

Bài 1. (2 điểm)

1) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x} - 2} - 2\sqrt{x} \right) : \left(\sqrt{x} - \frac{5\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 5} \right)$ (với $0 \leq x \neq 4$).

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2mx + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 8$.

Bài 2. (1,5 điểm)

1) Giải phương trình nghiệm nguyên $2x^2 + 4xy + 3x + 6y = 4$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 2xy + 6x - 12y = 0 \\ (x - y + 5)^4 + (y + 5)^2 = 2. \end{cases}$

Bài 3. (1,5 điểm)

1) Cho đa thức $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$, với b, c, d là các số nguyên. Biết rằng $P(x)$ có một nghiệm $x = \sqrt{2}$ và $P(1) = 4$. Tìm b, c, d .

2) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c \geq \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{(a+b)^2 + 3} + \sqrt{(b+c)^2 + 3} + \sqrt{(c+a)^2 + 3} \geq 6.$$

Bài 4. (2 điểm)

1) Tìm các số nguyên dương x và y thỏa mãn $\text{lcm}(x, y) + 2 \cdot \text{gcd}(x, y) = 61$.

(Với $\text{lcm}(a, b)$, $\text{gcd}(a, b)$ lần lượt là ký hiệu bội chung nhỏ nhất, ước chung lớn nhất của hai số nguyên dương a và b).

2) Tìm số nguyên tố p để $n = 2^p + p^2$ là số nguyên tố.

3) Chứng minh rằng với mọi cách chọn 7 số bất kỳ trong 12 số nguyên dương đầu tiên, ta luôn tìm được hai số a và b trong 7 số đó sao cho $ab + 1$ là số chính phương.

Bài 5. (3 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , có đường cao AD . Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B cắt đường trung trực đoạn thẳng BD tại điểm P . Hai đường thẳng DP và AC cắt nhau tại điểm E .

1) Chứng minh tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn.

2) Gọi Q là giao điểm của đường thẳng AP và đường tròn (O) , với Q khác A .

Chứng minh $\widehat{PDQ} = \widehat{PAD}$.

3) Gọi K là giao điểm của đường thẳng AD và đường tròn (O) , với K khác A . Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng CQ và DP . Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.

HẾT

(Các thí sinh được sử dụng máy tính cầm tay, không được sử dụng tài liệu).

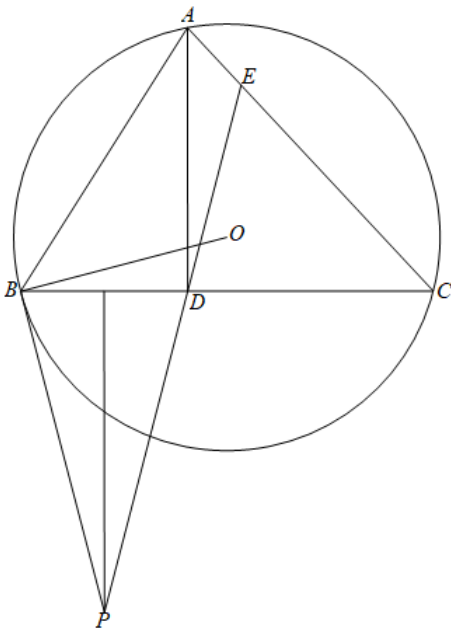
Họ và tên thí sinh: Số báo danh: Trường, trung tâm:

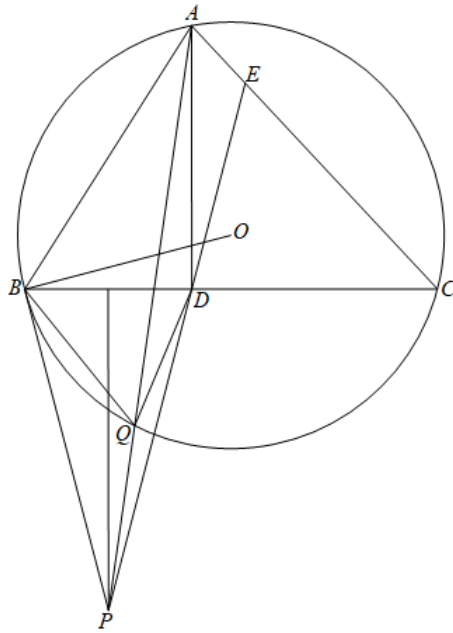
HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM

Bài	Ý	Nội dung	Điểm
1.			2,00
	1)	<u>Rút gọn biểu thức:</u> $P = \left(\frac{x\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x} - 2} - 2\sqrt{x} \right) : \left(\sqrt{x} - \frac{5\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 5} \right) \text{ (với } 0 \leq x \neq 4)$ $= \left[\frac{(\sqrt{x})^3 - 2^3}{\sqrt{x} - 2} - 2\sqrt{x} \right] : \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 5) - 5\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 5}$ $= \left[\frac{(\sqrt{x} - 2)(x + 2\sqrt{x} + 4)}{\sqrt{x} - 2} - 2\sqrt{x} \right] \cdot \frac{\sqrt{x} + 5}{x + 5\sqrt{x} - 5\sqrt{x} + 4}$ $= (x + 2\sqrt{x} + 4 - 2\sqrt{x}) \cdot \frac{\sqrt{x} + 5}{x + 4}$ $= \sqrt{x} + 5.$	1,00 0,25 0,25 0,25 0,25
	2)	<u>Tìm m:</u> Ta có $x^2 - 2mx + m - 3 = 0$ (1). $\Delta' = (-m)^2 - 1 \cdot (m - 3) = m^2 - m + 3$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' = m^2 - m + 3 > 0$ Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1x_2 = m - 3$. Vậy $x_1^2 + x_2^2 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 8 \Leftrightarrow (2m)^2 - 2(m - 3) = 8$ $\Leftrightarrow 2m^2 - m - 1 = 0$. $\Leftrightarrow m = 1$ (nhận) hoặc $m = \frac{-1}{2}$ (nhận) (vì $2 + (-1) + (-1) = 0$). Do đó có hai giá trị cần tìm là $m = 1, m = \frac{-1}{2}$.	1,00 0,25 0,25 0,25 0,25
2.			1,50
	1)	<u>Giải phương trình nghiệm nguyên:</u> Ta có $2x^2 + 4xy + 3x + 6y = 4$, với $x, y \in \mathbb{Z}$. $\Leftrightarrow 2x(x + 2y) + 3(x + 2y) = 4 \Leftrightarrow (x + 2y)(2x + 3) = 4$ (1). Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x + 2y, 2x + 3 \in \mathbb{Z}$ và $2x + 3$ là số lẻ. Vậy (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2x + 3 = -1 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$ (loại) hoặc $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$ (nhận). Do đó phương trình đã cho có nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(-2; -1)$.	0,50 0,25 0,25
		<u>Cách 2:</u> Giải như cách 1, phương trình đã cho tương đương $(x + 2y)(2x + 3) = 4$ (1). Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x + 2y, 2x + 3 \in \mathbb{Z}$ Vậy (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ (I) hoặc $\begin{cases} 2x + 3 = -1 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$ (II) hoặc $\begin{cases} 2x + 3 = 2 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2x + 3 = -2 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2x + 3 = 4 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2x + 3 = -4 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$.	0,50 0,25

	$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \quad (\text{loại}). \quad (II) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \quad (\text{nhận}).$	0,25
	Tương tự các hệ phương trình còn lại không có nghiệm nguyên. Do đó phương trình đã cho có nghiệm nguyên $(x ; y)$ là $(-2 ; -1)$.	
2)	<u>Giải hệ phương trình:</u>	1,00
	Ta có $\begin{cases} x^2 - 2xy + 6x - 12y = 0 \quad (1) \\ (x - y + 5)^4 + (y + 5)^2 = 2 \quad (2). \end{cases}$	0,25
	$(1) \Leftrightarrow x(x - 2y) + 6(x - 2y) = 0 \Leftrightarrow (x - 2y)(x + 6) = 0.$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = -6. \end{cases}$	0,25
	Với $x = -6$ ta có $(2) \Leftrightarrow (y + 1)^4 + (y + 5)^2 = 2 \quad (3)$. Đặt $a = y + 1$. (3) trở thành $a^4 + (a + 4)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow a^4 + a^2 + 8a + 14 = 0$ $\Leftrightarrow a^4 - 2a^2 + 1 + 2(a^2 + 4a + 4) + a^2 + 5 = 0$ $\Leftrightarrow (a^2 - 1)^2 + 2(a + 2)^2 + a^2 + 5 = 0$, phương trình này vô nghiệm (vì $(a^2 - 1)^2 + 2(a + 2)^2 + a^2 + 5 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$).	0,25
	Với $x = 2y$ (4) ta có $(2) \Leftrightarrow (y + 5)^4 + (y + 5)^2 - 2 = 0 \quad (5)$. Đặt $t = (y + 5)^2 \geq 0$. (5) trở thành $t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ (nhận) hoặc $t = -2$ (loại) (do $1 + 1 - 2 = 0$) Vậy $(y + 5)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (y + 6)(y + 4) = 0 \Leftrightarrow y = -6$ hoặc $y = -4$. - Với $y = -6$ ta có $(4) \Leftrightarrow x = -12$. - Với $y = -4$ ta có $(4) \Leftrightarrow x = -8$. Do đó hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x ; y)$ là $(-12 ; -6), (-8 ; -4)$.	0,25
	<u>Cách 2:</u>	1,00
	Ba bước đầu như cách 1.	0,75
	Với $x = 2y$ (4) ta có $(2) \Leftrightarrow (y + 5)^4 + (y + 5)^2 - 2 = 0$ $\Leftrightarrow (y + 5)^4 - (y + 5)^2 + 2(y + 5)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (y + 5)^2[(y + 5)^2 - 1] + 2[(y + 5)^2 - 1] = 0$ $\Leftrightarrow [(y + 5)^2 - 1][(y + 5)^2 + 2] = 0$ $\Leftrightarrow (y + 5)^2 - 1 = 0$, (vì $(y + 5)^2 + 2 > 0, \forall y \in \mathbb{R}$). $\Leftrightarrow (y + 6)(y + 4) = 0 \Leftrightarrow y = -6$ hoặc $y = -4$ - Với $y = -6$ ta có $(4) \Leftrightarrow x = -12$. - Với $y = -4$ ta có $(4) \Leftrightarrow x = -8$. Do đó hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x ; y)$ là $(-12 ; -6), (-8 ; -4)$.	0,25
3.		1,50
1)	<u>Tìm b, c, d:</u>	1,00
	Ta có $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ (với $b, c, d \in \mathbb{Z}$). Vì $P(1) = 4$ nên $1 + b + c + d = 4 \Leftrightarrow b + c + d = 3 \quad (1)$.	0,25
	Vì $x = \sqrt{2}$ là một nghiệm của $P(x)$ nên $P(\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} + 2b + \sqrt{2}c + d = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow 2b + d = -\sqrt{2}(c + 2) \Rightarrow c + 2 = 0 \Leftrightarrow c = -2$ (vì $c \in \mathbb{Z}$ nên nếu $c + 2 \neq 0$ thì $-\sqrt{2}(c + 2)$ là số vô tỷ, vô lý, do $2b + d \in \mathbb{Z}$ nên không là số vô tỷ).	0,25
	Kết hợp với (1) ta có $\begin{cases} b + d = 5 \\ 2b + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ d = 10. \end{cases}$ Vậy các giá trị cần tìm là $b = -5, c = -2, d = 10$.	0,25
2)	<u>Chứng minh bất đẳng thức:</u>	0,50

		Ta có $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c \geq \frac{3}{2}$. Cần chứng minh $\sqrt{(a+b)^2+3} + \sqrt{(b+c)^2+3} + \sqrt{(c+a)^2+3} \geq 6$ (1). Bổ đề: Với $x > 0$ ta có $x^2 + 3 \geq \frac{(x+3)^2}{4}$ (2). Thật vậy, (2) $\Leftrightarrow 4x^2 + 12 \geq x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow 3(x-1)^2 \geq 0$ (luôn đúng, $\forall x \in \mathbb{R}$). Áp dụng (2) ta có $\sqrt{(a+b)^2+3} \geq \sqrt{\frac{(a+b+3)^2}{4}} = \frac{a+b+3}{2}$. Tương tự $\sqrt{(b+c)^2+3} \geq \frac{b+c+3}{2}$ và $\sqrt{(c+a)^2+3} \geq \frac{c+a+3}{2}$. Vậy $\sqrt{(a+b)^2+3} + \sqrt{(b+c)^2+3} + \sqrt{(c+a)^2+3} \geq \frac{2(a+b+c)+9}{2} \geq 6$. Bất đẳng thức (1) được chứng minh, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{2}$.	0,25
			0,25
4.			2,00
	1)	<u>Tìm các số nguyên dương x và y:</u> Cần tìm $x, y \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $\text{lcm}(x, y) + 2 \cdot \text{gcd}(x, y) = 61$ (1). Đặt $d = \text{gcd}(x, y) \Rightarrow x = dm$ và $y = dn$, với $m, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\text{gcd}(m, n) = 1$. $\Rightarrow \text{lcm}(x, y) = dm n$. Vậy (1) $\Leftrightarrow dm n + 2d = 61 \Leftrightarrow d(mn + 2) = 61$ $\Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ mn + 2 = 61 \end{cases}$ (vì 61 là số nguyên tố, $d = \text{gcd}(x, y)$ nên $d \in \mathbb{N}^*$ và do $m, n \in \mathbb{N}^*$ nên $mn + 2 > 2$). Vậy $mn = 59 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 59 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m = 59 \\ n = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 59 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 59 \\ y = 1. \end{cases}$ Do đó các số nguyên dương cần tìm là $x = 1$ và $y = 59$, $x = 59$ và $y = 1$.	0,50
			0,25
			0,25
	2)	<u>Tìm số nguyên tố p để n là số nguyên tố:</u> Ta có $n = 2^p + p^2$, với p là số nguyên tố. Nếu $p = 3$ thì $n = 2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố. Nếu $p = 2$ thì $n = 2^2 + 2^2 = 8$ không là số nguyên tố. Nếu số nguyên tố $p \geq 5$ thì $p = 2m + 1$, với $m \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow 2^p = 2^{2m+1} = 2 \cdot 4^m$ có số dư bằng 2 trong phép chia cho 3 (vì 4^m có số dư bằng 1 trong phép chia cho 3, $\forall m \in \mathbb{N}$), vì số nguyên tố $p \geq 5$ nên $p = 3k \pm 1$, với $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow p^2 = (3k \pm 1)^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$ có số dư bằng 1 trong phép chia cho 3. Vậy $n = (2^p + p^2) : 3$ (do $p \geq 5$) hay n không là số nguyên tố, với mọi số nguyên tố $p \geq 5$. Do đó $p = 3$ thỏa mãn bài toán.	0,75
			0,25
			0,25
			0,25
	3)	<u>Chứng minh luôn tìm được hai số a, b:</u> Gọi A là tập hợp gồm 12 số nguyên dương đầu tiên, vậy A được chia thành 6 cặp số gồm $\{1; 3\}, \{5; 7\}, \{9; 11\}, \{2; 4\}, \{6; 8\}, \{10; 12\}$. Nhận xét: Nếu n là số nguyên dương thì $n(n+2) + 1$ là số chính phương (vì $n(n+2) + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$). $\Rightarrow a \neq b$ là hai số trong mỗi cặp số nói trên thì $ab + 1$ là số chính phương.	0,75
			0,25
			0,25

		Theo nguyên lý Dirichlet, trong mọi cách chọn 7 số bất kỳ trong 12 số nguyên dương đầu tiên thì luôn tồn tại ít nhất 2 số thuộc một trong 6 cặp số đó. Áp dụng tính chất ở nhận xét trên ta có điều phải chứng minh.	0,25
		<u>Cách 2:</u>	0,75
		Gọi $A = \{1; 2; \dots; 12\}$ là tập hợp gồm 12 số nguyên dương đầu tiên. Theo nguyên lý Dirichlet, trong mọi cách chọn 7 số bất kỳ trong A thì luôn tồn tại ít nhất 2 số là hai số lẻ liên tiếp hoặc hai số chẵn liên tiếp.	0,25
		Mà $1.3 + 1 = 4$ là số chính phương, $3.5 + 1 = 16$ là số chính phương, ..., $9.11 + 1 = 100$ là số chính phương.	0,25
		$2.4 + 1 = 9$ là số chính phương, $4.6 + 1 = 25$ là số chính phương, ..., $10.12 + 1 = 121$ là số chính phương. Vậy ta có điều phải chứng minh.	0,25
5.			3,00
	1)	<u>Chứng minh tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn:</u>	1,00
			0,25
		Ta có $PB = PD$ (vì P thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BD) $\Rightarrow \triangle PBD$ cân tại $P \Rightarrow \widehat{PDB} = \widehat{PBD}$.	0,25
		hay $\widehat{PDB} = \widehat{PBC}$. Mà $\widehat{PBC} = \widehat{BAC}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp có cùng cung bị chắn của (O)). Nên $\widehat{PDB} = \widehat{BAC}$	0,25
		hay $\widehat{PDB} = \widehat{BAE}$. Vậy tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn (vì có góc ngoài bằng góc trong đỉnh đối nên hai góc đối bù nhau).	0,25
		<u>Cách 2:</u>	1,00
		Ba bước đầu như cách 1	0,75
		Mà $\widehat{PDB} + \widehat{BDE} = 180^\circ$ (hai góc kề bù). Vậy $\widehat{BAE} + \widehat{BDE} = 180^\circ$ Do đó tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn.	0,25
	2)	<u>Chứng minh $\widehat{PDQ} = \widehat{PAD}$:</u>	1,00



0,25

Ta có $\widehat{PBQ} = \widehat{BAQ}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp có cùng cung bị chắn của (O)) hay $\widehat{PBQ} = \widehat{BAP}$.

Mà $\widehat{BPQ} = \widehat{BPA}$ (góc chung).

$$\text{Vậy } \triangle BPQ \sim \triangle APB \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{PB}{AP} = \frac{PQ}{PB}$$

0,25

$$\Leftrightarrow \frac{PD}{AP} = \frac{PQ}{PD} \text{ (do } PB = PD, \text{ chứng minh trên).}$$

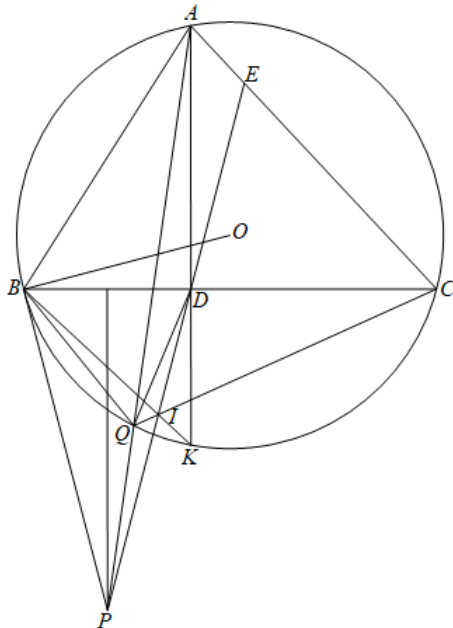
0,25

Mà $\widehat{DPQ} = \widehat{APD}$ (góc chung).

Vậy $\triangle DPQ \sim \triangle APD$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{PDQ} = \widehat{PAD}$.

0,25

3) Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng:

1,00

0,25

Tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{BDI}$ (vì cùng bù với $\widehat{BDE}$)
hay $\widehat{BAC} = \widehat{BDI}$.

