng đồng quy tại O nên có 20 tia gốc O . Chọn ra một tia, tia đó tạo với mỗi tia trong $(20-1)$ tia tạo thành một góc. Làm như thế với 20 tia ta có $20 \cdot (20-1) = 380$ góc, trong đó mỗi góc đã được tính hai lần.

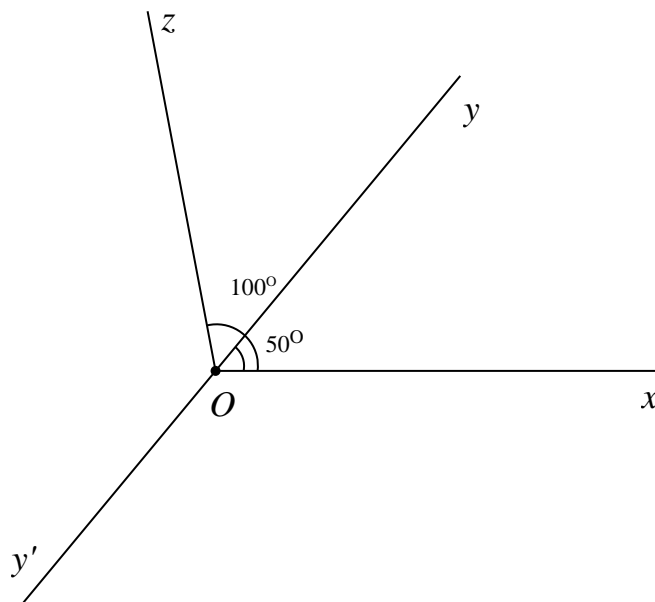
Do đó số góc tạo thành là: $380 : 2 = 190$ (góc)

Bài 12: Trên cùng nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox vẽ hai tia Oy, Oz sao cho $xOy = 50^\circ; xOz = 100^\circ$.

Vẽ tia Oy' là tia đối của tia Oy . Tính số đo $y'Oz$

Trích đề chọn HSG Nga Sơn năm 2017-2018

Lời giải



Vì tia Oy nằm giữa hai tia Ox và Oz

$$xOy + yOz = xOz.$$

$$\text{Thay số } 50^\circ + yOz = 100^\circ \Rightarrow yOz = 50^\circ$$

Do tia Oy' là tia đối của tia Oy nên $y'Oz, yOz$ là hai góc kề bù

$$\text{Do đó } y'Oz + yOz = 180^\circ.$$

$$\text{Thay số : } y'Oz + 50^\circ = 180^\circ$$

$$y'Oz = 130^\circ$$

$$\text{Vậy } y'Oz = 130^\circ$$

Bài 13: Cho $xOy = 80^\circ$, tia Oz nằm giữa hai tia Ox và Oy sao cho $xOz = 30^\circ$. Số đo yOz là:

A. 50° .

B. 110° .

C. 50° hoặc 110° .

D. 80° .

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: A. 50° .

Bài 14: Cho 2021 tia chung gốc O (trong đó không có hai tia nào đối nhau). Hỏi có bao nhiêu góc có hai cạnh là hai trong 2021 tia đã cho?

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Lời giải

Có 2021 tia gốc O . Chọn ra một tia, tia đó tạo với mỗi tia trong $(2021-1)$ tia tạo thành một góc.

Làm như thế với 2021 tia ta có $2021 \cdot (2021-1) = 4082420$ góc, trong đó mỗi góc đã được tính hai lần.

Do đó số góc tạo thành là: $4082420 : 2 = 2041210$ (góc).

Bài 15: Cho xAy , trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = 6\text{cm}$. Trên tia đối của tia Ax lấy điểm D sao cho $AD = 4\text{cm}$.

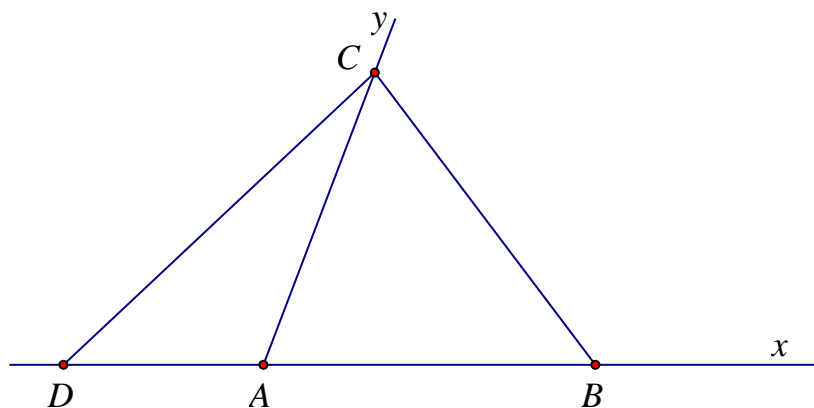
1. Tính BD .

2. Lấy C là một điểm trên tia Ay . Biết $BCD = 80^\circ, BCA = 45^\circ$. Tính ACD .

3. Biết $AK = 2\text{cm}$ (K thuộc BD). Tính BK .

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Lời giải



a) Vì A nằm giữa D và B .

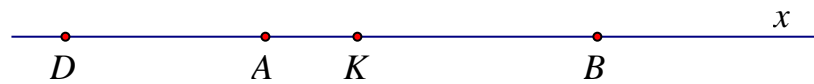
Suy ra: $BD = BA + AD = 6 + 4 = 10$ (cm).

b) Vì A nằm giữa D và B nên tia CA nằm giữa 2 tia CB và CD .

Suy ra $ACD + ACB = BCD$

$$ACD = BCD - ACB = 80^\circ - 45^\circ = 35^\circ.$$

c) * Trường hợp 1: K thuộc tia Ax .



Lập luận chỉ ra được K nằm giữa A và B

Suy ra: $AK + KB = AB$

$$KB = AB - AK = 6 - 2 = 4 \text{ (cm)}$$

Vậy $KB = 4 \text{ cm}$.

* Trường hợp 2: K thuộc tia đối của tia Ax



Lập luận chỉ ra được A nằm giữa K và B

Suy ra: $KB = KA + AB$

$$KB = 6 + 2 = 8 \text{ (cm)}$$

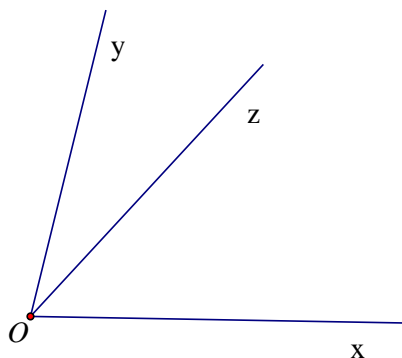
Vậy $KB = 4 \text{ cm}$ hoặc $KB = 8 \text{ cm}$.

Bài 16: Trên cùng nửa mặt phẳng cho trước có bờ Ox vẽ hai tia Oy, Oz sao cho $\widehat{xOy} = 70^\circ, \widehat{yOz} = 30^\circ$

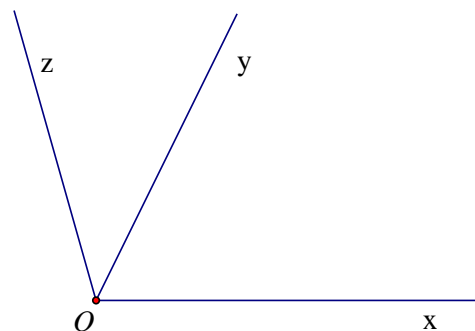
Xác định số đo của \widehat{xOz}

Trích đề HSG huyện Tĩnh Gia năm 2018-2019

Lời giải



(A)



(B)

Trường hợp hình (A) khi Oz nằm giữa 2 tia Ox, Oy ta có:

$$\text{Số đo } \widehat{xOz} = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ$$

Trường hợp hình (B) khi Oz không nằm giữa hai tia Ox, Oy ta có

$$\widehat{xOy} = 70^\circ + 30^\circ = 100^\circ$$

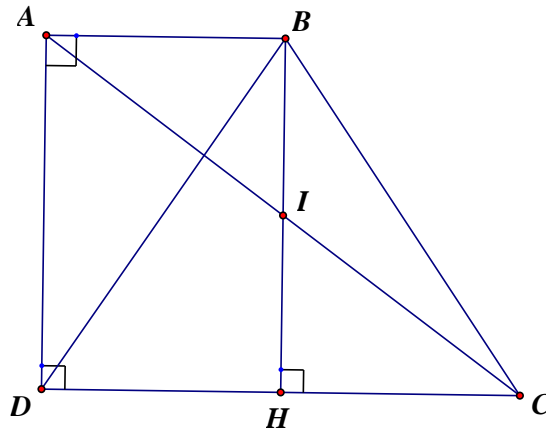
IV. Các bài toán về chu vi, diện tích

Dạng toán: Giải các bài toán về chu vi diện tích

Bài 1: Hình thang vuông ABCD có góc A và D vuông. Đường chéo AC cắt đường cao BH tại I. So sánh diện tích tam giác IDC và diện tích tam giác BHC.

Trích đề HSG tỉnh Bắc Ninh năm 2016 - 2017

Lời giải



Nối BD . Ta có: $S_{BDC} = S_{ADC}$ (cùng đáy DC và chiều cao $BH = AD$)

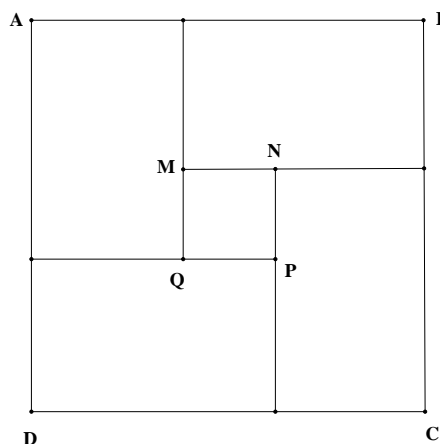
$$S_{BDH} = S_{DBA} \left(= \frac{1}{2} S_{ABHD} \right); S_{DBA} = S_{IAD} \text{ (cùng đáy } AD \text{ và chiều cao bằng nhau)}$$

Do đó:

$$S_{BHC} = S_{BDC} - S_{BDH} = S_{BDC} - S_{DBA} = S_{ADC} - S_{IAD} = S_{IDC}$$

$$\text{Vậy } S_{BHC} = S_{IDC}$$

Bài 2: Người ta xếp bốn hình chữ nhật bằng nhau có chiều rộng mỗi hình là 5 cm; chiều dài là 8 cm để được một hình vuông $ABCD$ và bên trong có là một hình vuông $MNPQ$ (như hình vẽ). Tính diện tích hình vuông $MNPQ$.



Trích đề HSG huyện Hà Trung năm 2021-2022

Lời giải

Cạnh hình vuông $ABCD$ là $5 + 8 = 13$ (cm)

Diện tích hình chữ nhật nhỏ là: $5 \cdot 8 = 40$ (cm^2)

Diện tích hình vuông $ABCD$ là: $13 \cdot 13 = 169$ (cm^2)

2) Độ dài đường chéo thứ nhất của hình thoi là:

$$(84 + 12) : 2 = 48 \text{ (cm)}$$

Độ dài đường chéo thứ hai của hình thoi là:

$$48 - 12 = 36 \text{ (cm)}$$

Diện tích hình thoi $MNPQ$ là:

$$48 \cdot 36 : 2 = 864 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Diện tích hình thoi còn được tính như sau: $S_{MNPQ} = NK \cdot PQ$

$$\Rightarrow NK = S_{MNPQ} : PQ = 864 : 30 = 28,8 \text{ (cm)}$$

Đáp số: $NK = 28,8$ cm

Bài 3: Một khu đất hình chữ nhật có chu vi là $132m$. Nếu giảm chiều rộng đi $5m$ và tăng chiều dài lên $5m$ thì chiều dài gấp đôi chiều rộng. Người ta dùng 30% diện tích khu đất để trồng rau, $\frac{11}{30}$ diện tích khu đất để trồng cây ăn quả, diện tích còn lại để xây nhà. Hỏi diện tích xây nhà là bao nhiêu?

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2022-2023

Lời giải

Khi giảm chiều rộng $5m$ và tăng chiều dài $5m$ thì chu vi không đổi.

Ta có nửa chu vi lúc sau là: $132 : 2 = 66$ (m)

Lúc sau chiều dài gấp đôi chiều rộng hay chiều rộng bằng $\frac{1}{2}$ chiều dài.

Suy ra chiều rộng lúc sau bằng $\frac{1}{3}$ nửa chu vi.

Chiều rộng khu đất đó là: $66 \cdot \frac{1}{3} = 22$ (m)

Chiều dài khu đất đó là: $66 - 22 = 44$ (m)

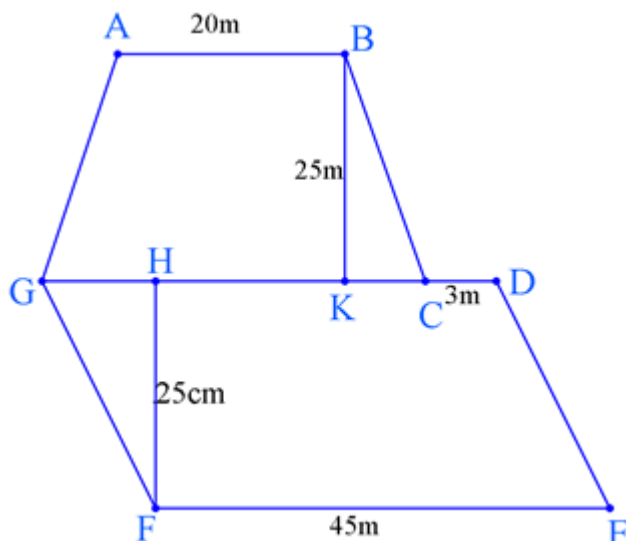
Diện tích khu đất đó là: $22 \cdot 44 = 968$ (m^2)

Đổi: $30\% = \frac{3}{10}$

Diện tích đất làm nhà chiếm số phần là: $1 - \frac{3}{10} - \frac{11}{30} = \frac{1}{3}$ (diện tích khu đất)

Diện tích đất xây nhà là: $1053 \cdot \frac{1}{3} = 351 (m^2)$

Bài 4: Bác Hai có một thửa ruộng có dạng như hình bên (độ dài đoạn thẳng CD bằng 3 mét). Bác Hai trồng lúa trên toàn bộ thửa ruộng đó. Nếu trên mỗi mét vuông bác Hai thu được $0.8kg$ thóc thì số tiền bác Hai thu được là bao nhiêu? Biết mỗi tạ thóc có giá 700.000 đồng.



Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Lời giải

Có $GD = FE = 45 m$

$GC = GD - CD = 45 - 3 = 42 (m)$

Diện tích hình thang $ABCG$ là: $S_1 = \frac{(AB + CG) \cdot BK}{2} = \frac{(20 + 42) \cdot 25}{2} = 775 (m^2)$

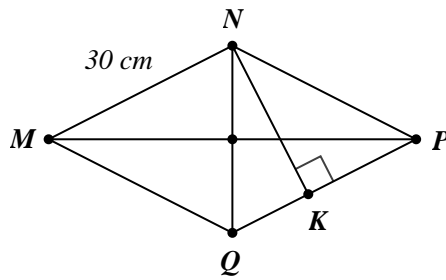
Diện tích hình bình hành $GFDE$ là $S_2 = FH \cdot FE = 25 \cdot 45 = 1125 (m^2)$

Diện tích cả thửa ruộng là: $S = S_1 + S_2 = 775 + 1125 = 1900 (m^2)$

Tổng số thóc thu hoạch được trên thửa ruộng là: $0,8 \cdot 1900 = 1520 (kg) = 15,2$ (tạ)

Tổng số tiền bác Hai thu được là: $15,2 \cdot 700\,000 = 10\,640\,000$ (đồng)

Bài 5: Cho hình thoi $MNPQ$ có độ dài cạnh là $30cm$ (Hình vẽ 1). Tổng độ dài hai đường chéo là $84cm$, hiệu độ dài hai đường chéo là $12cm$. Tính độ dài chiều cao NK .



Hình vẽ 1

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Lời giải

Ta có: $MP + NQ = 84$ và $MP - NQ = 12$

nên $MP = (84 + 12) : 2 = 48$

$NQ = 84 - 48 = 36$

$$S_{MNPQ} = \frac{MP \cdot NQ}{2} = \frac{48 \cdot 36}{2} = 864$$

Lại có $S_{MNPQ} = NK \cdot PQ = 864$

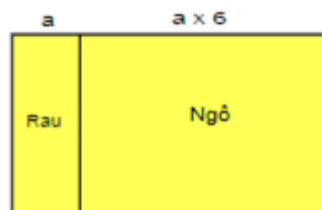
Suy ra $NK = 864 : 30 = 28,8$ (cm)

Bài 6: Một thửa ruộng hình chữ nhật được chia thành 2 mảnh hình chữ nhật (hình vẽ 2), một mảnh nhỏ trồng rau và mảnh còn lại trồng ngô. Diện tích của mảnh trồng ngô gấp 6 lần diện tích của mảnh trồng rau. Chu vi mảnh trồng ngô gấp 4 lần chu vi mảnh trồng rau. Tính diện tích thửa ruộng ban đầu , biết chiều rộng của nó là 5 mét.

Nếu giảm chiều dài của một hình chữ nhật đi 20% và muốn diện tích không thay đổi thì chiều rộng phải thay đổi như thế nào?

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Lời giải



Vì diện tích trồng ngô gấp 6 lần diện tích trồng rau mà 2 mảnh chung 1 cạnh nên độ dài cạnh còn lại của mảnh trồng ngô gấp 6 lần độ dài cạnh còn lại của mảnh trồng rau

Gọi độ dài cạnh còn lại của mảnh trồng rau là: a

Vậy độ dài cạnh còn lại của mảnh trồng ngô là: a x 6

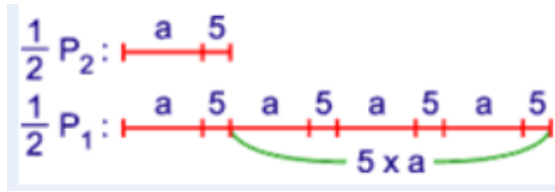
Nửa chu vi mảnh trồng ngô là: a x 6 + 5

Nửa chu vi mảnh trồng rau là: a + 5

Nửa chu vi mảnh trồng ngô hơn nửa chu vi mảnh trồng rau là:

$$a \times 6 + 5 - (a + 5) = a \times 5$$

Mà chu vi mảnh trồng ngô gấp 4 lần chu vi mảnh trồng rau nên ta có sơ đồ:



Nhìn vào sơ đồ ta có: $(a + 5) \cdot 3 = 5 \cdot a$

$$15 - 5a - 3a = 2 \cdot a$$

$$a = 7,5$$

Độ dài cạnh còn lại của mảnh trồng rau là: 7,5m

Độ dài cạnh còn lại của mảnh trồng ngô là: $7,5 \times 6 = 45$ (m)

Diện tích thửa ruộng ban đầu là: $(45 + 7,5) \times 6 = 262$ (m²)

* Nếu giảm chiều dài của một hình chữ nhật đi 20% và muốn diện tích không thay đổi thì chiều rộng phải thay đổi như thế nào?

Khi chiều dài của hình chữ nhật đó giảm đi 20% thì diện tích của hình chữ nhật cũng giảm đi 20%

Diện tích của hình chữ nhật sau khi giảm 20% là: $100 - 20 = 80$ (%)

Chiều rộng tăng số phần trăm là: $100 : 80 \times 100 = 125$ (%)

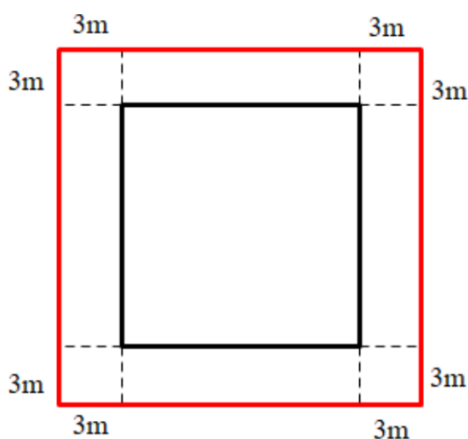
Số phần trăm chiều rộng cần tăng thêm là: $125 - 100 = 25$ (%)

Vậy chiều rộng phải tăng lên 25% để diện tích của hình chữ nhật đó không thay đổi.

Bài 7: Một bác nông dân có một khu vườn hình vuông. Ông ấy mở rộng vườn thêm 3m về mỗi phía như hình bên và thấy rằng diện tích khu vườn rộng thêm 84m². Tìm diện tích của khu vườn ban đầu.

Trích đề HSG THCS Quỳnh Thiện năm 2022 - 2023

Lời giải



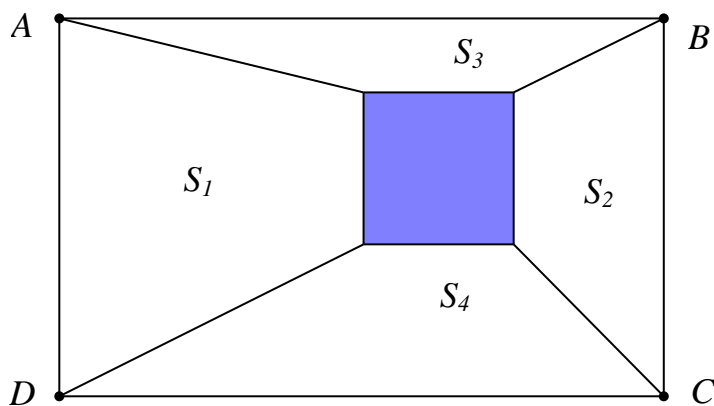
Diện tích tăng thêm gồm 4 hình vuông có cạnh bằng 3 và 4 hình chữ nhật bằng nhau nên ta có:

$$\text{Diện tích mỗi hình chữ nhật là: } (84 - 4 \cdot 3 \cdot 3) : 4 = 48 : 4 = 12 (m^2)$$

Chiều dài của hình chữ nhật (tức là cạnh của hình vuông ban đầu) là: $12 : 3 = 4 (m)$

Vậy diện tích của khu vườn ban đầu là: $4 \cdot 4 = 16 (m^2)$

Bài 8: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài AB hơn chiều rộng BC là $4cm$. Hình chữ nhật được chia thành một hình vuông và bốn hình thang (H1). Biết rằng 4 hình thang có diện tích là $S_1; S_2; S_3; S_4$ và $S_1 + S_2 = 49 cm^2$; $S_3 + S_4 = 41 cm^2$. Tính cạnh của hình vuông.



Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021 - 2022

Lời giải

1) Cách 1: Nối các đỉnh hình vuông tới các đỉnh hình chữ nhật và các cạnh hình vuông kéo dài cắt các cạnh hình chữ nhật như hình vẽ.

Gọi chiều cao các hình thang có diện tích $S_1; S_2; S_3; S_4$ lần lượt là $h_1; h_2; h_3; h_4$

Đường chéo mỗi hình chữ nhật ở góc chia hình chữ nhật đó thành hai tam giác có diện tích bằng nhau:

$$S_a = S_b; S_c = S_d; S_m = S_n; S_x = S_y$$

$$S_5 = ah_1; S_6 = ah_2; S_7 = ah_3; S_8 = ah_4$$

$$h_1 + h_2 = AB - a; h_3 + h_4 = BC - a$$

$$h_1 + h_2 - h_3 - h_4 = AB - a - BC + a = AB - BC = 4$$

$$(h_1 + h_2) - (h_3 + h_4) = AB - a - BC + a = AB - BC = 4$$

$$S_1 = S_5 + S_x + S_m; S_2 = S_6 + S_b + S_d; S_3 = S_7 + S_a + S_y; S_4 = S_8 + S_c + S_n$$

$$(S_1 + S_2) - (S_3 + S_4) = S_5 + S_x + S_m + S_6 + S_b + S_d - S_7 - S_a - S_y - S_8 - S_c - S_n$$

$$(S_1 + S_2) - (S_3 + S_4) = S_5 + S_6 - S_7 - S_8 + (S_x - S_y) + (S_b - S_a) + (S_d - S_c)$$

$$49 - 41 = ah_1 + ah_2 - ah_3 - ah_4$$

$$8 = (h_1 + h_2 - h_3 - h_4)a$$

$$8 = 4a$$

$$a = 2$$

Vậy cạnh hình vuông là 2 cm.

Cách 2: Gọi cạnh của hình vuông là a (cm). Gọi chiều cao các hình thang có diện tích $S_1; S_2; S_3; S_4$ lần lượt là $h_1; h_2; h_3; h_4$

$$S_1 = \frac{(AD + a)h_1}{2};$$

$$S_2 = \frac{(BC + a)h_2}{2} = \frac{(AD + a)h_2}{2} \quad (AD = BC)$$

$$S_3 = \frac{(AB + a)h_3}{2};$$

$$S_4 = \frac{(CD + a)h_4}{2} = \frac{(AB + a)h_4}{2} \quad (AB = CD).$$

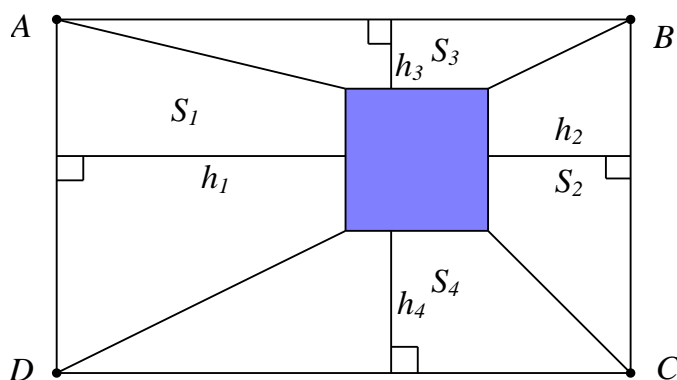
$$S_1 + S_2 = 49 \Rightarrow \frac{(AD + a)h_1}{2} + \frac{(AD + a)h_2}{2} = 49$$

$$\frac{(AD + a)(h_1 + h_2)}{2} = 49$$

$$\frac{(AD + a)(AB - a)}{2} = 49$$

$$\frac{(AD + a)(AD + 4 - a)}{2} = 49$$

$$\frac{(AD + a)(AD - a)}{2} + \frac{(AD + a)4}{2} = 49 \quad (1)$$



$$S_3 + S_4 = 41$$

$$\frac{(AB + a)h_3}{2} + \frac{(AB + a)h_4}{2} = 41$$

$$\frac{(AB+a)(h_3+h_4)}{2} = 41$$

$$\frac{(AB+a)(AD-a)}{2} = 41$$

$$\frac{(AD+4+a)(AD-a)}{2} = 41$$

$$\frac{(AD+a)(AD-a)}{2} + \frac{4(AD-a)}{2} = 41 \quad (2)$$

Trừ từng vế (1) và (2) ta có:

$$\frac{(AD+a)4}{2} - \frac{(AD-a)4}{2} = 8$$

$$\frac{4AD+4a}{2} - \frac{4AD-4a}{2} = 8$$

$$\frac{4AD+4a-4AD+4a}{2} = 8$$

$$4a = 8$$

$$a = 2$$

Vậy cạnh hình vuông là 2 cm.

Bài 9: Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài 15 m, chiều rộng 8 m. Người ta trồng một vườn hoa hình thoi ở trong mảnh đất đó, biết diện tích phần còn lại là 75 m^2 . Tính độ dài đường chéo AC , biết $BD = 9 \text{ m}$.

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021-2022

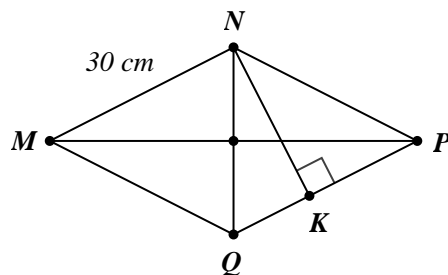
Lời giải

Diện tích mảnh đất hình chữ nhật là: $15 \cdot 8 = 120 \text{ (m}^2\text{)}$

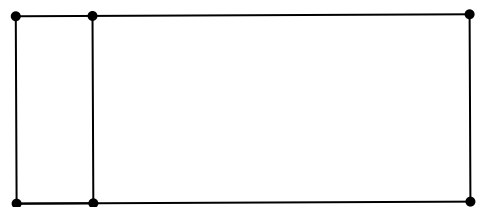
Diện tích phần trồng hoa hình thoi là: $120 - 75 = 45 \text{ (m}^2\text{)}$

Độ dài đường chéo AC là: $45 \cdot 2 : 9 = 10 \text{ (m)}$

Bài 10: 1. Cho hình thoi $MNPQ$ có độ dài cạnh là 30 cm (Hình vẽ 1). Tổng độ dài hai đường chéo là 84, hiệu độ dài hai đường chéo là 12 cm. Tính độ dài chiều cao NK .



Hình vẽ 1



Hình vẽ 2

2. Một thửa ruộng hình chữ nhật được chia thành hai mảnh hình chữ nhật (Hình vẽ 2), một mảnh nhỏ trồng rau và mảnh còn lại trồng ngô. Diện tích của mảnh trồng ngô gấp 6 lần diện tích của mảnh trồng

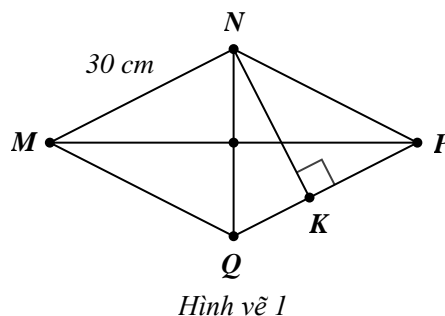
rau. Chu vi mảnh trồng ngô gấp 4 lần chu vi mảnh trồng rau. Tính diện tích thửa ruộng ban đầu, biết chiều rộng của nó là 5 mét.

3. Nếu giảm chiều dài của một hình chữ nhật đi 20% và muốn diện tích không thay đổi thì chiều rộng phải thay đổi như thế nào?

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Lời giải

1.



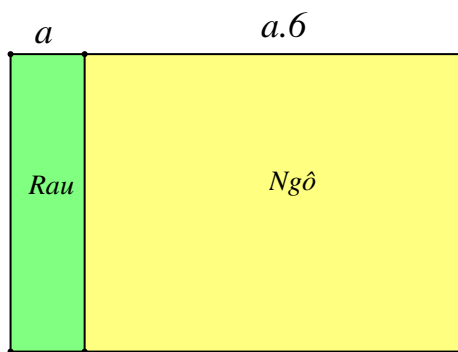
Ta có $MP + NQ = 84$ và $MP - NQ = 12$ nên $MP = (84 + 12) : 2 = 48$ (cm);

$$\Rightarrow MP = 84 - 48 = 36$$
 (cm)

Ta có $S_{MNPQ} = \frac{MP \cdot NQ}{2} = \frac{48 \cdot 36}{2} = 864$

Lại có $S_{MNPQ} = NK \cdot PQ = 864 \Rightarrow NK = 864 : 36 = 24$ (cm)

2.



Hình vẽ 2

Vì diện tích trồng ngô gấp 6 lần diện tích trồng rau mà hai mảnh chung một cạnh nên độ dài cạnh còn lại của mảnh trồng ngô gấp 6 lần độ dài cạnh còn lại của mảnh trồng rau

Gọi độ dài cạnh còn lại của mảnh trồng rau là: a

Vậy độ dài cạnh còn lại của mảnh trồng ngô là: $6a$

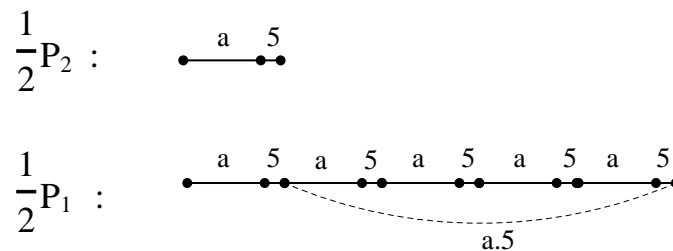
Nửa chu vi mảnh trồng ngô là: $6a + 5$

Nửa chu vi mảnh trồng rau là: $a + 5$

Nửa chu vi mảnh trồng ngô hơn nửa chu vi mảnh trồng rau là:

$$6a + 5 - (a + 5) = 5a$$

Mà chu vi mảnh trồng ngô gấp 4 lần chu vi mảnh trồng rau nên ta có sơ đồ:



Nhìn vào sơ đồ ta có: $3(a+5) = 5a$

$$3a + 15 = 5a$$

$$5a - 3a = 15$$

$$2a = 15$$

$$a = 7,5$$

Độ dài cạnh còn lại của mảnh trồng rau là: 7,5 (m)

Độ dài cạnh còn lại của mảnh trồng ngô là: $7,5 \cdot 6 = 45$ (m)

Diện tích thửa ruộng ban đầu là: $(45 + 7,5) \cdot 6 = 262$ (m²)

3. Khi chiều dài của hình chữ nhật đó giảm đi 20% thì diện tích của hình chữ nhật cũng giảm đi 20%

Diện tích của hình chữ nhật sau khi giảm 20% là: $100\% - 20\% = 80\%$

Chiều rộng tăng số phần trăm là: $\frac{100}{80} \cdot 100\% = 125\%$

Số phần trăm chiều rộng cần tăng thêm là: $125\% - 100\% = 25\%$

Vậy chiều rộng phải tăng lên 25% để diện tích của hình chữ nhật đó không thay đổi.

Bài 11: Cho tam giác ABC có diện tích bằng 42 cm^2 . Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $CE = \frac{1}{3}AE$

, trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $BF = \frac{1}{2}FC$, đoạn EF cắt AB tại K .

1. Tính diện tích của tam giác ABF và tam giác AEF ?

2. Tính tỉ số độ dài giữa KB và KA ?

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Lời giải

1. Ta có $S_{ABF} = \frac{1}{2}S_{AFC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$ (do có chung đường cao hạ từ đỉnh A xuống đáy BC ; mà $BF = \frac{1}{2}FC = \frac{1}{3}BC$) $\Rightarrow S_{ABF} = 42 \cdot \frac{1}{3} = 14 \text{ cm}^2$

Ta có: $S_{AEF} = \frac{3}{4}S_{ACF}$ (do có chung đường cao hạ từ đỉnh F xuống đáy AC và $CE = \frac{1}{3}AE$ nên

$AE = \frac{3}{4}AC$) mà $S_{ABF} = 42 - 14 = 28 \text{ cm}^2$ nên $S_{AEF} = 28 \cdot \frac{3}{4} = 21 \text{ cm}^2$.

2. Ta có: $S_{KBE} = \frac{1}{2} S_{KCF}$ (có chung chiều cao hạ từ K xuống BC và $BF = \frac{1}{2} FC$)

$S_{EBF} = \frac{1}{2} S_{ECF}$ (có chung chiều cao hạ từ E xuống BC và $BF = \frac{1}{2} FC$)

Suy ra $S_{KBE} = \frac{1}{2} S_{KCE}$.

Mà $S_{KCE} = \frac{1}{3} S_{KAE}$ (có chung chiều cao hạ từ K xuống AC và $CE = \frac{1}{3} AE$)

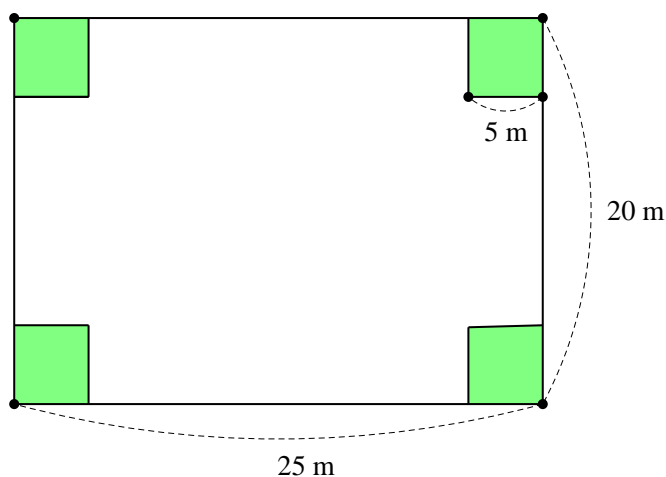
Do đó $S_{KBE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} S_{KAE} = \frac{1}{6} S_{KAE}$.

Mà hai tam giác KBE và KAE có chung chiều cao hạ từ E xuống $AB \Rightarrow KB = \frac{1}{6} KA$.

Hay $\frac{KB}{KA} = \frac{1}{6}$. Vậy $\frac{KB}{KA} = \frac{1}{6}$.

Bài 12: Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài 25 m, chiều rộng 20 m. Người ta trồng hoa hồng vào bồn hình vuông ở các góc vườn (như hình vẽ bên) và phần diện tích còn lại trồng hoa cúc.

1) Tính diện tích phần đất trồng hoa mỗi loại.



2) Biết mỗi mét vuông làm đất và trồng hoa

hồng phải trả 50000 đồng tiền công, mỗi mét vuông làm đất và trồng hoa cúc phải trả 40000 đồng. Tính số tiền công phải trả để trồng hoa cho cả mảnh vườn đó.

Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Lời giải

1) Phần diện tích trồng hoa hồng là: $4 \cdot 5^2 = 4 \cdot 25 = 100 \text{ (m}^2\text{)}$.

Tổng diện tích của vườn là: $20 \cdot 25 = 500 \text{ (m}^2\text{)}$.

Diện tích trồng hoa cúc là $500 - 100 = 400 \text{ (m}^2\text{)}$.

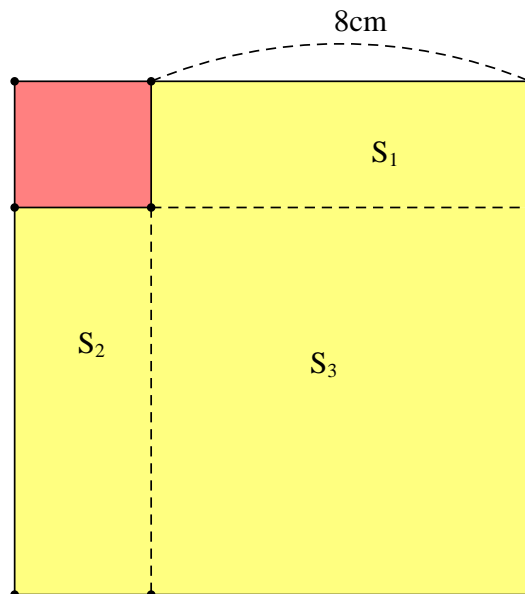
2) Số tiền công phải trả để trồng hoa là: $100 \cdot 50 + 400 \cdot 40 = 5000 + 16000 = 21000$ (nghìn đồng).

Vậy tổng số tiền phải trả là 21 triệu đồng.

Bài 13: Minh có hai tờ giấy hình vuông mà số đo các cạnh hơn kém nhau 8 cm . Minh đem đặt tờ giấy hình vuông nhỏ nằm trọn trong tờ giấy hình vuông lớn thì phần diện tích còn lại không bị che của tờ giấy hình vuông lớn là 96 cm^2 . Tính độ dài cạnh của mỗi tờ giấy.

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Lời giải



Gọi diện tích các phần được chia ra lần lượt là: S_1, S_2, S_3 như hình vẽ.

Theo đề bài ta có: $S_1 + S_2 + S_3 = 96\text{ (cm}^2\text{)}$.

Mặt khác: S_3 là diện tích hình vuông cạnh 8 cm nên $S_3 = 8.8 = 64\text{ (cm}^2\text{)}$.

$S_1 = S_2$ vì là diện tích hai hình chữ nhật có kích thước bằng nhau (chiều rộng bằng độ dài cạnh hình vuông nhỏ, chiều dài bằng 8 cm).

Suy ra $S_1 = S_2 = (96 - S_3) : 2 = (96 - 64) : 2 = 32 : 2 = 16\text{ (cm}^2\text{)}$.

Cạnh của hình vuông nhỏ là: $16 : 8 = 2\text{ (cm)}$.

Cạnh của hình vuông lớn là: $2 + 8 = 10\text{ (cm)}$.

Vậy hai tờ giấy hình vuông có cạnh là 2 cm và 8 cm .

Bài 14: Bác An muốn làm hàng rào cho khu vườn hình vuông trồng hoa hồng của mình. Biết khu vườn có cạnh 5 m , tính độ dài hàng rào?

- A. 25 m . B. 20 m . C. 10 m . D. 5 m .

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải

Đáp án: B. 20 m .

Bài 15: Một hình chữ nhật có chiều dài là 12m, chiều rộng là 8m, một hình vuông có chu vi bằng chu vi hình chữ nhật. Diện tích hình vuông đó là:

- A. 96 m^2 . B. 25 m^2 . C. 40 m^2 . D. 100 m^2 .

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

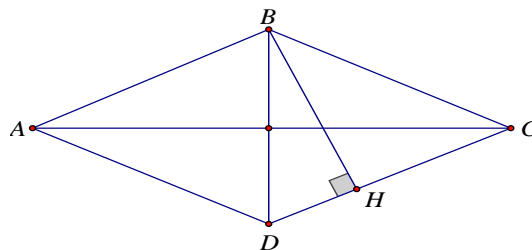
Lời giải

Đáp án: **D.** 100 m^2 .

Bài 16:

Cho hình thoi $ABCD$ có độ dài cạnh là 30cm

(Hình vẽ 1). Tổng độ dài hai đường chéo là 84cm, hiệu độ dài hai đường chéo là 12cm. Tính độ dài đường cao BH .



Hình vẽ 1

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Lời giải

Ta có: $AC + BD = 84$ và $AC - BD = 12$

nên $AC = (84 + 12) : 2 = 48$

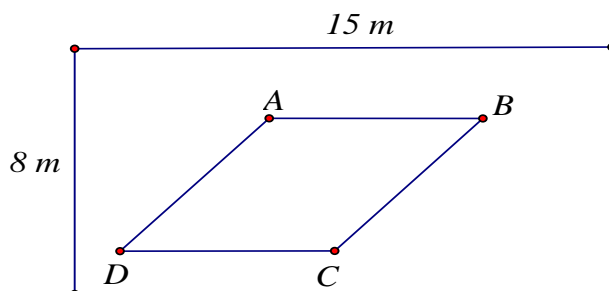
$$BD = (84 - 12) : 2 = 36$$

$$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{48 \cdot 36}{2} = 864$$

Lại có $S_{ABCD} = BH \cdot CD = 864 \text{ (cm}^2\text{)}$

Suy ra $BH = 864 : 30 = 28,8 \text{ (cm)}$.

Bài 17: Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài 15m, chiều rộng 8m. Người ta trồng một vườn hoa hình thoi ở trong mảnh đất đó, biết diện tích phần còn lại là 75 m^2 . Tính độ dài đường chéo AC , biết $BD = 9 \text{ m}$.



Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Lời giải

Diện tích mảnh đất hình chữ nhật là: $15.8 = 120 \text{ (m}^2\text{)}$

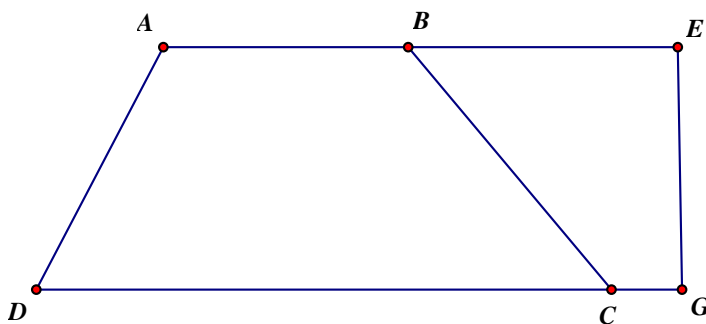
Diện tích phần trồng hoa hình thoi là: $120 - 75 = 45 \text{ (m}^2\text{)}$

Độ dài đường chéo AC là: $45 \cdot 2 : 9 = 10 \text{ (m)}$.

Bài 18: Một thửa ruộng hình thang có diện tích là 1155 m^2 và có đáy bé kém đáy lớn 33 m . Người ta kéo dài đáy bé thêm 20 m và kéo dài đáy lớn thêm 5 m về cùng một phía để được hình thang mới. Diện tích hình thang mới này bằng diện tích của một hình chữ nhật có chiều rộng là 30 m và chiều dài 51 m . Hãy tính đáy bé, đáy lớn của thửa ruộng ban đầu.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiên (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Lời giải



Gọi hình thang ban đầu là $ABCD$, hình thang mới là $AEGD$.

Hình thang $AEGD$ có diện tích bằng diện tích của một hình chữ nhật có chiều rộng 30 m và chiều dài 51 m .

Do đó diện tích hình thang $AEGD$ là: $30.51 = 1530 \text{ (m}^2\text{)}$

Diện tích phần tăng thêm $BEGC$ là: $1530 - 1155 = 375 \text{ (m}^2\text{)}$

Chiều cao BH của hình thang $BEGC$ là: $375.2 : (20 + 5) = 30 \text{ (m)}$

Chiều cao BH cũng là chiều cao của hình thang $ABCD$. Do đó tổng hai đáy AB và CD là:

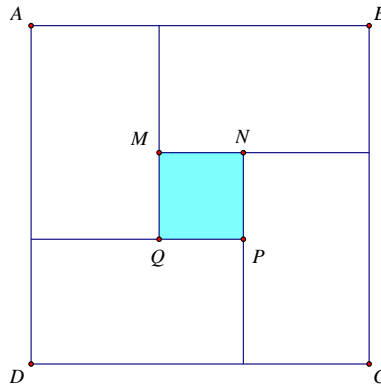
$$1155.2 : 30 = 77 \text{ (m)}$$

Đáy bé là: $(77 - 33) : 2 = 22 \text{ (m)}$

Đáy lớn là: $77 - 22 = 55 \text{ (m)}$

Vậy đáy bé: 22 m ; đáy lớn: 55 m .

Bài 19: Người ta xếp bốn hình chữ nhật bằng nhau có chiều rộng mỗi hình là 5 cm ; chiều dài là 8 cm để được một hình vuông $ABCD$ và bên trong có là một hình vuông $MNPQ$ (như hình vẽ). Tính diện tích hình vuông $MNPQ$.



Trích đề HSG Trường THCS Hoài Ân năm 2021 - 2022

Lời giải

Độ dài cạnh hình vuông $MNPQ$ là: $8 - 5 = 3$ (cm).

Diện tích hình vuông $MNPQ$ là: $3 \cdot 3 = 9$ (cm²).

Bài 20: Sân nhà Nam là hình chữ nhật có chiều dài 10,25 mét và chiều rộng 6,9 mét. Bố bạn Nam đang tính toán để mua gạch lát sân. Tại cửa hàng vật liệu xây dựng có loại gạch lát kích thước 500x500mm (mỗi viên gạch hình vuông cạnh 500mm). Gạch được bán nguyên thùng, mỗi thùng có 4 viên. Biết rằng khi lát sân, nếu gặp khoảng trống nhỏ hơn kích thước viên gạch thì người thợ phải cắt viên gạch để có kích thước vừa khít với khoảng trống và loại bỏ phần dư của viên gạch nếu phần dư đó không dùng đủ cho khoảng trống khác. Em hãy tính giúp bố bạn Nam xem cần mua ít nhất bao nhiêu thùng gạch mới đủ để lát sân trên.

Trích đề HSG huyện Kỳ Anh năm 2021-2022

Lời giải

Kích thước mỗi viên gạch hình vuông là: 500mm = 0,5m

Nên để lát mỗi mét dài ta cần: $1 : 0,5 = 2$ (viên gạch)

Chiều dài của sân là 6,9 mét. Vì $6,9 \cdot 2 = 13,8$ nên để lát theo chiều dài thì ta cần 14 viên, trong đó viên cuối cùng phải cắt bỏ phần thừa

Chiều rộng sân là 10,25 mét nên cần $10,25 \cdot 2 = 20,5$ viên gạch (gồm: 20 viên gạch nguyên và $\frac{1}{2}$ viên

gạch được cắt ra từ viên gạch nguyên). Như vậy phần cắt còn lại $\frac{1}{2}$ viên vẫn sử dụng được.

Tổng số viên gạch cần dùng là: $14 \cdot 20,5 = 287$ (viên)

Vì mỗi thùng gạch có 4 viên mà $287 : 4 = 71,75$ nên bố bạn Nam cần mua ít nhất 72 thùng gạch.

Bài 21: Để đảm bảo đủ ánh sáng phòng học của con, gia đình ông Nam đã sửa căn phòng có nền là hình chữ nhật với kích thước là 4,2m và 5,4m, có hai cửa sổ hình chữ nhật kích thước là 1m và 1,6m và một cửa ra vào hình chữ nhật có kích thước là 1,2m và 2m.

- a) Hỏi căn phòng trên sau khi sửa có đạt chuẩn về ánh sáng hay không? Biết căn phòng đạt mức chuẩn về ánh sáng nếu tổng diện tích các cửa lớn hơn hoặc bằng 20% diện tích nền.
- b) Trên thị trường có các loại gạch với kích thước như sau $50\text{cm} \times 50\text{cm}$; $60\text{cm} \times 60\text{cm}$; $80\text{cm} \times 80\text{cm}$. Gia đình ông Nam muốn lát kín căn phòng trên bằng một loại gạch có cùng kích thước mà không phải cắt (các viên gạch phải lát liền nhau, coi như không có khe hở). Em hãy giúp gia đình ông Nam chọn loại gạch có kích thước phù hợp và tính xem cần bao nhiêu viên gạch để vừa đủ?

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Lời giải

a) Diện tích của các cửa là: $1,1,6,2 + 2,1,2 = 5,6\text{m}^2$

Diện tích nền là: $4,2,5,4 = 22,68\text{m}^2$

Diện tích các cửa so với diện tích nền là: $5,6 : 22,68$ gần bằng $24,69\% > 20\%$

Vậy căn phòng trên đạt chuẩn về ánh sáng.

b) Ta có $4,2\text{m} = 420\text{cm}$; $5,4\text{m} = 540\text{cm}$

ta có ƯCLN($420; 540$) = 60

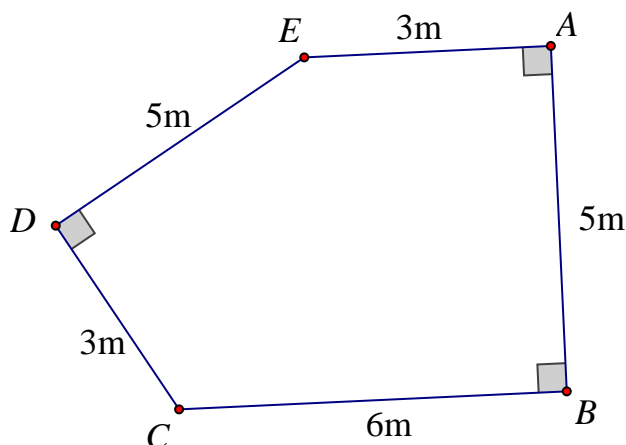
Vì 60 không chia hết cho 50; 80 nên ta chọn gạch có kích thước là $60\text{cm} \times 60\text{cm}$

Diện tích nền là: $4,2,5,4 = 22,68\text{m}^2 = 226800\text{cm}^2$

Do đó số viên gạch để lát vừa đủ căn phòng là $226800 : (60.60) = 63$ viên.

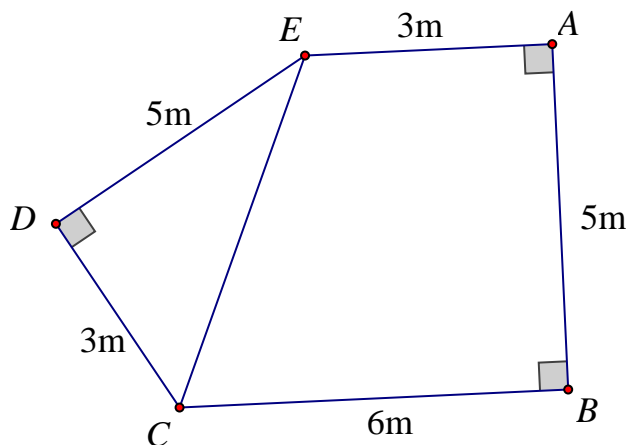
Bài 22: . Một mảnh đất được vẽ trên giấy như hình vẽ bên dưới.

Hỏi diện tích mảnh đất là bao nhiêu mét vuông?



Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Lời giải



Ta có:

$$S_{EDC} = \frac{1}{2} ED \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 = \frac{15}{2} (\text{m}^2)$$

$$S_{AECB} = \frac{1}{2} (AE + CB) AB = \frac{1}{2} \cdot (3 + 6) \cdot 5 = \frac{45}{2} (\text{m}^2)$$

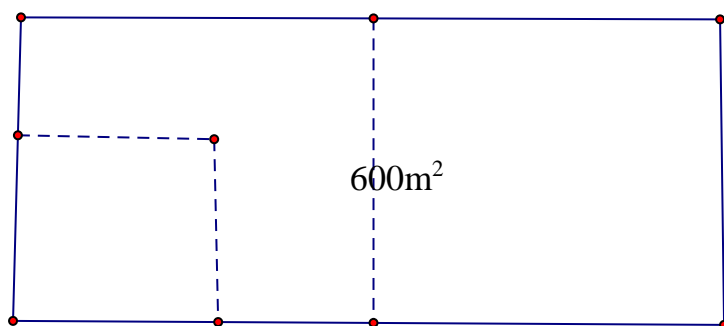
$$S = S_{EDC} + S_{AECB} = 30 (\text{m}^2)$$

Bài 23. Người ta mở rộng một cái ao hình vuông để được một cái ao hình chữ nhật có chiều dài gấp 2 lần chiều rộng. Sau khi mở rộng, diện tích ao tăng thêm 600m^2 và diện tích ao mới gấp 4 lần ao cũ. Hỏi phải dùng bao nhiêu chiếc cọc để đủ rào xung quanh ao mới? Biết rằng cọc nọ cách cọc kia 1 m và ở một góc ao người ta để lối lên xuống rộng 2 m .

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Lời giải

Ta có hình vẽ:



Diện tích ao mới là:

$600 : (4 - 1) \times 4 = 800 (\text{m}^2)$ Ta chia ao mới thành hai hình vuông có diện tích bằng nhau như hình vẽ. Diện tích một hình vuông là:

$$800 : 2 = 400 (\text{m}^2)$$

Vì $400 = 20 \times 20$

Cạnh của hình vuông hay chiều rộng của ao mới là 20m

Chiều dài của ao mới là: $20 \times 2 = 40 (\text{m})$

Chu vi ao mới là:

$$(40 + 20) \times 2 = 120 (\text{m})$$

Số cọc để rào xung quanh ao mới là:

$$(120 - 3) : 1 = 117 (\text{chiếc})$$

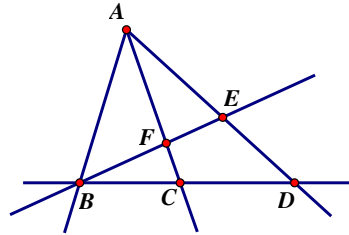
B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP**I. Số điểm, số đoạn thẳng, số đường thẳng****Dạng toán: Đếm số điểm, số đường thẳng, số đoạn thẳng**

Bài 1: Cho 200 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm vẽ một đường thẳng. Số đường thẳng vẽ được là bao nhiêu?

- A. 1990 B. 19900 C. 39800 D. 40000

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 2: Trên hình vẽ sau có bao nhiêu bộ ba điểm thẳng hàng?



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 3: Cho 20 điểm phân biệt trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có thể kẻ được bao nhiêu đoạn thẳng?

- A. 190 B. 180 C. 380 D. 200

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 4: Vẽ đường thẳng d không đi qua O . Trên đường thẳng d lấy 2015 điểm phân biệt. Tính số các góc có đỉnh O và cạnh đi qua 2 điểm bất kỳ trên đường thẳng d .

Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2017-2018

Bài 5: Cho 6 đường thẳng đôi một cắt nhau. Hỏi 6 đường thẳng đó có thể cắt nhau ít nhất tại bao nhiêu điểm, nhiều nhất tại bao nhiêu điểm.

Trích đề HSG Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020

Bài 6:

Trên cùng một nửa mặt chứa tia Oy , có bờ chứa tia Ox . Cần vẽ thêm bao nhiêu tia phân biệt gốc O và không trùng với các tia đã vẽ trong hình để tạo thành 630 góc đỉnh O (chỉ tính các góc thuộc nửa mặt phẳng nói trên).

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 7: Cho 2010 đường thẳng trong đó bất kỳ 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau. Không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018 - 2019

Bài 8: Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Biết rằng tổng số giao điểm mà n đường thẳng đó cắt nhau tạo ra bằng 465. Tìm n .

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Bài 9: Cho 100 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm vẽ một đường thẳng. Số đường thẳng vẽ được là:

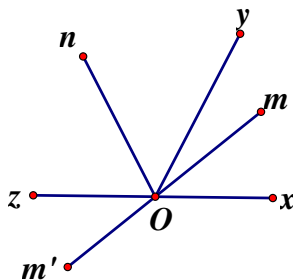
Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 10: Cho góc xOy và góc yOz là hai góc kề bù. Góc yOz bằng 30°

- Vẽ tia Om nằm trong góc xOy sao cho $xOm = 75^\circ$; tia On nằm trong góc yOz sao cho $yOn = 15^\circ$
- Hình vẽ trên có mấy góc?
- Nếu có n tia chung gốc thì sẽ tạo nên bao nhiêu góc ?

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Bài 11: Cho hình vẽ:



Cần vẽ thêm bao nhiêu tia phân biệt chung gốc O và không trùng với các tia đã vẽ trong hình để tạo thành tất cả 300 góc.

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Bài 12: Cho đường thẳng xy , trên đó lấy ba điểm phân biệt A, B, C .

- Biết $AB = 5\text{cm}$, $AC = 3\text{cm}$. Tính BC .
- Trên xy lấy 4 điểm phân biệt (không trùng với A, B, C) và điểm O không nằm trên đường thẳng xy . Hỏi có thể vẽ được tất cả bao nhiêu tam giác có đỉnh là ba trong các điểm đã có trên hình vẽ.

Trích đề HSG huyện Lục Nam năm 2021 - 2022

Bài 13: Lấy thêm 19 điểm phân biệt trên đường thẳng xy (các điểm này không trùng với điểm O) và một điểm A nằm ngoài đường thẳng xy . Hỏi vẽ được bao nhiêu tam giác nhận 3 trong các điểm trên làm đỉnh.

Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2018 – 2019

Bài 14: Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Biết rằng tổng số giao điểm mà n đường thẳng đó cắt nhau tạo ra bằng 465. Tìm n .

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Bài 15: Cho 2010 đường thẳng trong đó bất kỳ 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau. Không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Bài 16: Cho 30 điểm trong đó có đúng 5 điểm thẳng hàng, ngoài ra không còn có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ một đường thẳng. Hỏi có tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021-2022

Bài 17: Cho 20 điểm phân biệt, trong đó có n điểm thẳng hàng. Cứ qua hai điểm vẽ được một đường thẳng. Hãy tìm n , biết rằng vẽ được tổng cộng 170 đường thẳng.

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021 -2022

Bài 18: Cho n điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Biết rằng có tất cả 105 đường thẳng. Tính n

Trích đề HSG huyện Ngọc Lặc năm 2018-2019

Bài 19: Cho 20 điểm phân biệt trong đó có đúng 7 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi từ 20 điểm đó vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Trích đề HSG huyện Hoài Nhơn năm 2015-2016

Bài 20: a) Cho 40 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được bao nhiêu đường thẳng ?

b) Cho 40 điểm trong đó có đúng 10 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được bao nhiêu đường thẳng.

c) Cho n điểm ($n \in \mathbb{N}$). Trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, cứ qua hai điểm ta được 1 đường thẳng. Biết rằng có tất cả 105 đường thẳng. Tìm n ?

Trích đề HSG cấp trường Trần Phú năm 2018-2019

Bài 21: Cho 2018 điểm phân biệt trong đó có đúng 3 điểm thẳng hàng. Qua hai điểm ta kẻ được một đường thẳng. Tính số đường thẳng kẻ được.

Trích đề chọn HSG Nga Sơn năm 2017-2018

Bài 22: Cho tam giác ABC và một đường thẳng d không đi qua bất kỳ đỉnh nào của tam giác và cắt cạnh BC của tam giác. Hãy chứng tỏ rằng đường thẳng d cắt một và chỉ một trong hai cạnh AB và AC của tam giác ABC

Trích đề KSCL HSG Ba Vì năm 2017-2018

Bài 23: Trên đoạn thẳng AB lấy 2006 điểm khác nhau đặt tên theo thứ tự từ A đến B là $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2004}$. Từ điểm M không nằm trên đoạn thẳng AB ta nối M với các điểm $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2004}; B$. Tính số tam giác tạo thành.

Trích đề HSG cấp trường năm 2019-2020

Bài 24: Cho 10 đường thẳng đồng quy tại O . Hỏi có bao nhiêu góc ở đỉnh O được tạo thành (không kể góc bẹt) ?

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015 -2016

Bài 25: Cho 100 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm vẽ một đường thẳng. Số đường thẳng vẽ được là:

A. 200.

B. 4950.

C. 5680.

D. 9900.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 26: Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Biết rằng tổng số giao điểm mà n đường thẳng đó cắt nhau tạo ra bằng 465. Tìm n .

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Bài 27: Có 25 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng?

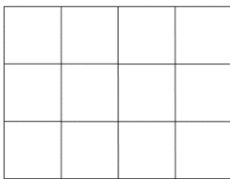
Nếu thay 25 điểm bởi n điểm ($n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$) thì số đường thẳng là bao nhiêu?

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

Bài 28: Cho 30 điểm trong đó có đúng 5 điểm thẳng hàng (ngoài ra không còn 3 điểm nào thẳng hàng). Qua 2 điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi có tất cả bao nhiêu đường thẳng.

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Bài 29: Cho trước n điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Nếu bớt đi 1 điểm thì số đường thẳng vẽ được qua các cặp điểm giảm đi 10 đường thẳng. Tìm n .

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021 - 2022

Bài 30: Cho hình chữ nhật có chiều dài 4 cm, chiều rộng 3 cm. Chia các cạnh của hình chữ nhật thành những đoạn thẳng bằng nhau có độ dài mỗi đoạn là 1 cm. Nối các điểm chia như hình vẽ bên. Hỏi trong hình vẽ có tất cả bao nhiêu hình vuông.

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Bài 31: Cho n điểm phân biệt, trong đó có đúng 10 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm ta vẽ được một đường thẳng. Có tất cả 256 đường thẳng. Tính số điểm n .

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Bài 32. a) Cho 40 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được bao nhiêu đường thẳng?

b) Cho 40 điểm trong đó có đúng 10 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được bao nhiêu đường thẳng.

c) Cho n điểm ($n \in \mathbb{N}$). Trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, cứ qua hai điểm ta được 1 đường thẳng. Biết rằng có tất cả 105 đường thẳng. Tìm n ?

Trích đề HSG Trần Phú Gia Lai năm 2018-2019**II: Trung điểm của đoạn thẳng**

Dạng toán: Tính độ dài đoạn thẳng, chứng minh trung điểm của đoạn thẳng.

Bài 1: Trên đường thẳng a lấy 3 điểm M, N, P sao cho $MN = 2cm, NP = 5cm$. Khi đó độ dài đoạn thẳng MP bằng:

A. 3 cm

B. 3 cm hoặc 7 cm

C. 7 cm

D. 3,5 cm

Trích đề HSG huyện Khoái Châu năm 2018-2019

Bài 2: Cho đoạn thẳng $AB = 12\text{cm}$. Biết điểm M thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AM = 7\text{cm}$, khi đó $AM - MB$ bằng:

- A. 3 cm B. 4 cm C. 2 cm D. 5 cm

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 3: Cho đoạn thẳng $CD = 20\text{ cm}$. Gọi M là trung điểm của CD , I là trung điểm của MC , K là trung điểm của MD , khi đó IK có độ dài là

- A. 10 cm B. 5 cm C. 6 cm D. 2,5 cm

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 4: Cho đoạn thẳng $AB = a$; điểm C nằm giữa hai điểm A và B , điểm M là trung điểm của AC ,

điểm N là trung điểm của CB . Hãy chứng tỏ rằng $MN = \frac{a}{2}$

Trích đề HSG tỉnh Bắc Ninh năm 2016 - 2017

Bài 5: Cho đoạn thẳng AB , điểm O thuộc tia đối của tia AB . Gọi M, N thứ tự là trung điểm của OA, OB .

- Chứng tỏ rằng $OA < OB$
- Trong ba điểm O, M, N điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại ?
- Chứng tỏ rằng độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào vị trí của điểm O (O thuộc tia đối của tia AB)

Trích đề HSG Toán 6 năm 2019 -2020

Bài 6: Cho đoạn thẳng $AB = 8\text{cm}$. Lấy điểm C nằm giữa hai điểm A và B sao cho $BC = 4,5\text{ cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng AC .

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021-2022

Bài 7: Cho ΔABC có $BC = 5,5\text{ cm}$. Điểm M thuộc tia đối của tia CB sao cho $CM = 3\text{cm}$

- Tính độ dài đoạn thẳng BM
- Biết $\widehat{BAM} = 80^\circ, \widehat{BAC} = 60^\circ$ Tính \widehat{CAM}
- Tính độ dài đoạn thẳng BK thuộc đoạn BM biết $CK = 1\text{cm}$

Trích đề HSG huyệnnăm 2019-2020

Bài 8: Cho đoạn thẳng $AB = 8\text{cm}$ và C là trung điểm của nó, lấy điểm D là trung điểm của CB , E là trung điểm của CD . Tính độ dài đoạn thẳng EB .

Trích đề HSG Trường THCS Quảng Tiến năm 2019-2020

Bài 9: Vẽ tia Ax . Trên tia Ax xác định hai điểm B và C sao cho B nằm giữa A, C và $AC = 8\text{cm}$, $AB = 3BC$. Tính độ dài các đoạn AB, BC .

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Bài 10: Trên đường thẳng a lấy ba điểm M, N, P sao cho $MN = 2cm, NP = 5cm$. Khi đó độ dài đoạn MP bằng bao nhiêu

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 11: Cho đoạn thẳng AB ; điểm O thuộc tia đối của tia AB , Gọi M, N thứ tự là trung điểm của OA, OB .

Chứng tỏ rằng độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào vị trí của điểm O (O thuộc tia đối của tia AB)

Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019

Bài 12: Cho góc xAy , trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = 6cm$. Trên tia đối của tia Ax lấy điểm D sao cho $AD = 4cm$.

a) Tính BD

b) Lấy C là một điểm trên tia Ay . Biết $BCD = 80^\circ, BCA = 45^\circ$. Tính góc ACD

c) Biết $AK = 2cm$ (K thuộc BD). Tính BK .

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Bài 13: Cho đoạn thẳng AB , điểm O thuộc tia đối của tia AB . Gọi M, N thứ tự là trung điểm của OA, OB .

a) Chứng tỏ rằng $OA < OB$

b) Trong ba điểm O, M, N điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại ?

c) Chứng tỏ rằng độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào vị trí của điểm O (O thuộc tia đối của tia AB)

Trích đề HSG huyện Nông Cống năm 2019-2020

Bài 14: Vẽ đoạn thẳng $AB = 5cm$

a) Trên đoạn thẳng AB lấy hai điểm M, N sao cho $MN = 1cm$. Tính $AM + BN$?

b) Trên đoạn thẳng AB lấy hai điểm M, N sao cho $AM + BN = 7cm$. Tính MN ?

Trích đề HSG huyện Quế Sơn năm 2018-2019

Bài 15: Trên đường thẳng xy lấy điểm O và hai điểm M, N sao cho $OM = 2cm, ON = 3cm$. Vẽ các điểm A, B trên đường thẳng xy sao cho M là trung điểm của OA ; N là trung điểm của OB . Tính độ dài AB .

Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021 - 2022

Bài 16: Cho hai tia Ox và Oy đối nhau. Trên tia Ox lấy hai điểm A và M sao cho $OA = 5cm, OM = 1cm$. Trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OB = 3cm$. Chỉ ra: M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021-2022

Bài 17: Cho đường thẳng xy . Trên xy , lấy ba điểm A, B, C sao cho $AB = a$ (cm), $AC = b$ (cm) ($b > a$). Gọi I là trung điểm của AB .

a) Tính IC .

b) Lấy 4 điểm M, N, P, Q nằm ngoài đường thẳng xy . Chứng tỏ rằng đường thẳng xy không cắt hoặc cắt ba, hoặc cắt bốn đoạn thẳng trong các đoạn thẳng sau: MN, MP, MQ, NP, NQ, PQ .

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2019 -2020

Bài 18: a) Cho đoạn thẳng $AB = 7$ cm. Trên tia AB lấy điểm I sao cho $AI = 4$ cm. Trên tia BA lấy điểm K sao cho $BK = 2$ cm. Tính IK .

b) Trên tia Ox cho 4 điểm A, B, C, D . Biết rằng A nằm B và C , B nằm giữa C và D ; $OA = 5$ cm, $OD = 2$ cm, $BC = 4$ cm và độ dài AC gấp đôi độ dài BD . Tính độ dài các đoạn BD, AC .

Trích đề HSG huyện Hoàng Hóa năm 2017 -2018

Bài 19: Cho tam giác ABC có $BC = 6$ cm. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $BD = 3$ cm.

a) Tính độ dài đoạn thẳng CD .

b) Gọi M là trung điểm của CD . Tính độ dài đoạn thẳng BM .

c) Biết góc $DAC = 120^\circ$. Vẽ Ax và Ay lần lượt là các tia nằm chính giữa của góc BAC và góc BAD .

d) Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB không chứa điểm D , nếu vẽ thêm n tia gốc A phân biệt không trùng với các tia AB, AC, Ax thì có tất cả bao nhiêu góc đỉnh A được tạo thành?

Trích đề HSG huyện Phù Ninh năm 2015 -2016

Bài 20: Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trên tia đối của tia BA lấy O (O khác B). So sánh độ dài đoạn thẳng OM và trung bình cộng của hai đoạn thẳng OA và OB .

Trích đề HSG huyện Sông Lô năm 2015 -2016

Bài 21: Cho đoạn thẳng $AB = 5$ cm. Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng AB , trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $AN = AM$.

a) Tính BN khi $BM = 2$ cm.

b) Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB , vẽ các tia Ax và Ay sao cho $B Ax = 40^\circ$, $B Ay = 110^\circ$. Tính $y Ax, N Ay$.

c) Xác định vị trí của điểm M trên đoạn thẳng AB để đoạn thẳng BN có độ dài lớn nhất.

Trích đề HSG THCS Ái Thượng năm 2021-2022

Bài 22: Trên đường thẳng xy lấy điểm O . Trên tia Ox lấy điểm A , trên tia Oy lấy điểm B, C sao cho $OA = OC = 2$ cm và $OB = 7$ cm.

1) Vẽ hình sau đó:

a) Tính độ dài đoạn thẳng BC .

b) Cho biết điểm O có là trung điểm đoạn thẳng AC không? Vì sao?

2) Cần lấy thêm trên đường thẳng xy bao nhiêu điểm phân biệt không trùng với các điểm đã cho để trên đường thẳng có 465 đoạn thẳng mà mỗi đoạn thẳng có mút là hai trong các điểm đó.

Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Bài 23: Cho đoạn thẳng AB và trung điểm M của nó. Chứng tỏ rằng nếu C là điểm nằm giữa M và B thì: $CM = \frac{CA - CB}{2}$

Trích đề HSG Trường Hưng Mỹ năm 2018-2019

Bài 24: Cho đoạn thẳng AB , điểm O thuộc tia đối của tia AB . Gọi M, N thứ tự là trung điểm OA, OB

- Chứng tỏ rằng $OA < OB$
- Trong ba điểm O, M, N điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại
- Chứng tỏ rằng độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào vị trí điểm O (O thuộc tia đối tia AB)

Trích đề HSG cấp trường THCS Hà Huy Tập năm 2018-2019

Bài 25: Cho góc bẹt xOy , trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 2cm$; trên tia Oy lấy hai điểm M và B sao cho $OM = 1cm, OB = 4cm$. Chứng tỏ điểm M nằm giữa hai điểm O và B . Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Bài 26: Gọi A và B là hai điểm trên tia Ox sao cho $OA = 4cm, OB = 6cm$. Trên tia BA lấy điểm C sao cho $BC = 3cm$. So sánh AB với AC .

Trích đề HSG cấp trường vòng 2 THCS Tân Lập năm 2018-2019

Bài 27: Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trên tia đối của tia BA lấy O (O khác B). So sánh độ dài đoạn thẳng OM và trung bình cộng của hai đoạn thẳng OA và OB

Trích đề thi chọn HSG Tam Dương năm 2016-2017

Bài 28: Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng 2 cm. Lấy điểm C thuộc đường thẳng AB sao cho $BC = 5cm$. Tính độ dài đoạn thẳng AC

Trích đề chọn HSG Trực Ninh năm 2017-2018

Bài 29: Trên tia Ox cho 4 điểm A, B, C, D . Biết rằng A nằm giữa B và C ; B nằm giữa C và D ; $OA = 7cm$; $OD = 3cm$; $BC = 8cm$ và $AC = 3BD$

- Tính độ dài AC
- Chứng tỏ rằng: Điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AD

Trích đề chọn HSG Nga Sơn năm 2017-2018

Bài 30: Trên tia Ox lấy 2 điểm A, B sao cho $OA = 6cm, OB = 10cm$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của OA, AB . Tính độ dài đoạn thẳng EF .

Trích đề chọn HSG Nga Sơn năm 2017-2018



Bài 31: Trên đường thẳng a lấy ba điểm M, N, P sao cho: $MN = 2cm, NP = 5cm$. Khi đó độ dài đoạn thẳng MP bằng:

- A. 3 cm. B. 7 cm. C. 3 cm hoặc 7 cm. D. 3,5 cm.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 32: Cho ba điểm A, O, B sao cho $OA = 2cm, OB = 3cm$ và $AB = 5cm$. Lấy điểm M nằm trên đường thẳng AB sao cho $OM = 1cm$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .

Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022

Bài 33: Cho hai điểm A và B cùng nằm trên đường thẳng xy sao cho $AB = 5\text{cm}$. Trên tia Ax lấy điểm C sao cho $AC = 3\text{cm}$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính độ dài đoạn thẳng AM .

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Bài 34: Cho hai tia Ox và Oy đối nhau, trên tia Ox lấy hai điểm A và M sao cho $OA = 5\text{cm}$, $OM = 1\text{cm}$; trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OB = 3\text{cm}$. Chứng tỏ: Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Bài 35: Trên tia Ox lấy hai điểm A và B sao cho $OA = 8\text{cm}$, $AB = 2\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng OB .

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 36: Trên tia Ox lấy hai điểm M và N sao cho $OM = 3\text{cm}$, $ON = 7\text{cm}$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng MN .

b) Gọi P là điểm thuộc tia Ox sao cho $MP = 2\text{cm}$. Hỏi P có phải là trung điểm của đoạn thẳng MN không? Vì sao?

Trích đề HSG Trường THCS An Lễ năm 2021 - 2022

Bài 37: Lấy điểm O trên đường thẳng xy . Trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 2\text{cm}$. Trên tia Oy lấy hai điểm M và B sao cho $OM = 1\text{cm}$; $OB = 4\text{cm}$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng BM .

b) Chứng tỏ rằng M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trích đề HSG Trường THCS Ân Hữu năm 2021 - 2022

Bài 38: Lấy điểm O trên đường thẳng xy . Trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 2\text{cm}$. Trên tia Oy lấy hai điểm M và B sao cho $OM = 1\text{cm}$; $OB = 4\text{cm}$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng BM .

b) Chứng tỏ rằng M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

c) Cho điểm Q không thuộc đường thẳng xy và lấy thêm 2017 điểm phân biệt khác thuộc đường thẳng xy và không trùng với 4 điểm A, B, M, O . Hỏi có thể vẽ được bao nhiêu đoạn thẳng có 2 đầu mút là 2 điểm trong số các điểm đã cho?

Trích đề HSG huyện Chí Linh năm 2021-2022

Bài 39: Trên tia Ox lấy hai điểm M và N , sao cho $OM = 5\text{cm}$ và $ON = 9\text{cm}$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng MN .

b) Lấy điểm P trên tia Ox , sao cho $MP = 2\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng OP .

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Bài 40: Trên tia Ox lấy hai điểm A, B (điểm A không trùng với điểm O và độ dài OB lớn hơn độ dài OA). Gọi M là trung điểm của OA . Hãy so sánh độ dài MB với trung bình cộng độ dài OB, AB

Trích đề HSG huyện Tĩnh Gia năm 2018-2019

III: Độ lớn góc

Dạng toán: Tính số đo góc

Bài 1: Cho tam giác ABC có $\angle C = 55^\circ$, trên cạnh AC lấy điểm D (D không trùng với A và C)

- Tính số đo $\angle DBC$ biết $\angle ABD = 30^\circ$
- Từ B dựng tia Bx sao cho $\angle DBx = 90^\circ$. Tính số đo $\angle ABx$

Trích đề HSG cấp trường năm 2018 -2019

Bài 2: Cho điểm O thuộc đường thẳng xy . Vẽ các tia OA, OB sao cho góc $\angle AOx = 40^\circ$, $\angle BOy = 60^\circ$. Tính số đo $\angle AOB$.

Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Bài 3: Cho $\angle xOy = 80^\circ$, tia Oz nằm giữa hai tia Ox, Oy sao cho $\angle xOz = 30^\circ$. Số đo $\angle yOz$ là bao nhiêu

Trích đề HSG huyện Lâm Thao, năm 2018- 2019

Bài 4: Trên đường thẳng AM lấy một điểm O (O nằm giữa A và M). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AM vẽ các tia OB, OC sao cho $\angle MOC = 115^\circ, \angle BOC = 70^\circ$. Trên nửa mặt phẳng đối diện dựng tia OD (D không cùng nằm trong nửa mặt phẳng với B, C qua bờ là AM) sao cho $\angle AOD = 45^\circ$.

- Tia OB nằm giữa hai tia OM, OC không ?
- Tính $\angle MOB, \angle AOC$
- Chứng tỏ rằng 3 điểm D, O, B thẳng hàng.

Trích đề 59 HSG huyện năm 2018- 2019

Bài 5: Cho tam giác ABC có $\angle BAC = 120^\circ$. Điểm E nằm giữa B và C sao cho $\angle BAE = 30^\circ$. Trên mặt phẳng có bờ AC chứa điểm B kẻ tia Ax sao cho $\angle CAx = 30^\circ$, tia Ax cắt BC ở F . Tính số đo của $\angle EAF$

Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019

Bài 6: Cho góc tù $\angle xOy$. Bên trong góc $\angle xOy$, vẽ tia Om sao cho $\angle xOm = 90^\circ$ và vẽ tia On sao cho $\angle yOn = 90^\circ$. Chứng minh $\angle xOn = \angle yOm$

Trích đề HSG trường Nguyễn Khuyến năm 20...-20...

Bài 7 Cho góc $\angle xBy = 55^\circ$. Trên các tia Bx, By lần lượt lấy các điểm A, C ($A \neq B, B \neq C$). Trên đoạn thẳng AC lấy điểm D sao cho $\angle ABD = 30^\circ$.

- Tính độ dài AC , biết $AD = 4cm, CD = 3cm$.
- Tính số đo góc $\angle DBC$.
- Từ B vẽ tia Bz sao cho $\angle DBz = 90^\circ$. Tính số đo $\angle ABz$.

Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015 -2016

Bài 8: Cho hai góc xOy và yOz kề bù sao cho $xOy = 4yOz$.

- Tính số đo mỗi góc có trên hình vẽ?
- Vẽ tia Ot sao cho $xOt = 108^\circ$. Tính góc tOy ?

Trích đề HSG huyện Vĩnh Tường năm 2021 - 2022

Bài 9: Cho xOy và yOz là hai góc kề bù. Góc yOz bằng 30°

- Vẽ tia Om nằm trong góc xOy sao cho $xOm = 75^\circ$; tia On nằm trong yOz sao cho $yOn = 15^\circ$
- Hình vẽ trên có mấy góc?
- Nếu có n tia chung gốc thì sẽ tạo nên bao nhiêu góc ?

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Bài 10: Cho góc bẹt xOy , trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 2cm$; trên tia Oy lấy hai điểm M và B sao cho $OM = 1cm$; $OB = 4cm$.

- Chứng tỏ điểm M nằm giữa hai điểm O và B . Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB
- Từ O kẻ hai tia Ot, Oz sao cho $tOy = 130^\circ$; $zOy = 30^\circ$. Tính số đo tOz

Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019

Bài 11: Cho 10 đường thẳng đồng quy tại O . Hỏi có bao nhiêu góc ở đỉnh O được tạo thành (không kể góc bẹt)

Trích đề thi chọn HSG Tam Dương năm 2016-2017

Bài 12: Trên cùng nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox vẽ hai tia Oy , Oz sao cho $xOy = 50^\circ$; $xOz = 100^\circ$.

Vẽ tia Oy' là tia đối của tia Oy . Tính số đo $y'Oz$

Trích đề chọn HSG Nga Sơn năm 2017-2018

Bài 13: Cho $xOy = 80^\circ$, tia Oz nằm giữa hai tia Ox và Oy sao cho $xOz = 30^\circ$. Số đo yOz là:

- A. 50° . B. 110° . C. 50° hoặc 110° . D. 80° .

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 14: Cho 2021 tia chung gốc O (trong đó không có hai tia nào đối nhau). Hỏi có bao nhiêu góc có hai cạnh là hai trong 2021 tia đã cho?

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Bài 15: Cho xAy , trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = 6cm$. Trên tia đối của tia Ax lấy điểm D sao cho $AD = 4cm$.

- Tính BD .
- Lấy C là một điểm trên tia Ay . Biết $BCD = 80^\circ$, $BCA = 45^\circ$. Tính ACD .
- Biết $AK = 2cm$ (K thuộc BD). Tính BK .

Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022

Bài 16: Trên cùng nửa mặt phẳng cho trước có bờ Ox vẽ hai tia Oy, Oz sao cho $\widehat{xOy} = 70^\circ, \widehat{yOz} = 30^\circ$
Xác định số đo của \widehat{xOz}

Trích đề HSG huyện Tĩnh Gia năm 2018-2019

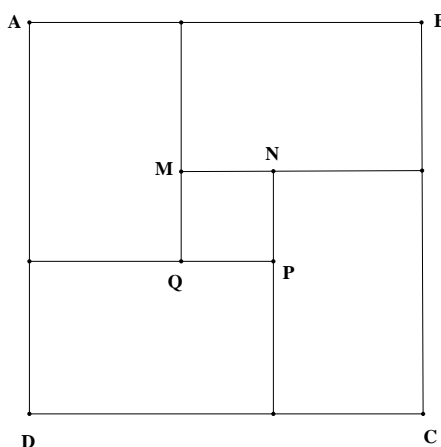
IV. Các bài toán về chu vi, diện tích

Dạng toán: Giải các bài toán về chu vi diện tích

Bài 1: Hình thang vuông $ABCD$ có góc A và D vuông. Đường chéo AC cắt đường cao BH tại I . So sánh diện tích tam giác IDC và diện tích tam giác BHC .

Trích đề HSG tỉnh Bắc Ninh năm 2016 - 2017

Bài 2: Người ta xếp bốn hình chữ nhật bằng nhau có chiều rộng mỗi hình là 5 cm ; chiều dài là 8 cm để được một hình vuông $ABCD$ và bên trong có là một hình vuông $MNPQ$ (như hình vẽ). Tính diện tích hình vuông $MNPQ$.

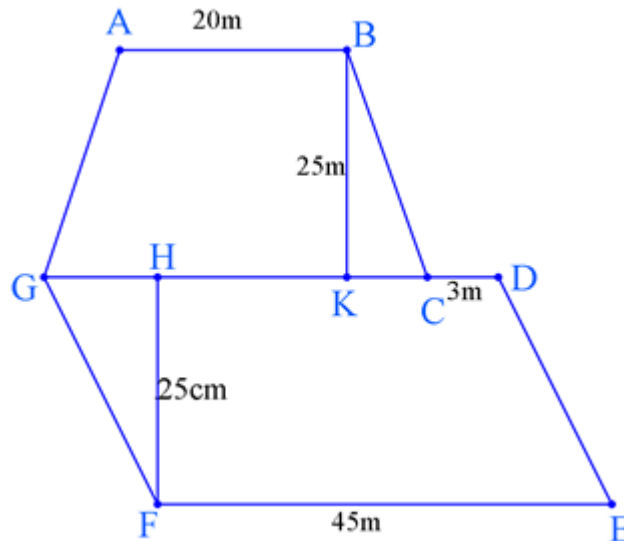


Trích đề HSG huyện Hà Trung năm 2021-2022

Bài 3: Một khu đất hình chữ nhật có chu vi là 132 m . Nếu giảm chiều rộng đi 5 m và tăng chiều dài lên 5 m thì chiều dài gấp đôi chiều rộng. Người ta dùng 30% diện tích khu đất để trồng rau, $\frac{11}{30}$ diện tích khu đất để trồng cây ăn quả, diện tích còn lại để xây nhà. Hỏi diện tích xây nhà là bao nhiêu?

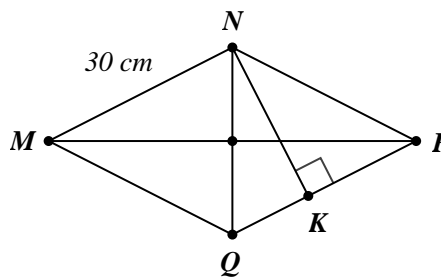
Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2022-2023

Bài 4: Bác Hai có một thửa ruộng có dạng như hình bên (độ dài đoạn thẳng CD bằng 3 mét). Bác Hai trồng lúa trên toàn bộ thửa ruộng đó. Nếu trên mỗi mét vuông bác Hai thu được 0.8 kg thóc thì số tiền bác Hai thu được là bao nhiêu? Biết mỗi tạ thóc có giá 700.000 đồng.



Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022

Bài 5: Cho hình thoi $MNPQ$ có độ dài cạnh là 30cm (Hình vẽ 1). Tổng độ dài hai đường chéo là 84cm , hiệu độ dài hai đường chéo là 12cm . Tính độ dài chiều cao NK .



Hình vẽ 1

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Bài 6: Một thửa ruộng hình chữ nhật được chia thành 2 mảnh hình chữ nhật (hình vẽ 2), một mảnh nhỏ trồng rau và mảnh còn lại trồng ngô. Diện tích của mảnh trồng ngô gấp 6 lần diện tích của mảnh trồng rau. Chu vi mảnh trồng ngô gấp 4 lần chu vi mảnh trồng rau. Tính diện tích thửa ruộng ban đầu, biết chiều rộng của nó là 5 mét.

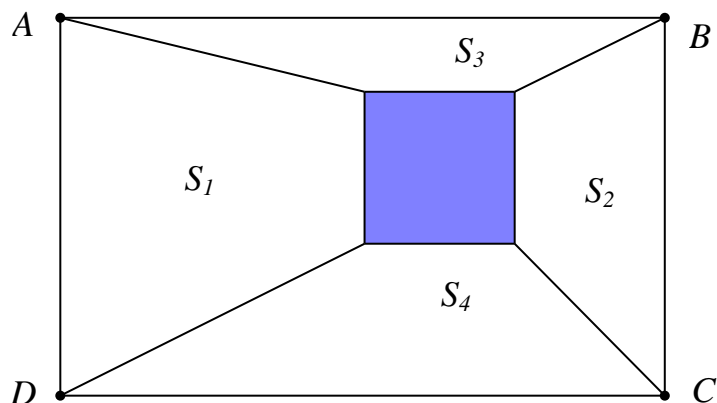
Nếu giảm chiều dài của một hình chữ nhật đi 20% và muốn diện tích không thay đổi thì chiều rộng phải thay đổi như thế nào?

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Bài 7: Một bác nông dân có một khu vườn hình vuông. Ông ấy mở rộng vườn thêm 3m về mỗi phía như hình bên và thấy rằng diện tích khu vườn rộng thêm 84m^2 . Tìm diện tích của khu vườn ban đầu.

Trích đề HSG THCS Quỳnh Thiện năm 2022 – 2023

Bài 8: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài AB hơn chiều rộng BC là 4cm . Hình chữ nhật được chia thành một hình vuông và bốn hình thang (H1). Biết rằng 4 hình thang có diện tích là $S_1; S_2; S_3; S_4$ và $S_1 + S_2 = 49\text{cm}^2$; $S_3 + S_4 = 41\text{cm}^2$. Tính cạnh của hình vuông.

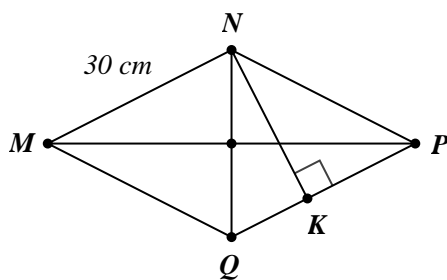


Trích đề HSG huyện Bá Thước năm 2021 - 2022

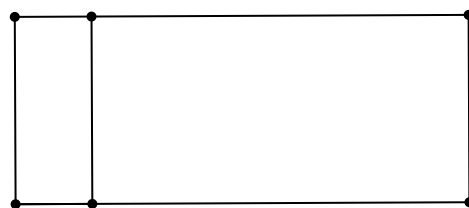
Bài 9: Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài 15 m, chiều rộng 8 m. Người ta trồng một vườn hoa hình thoi ở trong mảnh đất đó, biết diện tích phần còn lại là 75 m^2 . Tính độ dài đường chéo AC , biết $BD = 9 \text{ m}$.

Trích đề HSG huyện Thọ Xuân năm 2021-2022

Bài 10: 1. Cho hình thoi $MNPQ$ có độ dài cạnh là 30 cm (Hình vẽ 1). Tổng độ dài hai đường chéo là 84, hiệu độ dài hai đường chéo là 12 cm. Tính độ dài chiều cao NK .



Hình vẽ 1



Hình vẽ 2

2. Một thửa ruộng hình chữ nhật được chia thành hai mảnh hình chữ nhật (Hình vẽ 2), một mảnh nhỏ trồng rau và mảnh còn lại trồng ngô. Diện tích của mảnh trồng ngô gấp 6 lần diện tích của mảnh trồng rau. Chu vi mảnh trồng ngô gấp 4 lần chu vi mảnh trồng rau. Tính diện tích thửa ruộng ban đầu, biết chiều rộng của nó là 5 mét.

3. Nếu giảm chiều dài của một hình chữ nhật đi 20% và muốn diện tích không thay đổi thì chiều rộng phải thay đổi như thế nào?

Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022

Bài 11: Cho tam giác ABC có diện tích bằng 42 cm^2 . Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $CE = \frac{1}{3} AE$

, trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $BF = \frac{1}{2} FC$, đoạn EF cắt AB tại K .

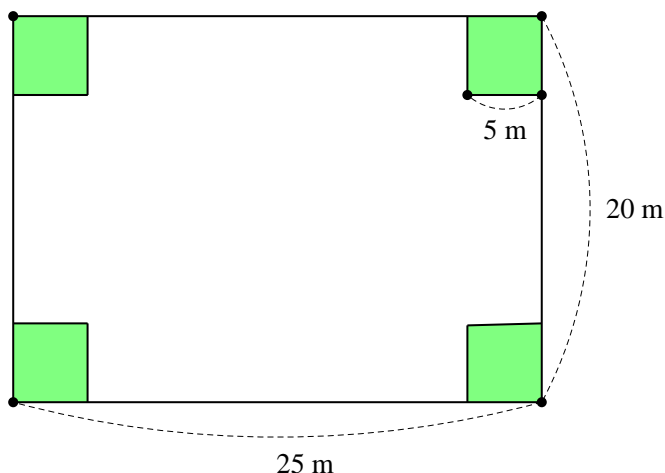
1. Tính diện tích của tam giác ABF và tam giác AEF ?

2. Tính tỉ số độ dài giữa KB và KA ?

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Bài 12: Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài 25 m, chiều rộng 20 m. Người ta trồng hoa hồng vào bồn hình vuông ở các góc vườn (như hình vẽ bên) và phần diện tích còn lại trồng hoa cúc.

1) Tính diện tích phần đất trồng hoa mỗi loại.



2) Biết mỗi mét vuông làm đất và trồng hoa hồng phải trả 50000 đồng tiền công, mỗi mét vuông làm đất và trồng hoa cúc phải trả 40000 đồng. Tính số tiền công phải trả để trồng hoa cho cả mảnh vườn đó.

Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-2022

Bài 13: Minh có hai tờ giấy hình vuông mà số đo các cạnh hơn kém nhau 8 cm. Minh đem đặt tờ giấy hình vuông nhỏ nằm trọn trong tờ giấy hình vuông lớn thì phần diện tích còn lại không bị che của tờ giấy hình vuông lớn là 96 cm^2 . Tính độ dài cạnh của mỗi tờ giấy.

Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022

Bài 14: Bác An muốn làm hàng rào cho khu vườn hình vuông trồng hoa hồng của mình. Biết khu vườn có cạnh 5 m, tính độ dài hàng rào?

- A. 25 m. B. 20 m. C. 10 m. D. 5 m.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 15: Một hình chữ nhật có chiều dài là 12m, chiều rộng là 8m, một hình vuông có chu vi bằng chu vi hình chữ nhật. Diện tích hình vuông đó là:

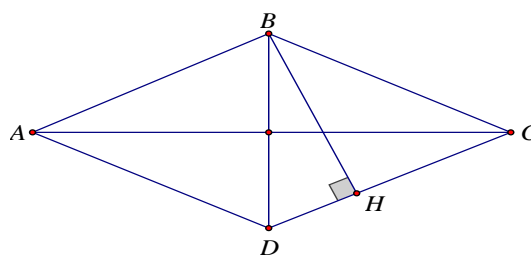
- A. 96 m^2 . B. 25 m^2 . C. 40 m^2 . D. 100 m^2 .

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 16:

Cho hình thoi $ABCD$ có độ dài cạnh là 30cm

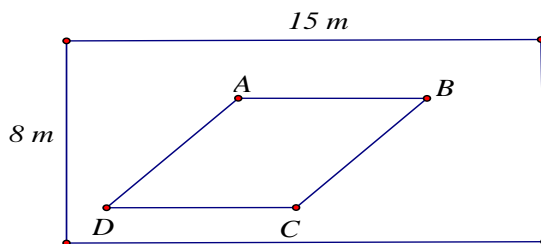
(Hình vẽ 1). Tổng độ dài hai đường chéo là 84cm, hiệu độ dài hai đường chéo là 12cm. Tính độ dài đường cao BH .



Hình vẽ 1

Trích đề HSG trường THCS Yên Phong năm 2021 - 2022

Bài 17: Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài 15m, chiều rộng 8m. Người ta trồng một vườn hoa hình thoi ở trong mảnh đất đó, biết diện tích phần còn lại là 75 m^2 . Tính độ dài đường chéo AC , biết $BD = 9\text{ m}$.

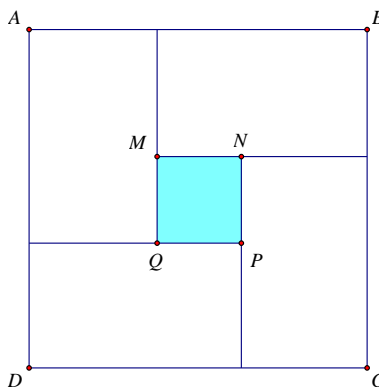


Trích đề HSG trường THCS Nghĩa Đồng (Tân Kỳ) năm 2021 - 2022

Bài 18: Một thửa ruộng hình thang có diện tích là 1155 m^2 và có đáy bé kém đáy lớn 33m. Người ta kéo dài đáy bé thêm 20m và kéo dài đáy lớn thêm 5m về cùng một phía để được hình thang mới. Diện tích hình thang mới này bằng diện tích của một hình chữ nhật có chiều rộng là 30m và chiều dài 51m. Hãy tính đáy bé, đáy lớn của thửa ruộng ban đầu.

Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021 - 2022

Bài 19: Người ta xếp bốn hình chữ nhật bằng nhau có chiều rộng mỗi hình là 5cm; chiều dài là 8cm để được một hình vuông $ABCD$ và bên trong có là một hình vuông $MNPQ$ (như hình vẽ). Tính diện tích hình vuông $MNPQ$.



Trích đề HSG Trường THCS Hoài Ân năm 2021 - 2022

Bài 20: Sân nhà Nam là hình chữ nhật có chiều dài 10,25 mét và chiều rộng 6,9 mét. Bố bạn Nam đang tính toán để mua gạch lát sân. Tại cửa hàng vật liệu xây dựng có loại gạch lát kích thước $500 \times 500\text{mm}$ (mỗi viên gạch hình vuông cạnh 500mm). Gạch được bán nguyên thùng, mỗi thùng có 4 viên. Biết rằng khi lát sân, nếu gặp khoảng trống nhỏ hơn kích thước viên gạch thì người thợ phải cắt viên gạch để có kích thước vừa khít với khoảng trống và loại bỏ phần dư của viên gạch nếu phần dư đó không dùng đủ cho khoảng trống khác. Em hãy tính giúp bố bạn Nam xem cần mua ít nhất bao nhiêu thùng gạch mới đủ để lát sân trên.

Trích đề HSG huyện Kỳ Anh năm 2021-2022

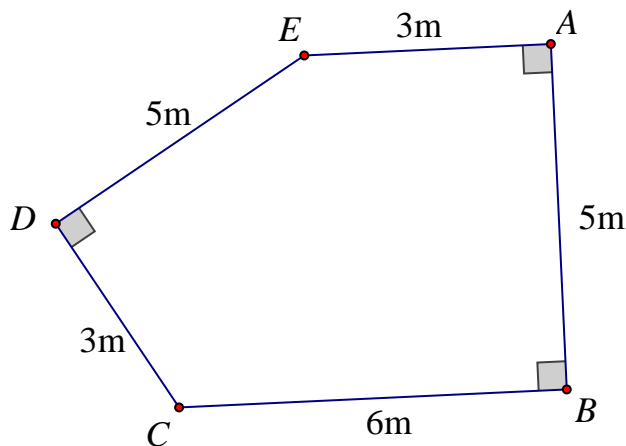
Bài 21: Để đảm bảo đủ ánh sáng phòng học của con, gia đình ông Nam đã sửa căn phòng có nền là hình chữ nhật với kích thước là 4,2 m và 5,4 m, có hai cửa sổ hình chữ nhật kích thước là 1m và 1,6 m và một cửa ra vào hình chữ nhật có kích thước là 1,2 m và 2 m.

- a) Hỏi căn phòng trên sau khi sửa có đạt chuẩn về ánh sáng hay không? Biết căn phòng đạt mức chuẩn về ánh sáng nếu tổng diện tích các cửa lớn hơn hoặc bằng 20% diện tích nền.
- b) Trên thị trường có các loại gạch với kích thước như sau $50\text{cm} \times 50\text{cm}$; $60\text{cm} \times 60\text{cm}$; $80\text{cm} \times 80\text{cm}$. Gia đình ông Nam muốn lát kín căn phòng trên bằng một loại gạch có cùng kích thước mà không phải cắt (các viên gạch phải lát liền nhau, coi như không có khe hở). Em hãy giúp gia đình ông Nam chọn loại gạch có kích thước phù hợp và tính xem cần bao nhiêu viên gạch để vừa đủ?

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022

Bài 22: . Một mảnh đất được vẽ trên giấy như hình vẽ bên dưới.

Hỏi diện tích mảnh đất là bao nhiêu mét vuông?



Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

Bài 23. Người ta mở rộng một cái ao hình vuông để được một cái ao hình chữ nhật có chiều dài gấp 2 lần chiều rộng. Sau khi mở rộng, diện tích ao tăng thêm 600m^2 và diện tích ao mới gấp 4 lần ao cũ. Hỏi phải dùng bao nhiêu chiếc cọc để đủ rào xung quanh ao mới? Biết rằng cọc nọ cách cọc kia 1m và ở một góc ao người ta để lối lên xuống rộng 2m .

Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022

C. SỬU TÀM CÁC BÀI TƯƠNG TỰ

Bài 1: Cho 1000 điểm phân biệt, trong đó có đúng 3 điểm thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng tạo bởi hai trong 1000 điểm đó?

Lời giải

Số đường thẳng tạo bởi 1000 điểm phân biệt là: $\frac{1000 \cdot 999}{2} = 499500$ (đường thẳng).

Số đường thẳng tạo bởi 3 điểm không thẳng hàng là: $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ (đường thẳng).

Theo bài ra vì có 3 điểm thẳng hàng nên số đường thẳng giảm đi là: $3 - 1 = 2$ (đường thẳng).

Vậy số đường thẳng tạo thành là: $499500 - 2 = 499498$ (đường thẳng)

Bài 2:

1. Trên tia Oy , lấy điểm M và H sao cho $OM = 5\text{cm}$, $OH = 10\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng HM .

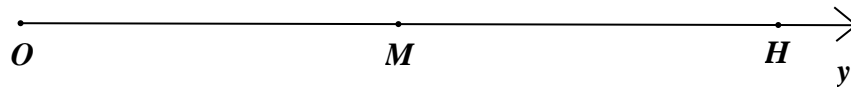
Điểm M có là trung điểm của đoạn thẳng OH không? Vì sao?

2. Cho đoạn thẳng AB . Điểm C thuộc tia đối của tia BA . Gọi M , N theo thứ tự là trung điểm của

AB và AC . Chứng minh rằng: $CM = \frac{CA + CB}{2}$ và $MN = \frac{BC}{2}$.

Lời giải

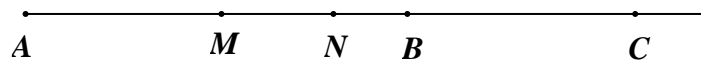
1) Chứng minh được M nằm giữa O và H .



Ta có $OM + MH = OH \Rightarrow MH = 10 - 5 = 5\text{cm}$

Điểm M có là trung điểm của đoạn thẳng OH vì: M nằm giữa O và H và $MH = MO (= 5\text{cm})$

2) Chứng minh rằng: $CM = \frac{CA + CB}{2}$ và $MN = \frac{BC}{2}$.



Vì M là trung điểm của AB , điểm C thuộc tia đối của tia BA nên M nằm giữa A và C .

Suy ra: $CA = CM + AM$

$$\Rightarrow CM = AC - AM \quad (1)$$

Lại có B nằm giữa M và C

$$\Rightarrow CM = CB + BM \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2CM = AC - AM + BC + MB = AC + BC$ (do $AM = MB$)

$$\text{Vậy } CM = \frac{CA + CB}{2}$$

$$\text{Lại có } N \text{ là trung điểm của } AC \Rightarrow CN = \frac{AC}{2}$$

Có $AB < AC$, M , N theo thứ tự là trung điểm của AB và $AC \Rightarrow AM < AN$

$$\Rightarrow M \text{ nằm giữa } A \text{ và } N \Rightarrow AN = AM + MN$$

$$\Rightarrow MN = AN - AM = \frac{AC - AB}{2} = \frac{BC}{2}$$

Bài 3: Nhà Hoàng cách trường học $3400m$. Hằng ngày trên đường đến trường Hoàng phải đi qua UBND xã sau đó đến một siêu thị cách trường $800m$.



Nhà Hoàng

UBND xã

Siêu thị

Trường

Hỏi quãng đường từ UBND xã đến siêu thị dài bao nhiêu m? Biết rằng UBND xã nằm chính giữa nhà Hoàng và trường học.

Trích đề HSG huyện Mỹ Lộc năm 2021 - 2022

Lời giải

Vì UBND xã nằm chính giữa nhà Hoàng và trường học nên khoảng cách từ UBND xã đến trường học là : $3400 : 2 = 1700$ (m)

Vì siêu thị cách trường $800m$ nên khoảng cách từ UBND xã đến siêu thị là :

$$1700 - 800 = 900m$$

Vậy khoảng cách từ UBND xã đến siêu thị là $900m$

Bài 4: Người ta trồng cây ở hai bên đường của một đoạn đường dài $1500m$. Biết khoảng cách giữa các cây đều nhau là $2m$ và ở cả 2 đầu của đoạn đường đều có trồng cây. Tính số cây phải trồng ở cả 2 bên của đoạn đường đó

Trích đề HSG huyện Trực Ninh, năm 2021 - 2022

Lời giải

Số cây phải trồng ở 1 bên của đoạn đường đó là: $1500 : 2 + 1 = 751$ (cây)

Số cây phải trồng ở cả 2 bên của đoạn đường đó là: $751 \cdot 2 = 1502$ (cây)

Đáp số: 1502 cây.

Bài 5: Cho 20 điểm phân biệt trong đó có a điểm thẳng hàng cứ qua 2 điểm ta vẽ được 1 đường thẳng. Tìm a biết số đường thẳng tạo thành là 421 đường thẳng.

Lời giải

Giả sử trong 20 điểm không có 3 điểm nào thẳng hàng

Gọi 20 điểm đó là $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{20}$

Vì cứ qua 2 điểm ta vẽ được 1 đường thẳng nên

Qua điểm A_1 và từng điểm trong 19 điểm còn lại A_2, A_3, \dots, A_{20} ta vẽ được 19 đường thẳng.

Qua điểm A_2 và từng điểm trong 18 điểm còn lại A_3, A_4, \dots, A_{20} ta vẽ được 18 đường thẳng.

.....

Qua điểm A_{19} và điểm A_{20} ta vẽ được 1 đường thẳng.

Do đó số đường thẳng tạo thành là: $1+2+3+\dots+19+20=190$ (đường thẳng)

Với a điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng thì ta có số đường thẳng tạo thành là

$$1+2+3+\dots+(a-1) = \frac{a \cdot (a-1)}{2}$$

Với a điểm thẳng hàng ta chỉ vẽ được 1 đường thẳng.

Vậy trong 20 điểm mà có a điểm thẳng hàng thì số đường thẳng giảm đi là:

$$(a-1)a : 2 - 1 = 190 - 170$$

$$(a-1)a : 2 = 21 \Rightarrow a(a-1) = 42 = 6 \cdot 7 \Rightarrow a = 7$$

Bài 6: Trên đoạn thẳng $AB = 3$ cm lấy điểm M . Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $AM = AN$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng BN khi $BM = 1$ cm.

b. Hãy xác định vị trí của M (trên đoạn thẳng AB) để BN có độ dài lớn nhất.

Lời giải

a) - Hình vẽ:

$$- M \text{ nằm giữa hai điểm } A, B \text{ nên } MA = AB - MB = 3 - 1 = 2 \text{ (cm)}$$

Suy ra $AN = AM = 2$ (cm).

$$- A \text{ nằm giữa hai điểm } N, B \text{ nên } BN = AN + AB = 2 + 3 = 5 \text{ (cm).}$$

b) $BN = AN + AB$, AB không đổi nên BN lớn nhất khi AN lớn nhất.

+) AN lớn nhất khi AM lớn nhất.

+) AM lớn nhất khi $AM = AB$.

- Lúc đó M trùng với B và BN bằng 6 (cm).

Bài 7: Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Biết rằng tổng số giao điểm mà n đường thẳng đó cắt nhau tạo ra bằng 465. Tìm n .

Lời giải

Có n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy, nên mỗi đường thẳng sẽ cắt $n-1$ đường thẳng còn lại tạo ra $n-1$ giao điểm phân biệt.

Do đó n đường thẳng thì có $n(n-1)$ giao điểm nhưng mỗi giao điểm đã được tính 2 lần.

Vậy thực tế chỉ có giao điểm.

Theo bài ra ta có:

$$\Rightarrow n(n-1) = 930 = 31.30$$

$$\Rightarrow n = 31$$

Vậy $n = 31$

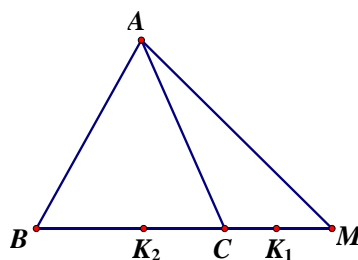
Bài 8: Cho tam giác ABC có $BC = 5,5\text{cm}$. Điểm M thuộc tia đối của tia CB sao cho $CM = 3\text{cm}$

a. Tính độ dài BM

b. Biết $BAM = 80^\circ, BAC = 60^\circ$. Tính CAM

c. Tính độ dài BK thuộc đoạn BM biết $CK = 1\text{cm}$

Lời giải



a) C nằm giữa B và $M \Rightarrow BC + CM = BM \Rightarrow BM = 3 + 5,5 = 8,5$

b) C nằm giữa B và M nên AC là tia nằm giữa 2 tia AB, AM

$$\Rightarrow BAC + CAM = BAM.$$

$$\Rightarrow CAM = BAM - BAC = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$$

c. Xét 2 trường hợp:

+ Nếu K nằm giữa C và M ta tính được: $BK = BC + CK = 5,5 + 1 = 6,5(\text{cm})$

+ Nếu K nằm giữa C và $B \Rightarrow BK = 4,5\text{cm}$

Bài 9: Cho góc $xBy = 55^\circ$. Trên các tia Bx, By lần lượt lấy các điểm A, C ($A \neq B, B \neq C$). Trên đoạn

thẳng AC lấy điểm D sao cho $ABD = 30^\circ$

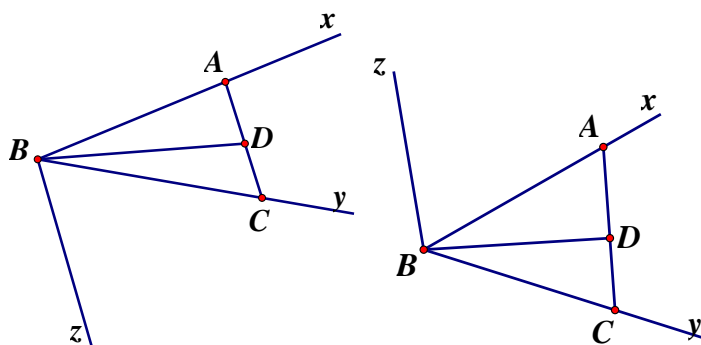
a) Tính độ dài AC , biết $AD = 4\text{cm}, CD = 3\text{cm}$

b) Tính số đo góc DBC

c) Từ B vẽ tia Bz sao cho $DBz = 90^\circ$. Tính số đo ABz

Lời giải

TH1:



TH2:

a. Vì D thuộc đoạn thẳng AC nên D nằm giữa A và C

$$AC = AD + CD = 4 + 3 = 7 \text{ cm}$$

b. Chứng minh được tia BD nằm giữa hai tia BA và BC

$$\text{Ta có đẳng thức: } \angle ABC = \angle ABD + \angle DBC \Rightarrow \angle DBC = \angle ABC - \angle ABD = 25^\circ$$

c. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Tia Bz và tia BD nằm về hai phía nửa mặt phẳng có bờ là AB nên tia BA nằm giữa hai tia Bz và BD

$$\text{Tính được } \angle ABz = 90^\circ - \angle ABD = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

Trường hợp 2: Tia Bz và tia BD nằm về cùng nửa mặt phẳng có bờ là AB nên tia BD nằm giữa hai tia Bz và BA .

$$\text{Tính được } \angle ABz = 90^\circ + \angle ABD = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

Bài 10:

a) Cho đoạn thẳng $AB = 7 \text{ cm}$. Trên tia AB lấy điểm I sao cho $AI = 4 \text{ cm}$. Trên tia BA lấy điểm K sao cho $BK = 2 \text{ cm}$. Hãy chứng tỏ rằng I nằm giữa A và K . Tính IK

b) Trên tia Ox cho 4 điểm A, B, C, D . biết rằng A nằm B và C , B nằm giữa C và D . $OA = 5 \text{ cm}$, $OD = 2 \text{ cm}$, $BC = 4 \text{ cm}$ và độ dài AC gấp đôi độ dài BD . Tính độ dài các đoạn BD , AC .

Lời giải

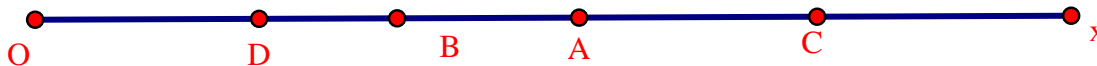


a. Trên tia BA ta có $BK = 2\text{cm}$, $AB = 7\text{cm}$. nên $BK < BA$ do đó điểm K nằm giữa A và B . Suy ra :

$$AK + KB = AB \Rightarrow AK = 7 - 2 = 5\text{cm}$$

Trên tia AB có điểm I và K mà $AI < AK$ ($4 < 5$) nên điểm I nằm giữa A và K .

$$\text{Do } I \text{ nằm giữa } A \text{ và } K \text{ nên } AI + IK = AK \Rightarrow 4 + IK = 5 \Rightarrow IK = 1(\text{cm})$$



b) Vì A nằm giữa B và C nên $BA + AC = BC \Rightarrow BA + AC = 4$ (1)

Lập luận $\Rightarrow B$ nằm giữa A và D

Theo giả thiết $OD < OA \Rightarrow D$ nằm giữa O và A .

$$\text{Mà } OD + DA = OA \Rightarrow 2 + DA = 5 \Rightarrow DA = 3\text{cm}$$

$$\text{Ta có } DB + BA = DA \Rightarrow DB + BA = 3(2)$$

$$\text{Lấy (1) - (2): } AC - DB = 1 \quad (3)$$

Theo đề ra : $AC = 2BD$ thay vào (3)

$$\text{Ta có: } 2BD - BD = 1 \Rightarrow BD = 1(\text{cm}) \Rightarrow AC = 2BD = 2(\text{cm})$$

Bài 11: Cho 20 điểm, trong đó có a điểm thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm, ta vẽ một đường thẳng. Tìm a , biết vẽ được tất cả 170 đường thẳng.

Lời giải

Giả sử trong 20 điểm, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Khi đó, số đường thẳng vẽ được là:

$$19 \cdot 20 : 2 = 190.$$

Trong a điểm không có 3 điểm nào thẳng hàng. Số đường thẳng vẽ được là: $(a-1)a : 2$.

Vì có a điểm thẳng hàng nên qua a điểm này ta chỉ vẽ được 1 đường thẳng.

$$\text{Ta có: } 190 - (a-1)a : 2 + 1 = 170$$

$$(a-1)a : 2 = 21$$

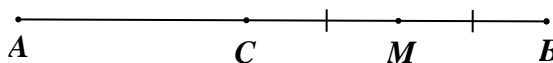
$$(a-1)a = 42$$

$$(a-1)a = 6 \cdot 7$$

$$\text{Vậy } a = 7.$$

Bài 12: Cho đoạn thẳng $AB = 7\text{cm}$. Gọi C là điểm nằm giữa A và B , $AC = 3\text{cm}$. M là trung điểm của BC . Tính BM .

Lời giải:



Vì điểm C nằm giữa hai điểm A và B

Nên $AC + BC = AB$

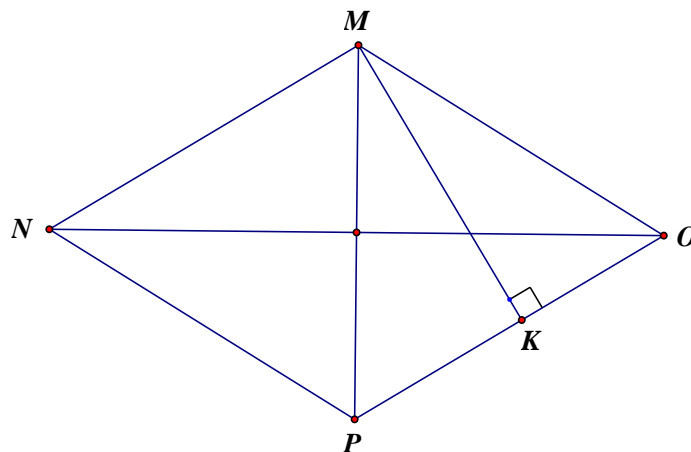
$$3 + BC = 7$$

Suy ra $BC = 7 - 3 = 4$ (cm)

Vì M là trung điểm của đoạn thẳng BC

$$\text{Nên } BM = \frac{BC}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ (cm).}$$

Bài 13: Cho hình vẽ sau:



Hình thoi $MNPQ$ có độ dài cạnh là 30 cm . Tổng độ dài hai đường chéo là 84 cm , hiệu độ dài hai đường chéo là 12 cm . Tính độ dài chiều cao NK .

Lời giải

Độ dài đường chéo thứ nhất của hình thoi là:

$$(84 + 12) : 2 = 48 \text{ (cm)}$$

Độ dài đường chéo thứ hai của hình thoi là:

$$48 - 12 = 36 \text{ (cm)}$$

Diện tích hình thoi $MNPQ$ là:

$$48 \cdot 36 : 2 = 864 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Diện tích hình thoi còn được tính như sau: $S_{MNPQ} = NK \cdot PQ$

$$\Rightarrow NK = S_{MNPQ} : PQ = 864 : 30 = 28,8 \text{ (cm)}$$

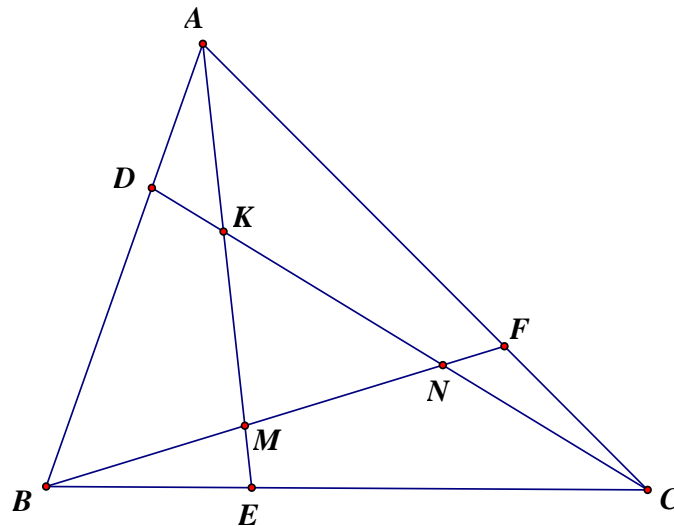
Vậy $NK = 28,8\text{ cm}$

Bài 14: Cho tam giác ABC . Lấy các điểm D, E, F theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CA sao

cho $AD = \frac{1}{3}AB, BE = \frac{1}{3}BC, CF = \frac{1}{3}CA$. Các đoạn thẳng AE, BF, CD cắt nhau tạo thành một tam

giác. Chứng minh rằng diện tích tam giác này bằng $\frac{1}{7}$ diện tích tam giác ABC .

Lời giải



Đặt $S_{AKD} = a$ thì

$$S_{AKB} = 3S_{AKD} = 3a \text{ (vì } AD = \frac{1}{3}AB \text{)}$$

Ta có $S_{ABE} = \frac{1}{2}S_{AEC}$ (vì $BE = \frac{1}{2}EC$)

$$S_{BKE} = \frac{1}{2}S_{KEC} \text{ (vì } BE = \frac{1}{2}EC \text{)}$$

$$\Rightarrow S_{ABK} = \frac{1}{2}S_{AKC} \Rightarrow S_{AKC} = 2S_{ABK} = 2 \cdot 3a = 6a$$

$$S_{ADC} = S_{AKD} + S_{AKC} = 7a$$

$$S_{ABC} = 3S_{ADC} = 3 \cdot 7a = 21a \text{ (vì } AD = \frac{1}{3}AB \text{)}$$

$$\Rightarrow S_{AKC} = \frac{6}{21}S_{ABC} = \frac{2}{7}S_{ABC}$$

Chứng minh tương tự $S_{BMA} = S_{CNB} = \frac{2}{7}S_{ABC}$

$$\text{Do đó } S_{AKC} + S_{CNB} + S_{BMA} = \frac{6}{7}S_{ABC} \Rightarrow S_{MNC} = \frac{1}{7}S_{ABC}$$

Bài 15: Cho 2010 đường thẳng trong đó bất kì hai đường thẳng nào cũng cắt nhau. Không có ba đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Lời giải

Mỗi đường thẳng cắt 2009 đường thẳng còn lại nên tạo ra 2009 giao điểm.

Có 2010 đường thẳng nên có : $2010 \cdot 2009 = 4038090$ (giao điểm).

Do mỗi giao điểm được tính hai lần nên số giao điểm là :

$$4038090 : 2 = 2019045 \text{ (giao điểm).}$$

Vậy số giao điểm là: 2019045 (giao điểm).

Bài 16: Cho k đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy (cùng đi qua 1 điểm), biết tổng số giao điểm là 820. Tìm k ?

Trích đề HSG huyện Yên Thế (Bắc Giang) năm 2015-2016

Lời giải

Mỗi đường thẳng cắt $k-1$ đường thẳng còn lại tạo nên $k-1$ giao điểm.

Có n đường thẳng nên có $k(k-1)$ giao điểm

Nhưng mỗi giao điểm đã được tính 2 lần nên số giao điểm là $\frac{k(k-1)}{2}$

Vậy với n đường thẳng, trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy có giao điểm $\frac{k(k-1)}{2}$.

Theo bài ta có:

$$\frac{k(k-1)}{2} = 820$$

$$k.(k-1) = 1640$$

$$k.(k-1) = 41.40$$

$$k = 41$$

Vậy $k=41$.

Bài 17: Cho n điểm ($n \geq 2$). Nối từng cặp hai điểm trong n điểm đó thành các đoạn thẳng.

- Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng nếu trong n điểm đó không có ba điểm nào thẳng hàng?
- Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng nếu trong n điểm đó có đúng ba điểm nào thẳng hàng?
- Tính n biết rằng có tất cả 1770 đoạn thẳng.

Lời giải

a) Chọn một điểm. Nối điểm đó với từng điểm trong $n-1$ điểm còn lại, ta vẽ được $n-1$ đoạn thẳng. Làm như vậy với n điểm, ta được $n(n-1)$ đoạn thẳng. Nhưng mỗi đoạn thẳng đã được tính hai lần, do đó tất cả chỉ có $\frac{n(n-1)}{2}$ đoạn thẳng.

b) Tuy trong hình vẽ có đúng ba điểm thẳng hàng nhưng số đoạn thẳng phải đếm vẫn không thay đổi. Do đó vẫn có $\frac{n(n-1)}{2}$ đoạn thẳng.

c) Ta có $\frac{n(n-1)}{2} = 1770$ suy ra $n(n-1) = 2.1770$

$$n(n-1) = 2^2.3.5.59$$

$$n(n-1) = 60.59$$

suy ra $n = 60$.

Bài 18: Tìm đa giác có số đường chéo bằng số cạnh của nó.

Lời giải

Giả sử có đa giác n đỉnh thỏa mãn yêu cầu đề bài. (Điều kiện: n là số nguyên, $n > 3$). Khi đó đa giác có n cạnh.

Qua hai đỉnh của đa giác, ta vẽ một đoạn thẳng thì có tất cả $\frac{n(n-1)}{2}$ đoạn thẳng mà mỗi đoạn thẳng này hoặc là cạnh hoặc là đường chéo của đa giác đó. Suy ra số đường chéo của đa giác là $\frac{n(n-1)}{2} - n$.

Vì số đường chéo bằng số cạnh nên $\frac{n(n-1)}{2} - n = n$ suy ra $n(n-5) = 0$ do đó $\begin{cases} n = 0 \\ n = 5 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện $n > 3$ ta có $n = 5$. Vậy ngũ giác là đa giác cần tìm.

Bài 19: Cho trước một số đường thẳng, trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và có 15 đường thẳng đồng quy, biết số giao điểm nhiều nhất có thể vẽ được là 1121 giao điểm. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng cho trước?

Lời giải

Gọi số đường thẳng cho trước là n , ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)

Giả sử trong n đường thẳng, bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào đồng quy nên số giao điểm vẽ được là: $\frac{n(n-1)}{2}$ (giao điểm)

Do có 15 đường thẳng đồng quy nên số đường thẳng bị giảm đi là:

$$\frac{15 \cdot 14}{2} - 1 = 104 \text{ giao điểm}$$

Theo yêu cầu của bài toán thì ta phải có

$$\frac{n(n-1)}{2} - 104 = 1121$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 1225$$

$$n(n-1) = 2450 = 49 \cdot 50$$

suy ra $n = 50$

Vậy có 50 đường thẳng cho trước.

Bài 20: Cho 2014 điểm trong đó chỉ có 5 điểm thẳng hàng với nhau, các điểm còn lại không có ba điểm nào thẳng hàng với nhau. Hỏi khi nối tất cả các điểm đó với nhau thì được tổng số bao nhiêu đoạn thẳng?

Lời giải

Qua hai điểm luôn vẽ được 1 đoạn thẳng, nên cứ mỗi điểm trong 2014 điểm đã cho ta luôn tạo được với 2013 điểm còn lại 2013 đoạn thẳng.

Từ 2014 điểm đã cho có:

$$2014 \cdot 2013 = 4054182 \text{ (đoạn thẳng)}$$

Nhưng như vậy mỗi đoạn thẳng được tính hai lần. Vậy số đoạn được tạo nên bởi 2014 điểm đã cho là:

$$2014 \cdot 2013 : 2 = 2027091 \text{ (đoạn thẳng)}.$$

Bài 21: Cho 2006 đường thẳng trong đó bất kỳ 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau. Không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng.

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

Mỗi đường thẳng cắt 2005 đường thẳng còn lại tạo nên 2005 giao điểm. Mà có 2006 đường thẳng nên có: $2005 \cdot 2006$ (giao điểm). Nhưng mỗi giao điểm được tính 2 lần nên số giao điểm thực tế là:

$$(2005 \cdot 2006) : 2 = 2011015 \text{ (giao điểm)}$$

Bài 22: Trên đoạn thẳng AB lấy 2006 điểm khác nhau đặt tên theo thứ tự từ A đến B là $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2004}$. Từ điểm M không nằm trên đoạn thẳng AB ta nối M với các điểm $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2004}; B$. Tính số tam giác tạo thành.

Trích đề HSG cấp trường năm 2019-2020

Lời giải

Trên đoạn thẳng AB có các điểm $A; A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2004}; B$ do đó, tổng số điểm trên AB là 2006 điểm suy ra có 2006 đoạn thẳng nối từ M đến các điểm đó.

Mỗi đoạn thẳng (ví dụ MA) có thể kết hợp với 2005 đoạn thẳng còn lại và các đoạn thẳng tương ứng trên AB để tạo thành 2005 tam giác.

Do đó 2006 đoạn thẳng sẽ tạo thành $2005 \cdot 2006 = 4022030$ (tam giác) (nhưng lưu ý là MA kết hợp với MA_1 để được 1 tam giác thì MA_1 cũng kết hợp với MA được tam giác và hai tam giác này chỉ là 1)

Do đó số tam giác thực có là: $4022030 : 2 = 2011015$ (tam giác).

Bài 23. Cho 101 đường thẳng trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Tính số giao điểm của chúng.

Lời giải

Mỗi đường thẳng cắt 100 đường thẳng còn lại nên tạo ra 100 giao điểm

Có 101 đường thẳng nên có: $101 \cdot 100 = 10100$ giao điểm

Do mỗi giao điểm được tính 2 lần nên số giao điểm: $10100 : 2 = 5050$ giao điểm.

Bài 24. Cho 25 điểm trong đó không có 3 điểm thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm ta vẽ 1 đường thẳng. Hỏi tất cả có bao nhiêu đường thẳng?

Nếu thay 25 điểm bằng n điểm thì số đường thẳng là bao nhiêu?

Lời giải

Có $\frac{24 \cdot 25}{2} = 300$ đường thẳng.

Với n điểm có $\frac{n(n-1)}{2}$ đường thẳng.

Bài 25: Cho đoạn thẳng $AB = 10\text{cm}$. Trên tia AB lấy điểm C sao cho $AC = 4\text{cm}$, trên tia BA lấy điểm D sao cho $BD = 4\text{cm}$. Tính độ dài đoạn CD ?

Lời giải

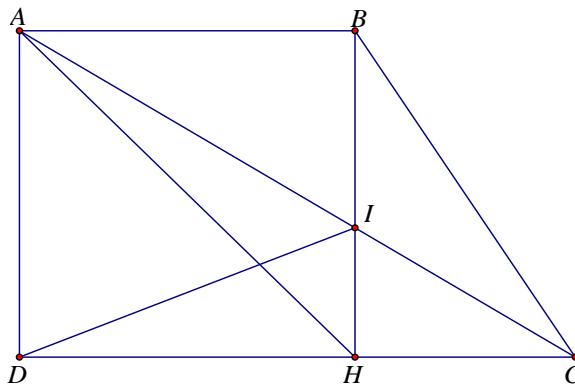


Ta có: C nằm trên đoạn thẳng AB nên ta có: $AC + CB = AB$; $BC = 10 - 4 = 6\text{cm}$

Trên tia BA ta có $BC = 6\text{cm}$, $BD = 4\text{cm}$ nên D nằm giữa C và B khi đó ta có: $BD + DC = BC$
 $CD = 6\text{cm} - 4\text{cm} = 2\text{cm}$

Bài 26: Hình thang vuông $ABCD$ có góc A và D vuông. Đường chéo AC cắt đường cao BH tại điểm I .

- Hãy so sánh diện tích tam giác IDC với diện tích tam giác BHC .
- Cho $AD = 9\text{cm}$, $AB = 10\text{cm}$, $DC = 12\text{cm}$. Hãy tính diện tích $\triangle BIC$.



Trích đề HSG trường THCS Quê Phú (Quê Sơn) năm 2018 - 2019

Lời giải

Tam giác AIH và tam giác DIH có đường cao bằng nhau và có cạnh đáy bằng nhau (IH chung) nên có diện tích bằng nhau.

Suy ra các tam giác IDC , AHC có diện tích bằng nhau (do cùng cộng thêm diện tích tam giác IHC)

Tam giác BHC và tam giác AHC có đường cao bằng nhau và cạnh đáy bằng nhau (HC chung) nên có diện tích bằng nhau.

Suy ra các tam giác IDC , BHC có diện tích bằng nhau (do cùng bằng diện tích tam giác AHC)

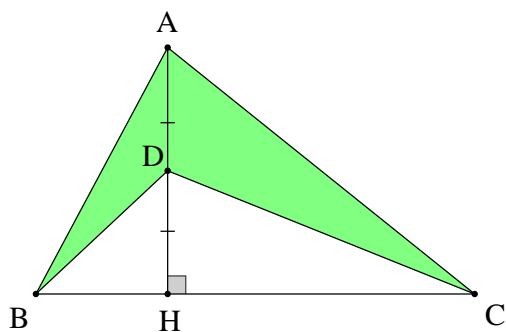
Tính được $HC = 2\text{cm}$

Tính được diện tích tam giác BHC là $(2.9) : 2 = 9(\text{cm}^2)$

Diện tích tam giác IDC bằng diện tích tam giác BIC bằng 9cm^2

Tính được $IH = \frac{2S_{IDC}}{DC} = \frac{2.9}{12} = \frac{3}{2}(\text{cm})$

$$S_{BIC} = \frac{BI \cdot CH}{2} = \frac{\left(9 - \frac{3}{2}\right) \cdot 2}{2} = \frac{15}{2}(\text{cm}^2).$$



Bài 27: Cho tam giác ABC có đường cao AH . D là trung điểm của AH . Tính diện tích phần tô màu như hình biết diện tích tam giác DBC bằng 6cm^2 .

Lời giải

Tam giác BDA và tam giác BHD có chung chiều cao từ B xuống AH và cạnh đáy $AD = DH$ nên

$$S_{ABD} = S_{HBD}$$

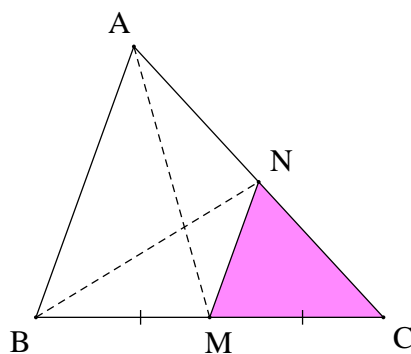
Tam giác CDA và tam giác CDH có chung chiều cao từ C xuống AH và cạnh đáy $AD = DH$ nên

$$S_{CDA} = S_{CDH}$$

Khi đó $S_{ABD} + S_{ACD} = S_{BDH} + S_{CDH} = S_{DBC} = 6\text{cm}^2$ $S_{ABD} + S_{ACD} = S_{BDH} + S_{CDH} = S_{DBC} = 6\text{cm}^2$

Vậy diện tích phần tô màu là 6cm^2 .

Bài 28: Tam giác ABC có diện tích là 144cm^2 . Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = MC$, từ M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại N . Tính diện tích tam giác MNC .



Lời giải

Tam giác ABM và tam giác AMC có cùng chiều cao từ A xuống BC và cạnh đáy $BM = CM$ nên

$$S_{ABM} = S_{ACM} = \frac{S_{ABC}}{2} = \frac{144}{2} = 72\text{cm}^2$$

Tam giác NMC và tam giác NMB có cùng chiều cao từ N xuống BC và cạnh đáy $BM = CM$ nên

$$S_{NMC} = S_{NMB} \quad (1)$$

Tam giác BMN và tam giác AMN có cùng chiều cao từ A xuống MN và chung cạnh đáy MN nên

$$S_{BMN} = S_{AMN} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $S_{AMN} = S_{CMN} = \frac{S_{AMC}}{2} = \frac{72}{2} = 36\text{cm}^2$

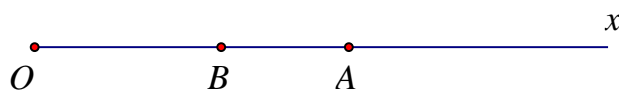
Bài 29: Trên tia Ox , xác định các điểm A và B sao cho $OA = a(\text{cm})$, $OB = b(\text{cm})$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AB , biết $b < a$.

b) Xác định điểm M trên tia Ox sao cho $OM = \frac{1}{2}(a+b)$.

Trích đề HSG cấp trường năm 2017-2018

Lời giải



a) Vì $OB < OA$ ($b < a$) nên trên tia Ox thì điểm B nằm giữa hai điểm O và A .

Do đó: $OB + BA = OA \Rightarrow AB = a - b$.

b) Vì M nằm trên tia Ox , $OM = \frac{1}{2}(a+b)$

$$OM = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{a+b}{2} = \frac{2b+a-b}{2} = b + \frac{a-b}{2} = OB + \frac{OA-OB}{2} = OB + \frac{1}{2}AB$$

$\Rightarrow M$ chính là điểm thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AM = MB$.

Bài 30:

a) Cho 6 tia chung gốc. Có bao nhiêu góc trong hình vẽ? Vì sao?

b) Vậy với n tia chung gốc. Có bao nhiêu góc trong hình vẽ?

Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019

Lời giải

a) Vì mỗi tia với một tia còn lại tạo thành 1 góc.

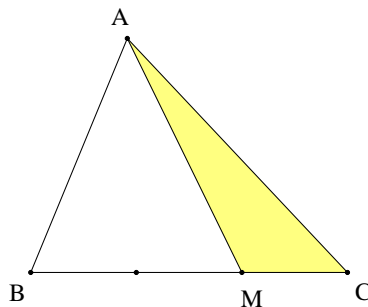
Xét 1 tia, tia đó cùng với 5 tia còn lại tạo thành 5 góc.

Làm như vậy với 6 tia ta được $5 \cdot 6$ (góc).

Nhưng mỗi góc đã được tính 2 lần, do đó số góc là $\frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ (góc).

b) Từ câu a suy ra: Với n tia chung gốc có $\frac{n(n-1)}{2}$ (góc).

Bài 31: Cho tam giác ABC , trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 2CM$. Biết diện tích tam giác ABM là 18cm^2 . Tính diện tích tam giác ACM .

**Lời giải**

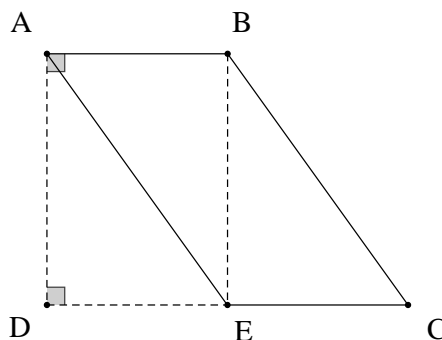
Tam giác ABM và tam giác ACM chung chiều cao

Từ A xuống BC và cạnh đáy $BM = 2CM$ nên

$$S_{ACM} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vậy diện tích tam giác ABM là 9 cm^2 .

Bài 32: Một tấm tôn hình bình hành có diện tích 14 dm^2 , sau khi người ta hàn thêm vào một miếng tôn hình tam giác vuông có cạnh đáy bằng với cạnh đáy của hình bình hành thì được một hình thang vuông. Tính diện tích của miếng tôn lúc này.

**Lời giải**

Hình bình hành $ABCD$ và tam giác ADE chung đường cao và cạnh đáy $DE = CE$

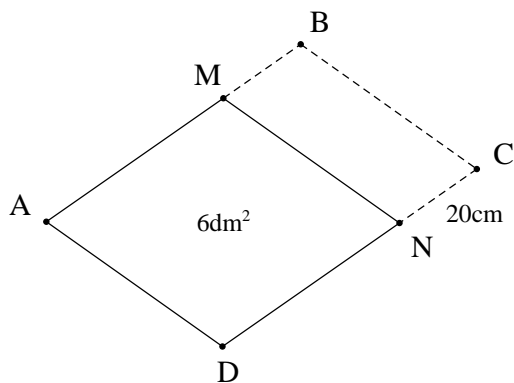
Nên diện tích tam giác ADE bằng $\frac{1}{2}$ diện tích HBH $ABCD$

$$\text{Khi đó } S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7 \text{ (dm}^2\text{)}.$$

Khi đó diện tích miếng tôn là $14 + 7 = 21 \text{ (dm}^2\text{)}$.

Bài 33: Một miếng bìa hình bình hành có chu vi bằng 2 m . Nếu bớt chiều dài đi 20 cm thì ta được miếng bìa hình thoi có diện tích 6 dm^2 . Tìm diện tích miếng bìa hình bình hành đó.

Lời giải



Đổi $2\text{ m} = 20\text{ dm}$ và $20\text{ cm} = 2\text{ dm}$

Nửa chu vi của hình bình hành $ABCD$ là

$$AB + BC = 20 : 2 = 10 \text{ (dm)}.$$

Do bớt chiều dài đi 2 dm nên ta còn

$$AM + MN = 10 - 2 = 8 \text{ (dm)}$$

Vì $AMND$ là hình thoi nên có bốn cạnh bằng nhau

$$\Rightarrow AM = MN = 8 : 2 = 4 \text{ (dm)}.$$

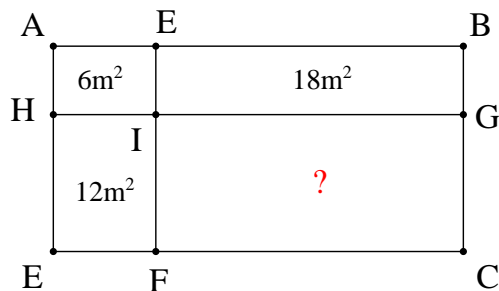
Hình thoi $AMND$ cũng là hình bình hành nên

Chiều cao từ D xuống AM là $6 : 4 = \frac{3}{2}$ (dm).

Hình thoi $AMND$ và hình bình hành $ABCD$ có chung chiều cao từ D xuống AB nên

Khi đó diện tích hình bình hành ban đầu là $AB \cdot \frac{3}{2} = 6 \cdot \frac{3}{2} = 9 \text{ (dm}^2\text{)}$.

Bài 34: Một HCN được chia thành 4 hình chữ nhật nhỏ hơn có diện tích như hình vẽ. Hãy tính diện tích của hình chữ nhật.



Lời giải

Hình chữ nhật AEIH và hình chữ nhật HIFE

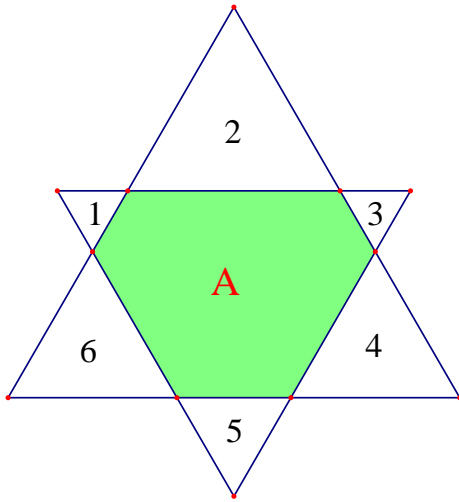
Có chung HI

Mà $S_{HIFE} = 2 \cdot S_{AEIH}$ nên $IF = 2 \cdot IE$.

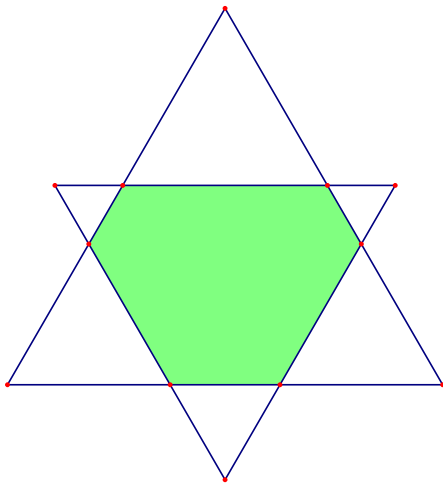
Hình chữ nhật EBGH và hình chữ nhật IFCG

Có chung cạnh IG mà $IF = 2 \cdot IE$ nên

$$S_{IGCF} = 2 \cdot S_{EBGI} = 2 \cdot 18 = 36 \text{ (m}^2\text{)}$$



Bài 35: Cho hai tam giác đều được xếp chồng lên nhau như hình vẽ. Chu vi của hai tam giác này là 744 cm và 930 cm. Tính chu vi phần tô đậm.



Lời giải

Nhận thấy các tam giác 1, 2, 3, 4, 5, 6 là các tam giác đều.

Tổng chu vi của các tam giác 1, 2, 3, 4, 5, 6 là $744 + 930 = 1674$ (cm)

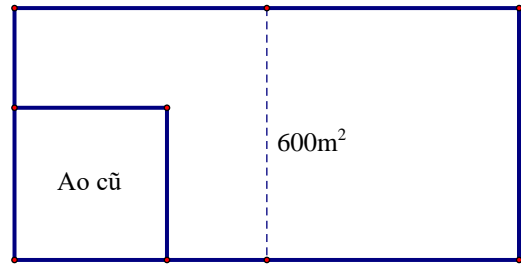
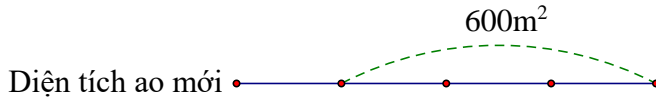
Tổng chu vi của các tam giác 1, 2, 3, 4, 5, 6 gấp 2 lần chu vi của hình A .

Nên chu vi của hình A là $1674 : 2 = 837$ (cm).

Bài 36: Người ta mở rộng một cái ao hình vuông để được một cái ao hình chữ nhật có chiều dài gấp hai lần chiều rộng. Sau khi mở rộng, diện tích ao tăng thêm 600 m^2 và diện tích ao mới gấp 4 lần ao cũ. Tính chu vi của ao mới.

Lời giải

Diện tích ao cũ



Diện tích của ao mới là: $(600 : 3) \cdot 4 = 800 \text{ (m}^2\text{)}$.

Mà ao mới là hình chữ nhật có chiều dài gấp hai lần chiều rộng nên một nửa của ao mới là một hình vuông.

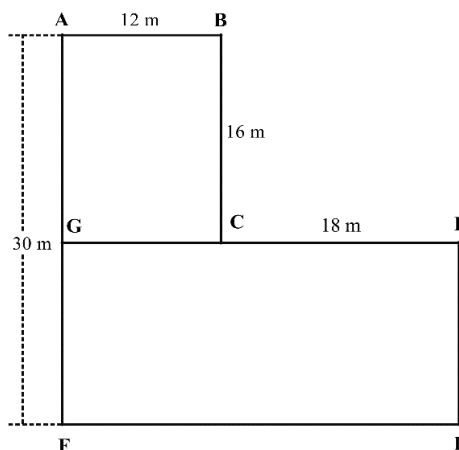
Diện tích hình vuông đó là $800 : 2 = 400 \text{ (m}^2\text{)}$.

Vì $400 = 20 \cdot 20$ nên cạnh của hình vuông đó là 20 m.

Chiều dài của ao mới là $20 \cdot 2 = 40 \text{ (m)}$.

Chu vi của ao mới là $(20 + 40) \cdot 2 = 120 \text{ (m)}$.

Bài 37: Khu vườn nhà anh Sơn có dạng như hình vẽ.



a) Anh Sơn muốn dùng lưới B40 để rào cả khu vườn thì cần dùng tất cả bao nhiêu mét lưới (theo chiều dài) và anh phải trả bao nhiêu tiền để rào khu vườn, biết giá trọn gói (gồm tiền lưới và tiền công) cho mỗi mét lưới (theo chiều dài) là 150.000 đồng.

b) Trên phần đất $ABCG$, anh Sơn trồng rau xà lách, còn trên mảnh đất $GDEF$ anh trồng rau cải xanh. Hỏi sau khi anh Sơn thu hoạch hết toàn bộ rau xà lách và rau cải xanh trong khu vườn thì anh thu được bao nhiêu tiền? Biết rằng cứ 1m^2 thì anh thu hoạch được 2kg rau xà lách và 3kg rau cải xanh. Giá mỗi kilôgam rau xà lách là 5000 đồng, giá mỗi kilôgam rau cải xanh là 4500 đồng.

Lời giải:

a) Số mét lưới B40 anh Sơn cần dùng để rào toàn bộ khu vườn là

$$12 + 16 + 18 + (30 - 16) + (12 + 18) + 30 = 120 \text{ (m)}$$

Số tiền anh Sơn phải trả để rào hết khu vườn là $120.150000 = 18.000.000$ (đồng).

b) Diện tích phần đất $ABCG$ anh Sơn dùng để trồng rau xà lách là: $S_{ABCG} = 12.16 = 192(\text{m}^2)$

Độ dài đoạn DE là $30 - 16 = 14(\text{m})$.

Độ dài đoạn EF là $12 + 18 = 30(\text{m})$.

Diện tích phần đất $GDEF$ anh Sơn dùng để trồng rau cải xanh là $S_{GDEF} = 14.30 = 420(\text{m}^2)$

Khối lượng rau xà lách thu được trên phần đất $ABCG$ là $2.192 = 384(\text{kg})$.

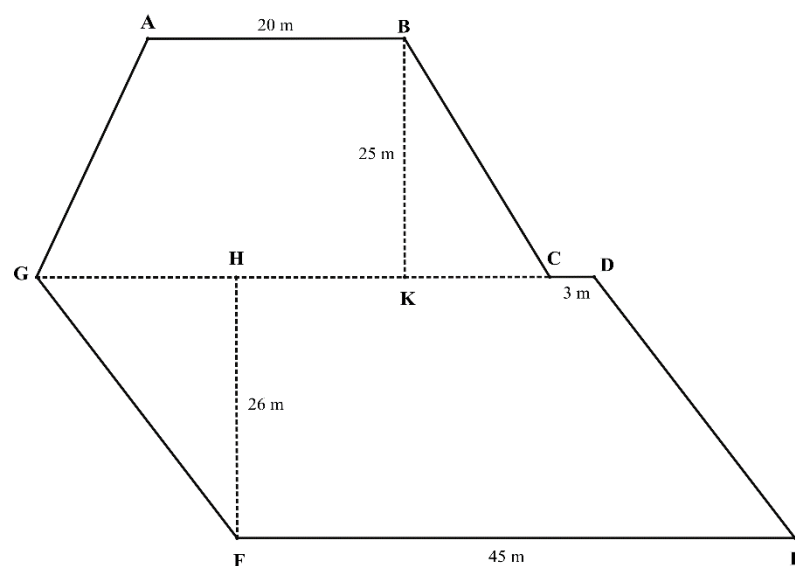
Khối lượng rau cải xanh thu được trên phần đất $GDEF$ là $3.420 = 1260(\text{kg})$.

Số tiền anh Sơn thu được từ rau xà lách là $384.5000 = 1.920.000$ (đồng).

Số tiền anh Sơn thu được từ rau cải xanh là $1260.4500 = 5.670.000$ (đồng).

Tổng số tiền anh Sơn thu được là $1.920.000 + 5.670.000 = 7.590.000$ (đồng).

Bài 38: Bác Hai có một thửa ruộng có dạng như hình bên (độ dài đoạn thẳng CD bằng 3 mét). Bác Hai trồng lúa trên toàn bộ thửa ruộng đó. Nếu trên mỗi mét vuông bác Hai thu được 0,8 kg thóc thì số tiền bác Hai thu được là bao nhiêu? Biết mỗi tạ thóc có giá 700.000 đồng.



Lời giải:

Độ dài đoạn thẳng GD là $GD = EF = 45$ (m).

Độ dài đoạn thẳng GC là $GC = 45 - 3 = 42$ (m).

Diện tích phần thửa ruộng hình thang $ABCG$ là $S_{ABCG} = \frac{(20 + 42) \cdot 25}{2} = 775(\text{m}^2)$.

Diện tích phần thửa ruộng hình bình hành $GDEF$ là $S_{GDEF} = 45 \cdot 26 = 1170(\text{m}^2)$

Diện tích thửa ruộng là $S = S_{ABCG} + S_{GDEF} = 775 + 1170 = 1945(\text{m}^2)$.

Số kilôgam thóc bác Hai thu hoạch được trên thửa ruộng là $1945.0,8 = 1556(\text{kg})$.

Đổi $1556\text{kg} = 15,56 \text{ tạ}$

Số tiền bác Hai thu được là $15,56 \times 700.000 = 10.892.000$ (đồng).

Bài 39: Nhà bác Sơn có một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng 40 mét và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Trong khu vườn, bác Sơn làm một lối đi để tiện chăm sóc và tưới cho cây với kích thước được cho như hình vẽ. Bác dùng lưới B40 rào xung quanh khu vườn. Chi phí để làm cho mỗi mét hàng rào là 150.000 đồng và cho mỗi mét vuông làm lối đi là 350.000 đồng (bao gồm cả tiền công thợ và tiền vật liệu). Hỏi bác Sơn phải trả bao nhiêu tiền để làm hàng rào và làm lối đi cho khu vườn?



CHỦ ĐỀ: HÌNH HỌC

A. PHẦN NỘI DUNG

I. Số điểm, số đoạn thẳng, số đường thẳng

Dạng toán: Đếm số điểm, số đường thẳng, số đoạn thẳng

Bài 1: Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Biết rằng tổng số giao điểm mà n đường thẳng đó cắt nhau tạo ra bằng 465. Tìm n .

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Lời giải

Có n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy, nên mỗi đường thẳng sẽ cắt $n-1$ đường thẳng còn lại tạo ra $n-1$ giao điểm phân biệt.

Do đó n đường thẳng thì có $n(n-1)$ giao điểm.

Nhưng mỗi giao điểm đã được tính 2 lần nên thực tế chỉ có $\frac{n(n-1)}{2}$ giao điểm.

Theo bài ra ta có: $\frac{n(n-1)}{2} = 465$ suy ra $n(n-1) = 930 = 31.30$ suy ra $n = 31$.

Vậy $n = 31$.

Bài 2: Cho 2010 đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau. Không có ba đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng?

Trích đề HSG huyệnnăm 20...-20...

Lời giải

Mỗi đường thẳng cắt 2009 đường thẳng còn lại tạo nên 2009 giao điểm.

Mà có 2010 đường thẳng suy ra có 2009.2010 giao điểm.

Nhưng mỗi giao điểm được tính hai lần \Rightarrow Số giao điểm thực tế là:

$(2009.2010) : 2 = 2019045$ (giao điểm)

Vậy số giao điểm là 2019045.

Bài 3: Cho n đường thẳng, trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy. Biết rằng số giao điểm của các đường thẳng đó là 903. Tính n ?

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2021-2022

Lời giải

Từ n đường thẳng không có ba đường thẳng nào đồng quy ta có số giao điểm là $\frac{n(n-1)}{2}$.

Khi đó $\frac{n(n-1)}{2} = 903$ suy ra $n(n-1) = 1806 = 43.42$ suy ra $n = 43$.

Bài 4: Cho 30 điểm trong đó có đúng 5 điểm thẳng hàng (ngoài ra không còn 3 điểm nào thẳng hàng). Qua 2 điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi có tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2021-2022

Lời giải

Giả sử có 30 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng thì số đường thẳng là:

$30.29 : 2 = 435$ (đường thẳng)

Với 5 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng thì vẽ được $5.4 : 2 = 10$ (đường thẳng)



Nhưng 5 điểm này thẳng hàng nên chỉ vẽ được 1 đường thẳng.

Do đó số đường thẳng giảm đi là: $10 - 1 = 9$ (đường thẳng)

Vậy vẽ được $435 - 9 = 426$ (đường thẳng)

Bài 5: Cho 25 điểm trong đó có đúng 8 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Hỏi vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Trích đề HSG huyện Sóc Sơn năm 2021-2022

Lời giải

Nếu 25 điểm đã cho không có ba điểm nào thẳng hàng thì số đường thẳng vẽ được $25.24 : 2 = 300$ (đường thẳng).

Với 8 điểm, không có điểm nào thẳng hàng vẽ được: $8.7 : 2 = 28$ (đường thẳng)

Còn nếu 8 điểm này thẳng hàng thì chỉ vẽ được 1 đường thẳng.

Do vậy số đường thẳng bị giảm đi là: $28 - 1 = 27$ (đường thẳng)

Số đường thẳng cần tìm là: $300 - 27 = 273$ (đường thẳng)

Bài 6: Cho 100 điểm (trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng). Nối từng cặp hai điểm trong 100 điểm đó thành các đoạn thẳng. Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng?

Trích đề HSG huyện Tiên Du năm 2021-2022

Lời giải

Kể từ 1 điểm bất kỳ đến 99 điểm còn lại ta được 99 (đoạn thẳng). Ta làm như vậy với tất cả 100 điểm nên được 100.99 (đoạn thẳng).

Nhưng theo cách đó mỗi đoạn thẳng được tính 2 lần. Do đó số đoạn thẳng thực vẽ được là:

$$\frac{100.99}{2} = 4950 \text{ (đoạn thẳng)}$$

Vậy có tất cả 4950 đoạn thẳng.

Bài 7: Cho 25 điểm trong đó có đúng 8 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Hỏi vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Lời giải

Nếu 25 điểm đã cho không có ba điểm nào thẳng hàng thì số đường thẳng vẽ được $25.24 : 2 = 300$ đường thẳng .

Với 8 điểm, không có điểm nào thẳng hàng vẽ được: $8.7 : 2 = 28$ (đường thẳng)

Còn nếu 8 điểm này thẳng hàng thì chỉ vẽ được 1 đường thẳng.

Do vậy số đường thẳng bị giảm đi là: $28 - 1 = 27$ (đường thẳng)

Số đường thẳng cần tìm là: $300 - 27 = 273$ (đường thẳng)

Bài 8: Cho $n(n > 2, n \in \mathbb{N})$ điểm phân biệt trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Tính n biết vẽ được tất cả 300 đường thẳng.

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Lời giải

Chọn 1 điểm bất kỳ trong n điểm đó, qua điểm này và $(n - 1)$ điểm còn lại ta kẻ được $(n - 1)$ đường thẳng.

Cứ làm như vậy với n điểm thì số đường thẳng tạo thành là: $(n - 1).n$ (đường thẳng).



Nhưng như vậy mỗi đường thẳng sẽ được tính 2 lần.

Do đó chỉ có số đường thẳng tạo thành là: $\frac{(n-1).n}{2}$ (đường thẳng)

Theo bài ta có tất cả 300 đường thẳng nên:

$$\frac{(n-1).n}{2} = 300$$

$$(n-1).n = 600$$

$$(n-1).n = 24.25$$

Do n là số tự nhiên nên $n = 25$.

Vậy $n = 25$.

Bài 9: Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Biết rằng tổng số giao điểm mà n đường thẳng đó cắt nhau tạo ra bằng 465. Tìm n .

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Lời giải

Có n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy, nên mỗi đường thẳng sẽ cắt $n-1$ đường thẳng còn lại tạo ra $n-1$ giao điểm phân biệt.

Do đó n đường thẳng thì có $n(n-1)$ giao điểm.

Nhưng mỗi giao điểm đã được tính 2 lần nên thực tế chỉ có $\frac{n(n-1)}{2}$ giao điểm.

Theo bài ra ta có: $\frac{n(n-1)}{2} = 465$

$$\Rightarrow n(n-1) = 930 = 31.30 \Rightarrow n = 31$$

Vậy $n = 31$

Bài 10: Cho 50 điểm phân biệt sao cho có đúng 3 điểm thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm phân biệt ta kẻ được 1 đường thẳng. Hỏi kẻ được tất cả bao nhiêu đường thẳng từ 50 điểm trên?

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Lời giải

Nếu 50 điểm đã cho không có 3 điểm nào thẳng hàng:

Qua mỗi điểm ta kẻ các đường thẳng với 49 điểm còn lại, ta được 49 đường thẳng. Mà có tất cả 50 điểm như thế và mỗi đường thẳng đã được tính 2 lần nên số đường thẳng tạo thành là $50.49 : 2 = 1225$ đường thẳng.

Qua 3 điểm không thẳng hàng thì ta vẽ được 3 đường thẳng.

Qua 3 điểm thẳng hàng ta vẽ được 1 đường thẳng.

Vậy số đường thẳng tạo thành từ 50 điểm đã cho là:

$$1225 - 3 + 1 = 1223 \text{ đường thẳng.}$$

II. Trung điểm của đoạn thẳng

Dạng toán: Tính độ dài đoạn thẳng, chứng minh trung điểm của đoạn thẳng.

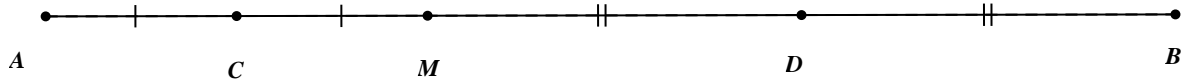


Bài 1: Cho đoạn thẳng $AB = 6\text{ cm}$. M là điểm nằm giữa hai điểm A và B . Gọi C và D lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AM và MB . Tính độ dài đoạn thẳng CD .

Trích đề HSG huyện Sơn Tây năm 2021-2022

Lời giải

Vẽ hình đúng:



Vì điểm M nằm giữa hai điểm A và B nên $AM + MB = AB$.

Vì C và D lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AM và MB nên ta có:

$$CM = \frac{AM}{2}, MD = \frac{MB}{2}.$$

Vì M nằm giữa A và B , C nằm giữa A và M , D nằm giữa M và B , suy ra M nằm giữa C và D .

$$\text{Do đó: } CD = CM + MD = \frac{AM}{2} + \frac{MB}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3(\text{cm}).$$

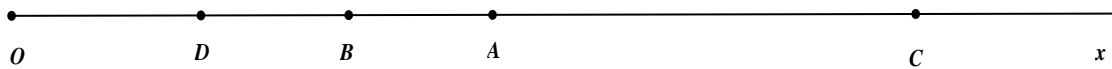
Bài 2: Trên tia Ox cho 4 điểm A, B, C, D . Biết rằng B nằm giữa A và D ; A nằm giữa B và C ; $OA = 7\text{ cm}$; $OD = 3\text{ cm}$; $BC = 8\text{ cm}$ và $AC = 3BD$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AD ?

b) Chứng tỏ rằng: Điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AD .

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2021-2022

Lời giải



a) Vì D nằm giữa O và A nên:

$$OA = OD + DA$$

$$7 = 3 + DA$$

$$DA = 4\text{ cm}.$$

b) Ta có: $OA + BC = 7 + 8$

$$OD + DB + BA + BA + AC = 15$$

$$3 + DB + BA + BA + 3DB = 15$$

$$2DA + 2DB = 12$$

$$8 + 2DB = 12$$

$$DB = 2\text{ cm}.$$

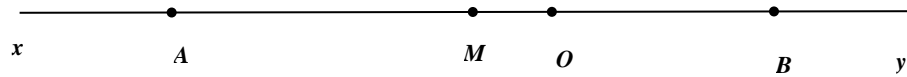
Suy ra $DB = \frac{DA}{2} = 2\text{ cm}$ và B nằm giữa A và D nên điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AD .

Bài 3: Cho hai tia Ox và Oy đối nhau, trên tia Ox lấy hai điểm A và M sao cho $OA = 5\text{ cm}$;

$OM = 1\text{ cm}$ trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OB = 3\text{ cm}$. Chứng tỏ: Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2021-2022

Lời giải



Vì điểm M nằm giữa O và A , suy ra:

$$OM + MA = OA$$

$$MA = OA - OM = 5 - 1 = 4(\text{cm}).$$

Vì điểm O nằm giữa hai điểm M và B . Khi đó:

$$OM + OB = MB$$

$$MB = 1 + 3 = 4(\text{cm}).$$

Vì điểm M nằm giữa hai điểm A và B và $MA = MB = 4(\text{cm})$ nên M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Bài 4: Trên đường thẳng xy lấy điểm O . Trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 5\text{ cm}$. Trên tia Oy lấy hai điểm B và C sao cho $OB = 5\text{ cm}$ và $OC = a(\text{cm})$, với $0 < a < 5$.

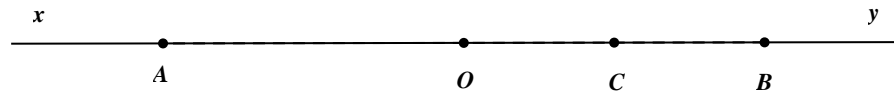
a) Điểm O có là trung điểm của đoạn thẳng AB không? Vì sao?

b) Xác định giá trị của a để C là trung điểm của đoạn thẳng OB .

c) Trên đường thẳng xy lấy thêm 15 điểm phân biệt (không trùng với A, B, O, C). Tính tất cả số đoạn thẳng phân biệt được tạo thành từ các điểm trên hình.

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2021-2022

Lời giải



a) Điểm O là trung điểm của đoạn thẳng AB vì O nằm giữa A và B và $OA = OB = 5\text{ cm}$.

b) C là trung điểm của đoạn thẳng OB khi $OC = BC = \frac{OB}{2} = \frac{5}{2} = 2,5(\text{cm})$.

Vậy $a = 2,5(\text{cm})$.

c) Trên hình vẽ có tất cả $15 + 4 = 19$ (điểm)

Cứ 1 điểm nối với 18 điểm còn lại ta được 18 đoạn thẳng.

Có 19 điểm như thế nên được số đoạn thẳng là $18 \cdot 19$, nhưng do mỗi đoạn thẳng được tính 2 lần. Do đó số đoạn thẳng vẽ được là $18 \cdot 19 : 2 = 171$ (đoạn thẳng)

Bài 5: Cho đoạn thẳng AB bằng 1 đơn vị độ dài.

a) Lấy C_1 là trung điểm của AB . Tính tỷ số $\frac{AB}{AC_1}$.

b) Tương tự, lấy các điểm $C_2; C_3; \dots; C_{2022}$ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $AC_1; AC_2; AC_3; \dots; AC_{2021}$. Đặt $F = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2022}$. So sánh F với 2^{2023} .

Trích đề HSG Thanh Ba năm 2021-2022

Lời giải

a. Vì C_1 là trung điểm của AB nên $AC_1 = \frac{1}{2} AB$ suy ra $AB = 2AC_1$ suy ra $\frac{AB}{AC_1} = \frac{2AC_1}{AC_1} = 2$.



b. Từ câu a) ta có $AB = 2AC_1$. Tương tự:

$$AC_1 = 2AC_2 \text{ suy ra } AB = 2^2 AC_2$$

$$AC_2 = 2AC_3 \text{ suy ra } AB = 2^3 AC_3$$

...

$$AC_{2021} = 2AC_{2022} \text{ suy ra } AB = 2^{2022} AC_{2022}$$

$$\text{Suy ra } F = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2022}$$

$$\text{Suy ra } 2F = 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2022} + 2^{2023}$$

$$\text{Suy ra } 2F - F = 2^{2023} - 2$$

$$\text{Suy ra } F = 2^{2023} - 2 < 2^{2023}$$

$$\text{Vậy } F < 2^{2023}.$$

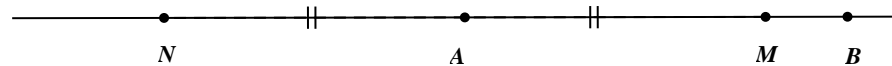
Bài 6: Trên đoạn thẳng $AB = 4\text{cm}$ lấy điểm M , trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $AM = AN$.

a) Nếu $BM = 1\text{cm}$. Tính BN .

b) Xác định vị trí của điểm M để BN có độ dài lớn nhất. Giá trị lớn nhất đó là bao nhiêu?

Trích đề HSG Kim Sơn (Quang Thiện) năm 2021-2022

Lời giải



a) Vì M thuộc đoạn thẳng AB nên:

$$AM + MB = AB$$

$$AM = AB - MB = 4 - 1 = 3\text{cm}.$$

$$AN = AM = 3\text{cm}$$

Vì N thuộc tia đối của tia AB nên A nằm giữa N và B

$$\text{Suy ra: } BN = AB + AN = 4 + 3 = 7\text{cm}.$$

$$\text{b) } BN = AB + AN = AB + AM = 4 + AM$$

Suy ra BN lớn nhất khi AM lớn nhất.

AM lớn nhất khi và chỉ khi M trùng với B suy ra $AM = AB = 4\text{cm}$.

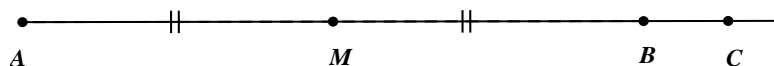
Khi đó $BN = 8\text{cm}$.

Bài 7: Cho đoạn thẳng AB . Điểm C thuộc tia đối của tia BA . M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Chứng tỏ rằng: $CM = \frac{CA + CB}{2}$.

Trích đề HSG Tiên Du năm 2021-2022

Lời giải



Do M là trung điểm của AB , và C là điểm thuộc tia đối của tia BA .

Theo hình vẽ điểm M nằm giữa A và C nên: $CA = MA + MC$ (1)

Ta có B nằm giữa M và C nên $CB = CM - MB$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $CA + CB = MA + MC + CM - MB$



$$CA + CB = 2CM \text{ (Do } MA = MB \text{)}$$

$$\text{Suy ra: } MC = \frac{CA + CB}{2}.$$

$$\text{Vậy } CM = \frac{CA + CB}{2}.$$

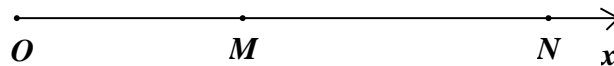
Bài 8: Trên tia Ox lấy hai điểm M và N , sao cho $OM = 3$ cm và $ON = 7$ cm.

a) Tính độ dài đoạn thẳng MN .

b) Lấy điểm P trên tia Ox , sao cho $MP = 2$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng OP .

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Lời giải



a) Nhìn hình vẽ, ta thấy M nằm giữa hai điểm O và N

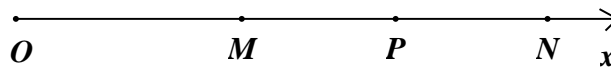
$$\Rightarrow OM + MN = ON$$

$$\Rightarrow 3 + MN = 7$$

$$\Rightarrow MN = 7 - 3 = 4 \text{ (cm)}$$

Vậy $MN = 4$ (cm).

b) TH1: P nằm giữa M và N .



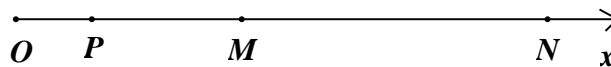
Vì P nằm giữa M và N mà M nằm giữa hai điểm O và N

Nên M nằm giữa O và P

$$\Rightarrow OP = OM + MP$$

$$\Rightarrow OP = 3 + 2 = 5 \text{ (cm)}$$

TH2: P nằm giữa O và M .



Vì P nằm giữa O và M

Nên $OM = OP + PM$

$$\Rightarrow 3 = OP + 2$$

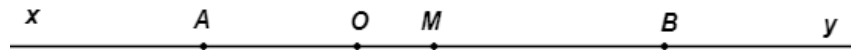
$$\Rightarrow OP = 1 \text{ (cm)}.$$

Bài 9: Lấy điểm O trên đường thẳng xy . Trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 2$ cm. Trên tia Oy lấy hai điểm M và B sao cho $OM = 1$ cm; $OB = 4$ cm.

a) Tính độ dài đoạn thẳng BM .

b) Chứng tỏ rằng điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

**Lời giải**

a) Vì M nằm giữa O và B nên $OM + MB = OB$

Từ đó tính được $MB = 3 \text{ cm}$

b) Tính được độ dài $AB = 6 \text{ cm}$

Tính được độ dài đoạn $AM = 3 \text{ cm}$.

Suy ra $AM = MB = \frac{AB}{2}$ nên M là trung điểm của AB .

Bài 10: Trên đoạn thẳng $AB = 12 \text{ cm}$ lấy điểm M nằm giữa A và B . Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AM ; K là trung điểm của đoạn thẳng AB .

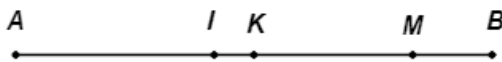
a) Biết $AM = 9 \text{ cm}$. Tính IK ?

b) Giả sử $AM = a \text{ (cm)}$ ($0 < a < 12$). Tìm a để K là trung điểm của đoạn thẳng IM .

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Lời giải

a) Theo bài ra ta có hình vẽ sau:



Vì K là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Rightarrow AK = \frac{1}{2} AB$

Mà $AB = 12 \text{ cm} \Rightarrow AK = 6 \text{ cm}$

Vì I là trung điểm của đoạn thẳng $AM \Rightarrow AI = \frac{1}{2} AM$

mà $AM = 9 \text{ cm} \Rightarrow AI = 4,5 \text{ cm}$

Ta có: $AI + IK = AK$

Thay số được: $4,5 + IK = 6 \Rightarrow IK = 6 - 4,5 = 1,5 \text{ (cm)}$

b) Theo bài ra ta có hình vẽ sau:



Lập luận tương tự câu a, ta có: $AK = 6 \text{ cm}$; $AI = \frac{1}{2} a$

Theo hình vẽ ta có: $AI + IK = AK \Rightarrow IK = 6 - \frac{1}{2} a$

$AK + KM = AM \Rightarrow KM = a - 6$

Để K là trung điểm của đoạn thẳng IM thì $IK = KM$

$\Rightarrow 6 - \frac{1}{2} a = a - 6 \Rightarrow a = 8 \text{ (cm)}$

Vậy khi $a = 8 \text{ (cm)}$ thì K là trung điểm của đoạn thẳng IM .

Bài 11: Cho điểm A nằm giữa hai điểm B và C sao cho $AB = 3 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$. Chứng tỏ rằng điểm A là trung điểm của đoạn thẳng BC (*không cần vẽ hình*).

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

**Lời giải**

Vì điểm A nằm giữa hai điểm B và C

$$\Rightarrow AB + AC = BC$$

$$\Rightarrow 3 + AC = 6$$

$$\Rightarrow AC = 6 - 3 = 3(\text{cm}) \text{ mà } AB = 3\text{cm} \Rightarrow AB = AC$$

Vì $AB = AC$ và A nằm giữa hai điểm B và C

\Rightarrow Điểm A là trung điểm của đoạn thẳng BC .

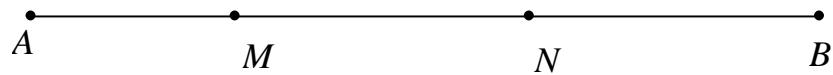
Bài 12: Cho ba điểm $A, M; B$ thẳng hàng và $AM = 3$ cm; $AB = \frac{8}{3}AM$. Biết điểm N là trung điểm của đoạn thẳng MB . Tính độ dài đoạn thẳng NA ?

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021- 2022

Lời giải

1. Ta có: $AM = 3$ cm; $AB = \frac{8}{3}AM \Rightarrow AB = \frac{8}{3}.3 = 8$ (cm)

TH1: Điểm M nằm giữa A và B

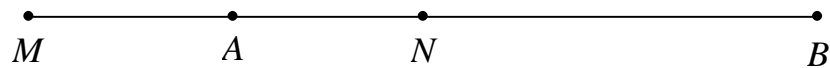


Theo hình vẽ ta có: $AM + MB = AB \Rightarrow MB = 8 - 3 = 5$ (cm)

Vì điểm N là trung điểm của đoạn thẳng MB nên $MN = NB = \frac{MB}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$ (cm)

Theo hình vẽ ta có: $AN + NB = AB \Rightarrow AN = 8 - 2,5 = 5,5$ (cm)

TH2: Điểm A nằm giữa M và B



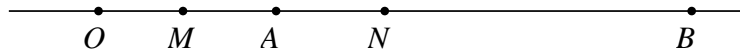
Theo hình vẽ ta có: $MA + AB = MB \Rightarrow MB = 8 + 3 = 11$ (cm)

Vì điểm N là trung điểm của đoạn thẳng MB nên $MN = NB = \frac{MB}{2} = \frac{11}{2} = 5,5$ (cm)

Theo hình vẽ ta có: $AN + NB = AB \Rightarrow AN = 8 - 5,5 = 2,5$ (cm)

Bài 13: Cho đoạn thẳng AB dài 8 cm, điểm O thuộc tia đối của tia AB . Gọi M, N thứ tự là trung điểm của đoạn thẳng OA, OB . Tính độ dài đoạn thẳng MN .

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

**Lời giải**

Hai tia AO, AB đối nhau, nên điểm A nằm giữa hai điểm O và B , suy ra: $\Rightarrow OA < OB$

Ta có: M, N thứ tự là trung điểm OA, OB nên $\Rightarrow OM = \frac{OA}{2}; ON = \frac{OB}{2}$

Vì $OA < OB$ nên $OM < ON$ nên điểm M nằm giữa hai điểm O và N

Vì điểm M nằm giữa hai điểm O và N , nên ta có:

$$\Rightarrow OM + MN = ON \Rightarrow MN = ON - OM$$

$$\Rightarrow MN = \frac{OB - OA}{2} = \frac{AB}{2} = 4 \text{ cm}$$

Bài 14: Trên đường thẳng xy lấy điểm O . Trên tia Oy lấy điểm C , trên tia Ox lấy hai điểm A, B sao cho $OC = 3 \text{ cm}$, $OA = 2 \text{ cm}$ và $OB = 4 \text{ cm}$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AB .

b) Gọi điểm I là trung điểm đoạn thẳng AB . Chứng tỏ điểm O là trung điểm của đoạn thẳng IC .

Trích đề HSG huyện Tiên Hải năm 2021-2022

Lời giải

Điểm A nằm giữa điểm O và điểm B

$$OB = OA + AB$$

$$\Rightarrow AB = OB - OA = 4 - 2 = 2 \text{ (cm)}$$

Vì I là trung điểm đoạn thẳng AB . $\Rightarrow AI = IB = AB : 2 = 2 : 2 = 1 \text{ (cm)}$.

Điểm I nằm giữa điểm B và điểm O

$$\Rightarrow BO = BI + IO \Rightarrow IO = BO - BI = 4 - 1 = 3 \text{ (cm)} \Rightarrow IO = OC \text{ (1)}$$

Vì O thuộc đường thẳng Oxy nên Ox và Oy là hai tia đối nhau. Điểm I thuộc tia Ox và điểm C thuộc tia Oy nên điểm O nằm giữa điểm I và điểm C . (2)

Từ (1) và (2) suy ra điểm O là trung điểm của IC .

III: Độ lớn góc**Dạng toán: Tính số đo góc**

Bài 1: Cho tia Oz nằm trong góc vuông xOy . Vẽ tia Ot sao cho Ox là tia phân giác của tOz . Vẽ tia

Om sao cho tia Oy là phân giác của zOm .

a) Chứng minh rằng tia Om và tia Ot là hai tia đối nhau.

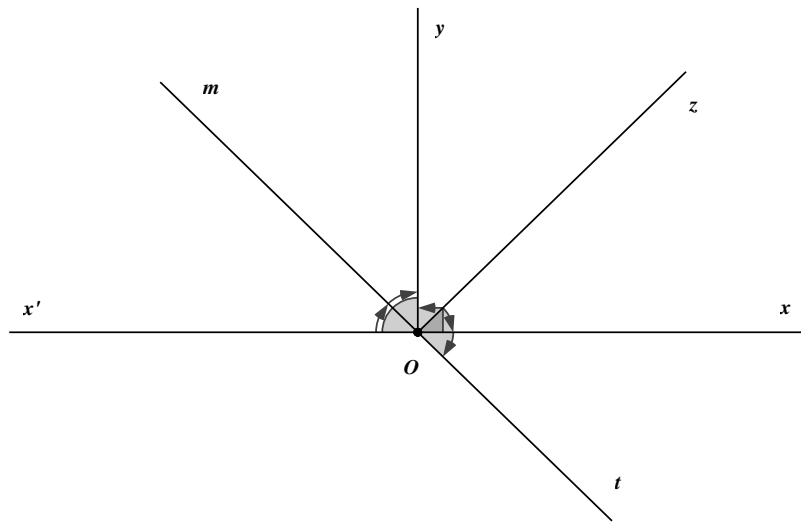
b) Gọi Ox' là tia đối của tia Ox , biết $x'Om = 30^\circ$. Tính tOz .



c) Vẽ thêm 2014 tia phân biệt gốc O (không trùng với các tia Ox, Oz, Oy, Om, Ox' và Ot).
Hỏi trong hình vẽ có tất cả bao nhiêu góc?

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021-2022

Lời giải



a) * Chứng minh: $tOz + zOm = 180^\circ$.

Tia Oz nằm trong góc xOy nên: $xOz + zOy = xOy = 90^\circ$.

Vì Ox là tia phân giác của tOz nên: $xOz = \frac{1}{2}tOz$

Vì Oy là tia phân giác của zOm suy ra $zOy = \frac{1}{2}zOm$.

Ta có: $xOz + zOy = 90^\circ$ suy ra $\frac{1}{2}tOz + \frac{1}{2}zOm = 90^\circ$ suy ra $\frac{1}{2} \cdot (tOz + zOm) = 90^\circ$

Suy ra $tOz + zOm = 180^\circ$. (1)

* Chứng minh tOz và zOm là hai góc kề nhau:

Vì hai tOz và zOm là hai góc có cạnh chung Oz và nằm trên hai nửa mp có bờ là cạnh Oz . (2)

Từ (1) và (2) suy ra: tia Om và tia Ot là hai tia đối nhau.

b) Ta có: $tOx = mOx' = 30^\circ$ (Cùng kề bù với mOx)

Vì Ox là tia phân giác của tOz nên $tOx = xOz = 30^\circ$.

Suy ra $tOz = tOx + xOz = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$.

c) Giả sử vẽ thêm n tia phân biệt gốc O không trùng với các tia Ox, Oz, Oy, Om, Ot, Ox' .

Tất cả trong hình vẽ có $n + 6$ tia phân biệt.

Cứ 1 tia trong $n + 6$ tia đó tạo với $n + 5$ tia còn lại thành $n + 5$ góc.

Có $n + 6$ tia nên tạo thành $(n + 5)(n + 6)$ góc, nhưng như thế mỗi góc được tính hai lần. Vậy

có tất cả là $\frac{(n + 5)(n + 6)}{2}$ góc.

Thay $n = 2014$ ta được số góc là: $(2014 + 6)(2014 + 5) : 2 = 2039190$ (góc)

Bài 2: 1) Trong các hình sau đây: Hình chữ nhật, hình thang, hình bình hành, hình thoi, hình vuông, hình tròn, hình lục giác đều. Hình nào có trục đối xứng, hình nào có tâm đối xứng? (nếu có, hãy



chỉ ra trục đối xứng, tâm đối xứng đó). Hình nào không có trục đối xứng, hình nào không có tâm đối xứng?

2) Cho $\angle xOy = 60^\circ$. Trên tia Oy lấy điểm A sao cho $OA = 5\text{ cm}$. Trên tia Ox lấy điểm B và C sao cho $OB = 6\text{ cm}$, $BC = 2\text{ cm}$. Nối AB, AC . Hỏi:

- Có mấy tam giác được tạo thành? Gọi tên các tam giác đó.
- Vẽ tia Om là tia đối với tia Ox . Tính số đo góc mOy .
- Tính độ dài đoạn thẳng OC .

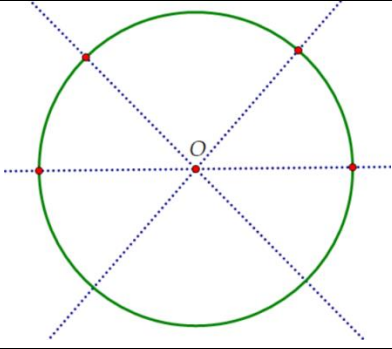
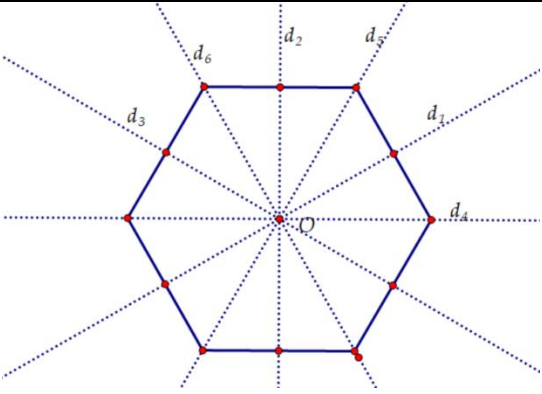
Trích đề HSG Thanh Ba năm 2021-2022

Lời giải

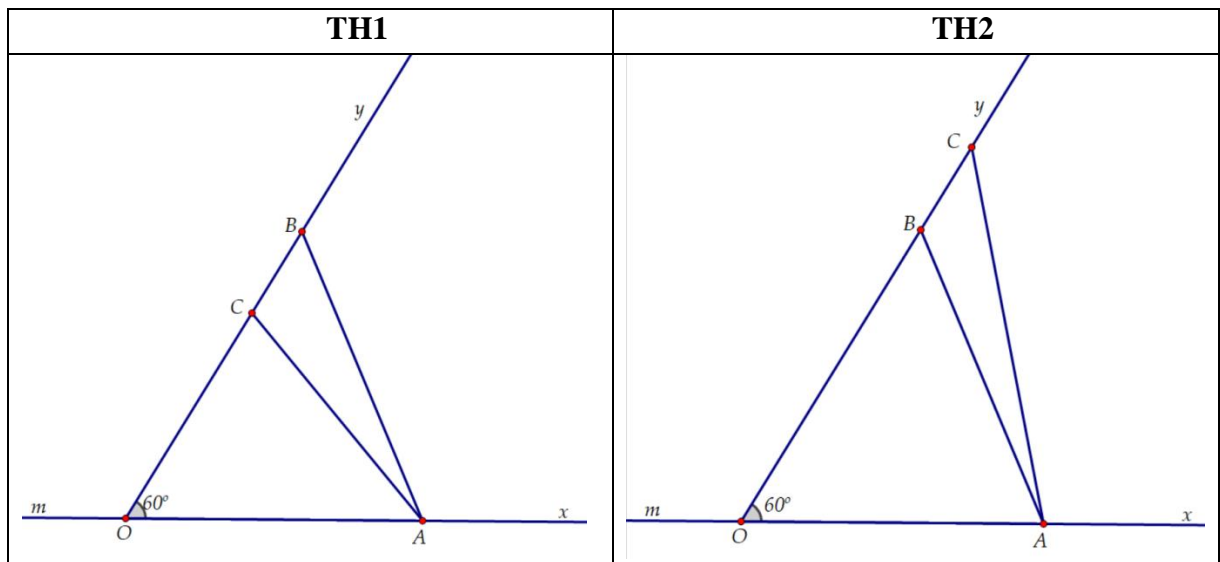
1) Ta có bảng sau đây:

Hình	Hình vẽ	Tâm đối xứng và trục đối xứng
Hình chữ nhật		Điểm O là tâm đối xứng của hình chữ nhật. Các đường thẳng $d_1; d_2$ là hai trục đối xứng của hình chữ nhật
Hình thang		Hình thang không có trục đối xứng và không có tâm đối xứng.
Hình bình hành		O là tâm đối xứng của hình bình hành Hình bình hành không có trục đối xứng.
Hình thoi		Tâm đối xứng của hình thoi là O . Trục đối xứng của hình thoi là $d_1; d_2$
Hình vuông		Tâm đối xứng của hình thoi là O . Trục đối xứng của hình thoi là $d_1; d_2; d_3; d_4$.



Hình tròn		<p>Tâm O là tâm đối xứng của hình tròn. Bất kỳ đường kính nào đều là trục đối xứng của hình tròn.</p>
Hình lục giác đều		<p>Hình lục giác đều có 1 tâm đối xứng là O Hình lục giác đều có 6 trục đối xứng là $d_1; d_2; d_3; d_4; d_5; d_6$</p>

2)

a) Trên hình vẽ có 3 tam giác, đó là các tam giác ΔOAC , ΔOAB ; ΔABC .b) Vì Om là tia đối của tia Ox nên ta có: $mOy + yOx = 180^\circ$ suy ra $mOy + 60^\circ = 180^\circ$ suy ra $mOy = 120^\circ$.c) Tính OC .Trường hợp 1: Điểm C nằm giữa O và B nên:

$$OC + CB = OB$$

$$OC = OB - CB = 6 - 2 = 4(\text{cm})$$

Trường hợp 2: Điểm B nằm giữa O và C nên:

$$OB + BC = OC$$

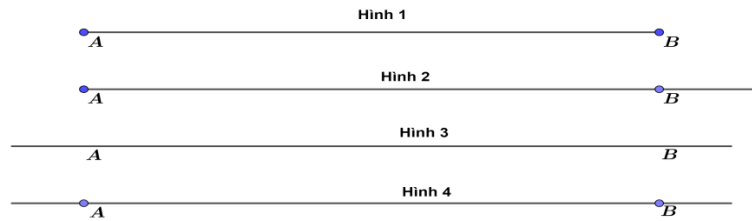
$$OC = 6 + 2 = 8(\text{cm})$$

Bài 3: 1) Trong hình vẽ dưới, có bao nhiêu đoạn thẳng phân biệt:



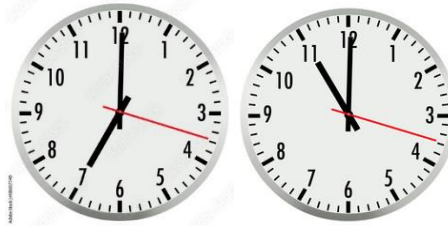
- A. 4. B. 6. C. 8. D. 10.

2) Đâu là hình vẽ đúng của đường thẳng AB :



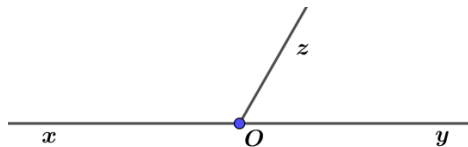
- A. Hình 1. B. Hình 3 và hình 4. C. Hình 4. D. Tất cả 4 hình.

3) Buổi sáng, bạn Trang vào lớp thi đồng hồ trên tường chỉ 7 h đúng. Đến khi tan trường đồng hồ chỉ đúng 11h trưa. Hỏi kim giờ trên đồng hồ đã quay được một góc bao nhiêu độ?



- A. 100° . B. 110° . C. 120° . D. 130° .

4) Trong hình vẽ sau:



Góc yOz bằng 50% góc xOz và tia Ox, Oy là hai tia đối nhau. Số đo góc yOz là:

- A. 70° . B. 80° . C. 50° . D. 60° .

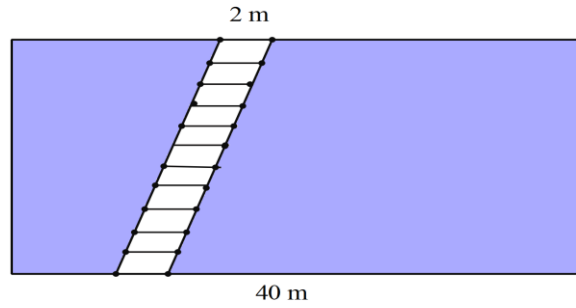
Trích đề HSG Quận Thanh Ba năm 2021-2022
Lời giải

- 1) Đáp án B
- 2) Đáp án C
- 3) Đáp án C
- 4) Đáp án D

IV. Các bài toán về chu vi, diện tích

Dạng toán: Giải các bài toán về chu vi diện tích

Bài 1: Nhà bác Sơn có một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng 40 mét và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Trong khu vườn, bác Sơn làm một lối đi để tiện chăm sóc và tưới cho cây với kích thước được cho như hình vẽ. Bác dùng lưới B40 rào xung quanh khu vườn. Chi phí để làm cho mỗi mét hàng rào là 150000 đồng và cho mỗi mét vuông làm lối đi là 350000 đồng (bao gồm cả tiền công thợ và tiền vật liệu). Hỏi bác Sơn phải trả bao nhiêu tiền để làm hàng rào và làm lối đi cho khu vườn?



Trích đề HSG huyệnnăm 20...-20...

Lời giải

Chiều rộng khu vườn là: $40 : 2 = 20(\text{m})$.

Chiều dài lưới B40 dùng để rào khu vườn là: $(40 + 20) \cdot 2 = 120(\text{m})$.

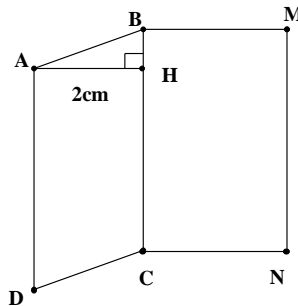
Diện tích của lối đi là: $2 \cdot 20 = 40(\text{m}^2)$

Chi phí để làm hàng rào là: $120 \cdot 150000 = 18000000$ (đồng).

Chi phí để làm lối đi là: $40 \cdot 350000 = 14000000$ (đồng).

Số tiền bác Sơn phải trả để làm hàng rào và làm lối đi cho khu vườn là:
 $8000000 + 14000000 = 32000000$ (đồng).

Bài 2: Tìm diện tích của hình H gồm hình bình hành $ABCD$ và hình chữ nhật $BMNC$, biết hình chữ nhật $BMNC$ có chu vi bằng 18cm và chiều dài MN gấp hai lần chiều rộng BM .



Trích đề HSG TX Sơn Tây năm 2021-2022

Lời giải

Nửa chu vi hình chữ nhật $BMNC$ bằng: $18 : 2 = 9(\text{cm})$

Coi chiều dài hình chữ nhật $BMNC$ gồm 2 phần bằng nhau thì chiều rộng của nó gồm 1 phần như thế.

Tổng số phần bằng nhau là: $2 + 1 = 3$ (phần)

Chiều rộng của hình chữ nhật $BMNC$: $9 : 3 = 3(\text{cm})$

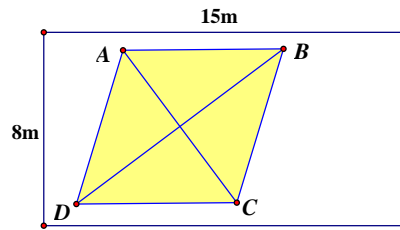
Chiều dài của hình chữ nhật $BMNC$: $3 \cdot 2 = 6(\text{cm})$

Diện tích của hình chữ nhật $BMNC$: $6 \cdot 3 = 18(\text{cm}^2)$

Diện tích hình bình hành: $ABCD$: $6 \cdot 2 = 12(\text{cm}^2)$

Diện tích hình H là: $12 + 18 = 30(\text{cm}^2)$

Bài 3: Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài 15m, chiều rộng 8m. Người ta trồng một vườn hoa hình thoi ở trong mảnh đất đó, biết diện tích phần còn lại là 75m^2 . Tính độ dài đường chéo AC , biết $BD=9\text{m}$.



Trích đề HSG huyện Tân Kỳ (Nghĩa Đông) và huyện Hậu Lộc năm 2021-2022

Lời giải

Diện tích mảnh đất hình chữ nhật là: $15 \cdot 8 = 120 (\text{m}^2)$

Diện tích phần trồng hoa hình thoi là: $120 - 75 = 45 (\text{m}^2)$

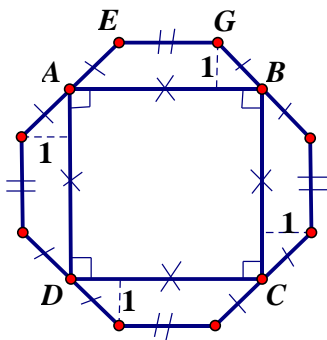
Độ dài đường chéo AC là: $45 \cdot 2 : 9 = 10 (\text{m})$

Vậy độ dài đường chéo AC = 10m.

Bài 4: Muốn cắt một miếng bìa có diện tích là 28cm^2 như hình bên. Biết chu vi hình vuông ABCD là 16cm. Tính độ dài cạnh EG. (số liệu trên hình vẽ đơn vị là cm)

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2021-2022

Lời giải



Cạnh của hình vuông ABCD là: $16 : 4 = 4 (\text{cm})$

Diện tích của hình vuông ABCD là: $4 \cdot 4 = 16 (\text{cm}^2)$

Tổng diện tích của bốn hình thang là: $28 - 16 = 12 (\text{cm}^2)$

Diện tích của hình thang ABGE là: $12 : 4 = 3 (\text{cm}^2)$

Tổng 2 đáy của hình thang ABGE là: $3 \cdot 2 : 1 = 6 (\text{cm})$

Cạnh GE là: $6 - 4 = 2 (\text{cm})$

Bài 5: Một khu đất hình chữ nhật có chu vi là 132m. Nếu giảm chiều rộng đi 5m và tăng chiều dài lên 5m thì chiều dài gấp đôi chiều rộng.

a) Tính diện tích khu đất hình chữ nhật ban đầu.



b) Người ta dùng 30% diện tích khu đất ban đầu để trồng rau, chi phí cho mỗi mét vuông trồng rau là 35000 đồng. Tính số tiền cần chi phí để trồng rau?

Trích đề HSG huyện Sóc Sơn năm 2021-2022

Lời giải

a) Nếu giảm chiều rộng 5 m và tăng chiều dài 5 m thì chu vi không đổi.

Ta có nửa chu vi lúc sau là: $132 : 2 = 66(\text{m})$

Lúc sau chiều dài gấp đôi chiều rộng hay chiều rộng bằng $\frac{1}{2}$ chiều dài.

Suy ra chiều rộng lúc sau bằng $\frac{1}{3}$ nửa chu vi.

Chiều rộng ban đầu khu đất đó là: $66 \cdot \frac{1}{3} + 5 = 27(\text{m})$

Chiều dài ban đầu khu đất đó là: $66 - 27 = 39(\text{m})$

Diện tích ban đầu khu đất đó là: $27 \cdot 39 = 1053(\text{m}^2)$

b) Diện tích trồng rau là: $30\% \cdot 1050 = \frac{3}{10} \cdot 1050 = 315(\text{m}^2)$

Số tiền chi phí để trồng rau là: $315 \cdot 35000 = 11025000$ đồng.

Bài 6: Người ta muốn lát gạch và trồng cỏ cho sân vườn hình vuông. Biết diện tích phần trồng cỏ bằng $\frac{1}{4}$ diện tích sân vườn và diện tích phần lát gạch là 48m^2 .

1) Tính diện tích sân vườn.

2) Tính diện tích trồng cỏ.

3) Giá 1m^2 cỏ là 60000 đồng, nhưng khi mua lại được giảm giá 10% . Vậy số tiền cần mua cỏ là bao nhiêu?

4) Người ta cắm cọc làm hàng rào xung quanh sân vườn, khoảng cách giữa các cọc đều nhau là 0,8m . Hỏi phải dùng bao nhiêu chiếc cọc?

Trích đề HSG Quận Hà Đông năm 2021-2022

Lời giải

1) Phần số chỉ diện tích phần lát gạch là: $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ diện tích sân vườn.

Do đó diện tích sân vườn là: $48 : \frac{3}{4} = 64(\text{m}^2)$

2) Diện tích trồng cỏ là: $\frac{1}{4} \cdot 64 = 16(\text{m}^2)$

3) Giá tiền 1m^2 cỏ sau khi được giảm giá là: $60000 - 10\% \cdot 60000 = 54000$ (đồng).

Số tiền cần mua cỏ là: $54000 \cdot 16 = 864000$ (đồng).

4) Cạnh của sân vườn là: $\sqrt{64} = 8(\text{m})$

Chu vi của sân vườn là: $8 \cdot 4 = 32(\text{m})$

Vậy số cọc cần dùng là: $32 : 0,8 = 40$ (chiếc).



Bài 7: Một nền nhà hình chữ nhật có chiều rộng 5 m và chiều dài gấp 4 lần chiều rộng. Người ta lát nền nhà bằng những viên gạch hình vuông cạnh 4dm . Tổng số tiền mua gạch là 11875000 đồng thì vừa đủ để lát . Hỏi giá mỗi viên gạch lát nền là bao nhiêu ?

Trích đề HSG Huyện Tiên Du năm 2021-2022

Lời giải

Chiều dài của nền nhà là: $4 \cdot 5 = 20(\text{m})$

Diện tích nền nhà hình chữ nhật là: $20 \cdot 5 = 100(\text{m}^2)$

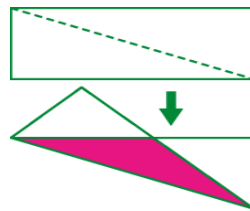
Đổi: $4 \text{ dm} = 0,4 \text{ m}$

Diện tích một viên gạch lát nền là: $0,4 \cdot 0,4 = 0,16(\text{m}^2)$

Số viên gạch dùng để lát nền là: $100 : 0,16 = 625$ (viên)

Giá mỗi viên gạch lát nền là: $11875000 : 625 = 19000$ (đồng).

Bài 8: Một tờ giấy hình chữ nhật được gấp theo đường chéo như hình vẽ. Diện tích hình nhận được bằng $\frac{5}{8}$ diện tích hình chữ nhật ban đầu. Biết diện tích phần tô màu là 18 cm^2 . Tính diện tích tờ giấy ban đầu.



Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Lời giải

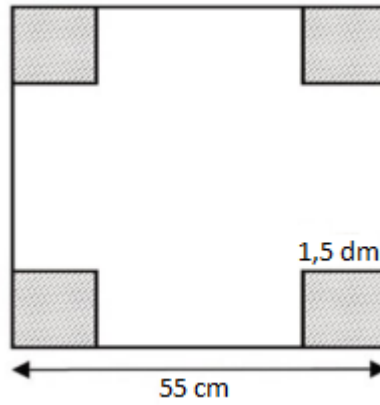
Khi gấp tờ giấy hình chữ nhật theo đường chéo (đường nét đứt) thì phần hình tam giác được tô màu bị xếp chồng lên nhau. Do đó diện tích hình chữ nhật ban đầu lớn hơn diện tích hình nhận được chính là diện tích tam giác được tô màu.

Diện tích hình chữ nhật ban đầu giảm đi bằng $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$ diện tích hình chữ nhật ban đầu.

Do vậy diện tích tam giác tô màu bằng $\frac{3}{8}$ diện tích hình chữ nhật ban đầu, hay $\frac{3}{8}$ diện tích hình chữ nhật ban đầu bằng 18 cm^2 .

Vậy diện tích hình chữ nhật ban đầu là: $18 : \frac{3}{8} = 48 (\text{cm}^2)$

Bài 9: Một miếng tôn hình vuông có độ dài 1 cạnh là 55cm . Người ta cắt đi bốn góc theo các hình vuông nhỏ có độ dài cạnh là 1,5dm . Tính chu vi và diện tích phần tôn còn lại (*không yêu cầu học sinh vẽ hình*)



Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

Lời giải

Sau khi cắt đi bốn góc theo các hình vuông nhỏ thì chu vi của miếng tôn còn lại vẫn bằng chu vi miếng tôn cũ và bằng: $55 \cdot 4 = 220$ (cm)

Đổi $1,5\text{dm} = 15\text{cm}$

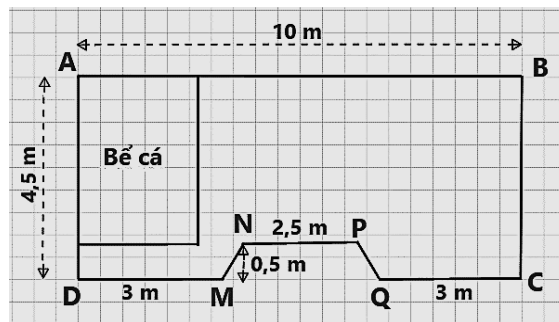
Diện tích của bốn miếng tôn bị cắt đi là: $4 \cdot (15 \cdot 15) = 4 \cdot 225 = 900$ (cm²).

Diện tích của miếng tôn ban đầu là: $55 \cdot 55 = 3025$ (cm²).

Diện tích của miếng tôn còn lại là: $3025 - 900 = 2125$ (cm²).

Vậy diện tích của miếng tôn còn lại là: 2125 cm².

Bài 10: Nhà bác Bình có một mảnh sân như hình bên. Trong sân, bác xây một bể cá có dạng hình chữ nhật dài 3m, rộng 2m. Phần còn lại của sân bác lát gạch. Biết công làm bể cá là 500000 đồng/m², công lát gạch là 100000 đồng/m². Tính tổng tiền công bác Bình cần trả cho thợ để hoàn thiện sân.



(Học sinh không phải vẽ lại hình vào bài làm)

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Lời giải

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là: $10 \cdot 4,5 = 45$ (m²)

Chiều dài đoạn MQ là: $10 - 3 - 3 = 4$ (m)



Diện tích hình thang $MNPQ$ là : $(4 + 2,5).0,5 : 2 = 1,625 (m^2)$

Diện tích sân nhà bác Bình là: $45 - 1,625 = 43,375 (m^2)$

Diện tích bể cá là: $3.2 = 6 (m^2)$

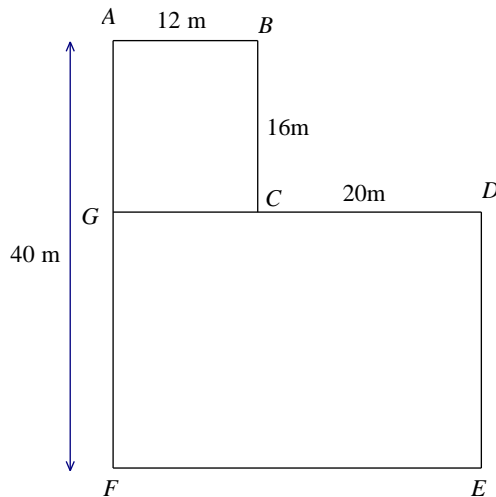
Tiền công làm bể cá là: $6.500\ 000 = 3\ 000\ 000$ (đồng)

Diện tích lát gạch là: $43,375 - 6 = 37,375 (m^2)$

Tiền công lát gạch là: $37,375.100\ 000 = 3\ 737\ 500$ (đồng)

Tổng tiền công là: $3\ 000\ 000 + 3\ 737\ 500 = 6\ 737\ 500$ (đồng)

Bài 11: Khu vườn nhà anh Minh có dạng và kích thước như hình vẽ.



a) Anh Minh muốn dùng lưới B40 để rào cả khu vườn. Hỏi anh Minh phải trả bao nhiêu tiền để rào cả khu vườn, biết giá trọn gói (gồm tiền lưới và tiền công) cho mỗi mét lưới (theo chiều dài) là 150000 đồng?

b) Trên phần đất $ABCG$, anh Minh trồng rau mùng toi, còn trên mảnh đất $GDEF$ anh trồng rau cải. Hỏi sau khi anh Minh thu hoạch hết toàn bộ rau mùng toi và rau cải trong khu vườn thì anh thu được bao nhiêu tiền? Biết rằng cứ $1 m^2$ thì anh thu hoạch được 2 kg rau cải và 3 kg rau mùng toi. Giá mỗi kilogram rau mùng toi là 8000 đồng, giá mỗi kilogram rau cải là 7500 đồng.

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021-2022

Lời giải

2.a) Số mét lưới B40 anh Minh cần dùng để rào toàn bộ khu vườn là:

$$12 + 16 + 20 + (40 - 16) + (12 + 20) + 40 = 144 (m)$$

Số tiền anh Minh phải trả để rào hết khu vườn là:

$$144.150000 = 21600000 \text{ (đồng)}$$



2.b) Diện tích phần đất $ABCG$ anh Minh trồng rau mồng tơi là:

$$S_{ABCG} = 12.16 = 192(m^2)$$

Độ dài đoạn thẳng DE là: $40 - 16 = 24(m)$

Độ dài đoạn thẳng EF là: $12 + 20 = 32(m)$

Diện tích phần đất $GDEF$ anh Minh trồng rau cải là:

$$S_{GDEF} = 24.32 = 768(m^2)$$

Khối lượng rau mồng tơi thu được trên phần đất $ABCG$ là: $3.192 = 576(kg)$

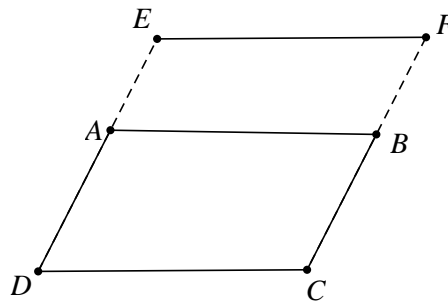
Khối lượng rau cải thu được trên phần đất $GDEF$ là: $2.768 = 1536(kg)$

Số tiền anh Minh thu được từ rau mồng tơi là: $576.8000 = 4608000$ (đồng)

Số tiền anh Minh thu được từ rau cải là: $1536.7500 = 1152000$ (đồng)

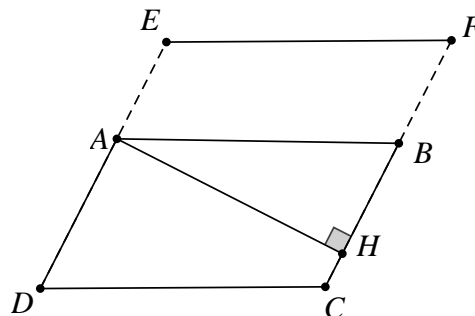
Tổng số tiền anh Minh thu được là: $4608000 + 1152000 = 16128000$ (đồng)

Bài 12: Cho hình bình hành $ABCD$ ($AB > AD$) có chu vi là 32 cm. Nếu thêm vào mỗi cạnh AD và BC của hình bình hành 4 cm thì được hình thoi $CDEF$ (hình vẽ). Biết hình thoi $CDEF$ có diện tích là 54 cm^2 . Tính diện tích hình bình hành $ABCD$.



Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Lời giải





Khi thêm vào mỗi cạnh AD và BC của hình bình hành 4cm thì được hình thoi $CDEF$ có chu vi lớn hơn chu vi hình bình hành $ABCD$ là $2.4 = 8\text{cm}$

Chu vi hình thoi $CDEF$ là $32 + 8 = 40\text{cm}$

Cạnh của hình thoi $CDEF$ là $40 : 4 = 10\text{cm}$

Kẻ đường cao AH của hình bình hành $ABCD$ nên AH cũng là chiều cao của hình thoi $CDEF$

Vì diện tích của hình thoi là 54cm^2 nên độ dài chiều cao AH là $54 : 10 = 5,4\text{cm}$

Nửa chu vi hình bình hành là $40 : 4 = 10\text{cm}$

$CD + BC = 16\text{cm}$. Mà $CD = 10\text{cm} \Rightarrow CD = 6$

Diện tích hình bình hành $ABCD$ là

$AH \cdot BC = 5,4 \cdot 6 = 32,4\text{cm}^2$

Bài 13: Nhà ông Minh có một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi bằng 600m và chiều dài bằng $\frac{3}{2}$ chiều rộng. Trên mảnh vườn đó, để tiện cho việc chăm bón và thu hoạch ông Minh đã làm một lối đi xung quanh rộng 1m , phần diện tích còn lại dùng để trồng cam.

1. Tính diện tích mảnh vườn nhà ông Minh?
2. Tính diện tích ông Minh dùng để trồng cam.
3. Trung bình cứ 4m^2 ông Minh trồng một cây cam. Dự định sau 3 năm mỗi cây sẽ cho thu hoạch khoảng 50kg . Nếu giá thị trường là 25000 đồng/ 1kg và trừ đi 40% chi phí thì ông Minh thu được bao nhiêu tiền ?

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2020-2021

Lời giải

Nửa chu vi của mảnh vườn là $600 : 2 = 300\text{m}$

Vì chiều dài bằng $\frac{3}{2}$ chiều rộng nên chiều dài của mảnh vườn là $300 : (3 + 2) \cdot 3 = 180\text{m}$

Chiều rộng của mảnh vườn là $300 - 180 = 120\text{m}$

Diện tích của mảnh vườn là $180 \cdot 120 = 21600\text{m}^2$

Tính được diện tích phần trồng cam là $178.118 = 21004\text{m}^2$

Số cây cam ông Minh trồng được là $21004 : 4 = 5251$ cây

Dự định sau 3 năm thu được $5251 \cdot 50 = 262550\text{kg}$

Khi đó ông Minh thu được số tiền cam là: $262550 \cdot 25000 = 6563750000$ đồng

Số tiền chi phí là $6563750000 \cdot 40\% = 2625500000$ đồng

Số tiền lãi ông Minh thu được là



$$6563750000 - 2625500000 = 3938250000 \text{ đồng}$$

Bài 14: Bác An đào cái ao hình vuông trong mảnh đất hình chữ nhật có chiều rộng 10 m và chiều dài 15 m. Biết rằng sau khi đào ao diện tích đất còn lại quanh cái ao là 50 m^2 . Tính độ dài cạnh cái ao.

Trích đề HSG huyện Tiền Hải năm 2020-2021

Lời giải

Diện tích mảnh đất hình chữ nhật là:

$$10.15 = 150 \text{ (m}^2\text{)}$$

Diện tích của cái ao là :

$$150 - 50 = 100 \text{ (m}^2\text{)}$$

Vì cái ao hình vuông có diện tích 100 m^2 suy ra độ dài cạnh cái ao là 10 m.



B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

I. Số điểm, số đoạn thẳng, số đường thẳng

Dạng toán: Đếm số điểm, số đường thẳng, số đoạn thẳng

Bài 1: Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Biết rằng tổng số giao điểm mà n đường thẳng đó cắt nhau tạo ra bằng 465. Tìm n .

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Bài 2: Cho 2010 đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau. Không có ba đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng?

Trích đề HSG huyện ... năm 20... - 20...

Bài 3: Cho n đường thẳng, trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy. Biết rằng số giao điểm của các đường thẳng đó là 903. Tính n ?

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2021-2022

Bài 4: Cho 30 điểm trong đó có đúng 5 điểm thẳng hàng (ngoài ra không còn 3 điểm nào thẳng hàng). Qua 2 điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi có tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2021-2022

Bài 5: Cho 25 điểm trong đó có đúng 8 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Hỏi vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Trích đề HSG huyện Sóc Sơn năm 2021-2022

Bài 6: Cho 100 điểm (trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng). Nối từng cặp hai điểm trong 100 điểm đó thành các đoạn thẳng. Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng?

Trích đề HSG huyện Tiên Du năm 2021-2022

Bài 7: Cho 25 điểm trong đó có đúng 8 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Hỏi vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Bài 8: Cho $n(n > 2, n \in \mathbb{N})$ điểm phân biệt trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Tính n biết vẽ được tất cả 300 đường thẳng.

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022

Bài 9: Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Biết rằng tổng số giao điểm mà n đường thẳng đó cắt nhau tạo ra bằng 465. Tìm n .

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2022 - 2023

Bài 10: Cho 50 điểm phân biệt sao cho có đúng 3 điểm thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm phân biệt ta kẻ được 1 đường thẳng. Hỏi kẻ được tất cả bao nhiêu đường thẳng từ 50 điểm trên?

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

II: Trung điểm của đoạn thẳng

Dạng toán: Tính độ dài đoạn thẳng, chứng minh trung điểm của đoạn thẳng.

Bài 1: Cho đoạn thẳng $AB = 6\text{ cm}$. M là điểm nằm giữa hai điểm A và B . Gọi C và D lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AM và MB . Tính độ dài đoạn thẳng CD .

Trích đề HSG huyện Sơn Tây năm 2021-2022



Bài 2: Trên tia Ox cho 4 điểm A, B, C, D . Biết rằng B nằm giữa A và D ; A nằm giữa B và C ; $OA = 7\text{ cm}$; $OD = 3\text{ cm}$; $BC = 8\text{ cm}$ và $AC = 3BD$.

- Tính độ dài đoạn thẳng AD ?
- Chứng tỏ rằng: Điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AD .

Trích đề HSG huyện Hương Sơn năm 2021-2022

Bài 3: Cho hai tia Ox và Oy đối nhau, trên tia Ox lấy hai điểm A và M sao cho $OA = 5\text{ cm}$; $OM = 1\text{ cm}$ trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OB = 3\text{ cm}$. Chứng tỏ: Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2021-2022

Bài 4: Trên đường thẳng xy lấy điểm O . Trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 5\text{ cm}$. Trên tia Oy lấy hai điểm B và C sao cho $OB = 5\text{ cm}$ và $OC = a(\text{cm})$, với $0 < a < 5$.

- Điểm O có là trung điểm của đoạn thẳng AB không? Vì sao?
- Xác định giá trị của a để C là trung điểm của đoạn thẳng OB .
- Trên đường thẳng xy lấy thêm 15 điểm phân biệt (không trùng với A, B, O, C). Tính tất cả số đoạn thẳng phân biệt được tạo thành từ các điểm trên hình.

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2021-2022

Bài 5: Cho đoạn thẳng AB bằng 1 đơn vị độ dài.

- Lấy C_1 là trung điểm của AB . Tính tỷ số $\frac{AB}{AC_1}$.
- Tương tự, lấy các điểm $C_2; C_3; \dots; C_{2022}$ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $AC_1; AC_2; AC_3; \dots; AC_{2021}$. Đặt $F = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2022}$. So sánh F với 2^{2023} .

Trích đề HSG Thanh Ba năm 2021-2022

Bài 7: Trên đoạn thẳng $AB = 4\text{ cm}$ lấy điểm M , trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $AM = AN$.

- Nếu $BM = 1\text{ cm}$. Tính BN .
- Xác định vị trí của điểm M để BN có độ dài lớn nhất. Giá trị lớn nhất đó là bao nhiêu?

Trích đề HSG Kim Sơn (Quang Thiện) năm 2021-2022

Bài 8: Cho đoạn thẳng AB . Điểm C thuộc tia đối của tia BA . M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Chứng tỏ rằng: $CM = \frac{CA + CB}{2}$.

Trích đề HSG Tiên Du năm 2021-2022

Bài 9: Trên tia Ox lấy hai điểm M và N , sao cho $OM = 3\text{ cm}$ và $ON = 7\text{ cm}$.

- Tính độ dài đoạn thẳng MN .
- Lấy điểm P trên tia Ox , sao cho $MP = 2\text{ cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng OP .

Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Bài 10: Lấy điểm O trên đường thẳng xy . Trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 2\text{ cm}$. Trên tia Oy lấy hai điểm M và B sao cho $OM = 1\text{ cm}$; $OB = 4\text{ cm}$.

- Tính độ dài đoạn thẳng BM .
- Chứng tỏ rằng điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trích đề HSG thị xã Kinh Môn năm 2021-2022



Bài 11: Trên đoạn thẳng $AB=12\text{cm}$ lấy điểm M nằm giữa A và B . Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AM ; K là trung điểm của đoạn thẳng AB .

- Biết $AM=9\text{cm}$. Tính IK ?
- Giả sử $AM=a(\text{cm})(0 < a < 12)$. Tìm a để K là trung điểm của đoạn thẳng IM .

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Bài 12: Cho điểm A nằm giữa hai điểm B và C sao cho $AB=3\text{cm}$, $BC=6\text{cm}$. Chứng tỏ rằng điểm A là trung điểm của đoạn thẳng BC (*không cần vẽ hình*).

Trích đề HSG huyện Bình Giang năm 2021 - 2022

Bài 13: Cho ba điểm $A, M; B$ thẳng hàng và $AM=3\text{cm}$; $AB=\frac{8}{3}AM$. Biết điểm N là trung điểm của đoạn thẳng MB . Tính độ dài đoạn thẳng NA ?

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021- 2022

Bài 14: Cho đoạn thẳng AB dài 8cm , điểm O thuộc tia đối của tia AB . Gọi M, N thứ tự là trung điểm của đoạn thẳng OA, OB . Tính độ dài đoạn thẳng MN .

Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Bài 15: Trên đường thẳng xy lấy điểm O . Trên tia Oy lấy điểm C , trên tia Ox lấy hai điểm A, B sao cho $OC=3\text{cm}$, $OA=2\text{cm}$ và $OB=4\text{cm}$.

- Tính độ dài đoạn thẳng AB .
- Gọi điểm I là trung điểm đoạn thẳng AB . Chứng tỏ điểm O là trung điểm của đoạn thẳng IC .

Trích đề HSG huyện Tiên Hải năm 2021-2022

III: Độ lớn góc

Dạng toán: Tính số đo góc

Bài 1: Cho tia Oz nằm trong góc vuông xOy . Vẽ tia Ot sao cho Ox là tia phân giác của tOz . Vẽ tia Om sao cho tia Oy là phân giác của zOm .

- Chứng minh rằng tia Om và tia Ot là hai tia đối nhau.
- Gọi Ox' là tia đối của tia Ox , biết $x'Om=30^\circ$. Tính tOz .
- Vẽ thêm 2014 tia phân biệt góc O (không trùng với các tia Ox, Oz, Oy, Om, Ox' và Ot).
Hỏi trong hình vẽ có tất cả bao nhiêu góc?

Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2021-2022

Bài 2: 1) Trong các hình sau đây: Hình chữ nhật, hình thang, hình bình hành, hình thoi, hình vuông, hình tròn, hình lục giác đều. Hình nào có trục đối xứng, hình nào có tâm đối xứng? (nếu có, hãy chỉ ra trục đối xứng, tâm đối xứng đó). Hình nào không có trục đối xứng, hình nào không có tâm đối xứng?

2) Cho $xOy=60^\circ$. Trên tia Oy lấy điểm A sao cho $OA=5\text{cm}$. Trên tia Ox lấy điểm B và C sao cho $OB=6\text{cm}, BC=2\text{cm}$. Nối AB, AC . Hỏi:

- Có mấy tam giác được tạo thành? Gọi tên các tam giác đó.
- Vẽ tia Om là tia đối với tia Ox . Tính số đo góc mOy .
- Tính độ dài đoạn thẳng OC .

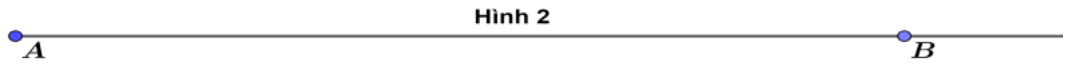
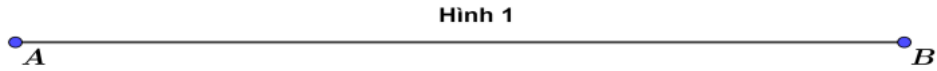


Bài 3: 1) Trong hình vẽ dưới, có bao nhiêu đoạn thẳng phân biệt:



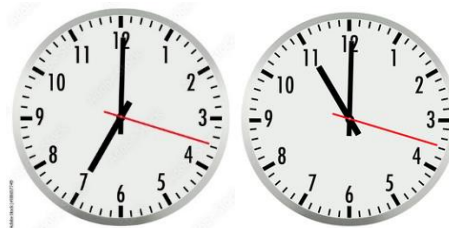
- A. 4. B. 6. C. 8. D. 10.

2) Đâu là hình vẽ đúng của đường thẳng AB :



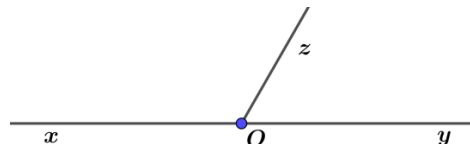
- A. Hình 1. B. Hình 3 và hình 4. C. Hình 4. D. Tất cả 4 hình.

3) Buổi sáng, bạn Trang vào lớp thì đồng hồ trên tường chỉ 7h đúng. Đến khi tan trường đồng hồ chỉ đúng 11h trưa. Hỏi kim giờ trên đồng hồ đã quay được một góc bao nhiêu độ.



- A. 100° . B. 110° . C. 120° . D. 130° .

4) Trong hình vẽ sau:



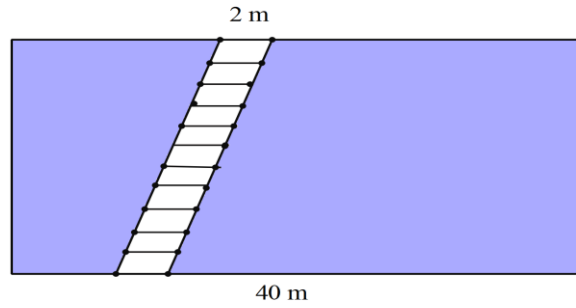
Góc yOz bằng 50% góc xOz và tia Ox, Oy là hai tia đối nhau. Số đo góc yOz là:

- A. 70° . B. 80° . C. 50° . D. 60° .

IV. Các bài toán về chu vi, diện tích

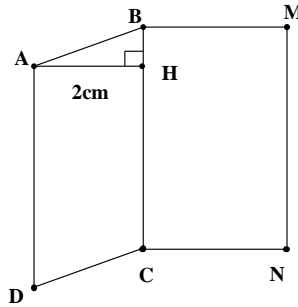
Dạng toán: Giải các bài toán về chu vi diện tích

Bài 1: Nhà bác Sơn có một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng 40 mét và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Trong khu vườn, bác Sơn làm một lối đi để tiện chăm sóc và tưới cho cây với kích thước được cho như hình vẽ. Bác dùng lưới B40 rào xung quanh khu vườn. Chi phí để làm cho mỗi mét hàng rào là 150000 đồng và cho mỗi mét vuông làm lối đi là 350000 đồng (bao gồm cả tiền công thợ và tiền vật liệu). Hỏi bác Sơn phải trả bao nhiêu tiền để làm hàng rào và làm lối đi cho khu vườn?



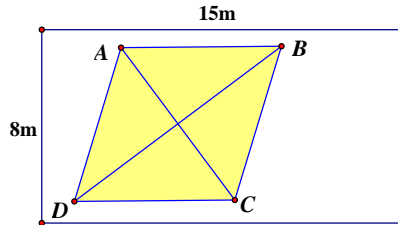
Trích đề HSG huyệnnăm 20...-20...

Bài 2: Tìm diện tích của hình H gồm hình bình hành $ABCD$ và hình chữ nhật $BMNC$, biết hình chữ nhật $BMNC$ có chu vi bằng 18 cm và chiều dài MN gấp hai lần chiều rộng BM .



Trích đề HSG TX Sơn Tây năm 2021-2022

Bài 3: Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài 15 m , chiều rộng 8 m . Người ta trồng một vườn hoa hình thoi ở trong mảnh đất đó, biết diện tích phần còn lại là 75 m^2 . Tính độ dài đường chéo AC , biết $BD=9\text{ m}$.



Trích đề HSG huyện Tân Kỳ (Nghĩa Đông) và huyện Hậu Lộc năm 2021-2022

Bài 4: Muốn cắt một miếng bìa có diện tích là 28 cm^2 như hình bên. Biết chu vi hình vuông $ABCD$ là 16 cm . Tính độ dài cạnh EG . (số liệu trên hình vẽ đơn vị là cm)

Trích đề HSG huyện Lý Nhân năm 2021-2022

Bài 5: Một khu đất hình chữ nhật có chu vi là 132 m . Nếu giảm chiều rộng đi 5 m và tăng chiều dài lên 5 m thì chiều dài gấp đôi chiều rộng.
 a) Tính diện tích khu đất hình chữ nhật ban đầu.
 b) Người ta dùng 30% diện tích khu đất ban đầu để trồng rau, chi phí cho mỗi mét vuông trồng rau là 35000 đồng. Tính số tiền cần chi phí để trồng rau?

Trích đề HSG huyện Sóc Sơn năm 2021-2022

Bài 6: Người ta muốn lát gạch và trồng cỏ cho sân vườn hình vuông. Biết diện tích phần trồng cỏ bằng $\frac{1}{4}$ diện tích sân vườn và diện tích phần lát gạch là 48 m^2 .

- 1) Tính diện tích sân vườn.
- 2) Tính diện tích trồng cỏ.



3) Giá 1 m^2 cỏ là 60000 đồng, nhưng khi mua lại được giảm giá 10% . Vậy số tiền cần mua cỏ là bao nhiêu?

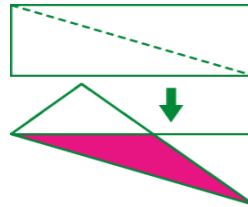
4) Người ta cắm cọc làm hàng rào xung quanh sân vườn, khoảng cách giữa các cọc đều nhau là 0,8m .Hỏi phải dùng bao nhiêu chiếc cọc?

Trích đề HSG Quận Hà Đông năm 2021-2022

Bài 7: Một nền nhà hình chữ nhật có chiều rộng 5 m và chiều dài gấp 4 lần chiều rộng. Người ta lát nền nhà bằng những viên gạch hình vuông cạnh 4 dm . Tổng số tiền mua gạch là 11875000 đồng thì vừa đủ để lát . Hỏi giá mỗi viên gạch lát nền là bao nhiêu ?

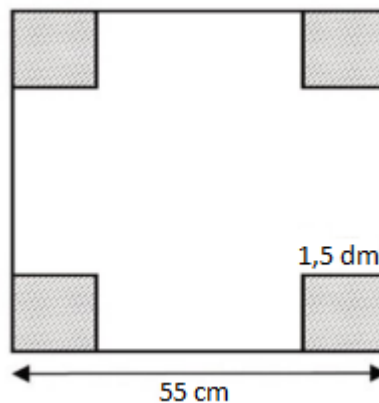
Trích đề HSG Huyện Tiên Du năm 2021-2022

Bài 8: Một tờ giấy hình chữ nhật được gấp theo đường chéo như hình vẽ. Diện tích hình nhận được bằng $\frac{5}{8}$ diện tích hình chữ nhật ban đầu. Biết diện tích phần tô màu là 18 cm^2 . Tính diện tích tờ giấy ban đầu.



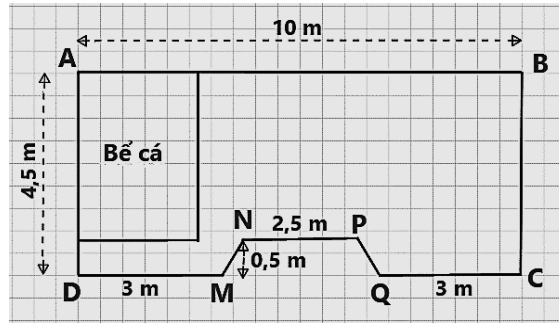
Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022

Bài 9: Một miếng tôn hình vuông có độ dài 1 cạnh là 55 cm . Người ta cắt đi bốn góc theo các hình vuông nhỏ có độ dài cạnh là 1,5 dm . Tính chu vi và diện tích phần tôn còn lại (*không yêu cầu học sinh vẽ hình*)



Trích đề đề xuất HSG huyện năm 2021 - 2022

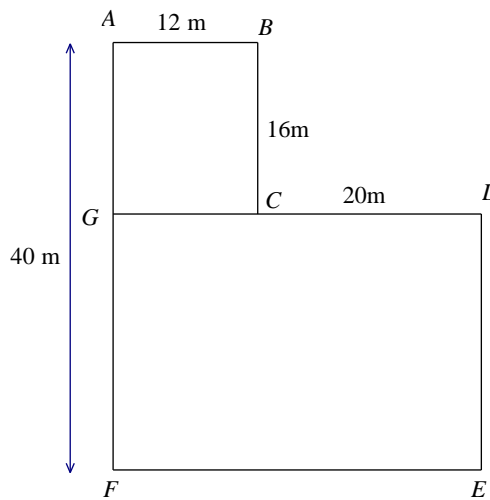
Bài 10: Nhà bác Bình có một mảnh sân như hình bên. Trong sân, bác xây một bể cá có dạng hình chữ nhật dài 3m, rộng 2m . Phần còn lại của sân bác lát gạch. Biết công làm bể cá là 500000 đồng/ m^2 , công lát gạch là 100000 đồng/ m^2 . Tính tổng tiền công bác Bình cần trả cho thợ để hoàn thiện sân.



(Học sinh không phải vẽ lại hình vào bài làm)

Trích đề HSG huyện Thiệu Hoá năm 2021 - 2022

Bài 11: Khu vườn nhà anh Minh có dạng và kích thước như hình vẽ.

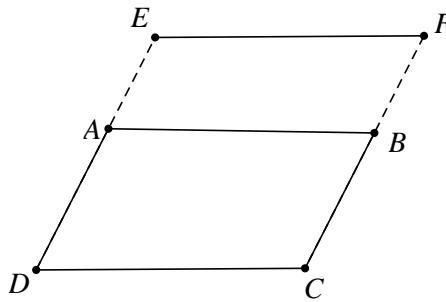


a) Anh Minh muốn dùng lưới B40 để rào cả khu vườn. Hỏi anh Minh phải trả bao nhiêu tiền để rào cả khu vườn, biết giá trọn gói (gồm tiền lưới và tiền công) cho mỗi mét lưới (theo chiều dài) là 150000 đồng?

b) Trên phần đất $ABCG$, anh Minh trồng rau mùng toi, còn trên mảnh đất $GDEF$ anh trồng rau cải. Hỏi sau khi anh Minh thu hoạch hết toàn bộ rau mùng toi và rau cải trong khu vườn thì anh thu được bao nhiêu tiền? Biết rằng cứ 1 m^2 thì anh thu hoạch được 2 kg rau cải và 3 kg rau mùng toi. Giá mỗi kilogram rau mùng toi là 8000 đồng, giá mỗi kilogram rau cải là 7500 đồng.

Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021-2022

Bài 12: Cho hình bình hành $ABCD$ ($AB > AD$) có chu vi là 32 cm. Nếu thêm vào mỗi cạnh AD và BC của hình bình hành 4 cm thì được hình thoi $CDEF$ (hình vẽ). Biết hình thoi $CDEF$ có diện tích là 54 cm^2 . Tính diện tích hình bình hành $ABCD$.



Trích đề HSG huyện Thanh Miện năm 2021-2022

Bài 13: Nhà ông Minh có một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi bằng 600m và chiều dài bằng $\frac{3}{2}$ chiều rộng. Trên mảnh vườn đó, để tiện cho việc chăm bón và thu hoạch ông Minh đã làm một lối đi xung quanh rộng 1m , phần diện tích còn lại dùng để trồng cam.

1. Tính diện tích mảnh vườn nhà ông Minh?
2. Tính diện tích ông Minh dùng để trồng cam.
3. Trung bình cứ 4 m^2 ông Minh trồng một cây cam. Dự định sau 3 năm mỗi cây sẽ cho thu hoạch khoảng 50kg . Nếu giá thị trường là 25000 đồng/ 1kg và trừ đi 40% chi phí thì ông Minh thu được bao nhiêu tiền ?

Trích đề HSG huyện Lục Ngạn năm 2020-2021

Bài 14: Bác An đào cái ao hình vuông trong mảnh đất hình chữ nhật có chiều rộng 10m và chiều dài 15m . Biết rằng sau khi đào ao diện tích đất còn lại quanh cái ao là 50m^2 . Tính độ dài cạnh cái ao.

Trích đề HSG huyện Tiền Hải năm 2020-2021



C. SỬU TÀM CÁC BÀI TRONG CÁC ĐỀ CỦA NHỮNG NĂM TRƯỚC ĐÓ

Bài 1:

- a) Cho 40 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được bao nhiêu đường thẳng?
- b) Cho 40 điểm trong đó có đúng 10 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được bao nhiêu đường thẳng?
- c) Cho n điểm ($n \in \mathbb{N}$). Trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, cứ qua hai điểm ta được 1 đường thẳng. Biết rằng có tất cả 105 đường thẳng. Tìm n ?

Trích đề HSG Huyện Gia Lai năm 2018-2019

Lời giải

- a) Kể từ 1 điểm bất kỳ với các điểm còn lại được: 39 đường thẳng.

Làm như vậy với 40 điểm ta được $39 \cdot 40 = 1560$ (đường thẳng)

Nhưng mỗi đường thẳng được tính hai lần do vậy số đường thẳng thực sự là:

$$1560 : 2 = 780 \text{ (đường thẳng)}$$

- b) Nếu 40 điểm không có ba điểm nào thẳng hàng thì sẽ vẽ được 780 đường thẳng.

Với 10 điểm, không có ba điểm nào thẳng hàng thì vẽ được: $10 \cdot 9 : 2 = 45$ (đường thẳng)

Số đường thẳng cần tìm là: $780 - 44 = 736$ (đường thẳng)

- c) Ta có:

$$n \cdot (n-1) : 2 = 105$$

$$n(n-1) = 210$$

$$n(n-1) = 15 \cdot 14$$

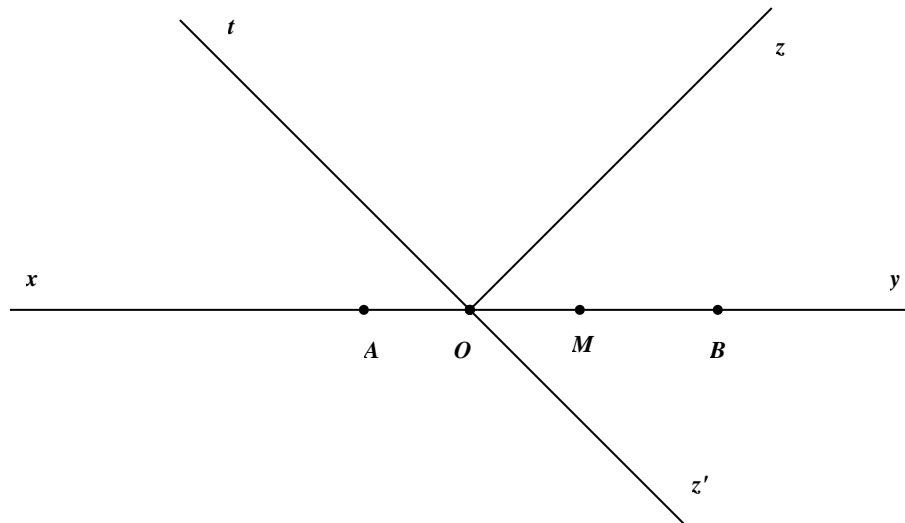
Vậy $n = 15$.

- Bài 2:** Cho góc bẹt xOy , trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 2\text{cm}$, trên tia Oy lấy hai điểm M và B sao cho $OM = 1\text{cm}$, $OB = 4\text{cm}$.

- a) Chứng tỏ: Điểm M nằm giữa hai điểm O và B ; điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB .
- b) Từ O kẻ hai tia Ot, Oz sao cho $tOy = 130^\circ$, $zOy = 30^\circ$. Tính số đo tOz ?

Trích đề HSG Huyện Bá Thước năm 2018-2019

Lời giải





a) M là điểm nằm giữa O và B .

Do M nằm giữa O và B ta có:

$$OM + MB = OB$$

$$MB = OB - OM = 4 - 1 = 3(\text{cm})$$

Do A thuộc tia Ox , M thuộc tia Oy nên O nằm giữa hai điểm A và M suy ra:

$$OM + OA = MA = 2 + 1 = 3(\text{cm})$$

Mặt khác do A, B nằm trên hai tia đối nhau, M lại nằm giữa O và B nên suy ra M nằm giữa A và B , Vậy M là trung điểm của AB .

b) TH1: Tia Ot, Oz trên cùng một nửa mặt phẳng.

Do $yOt = 130^\circ, yOz = 30^\circ$ suy ra tia Oz nằm giữa hai tia Ot, Oy .

Ta có: $tOz = tOy - yOz = 130^\circ - 30^\circ = 100^\circ$.

TH2: Tia Ot và tia Oz không nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là xy .

Suy ra tia Oy nằm giữa 2 tia Ot, Oz .

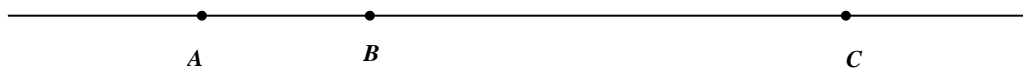
Ta có: $tOz = tOy + yOz = 130^\circ + 30^\circ = 160^\circ$.

Bài 3: Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng 2 cm. Lấy điểm C thuộc đường thẳng AB sao cho $BC = 5$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng AC .

Trích đề HSG Huyện Trục Ninh năm 2017-2018

Lời giải

Trường hợp điểm C thuộc tia đối của tia BA .



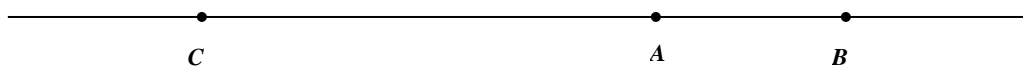
Điểm B nằm giữa hai điểm A và C .

Ta có:

$$AB + BC = AC$$

$$AC = 2 \text{ cm} + 5 \text{ cm} = 7 \text{ cm}.$$

Trường hợp điểm C thuộc tia BA



Điểm A nằm giữa hai điểm B và C .

Ta có:

$$AB + AC = BC$$

$$AC = BC - AB = 5 \text{ cm} - 2 \text{ cm} = 3 \text{ cm}.$$

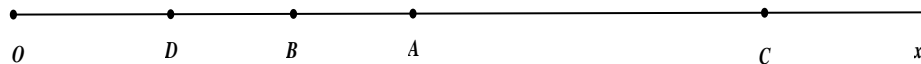
Bài 4: Trên tia Ox , cho 4 điểm A, B, C, D . Biết rằng A nằm giữa B và C ; B nằm giữa C và D ; $OA = 7$ cm; $OD = 3$ cm; $BC = 8$ cm và $AC = 3BD$.

a) Tính độ dài AC

b) Chứng tỏ rằng: Điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AD .

Trích đề HSG Huyện Nga Sơn năm 2017-2018

Lời giải



a) Đặt $BD = x$ (cm) suy ra $AC = 3x$ (cm).

Vì D nằm giữa O và A nên: $OD + DA = OA$ suy ra $DA = 4$.

Suy ra $DB + BA = 4$ suy ra $x + BA = 4$ (1)

Vì A nằm giữa B và C nên: $BA + AC = BC$ hay $3x + BA = 8$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $(3x + BA) - (x + BA) = 8 - 4$ suy ra $2x = 4$ suy ra $x = 2$

Suy ra $AC = 3.2 = 6$ (cm)

b) Theo (1) ta có: $x + BA = 4$ mà $x = 2$ suy ra $BA = 2$.

Mà $BD = x = 2$ suy ra $BD = BA (= 2)$ suy ra B là trung điểm của đoạn thẳng AD .

Bài 5:

a) Trên tia Ox lấy 2 điểm A, B sao cho $OA = 6$ cm, $OB = 10$ cm. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của OA, AB . Tính độ dài đoạn thẳng EF .

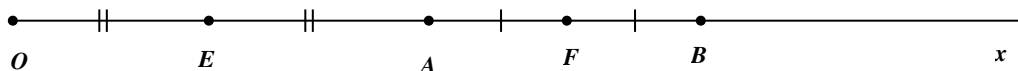
b) Trên cùng nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox vẽ hai tia Oy, Oz sao cho $\angle xOy = 50^\circ; \angle xOz = 100^\circ$.

Vẽ tia Oy' là tia đối của tia Oy . Tính số đo $\angle y'Oz$.

c) Cho 2018 điểm phân biệt trong đó có đúng 3 điểm thẳng hàng. Qua hai điểm ta kẻ được một đường thẳng. Tính số đường thẳng kẻ được.

Trích đề HSG Huyện Kinh Môn năm 2017-2018

a)



Vì điểm A nằm giữa hai điểm O và B suy ra $OA + AB = OB$.

Thay số: $6 + AB = 10$ suy ra $AB = 4$ cm. Vậy $AB = 4$ cm.

Vì E là trung điểm OA nên $EA = \frac{OA}{2}$, thay số $EA = 6 : 2 = 3$ cm.

F là trung điểm của AB nên $AF = \frac{AB}{2}$.

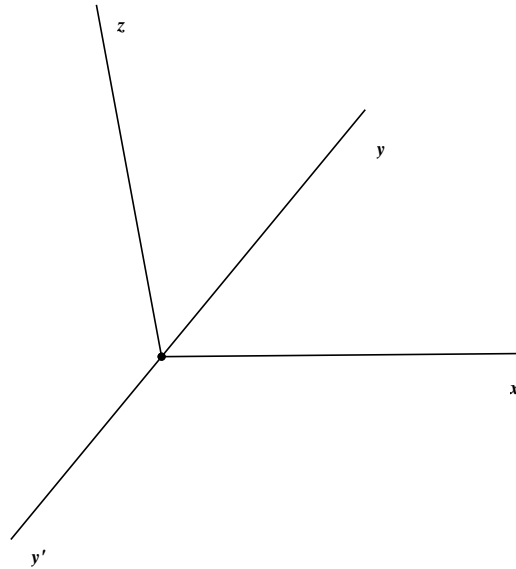
Thay số: $AF = 4 : 2 = 2$ cm.

Do A nằm giữa O và B . Mà E là trung điểm của OA , F là trung điểm của AB nên điểm A nằm giữa hai điểm E và F .

Suy ra $EF = EA + AF = 3 + 2 = 5$ (cm).

Vậy $EF = 5$ cm.

b)



Vì hai tia Oz, Oy cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox , mà $xOy < xOz$ nên tia Oy nằm giữa hai tia Ox và Oz suy ra $xOy + yOz = xOz$.

Thay số $50^\circ + yOz = 100^\circ$ suy ra $yOz = 50^\circ$.

Do tia Oy' là tia đối của tia Oy suy ra $y'Oz, yOz$ là hai góc kề bù.

Suy ra $y'Oz + yOz = 180^\circ$.

Thay số: $y'Oz + 50^\circ = 180^\circ$ suy ra $y'Oz = 130^\circ$.

Vậy $y'Oz = 130^\circ$.

c) Giả sử trong 2018 điểm không có ba điểm nào thẳng hàng

Từ 1 điểm ta nối với 2017 điểm còn lại ta được 2017 đường thẳng. Làm như vậy với 2018 điểm ta được $2018 \cdot 2017 = 4070306$ đường thẳng.

Vì mỗi đường thẳng được tính hai lần, do đó số đường thẳng kẻ được là: 2035153 đường thẳng.

Số đường thẳng đi qua 3 điểm không thẳng hàng là 3.

Số đường thẳng đi qua 3 điểm phân biệt thẳng hàng là 1.

Khi thay 3 điểm phân biệt không thẳng hàng thành 3 điểm phân biệt thẳng hàng thì số đường thẳng giảm đi là: $3 - 1 = 2$ (đường thẳng)

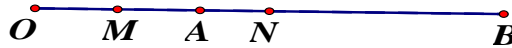
Do trong 2018 điểm phân biệt trên có đúng ba điểm thẳng hàng nên số đường thẳng thực tế kẻ được là: $2035153 - 2 = 2035151$ (đường thẳng)

Vậy ta kẻ được tất cả là 2035151 đường thẳng.

- Bài 6:**
1. Cho trước 10 đường thẳng đôi một cắt nhau, trong đó có đúng ba đường thẳng cùng đi qua một điểm. Hỏi các đường thẳng đó có bao nhiêu giao điểm?
 2. Cho đoạn thẳng AB điểm O thuộc tia đối của tia AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OA, OB
 - a) Chứng tỏ $OA < OB$.
 - b) Trong ba điểm O, M, N ; điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại.
 - c) Chứng tỏ rằng độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào vị trí của điểm O (O thuộc tia đối của tia OB).



Lời giải



a) Điểm A nằm giữa hai điểm O và B .

Suy ra: $OA < OB$.

b) Ta có M và N thứ tự là trung điểm của OA, OB nên: $OM = \frac{OA}{2}$; $ON = \frac{OB}{2}$.

Vì $OA < OB$ suy ra $OM < ON$.

Hai điểm M và N thuộc tia OB mà $OM < ON$ nên điểm M nằm giữa hai điểm O và N .

c) Ta có: $OM + MN = ON$ suy ra $MN = ON - OM$.

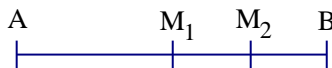
$$\text{Hay } MN = \frac{OB - OA}{2} = \frac{AB}{2}.$$

Vì AB có độ dài không đổi nên MN có độ dài không đổi.

Bài 7: Cho đoạn thẳng $AB = 2^{2008}$ (cm). Gọi M_1 là trung điểm của đoạn thẳng AB ; M_2 là trung điểm của đoạn thẳng M_1B ; M_3 là trung điểm của đoạn thẳng M_2B ; ...; M_{2008} là trung điểm của đoạn thẳng $M_{2007}B$. Tính độ dài đoạn thẳng $M_{2008}B$.

Trích đề HSG Huyện năm 2021-2022

Lời giải



M_1 là trung điểm của AB nên $M_1B = \frac{AB}{2} = \frac{2^{2008}}{2} = 2^{2007}$ (cm)

M_2 là trung điểm của M_1B nên $M_2B = \frac{M_1B}{2} = \frac{2^{2007}}{2} = 2^{2006}$ (cm)

Như vậy: $M_1B = \frac{2^{2008}}{2^1}$; $M_2B = \frac{2^{2008}}{2^2}$; $M_3B = \frac{2^{2008}}{2^3}$; ...

Do đó $M_{2007}B = \frac{2^{2008}}{2^{2007}} = 2$ (cm)

M_{2008} là trung điểm của $M_{2007}B$ nên $M_{2008}B = \frac{M_{2007}B}{2} = \frac{2}{2} = 1$ (cm)

Bài 8: Trên tia Ox lấy hai điểm A, B sao cho $OA = 3$ cm, $OB = 5$ cm.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AB .

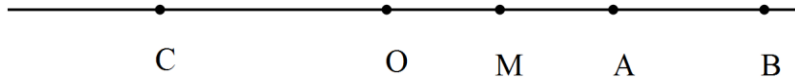
b) Trên tia đối của tia Ox lấy điểm C sao cho O là trung điểm của đoạn thẳng AC . Lấy điểm

M thuộc đoạn thẳng OA sao cho $OM = \frac{1}{2}OA$. Hỏi M có là trung điểm của đoạn thẳng BC

không? Vì sao?

Trích đề HSG Huyện năm 2020-2021

Lời giải



a) Điểm A nằm giữa hai điểm B và O .

Do đó, ta có: $OA + AB = OB$ suy ra $AB = OB - OA$.

Mà $OA = 3\text{cm}$; $OB = 5\text{cm}$ nên: $AB = 5 - 3 = 2\text{cm}$.

Vậy $AB = 2\text{cm}$.

b) Vì điểm O là trung điểm của đoạn thẳng AC nên $OC = OA = 3\text{cm}$.

Vì điểm M là trung điểm của đoạn thẳng OA nên $OM = MA = 3 : 2 = 1,5(\text{cm})$.

Vì hai điểm $C; M$ nằm trên hai tia đối nhau gốc O nên điểm O nằm giữa hai điểm $C; M$

Do đó ta có:

$$CO + OM = CM$$

$$3 + 1,5 = CM$$

$$CM = 4,5(\text{cm})$$

Điểm M nằm giữa hai điểm O và B .

Do đó: $OM + MB = OB$ suy ra $MB = OB - OM$.

Mà $OM = 1,5\text{cm}$; $OB = 5\text{cm}$ nên: $MB = 5 - 1,5 = 3,5\text{cm}$.

Ta thấy $MB \neq MC$ ($3,5\text{cm} \neq 4,5\text{cm}$) nên điểm M không là trung điểm của đoạn thẳng BC .

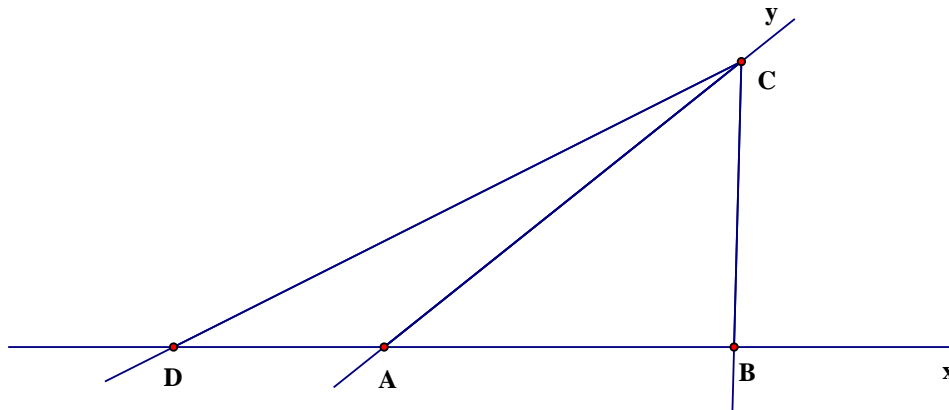
Bài 9: Cho xAy , trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = 5\text{cm}$. Trên tia đối của tia Ax lấy điểm D sao cho $AD = 3\text{cm}$, C là một điểm trên tia Ay .

a) Tính BD .

b) Biết $BCD = 85^\circ$, $BCA = 50^\circ$. Tính ACD ?

Trích đề HSG Huyện năm 2020-2021

Lời giải



a) Vì Ax và AD là hai tia đối nhau, B thuộc tia Ax , D thuộc tia AD .

Suy ra điểm A nằm giữa hai điểm B và D .

$$\text{Suy ra } BA + AD = BD$$

$$\text{Suy ra } BD = 5 + 3 = 8(\text{cm})$$

Vậy $BD = 8\text{cm}$

b) Vì tia CA nằm giữa hai tia CB và CD .

$$BCA + ACD = BCD$$

$$50^\circ + ACD = 85^\circ$$



$$\angle ACD = 35^\circ.$$

$$\text{Vậy } \angle ACD = 35^\circ.$$

Bài 10:

1. Trên tia Ox lấy các điểm A và B sao cho $OA = 3\text{ cm}$, $OB = 7\text{ cm}$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng OA , K là trung điểm của đoạn thẳng AB .

a) Tính độ dài các đoạn AB và IK .

b) Gọi M là một điểm nằm ngoài đường thẳng AB , biết $\angle OMB = 110^\circ$ và $\angle OMA = \frac{2}{3} \angle AMB$.

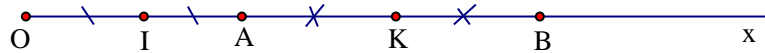
Tính số đo góc AMB .

2. Cho 30 điểm phân biệt trong đó có đúng 10 điểm thẳng hàng, cứ qua 2 điểm vẽ được một đường thẳng. Hỏi có tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Trích đề HSG Huyện năm 2020-2021

Lời giải

1.



a) Ta có: $AB = OB - OA = 7 - 3 = 4(\text{cm})$

$$\text{Ta có } IA = \frac{OA}{2}; AK = \frac{AB}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } IK = \frac{OA}{2} + \frac{AB}{2} = \frac{OB}{2} = \frac{7}{2} = 3,5(\text{cm})$$

b) Ta có: $\angle AMB = \angle OMB - \angle OMA$

$$\text{Suy ra: } \angle AMB = \angle OMB - \frac{2}{3} \angle AMB \text{ (Vì } \angle OMA = \frac{2}{3} \angle AMB)$$

$$\text{Suy ra: } \angle AMB + \frac{2}{3} \angle AMB = \angle OMB$$

$$\text{Suy ra: } \angle AMB = \frac{2}{5} \cdot \angle OMB = \frac{2}{5} \cdot 110^\circ = 44^\circ.$$

2. Qua 30 điểm phân biệt vẽ được số đường thẳng là: $30 \cdot 29 = 870$ (đường thẳng)

Qua 10 điểm phân biệt ta vẽ được số đường thẳng là: $10 \cdot 9 = 90$ (đường thẳng)

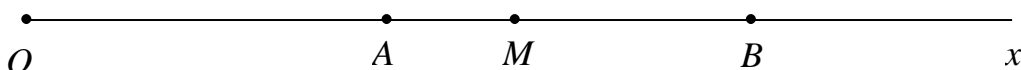
Mà ta có 10 điểm thẳng hàng nên số đường thẳng vẽ được là: $870 - 90 = 780$ (đường thẳng)

Bài 11: Trên tia Ox lấy hai điểm A và B sao cho $OA = a$ (cm), $OB = b$ (cm), $b > a > 0$

a) Tính độ dài đoạn thẳng AB với $a = 2, b = 5$.

b) Tìm vị trí của điểm M trên tia Ox sao cho $OM = \frac{1}{2}(a + b)$.

Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021- 2022

Lời giải



a) Vì điểm A nằm giữa hai điểm O và B .

$$\text{Do đó } OA + AB = OB$$

$$\text{Thay số, ta có } 2 + AB = 5 \Rightarrow AB = 5 - 2 = 3 \text{ (cm)}$$

b) Vì $OM = \frac{1}{2}(a+b)$

$$\Rightarrow OM = \frac{a+b}{2} = \frac{2a+b-a}{2} = a + \frac{b-a}{2} = OA + \frac{OB-OA}{2} = OA + \frac{1}{2}AB$$

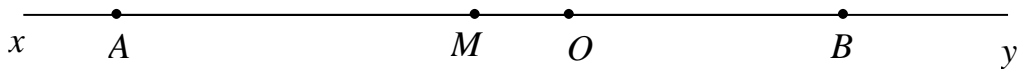
Mặt khác, do A nằm giữa O và M nên $OM = OA + AM \Rightarrow AM = \frac{1}{2}AB$.

Mà M nằm giữa A và B nên M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Bài 12: Cho hai tia Ox và Oy đối nhau, trên tia Ox lấy hai điểm A và M sao cho $OA = 5 \text{ cm}$, $OM = 1 \text{ cm}$; trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OB = 3 \text{ cm}$. Chứng tỏ điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trích đề HSG huyện Bình Lục năm 2022-2023

Lời giải



Vì điểm M nằm giữa O và A , suy ra $OM + MA = OA$

$$AM = OA - OM$$

$$\text{Hay } MA = 5 - 1 = 4 \text{ (cm).}$$

Vì điểm O nằm giữa hai điểm M và B . Khi đó: $OM + OB = MB$

$$\text{Hay } MB = 1 + 3 = 4 \text{ (cm)}$$

Vì điểm M nằm giữa hai điểm A và B và $MA + MB = 4$

Nên M là trung điểm của đoạn thẳng AB