

**CHỦ ĐỀ 4: SỐ NGUYÊN****A. PHẦN NỘI DUNG****I. Ước và bội.****Dạng 1: Chứng minh sự chia hết.**

**Bài 1:** Chứng tỏ rằng  $a^2 + 3a + 1$  không thể chia hết cho 2 với  $a$  là số nguyên.

*Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022*

**Lời giải**

Ta có  $a^2 + 3a + 1 = a^2 + a + 2a + 1 = a(a + 1) + 2a + 1$

Vì  $a(a + 1)$  là tích hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 ;

$2a$  chia hết cho 2 ;

1 không chia hết cho 2 .

Suy ra  $a^2 + 3a + 1$  không chia hết cho 2 với  $a$  là số nguyên.

**Bài 2:** Chứng tỏ  $4x + 3y$  chia hết cho 7 khi  $2x + 5y$  chia hết cho 7 .

*Trích đề HSG cấp huyện năm 2018-2019*

**Lời giải**

Ta có:

$$4x + 3y : 7$$

$$\text{Suy ra } 4(4x + 3y) : 7$$

$$\text{Suy ra } 16x + 12y : 7$$

$$\text{Suy ra } 14x + 7y + 2x + 5y : 7$$

$$\text{Mà } 14x + 7y : 7 \text{ suy ra } 2x + 5y : 7$$

$$\text{Vậy } 4x + 3y : 7 \text{ khi } 2x + 5y : 7$$

**Bài 3:** Tìm số nguyên  $n$  sao cho  $4n - 5$  chia hết cho  $2n - 1$ .

*Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015-2016*

**Lời giải**

Tìm số nguyên  $n$  sao cho  $4n - 5$  chia hết cho  $2n - 1$ .

$$\text{Ta có : } 4n - 5 = 4n - 2 - 3 = 2(2n - 1) - 3$$

$$\text{Đề } 4n - 5 : 2n - 1$$

$$3 : 2n - 1$$

$$2n - 1 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

$2n - 1$	-1	1	-3	3
$n$	0 (TM)	1 (TM)	-1 (TM)	2 (TM)

$$\text{Vậy } n \in \{0; 1; 2\}.$$

**Bài 4:**

a) Cho  $\overline{ababab}$  là số có sáu chữ số, chứng tỏ số  $\overline{ababab}$  là bội của 3

b) Chứng tỏ :  $S = 16^5 + 2^{15}$  chia hết cho 33

**Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018 - 2019****Lời giải**

$$a) \overline{ababab} = \overline{ab} \cdot 10000 + \overline{ab} \cdot 100 + \overline{ab} = 10101 \cdot \overline{ab}$$

Do 10101 chia hết cho 3 nên  $\overline{ababab}$  chia hết cho 3 hay  $\overline{ababab}$  là bội của 3

$$b) \text{ Chứng minh } S = 16^5 + 2^{15} \text{ chia hết cho } 33$$

$$\text{Có } S = 16^5 + 2^{15} = (2^4)^5 + 2^{15} = 2^{20} + 2^{15} = 2^{15} \cdot (2^5 + 1) = 2^{15} \cdot 33$$

Nên  $S$  chia hết cho 33

**Bài 5:** Chứng minh rằng với mọi số nguyên  $n$  ta có  $n^3 - n : 6$

**Trích đề chọn HSG Trực Ninh năm 2017-2018****Lời giải**

$$\text{Ta có } (n^3 - n) = n(n^2 - 1) = n(n^2 - n + n - 1) = n[n(n-1) + (n-1)] = n(n-1)(n+1)$$

Với mọi số nguyên dương  $n$  thì  $(n-1)n(n+1)$  là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp sẽ chia hết cho 2

và 3 mà  $(2,3)=1$  nên  $n(n-1)(n+1) : 6$

**Bài 6:** Cho  $M = (-a+b) - (b+c-a) + (c-a)$ . Trong đó  $b, c \in \mathbb{Z}$  còn  $a$  là một số nguyên âm. Chứng minh rằng biểu thức  $M$  luôn dương

**Trích đề HSG huyện Lâm Thao, năm 2017 - 2018****Lời giải**

$M = -a$  mà  $a$  là số nguyên âm nên  $M$  luôn dương

**Bài 7:** Cho  $\overline{ababab}$  là số có sáu chữ số, chứng tỏ số  $\overline{ababab}$  là bội của 3.

**Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018 - 2019****Lời giải**

$$\overline{ababab} = \overline{ab} \cdot 10000 + \overline{ab} \cdot 100 + \overline{ab} = 10101 \cdot \overline{ab}$$

Do 10101 chia hết cho 3 nên  $\overline{ababab}$  chia hết cho 3 hay  $\overline{ababab}$  là bội của 3.

**Bài 8:** Tìm các giá trị nguyên  $n$  của để phân số  $B = \frac{2n+5}{n+3}$  có giá trị là số nguyên.

**Trích đề KS HSG huyện năm 2021 - 2022****Lời giải**

$$\text{Ta có: } \frac{2n+5}{n+3} = \frac{2(n+3)-1}{n+3} = 2 - \frac{1}{n+3}$$

Để  $B$  có giá trị nguyên thì  $\frac{1}{n+3}$  nguyên

$$1 : (n+3)$$

$n+3$  thuộc ước nguyên của 1

$$n+3 \in \{-1; 1\}$$

$$n \in \{-4; -2\}.$$

Vậy  $n \in \{-4; -2\}$

**Bài 9:** Tìm số nguyên  $n$  để  $A = 2n^2 + n - 6$  chia hết cho  $2n+1$

*Trích đề HSG Trường Nghĩa Đồng huyện Tân Kỳ năm 2021-2022.*

**Lời giải**

Ta có  $A = 2n^2 + n - 6 = n.(2n+1) - 6$

Vì  $A$  chia hết cho  $2n+1$  nên  $6 : 2n+1$

$$2n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$$

Do  $2n+1$  là số lẻ nên ta có bảng sau

$2n+1$	1	-1	3	-3
$2n$	0	-2	2	-4
$n$	0	-1	1	-2

Vậy với  $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$  thì  $A$  chia hết cho  $2n+1$

**Bài 10:** Chứng minh rằng trong hai số:  $5^n + 2023$  và  $5^n + 2024$ , luôn có một số chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên  $n$ .

*Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021 – 2022*

**Lời giải**

Vì  $5 \not\vdots 3$ , nên  $5^n \not\vdots 3$  do đó  $5^n$  nhận được một trong hai dạng sau:

$$5^n = 3k+1 \text{ hoặc } 5^n = 3k+2 (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Nếu } 5^n = 3k+1 \text{ thì } 5^n + 2024 = 3k + 2025 : 3$$

$$\text{Nếu } 5^n = 3k+2 \text{ thì } 5^n + 2023 = 3k + 2025 : 3$$

**Dạng 2: Tìm số thỏa mãn điều kiện chia hết.**

**Trắc nghiệm**

**Bài 1:** Tập hợp các số tự nhiên  $x$  thỏa mãn  $6 : (x-2)$  là:

- A.  $\{1; 2; 3; 6\}$ .      B.  $\{3; 6\}$ .      C.  $\{5; 8\}$ .      D.  $\{3; 4; 5; 8\}$ .

*Trích đề HSG trường THCS Việt Tiên (Việt Yên) năm 2021-2022*

**Đáp án: D**

**Tự luận**

**Bài 1:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia số đó cho 3 dư 1 ; chia cho 4 dư 2 ; chia cho 5 dư 3 ; chia cho 6 dư 4 và chia hết cho 11 .

*Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022*

**Lời giải**

Gọi số phải tìm là  $x$ . Theo bài ra ta có  $x+2$  chia hết cho 3, 4, 5, 6.

nên  $x+2$  là bội chung của 3, 4, 5, 6

Mà BCNN(3; 4; 5; 6) = 60 nên  $x+2 = 60.n$ .

Do đó  $x = 60.n - 2$  ( $n = 1; 2; 3 \dots$ ).

Mặt khác  $x : 11$  nên lần lượt cho  $n = 1; 2; 3 \dots$  Ta thấy  $n = 7$  thì  $x = 418 : 11$

Vậy số nhỏ nhất phải tìm là 418.

**Bài 2:** Tìm các số nguyên  $x$  sao cho  $4x - 3 : x - 2$

*Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019*

**Lời giải**

Ta có:  $4x - 3 = 4x - 8 + 5 = 4(x - 2) + 5$

Vì  $4(x - 2) : x - 2$

Suy ra  $4x - 3 : x - 2$  hay  $5 : x - 2$

Suy ra  $x - 2 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

Suy ra  $x \in \{1; -3; 3; 7\}$

**Bài 3:** Tìm các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn  $2xy + y - 10x = 11$ .

*Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022*

**Lời giải**

Ta có:

$$2xy + y - 10x = 11$$

$$y(2x + 1) - 5(2x + 1) = 6$$

$$(y - 5)(2x + 1) = 6$$

Vì  $x, y \in \mathbb{Z}$  nên  $y - 5, 2x + 1$  là  $U(6)$  mà lẻ nên ta có bảng sau

$2x+1$	-1	1	-3	3
$y-5$	-6	6	-2	2
$x$	-1	0	-2	1
$y$	-1	11	3	7

Vậy cặp thỏa mãn là  $(x, y) \in \{(-1; -1), (0; 11), (-2; 3), (1; 7)\}$

**Bài 4.** Tìm số tự nhiên  $n$  để phân số  $\frac{6n+4}{2n-1}$  có giá trị là một số nguyên.

*Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022*

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \frac{6n+4}{2n-1} = \frac{6n-3+7}{2n-1} = 3n + \frac{7}{2n-1}$$

Vì  $n \in \mathbb{N}$  nên để  $\frac{6n+4}{2n-1}$  nguyên thì  $\frac{7}{2n-1}$  nguyên.

Khi đó  $(2n-1) \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$  nên  $n \in \{-3; 0; 1; 4\}$

Do  $n \in \mathbb{N}$  nên  $n \in \{0; 1; 4\}$

**Bài 5.** Tìm số tự nhiên  $n$  để phân số  $\frac{n+3}{2n-2}$  có giá trị là số nguyên.

*Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019*

**Lời giải**

Để phân số  $\frac{n+3}{2n-2}$  có giá trị là nguyên thì  $n+3 : 2n-2$

$$2(n+3) : 2n-2$$

Suy ra  $(2n+6) - (2n-2) : (2n-2)$

Suy ra  $(2n-2n) + (6+2) : 2n-2$  suy ra  $8 : 2n-2$

Suy ra  $(2n-2) \in \{\pm 2; \pm 4; \pm 8\}$

Sau khi thử các trường hợp ta được  $n = 5$

**Bài 6:** Tìm số nguyên  $n$  để  $A = 2n^2 + n - 6$  chia hết cho  $2n+1$ .

*Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2021-2022*

**Lời giải**

Ta có  $A = 2n^2 + n - 6 = n(2n+1) - 6$

Do  $n(2n+1):2n+1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ , để  $A:2n+1$  thì  $6:2n+1$

Hay  $2n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$ , mà  $2n+1$  là số nguyên lẻ nên  $2n+1$  là các ước lẻ của 6, ta có bảng sau:

$2n + 1$	$-1$	$1$	$-3$	$3$
$n$	$-1$	$0$	$-2$	$1$

Các giá trị của  $n$  tìm được đều thỏa mãn đề bài

Vậy  $n \in \{-1; 0; -2; 1\}$ .

**Bài 7:** Tìm các số nguyên  $n$  sao cho:  $n^2 + 5n + 9$  là bội của  $n+3$ .

*HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014 -2015*

**Lời giải**

Ta có:  $n^2 + 5n + 9 = n^2 + 3n + 2n + 9 = n(n+3) + 2n + 9$

Vì  $n(n+3)$  chia hết cho  $n+3 \Rightarrow 2n+9$  chia hết cho  $n+3$

Vì  $2n+9$  chia hết cho  $n+3$

Vì  $n+3$  chia hết cho  $n+3 \Rightarrow 2(n+3)$  chia hết cho  $n+3$

$2n+6$  chia hết cho  $n+3$

$2n+9 - (2n+6)$  chia hết cho  $2n+3$

$3$  chia hết cho  $2n+3$

$2n+3 \in U(3) = \{1; -1; 3; -3\}$

$2n+3$	$-1$	$1$	$-3$	$3$
$n$	$-2$ (TM)	$-1$ (TM)	$-5$ (TM)	$2$ (TM)

Vậy  $n \in \{-1; -2; 2; -5\}$ .

**Bài 8:** Tìm các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn:  $2xy - x - y = 2$ .

*Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022*

**Lời giải**

Ta có  $2xy - x - y = 2$ .

$4xy - 2x - 2y = 4$

$$2x(2y-1) - 2y + 1 = 5$$

$$2x(2y-1) - (2y-1) = 5$$

$$(2y-1)(2x-1) = 5$$

Ta có bảng sau:

$2x-1$	1	5	-1	-5
$2y-1$	5	1	-5	-1
$x$	1	3	0	-2
$y$	3	1	-2	0

Vậy các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn là  $(1; 3)$ ,  $(3; 1)$ ,  $(-2; 0)$ ,  $(0; -2)$

**Bài 9:** Tìm tất cả các cặp số tự nhiên khác không  $(x, y)$  sao cho  $(2x+5) \cdot (x+2) = 3^y$

*Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022*

**Lời giải**

Vì  $(2x+5)(x+2) = 3^y$  mà 3 nguyên tố nên ta có  $2x+5 = 3^a$ ,  $x+2 = 3^b$  với  $a, b \in \mathbb{N}$  và  $a+b = y$ .

Vì  $x$  là số tự nhiên khác 0 nên  $2x+5 > x+2$  nên  $3^a > 3^b$

Do đó  $3^a : 3^b$

$$(2x+5) : (x+2)$$

Ta có  $2x+5 = 2(x+2) + 1$ ;

Lập luận suy ra  $1 : (x+2)$  vô lý vì  $1 < x+2$

KL: Vậy không có giá trị nào của  $x, y$  thỏa mãn bài toán.

**Bài 10:** Tìm các số nguyên  $a, b$  biết rằng:  $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$

*Trích đề HSG huyện Hoài Nhơn năm 2015-2016*

**Lời giải**

$$\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$$

$$\frac{2a-7}{14} = \frac{1}{b+3}$$

$$(2a-7)(b+3) = 14.$$

Do  $a, b \in \mathbb{Z}$  nên  $2a-7 \in U(14)$

Vì  $2a-7$  lẻ nên  $2a-7 \in \{-7; -1; 1; 7\}$  nên  $a \in \{0; 3; 4; 7\}$ .

Từ đó tính được:  $(a, b) = (0; -5), (3; -17); (4; 11), (7; -1)$

**Bài 11:** Tìm các cặp số tự nhiên  $x, y$  sao cho  $(2x+1)(y-5) = 12$

*Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015-2016*

**Lời giải**

$(2x+1);(y-5)$  là các ước của 12

$$U(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

Vì  $2x+1$  lẻ nên

- $2x+1=1$ . Do đó  $x=0, y=17$
- $2x+1=3$ . Do đó  $x=1, y=9$

**Bài 12:** Tìm tất cả các số nguyên  $n$  để:

a) Phân số  $\frac{n+1}{n-2}$  có giá trị là một số nguyên

b) Phân số  $\frac{12n+1}{30n+2}$  là phân số tối giản

*Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015-2016*

**Lời giải**

a)  $\frac{n+1}{n-2}$  là số nguyên khi  $(n+1):(n-2)$

$$\text{Ta có: } n+1 = (n-2)+3,$$

vậy  $(n+1):(n-2)$  khi  $3:(n-2)$

$$(n-2) \in U(3) = \{-3; -1; 1; 3\} \Rightarrow n \in \{-1; 1; 3; 5\}$$

b) Gọi  $d$  là Ư C của  $12n+1$  và  $30n+2$  ( $d \in \mathbb{N}^*$ )

$$12n+1 : d; 30n+2 : d$$

$$[5(12n+1) - 2(30n+2)] : d$$

$$(60n+5 - 60n-4) : d$$

$$1 : d$$

mà  $d \in \mathbb{N}^*$  nên  $d=1$

Vậy phân số đã cho tối giản.

**Bài 13:** Cho biểu thức :  $P = \frac{2n+1}{n-4}$ .

a) Với điều kiện nào của số nguyên  $n$  thì  $P$  là một phân số. Tính giá trị của  $P$  khi  $n = -203$ .

b) Viết tập hợp  $M$  các số nguyên  $n$  sao cho phân số  $P$  có giá trị là một số nguyên.

*Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-2022*

**Lời giải**

Xét biểu thức  $P = \frac{2n+1}{n-4}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

a) Để  $P$  là phân số thì  $n-4 \neq 0 \Rightarrow n \neq 4$ .

$$\text{Với } n = -203 \text{ thì } P = \frac{2(-203)+1}{-203-4} = \frac{-406+1}{-207} = \frac{-405}{-207} = \frac{45}{23}.$$

b)  $P \in \mathbb{Z}$  nên  $(2n+1):(n-4)$

$$(2n-8+9):(n-4)$$

$$[2(n-4)+9):(n-4)$$

$$9:n-4$$

$$n-4 \in U(9) = \{\pm 1; \pm 3; \pm 9\}.$$

Ta có bảng sau:

$n-4$	1	-1	3	-3	9	-9
$n$	5	3	7	1	13	-5

Vậy  $n \in \{5; 3; 7; 1; 13; -5\}$  thì  $P \in \mathbb{Z}$ .

**Bài 14:** Tìm  $x$  nguyên dương để  $2x-1$  chia hết cho  $x-3$ .

*Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022*

**Lời giải**

$$\text{Vi } (2x-1):(x-3)$$

$$[2(x-3)+5):(x-3)$$

mà  $2(x-3):x-3$  nên  $5:x-3$

$$x-3 \in U(5) \text{ mà } U(5) = \{1; -1; 5; -5\}$$

$$x-3 \in \{1; -1; 5; -5\}$$

$$x \in \{4; 2; 8; -2\}$$

Mà  $x$  nguyên dương nên  $x \in \{4; 2; 8\}$

$$\text{Vậy } x \in \{4; 2; 8\}$$

**Bài 15:** Tìm số tự nhiên  $n$  lớn nhất biết rằng khi chia các số 6355; 1705; 1271 cho  $n$  được các số dư lần lượt là 55; 25 và 1111.

*Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022*

**Lời giải**

Vi khi chia 6355 cho  $n$  được số dư là 55 nên  $(6355-55):n$ .

Vi khi chia 1680 cho  $n$  được số dư là 25 nên  $(1680-25):n$ .

Vi khi chia 1260 cho  $n$  được số dư là 11 nên  $(1260-11):n$

Suy ra  $n$  là Ư C(6300, 1680, 1260)

Mà  $n$  là số tự nhiên lớn nhất nên  $n = \text{Ư CLN}(6300, 1680, 1260)$

Mà  $\text{Ư CLN}(6300, 1680, 1260) = 420$  nên  $n = 420$ .

Vậy số tự nhiên  $n$  cần tìm là 420.

**Bài 16:** Tìm số tự nhiên  $x$  biết:  $24:x$ ;  $36:x$ ;  $160:x$  và  $x$  là số lớn nhất.

*Trích đề HSG Huyện Đông Hưng năm 2021-2022*

**Lời giải**



Ta có số tự nhiên  $x$  biết:  $24 \vdots x$ ;  $36 \vdots x$ ;  $160 \vdots x$  và  $x$  là số lớn nhất

$$x = \text{ƯCLN}(24, 36, 160);$$

Ta có:  $24 = 2^3 \cdot 3$ ;  $36 = 2^2 \cdot 3^2$ ;  $160 = 2^5 \cdot 5$

$$\text{ƯCLN}(24, 36, 160) = 2^2 = 4.$$

Vậy  $x = 4$  (thỏa mãn).

**Bài 17:** Tìm số tự nhiên  $a$  nhỏ nhất sao cho:  $a$  chia cho 5 dư 3,  $a$  chia cho 7 dư 4

*Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019*

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } a = 5q + 3; a = 7p + 4$$

$$\text{Xét } a + 17 = 5q + 20 = 7p + 21$$

$a + 17$  chia hết cho cả 5 và 7

$$a + 17 \in BC(5; 7)$$

Vì  $a$  là số tự nhiên nhỏ nhất nên  $a + 17 = BCNN(5, 7) = 35$

$$a = 18$$

**Bài 18:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng số đó chia cho 9 dư 5, chia cho 7 dư 4 và chia cho 5 dư 3

*Trích đề HSG cấp trường Bá Thước năm 2018-2019*

**Lời giải**

Gọi số cần tìm là  $a$

Ta có  $a$  chia cho 9 dư 5 nên  $a = 9k + 5 (k \in \mathbb{N})$

$$2a = 9k_1 + 1$$

$$(2a - 1) \vdots 9$$

Ta có  $a$  chia cho 7 dư 4 nên  $a = 7m + 4 (m \in \mathbb{N})$

$$2a = 7m_1 + 1$$

$$(2a - 1) \vdots 7$$

Ta có  $a$  chia cho 5 dư 3 nên  $a = 5t + 3 (t \in \mathbb{N})$

$$2a = 5t_1 + 1$$

$$(2a - 1) \vdots 5$$

$(2a - 1) \vdots \{9; 7; 5\}$ , mà  $(9; 7; 5) = 1$  và  $a$  là số tự nhiên nhỏ nhất

$$2a - 1 = BCNN(9, 7, 5) = 315.$$

Vậy  $a = 158$

**Bài 19:** Tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng bằng 84, ƯCLN, của chúng bằng 6

*Trích đề HSG cấp trường vòng 2 THCS Tân Lập năm 2018-2019*

**Lời giải**

Gọi 2 số phải tìm là  $a$  và  $b$  ( $a \leq b$ ) ta có:  $(a, b) = 1$

$$\begin{cases} a = 6a' \\ b = 6b' \end{cases}, (a', b') = 1 (a, b, a'b' \in \mathbb{N}^*)$$

$$a' + b' = 14$$

$a'$	1	3	5
$b'$	13	11	9
$a$	6	18	30
$b$	78	66	54

**Bài 20:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khác 0 biết rằng số đó có 15 ước dương

*Trích đề chọn HSG Tam Dương năm 2016-2017*

**Lời giải**

Vì  $15 = 1.15 = 3.5$  nên số cần tìm có dạng  $a^{14}$  hoặc  $b^2.c^4$  ( $a, b, c$  là các số nguyên tố và  $b \neq c$ )

Th1: Số cần tìm có dạng  $a^{14}$  mà số đó là nhỏ nhất nên  $a = 2$ . Do đó  $2^{14} = 16384$

Th2: Số cần tìm có dạng  $b^2.c^4$  mà số đó nhỏ nhất nên  $c = 2; a = 3$ . Do đó  $3^2.2^4 = 144$

Do  $144 < 16384$  nên số cần tìm là 144

**Bài 21:** Tìm số nguyên  $n$  để phân số  $M = \frac{2n-7}{n-5}$  có giá trị là số nguyên

*Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019*

**Lời giải**

$$M = \frac{2n-7}{n-5} = \frac{2n-10+3}{n-5} = 2 + \frac{3}{n-5} \in \mathbb{Z}$$

$$n-5 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

$$n \in \{2; 4; 6; 8\}$$

$$\text{Vậy } n \in \{2; 4; 6; 8\}$$

**Bài 22:** Tìm các cặp số nguyên  $(x; y)$  biết:  $2x(3y-2) + (3y-2) = -55$

*Trích đề HSG cấp trường Hà Huy Tập năm 2018-2019*

**Lời giải**

$$2x(3y-2) + (3y-2) = -55$$

$$(3y-2)(2x+1) = -55 = -5.11 = 5.(-11)$$

Sau khi thử các trường hợp ta có  $(x; y) = (5; -1)$

**Bài 23:** Cho  $a$  là một số nguyên có dạng  $a = 3b + 7$  ( $b \in \mathbb{Z}$ ). Hỏi  $a$  có thể nhận những giá trị nào trong các giá trị sau:  $a = 11; a = 2002; a = 2003; a = 11570; a = 22789; a = 29563; a = 299537$

*Trích đề HSG cấp trường Bá Thước năm 2018-2019*

**Lời giải**

Số nguyên có dạng  $a = 3b + 7$  ( $b \in \mathbb{Z}$ ) hay  $a$  là số chia 3 dư 1

Vậy  $a$  có thể nhận những giá trị là  $a = 2002; a = 22789; a = 29563$

**Bài 24:** Xét phân số  $A = \frac{n^2 + 4}{n + 5}$ . Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên  $n$  trong khoảng từ 1 đến 2022 sao cho phân số  $A$  chưa tối giản.

- A. 79                      B. 89                      C. 99                      D. 69

*Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022*

**Bài 25:** Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị nguyên của  $x$  để  $x+3$  chia hết cho  $x-2$ . Số tập hợp con của tập hợp  $S$  là:

- A. 4                      B. 16                      C. 15                      D. 5

*Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022*

**Bài 26:** Số nguyên dương nhỏ nhất không phải là ước của tích  $1.2.3.4 \dots 96.97.98$  là

- A. 78                      B. 99                      C. 101                      D. 100

*Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022*

**Bài 27:** Tìm số nguyên  $n$  để  $(n+3):(n+1)$

*Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019*

**Lời giải**

$$(n+3):(n+1)$$

$$\Rightarrow (n+1+2):(n+1)$$

$$\Rightarrow 2:(n+1) \text{ vì } (n+1):(n+1)$$

$$\Rightarrow n+1 \in \{1; 2; -1; -2\}$$

Trường hợp 1:  $n+1=1 \Rightarrow n=0$  (thỏa mãn)

Trường hợp 2:  $n+1=2 \Rightarrow n=1$  (thỏa mãn)

Trường hợp 2:  $n+1=-1 \Rightarrow n=-2$  (thỏa mãn)

Trường hợp 2:  $n+1=-2 \Rightarrow n=-3$  (thỏa mãn)

Vậy  $n \in \{-3; -2; 0; 1\}$  thì  $(n+3):(n+1)$

**Bài 28:** Có ba chồng sách: Văn, Âm nhạc, Toán, mỗi chồng chỉ gồm một loại sách. Mỗi cuốn Văn dày 15 mm, mỗi cuốn Âm nhạc dày 6 mm, mỗi cuốn Toán dày 8 mm. Người ta xếp cho 3 chồng sách cao bằng nhau. Tính chiều cao nhỏ nhất của ba chồng sách đó.

*Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022*

**Lời giải**

Vì chiều cao của ba chồng sách bằng nhau nên ta gọi là  $a$  (mm) (Điều kiện  $a > 0$ )

Theo đề bài ta có:  $a:15; a:6; a:8$  mà  $a$  là số nhỏ nhất

Suy ra  $a = BCNN(15, 6, 8) = 120$  (thỏa mãn)

Vậy chiều cao nhỏ nhất của ba chồng sách đó là 120 mm.

**Bài 29:** Tìm tất cả các cặp số nguyên  $x, y$  sao cho  $xy - 2x + y + 1 = 0$

Trích đề HSG huyện Thạch Thành, năm 2018- 2019

Lời giải

$$xy - 2x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow x(y - 2) + (y - 2) = -3$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(y - 2) = -3 = 1 \cdot (-3) = (-3) \cdot 1$$

Từ đó suy ra  $(x; y) \in \{(0; -1); (-4; 3)\}$

**Bài 30:** Tìm số nguyên  $n$  để phân số  $\frac{4n+5}{2n-1}$  có giá trị là một số nguyên.

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018- 2019

Lời giải

Ta có:  $\frac{4n+5}{2n-1} = \frac{4n-2+7}{2n-1} = n + \frac{7}{2n-1}$

Vì  $n \in \mathbb{Z}$  nên để  $\frac{4n+5}{2n-1}$  nguyên thì  $(2n-1) \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\} \Rightarrow n \in \{-3; 0; 1; 4\}$

**Bài 31:** Tìm số nguyên  $n$  để phân số  $\frac{4n+5}{2n-1}$  có giá trị là một số nguyên

Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019

Lời giải

Ta có:  $\frac{4n+5}{2n-1} = \frac{4n-2+7}{2n-1} = n + \frac{7}{2n-1}$

Vì  $n \in \mathbb{Z}$  nên để  $\frac{4n+5}{2n-1}$  nguyên thì  $(2n-1) \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\} \Rightarrow n \in \{-3; 0; 1; 4\}$

**Bài 32:** Tìm hai số nguyên tố  $x$  và  $y$  sao cho:  $x^2 - 2x + 1 = 6y^2 - 2x + 2$

Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019

Lời giải

Ta có:  $x^2 - 2x + 1 = 6y^2 - 2x + 2$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 6y^2 \Rightarrow 6y^2 = (x-1)(x+1):2, \text{ do } 6y^2:2$$

Mặt khác  $x-1+x+1=2x:2 \Rightarrow (x-1)$  và  $(x+1)$  cùng chẵn hoặc cùng lẻ

Vậy  $(x-1)$  và  $(x+1)$  cùng chẵn  $\Rightarrow (x-1)$  và  $(x+1)$  là hai số chẵn liên tiếp

$$\Rightarrow (x-1)(x+1):8 \Rightarrow 6y^2:8 \Rightarrow 3y^2:4 \Rightarrow y^2:4 \Rightarrow y:2$$

$$\Rightarrow y = 2 \text{ (} y \text{ là số nguyên tố), tìm được: } x = 5$$

**Bài 33:** Số học sinh khối 6 của một trường chưa đến 400 bạn, biết khi xếp hàng 10; hàng 12; 15 đều dư 3 nhưng nếu xếp hàng 11 thì không dư. Tính số học sinh khối 6 của trường đó.

Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019

Lời giải

Gọi số học sinh là  $a$  ( $a \in \mathbb{Z}^+$ )

Ta có:  $a-3 \in BC(10;12;15) \Rightarrow a-3 = 60k (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow a = 60k + 3$

$k$	1	2	3	4	5	6	7
$a$	63	123	183	243	303	363	423

Ta xem với giá trị nào của  $k$  thì  $a < 400$  và  $a:11$

Trong các giá trị trên, chỉ có  $a = 363 < 400$  và  $a:11$

Vậy số học sinh cần tìm là 363 học sinh.

**Bài 34:** Tìm các giá trị nguyên của  $n$  để phân số  $B = \frac{2n+5}{n+3}$  có giá trị là số nguyên.

*Trích đề KS HSG huyện năm 2021 – 2022*

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \frac{2n+5}{n+3} = \frac{2(n+3)-1}{n+3} = 2 - \frac{1}{n+3}$$

Để  $B$  có giá trị nguyên thì  $\frac{1}{n+3}$  nguyên

$$1:(n+3)$$

$n+3$  thuộc ước nguyên của 1

$$n+3 \in \{-1; 1\}$$

$$n \in \{-4; -2\}.$$

$$\text{Vậy } n \in \{-4; -2\}$$

**Bài 35:** Tìm số nguyên  $n$  để  $A = 2n^2 + n - 6$  chia hết cho  $2n+1$

*Trích đề HSG Trường Nghĩa Đồng huyện Tân Kỳ năm 2021-2022.*

**Lời giải**

$$\text{Ta có } A = 2n^2 + n - 6 = n.(2n+1) - 6$$

Vì  $A$  chia hết cho  $2n+1$  nên  $6:2n+1$

$$2n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$$

Do  $2n+1$  là số lẻ nên ta có bảng sau

$2n+1$	1	-1	3	-3
$2n$	0	-2	2	-4
$n$	0	-1	1	-2

Vậy với  $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$  thì  $A$  chia hết cho  $2n+1$

**Bài 36:** Tìm các cặp số nguyên  $x, y$  thỏa mãn:  $3xy + 2x - 5y = 6$

*Trích đề HSG Trường Nghĩa Đồng huyện Tân Kỳ năm 2021-2022.*

**Lời giải**

$$3xy + 2x - 5y = 6 \text{ suy ra } x(3y+2) - 5y = 6$$

$$3x(3y+2) - 15y = 18$$

$$3x(3y+2) - 15y - 10 = 18 - 10$$

$$3x(3y+2) - 5(3y+2) = 8$$

$$(3x-5).(3y+2) = 8$$

$$\text{Nên } 3y+2 \in U(8) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$$

Mà  $3y+2$  là số chia 3 dư 2 nên  $3y+2 \in \{-1; 2; -4; 8\}$

Ta có bảng sau:

$3y+2$	-4	-1	2	8
$3x-5$	-2	-8	4	1
$y$	-2	-1	0	2
$x$	1	-1	3	2

Vậy  $(x;y) \in \{(1;-2); (-1;-1); (3;0); (2;2)\}$

**Bài 37:** Tìm số nguyên  $n$  sao cho  $n-2022$  chia hết cho  $n-2017$ .

*Trích đề HSG Quận Hà Đông năm 2021-2022.*

**Lời giải**

Ta có:  $(n-2022):(n-2017)$  điều kiện  $n \neq 2017$ .

Mà  $(n-2017):(n-2017)$  nên  $(n-2022)-(n-2017):(n-2017)$  (tính chất chia hết của một hiệu).

Suy ra  $-5:(n-2017)$  nên  $(n-2017) \in U(-5) = \{-1; 1; -5; 5\}$

Ta có bảng sau:

$n-2017$	-1	1	-5	5
$n$	2016	2018	2012	2022
	thỏa mãn	thỏa mãn	thỏa mãn	thỏa mãn

Vậy với  $n \in \{2016; 2018; 2012; 2022\}$  thì  $n-2022$  chia hết cho  $n-2017$ .

**Bài 38:** Tìm hai số nguyên, biết tích của chúng lớn hơn ba lần tổng của chúng là 1

*Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021-2022*

**Lời giải**

Gọi 2 số đó là  $x, y$  ( $x; y \in \mathbb{Z}$ )

Ta có  $xy - 3(x+y) = 1$

$xy - 3x - 3y = 1$

$xy - 3x - 3y + 9 = 10$

$(xy - 3x) - (3y - 9) = 10$

$x(y - 3) - 3(y - 3) = 10$

$(x - 3)(y - 3) = 10$ . Vì  $x; y \in \mathbb{Z}$ , vai trò  $x, y$  như nhau. Giả sử  $x > y$ .

Ta có bảng

$x-3$	5	10	-2	-1
$y-3$	2	1	-5	-10
$x$	8	13	1	2
$y$	5	4	-2	-7

Vậy  $(x; y) \in \{(8;5); (13;4); (1;-2); (2;-7)\}$ . Có 4 cặp số nguyên  $x, y$  thỏa mãn

**Bài 39:** Tìm  $x, y$  nguyên biết:  $2x(3y-2) + (3y-2) = -55$

*Trích đề ks HSG Trường Thiệu Quang huyện Kim Sơn năm 2021-2022*

**Lời giải**

Tìm  $x, y$  nguyên biết:  $2x(3y-2) + (3y-2) = -55$

Ta có

$$(2x-1)(3y-2) = -55$$

$$\text{Suy ra } 2x+1 = \frac{-55}{3y-2} \quad (1)$$

Để  $x$  nguyên thì  $3x-2 \in U(-55) = \{1; 5; 11; 55; -1; -5; -11; -55\}$

$+3y-2=1$  suy ra  $3y=3$  nên  $y=1$ , thay vào (1) ta được  $x=28$

$+3y-2=5$  suy ra  $3y=7$  nên  $y=\frac{7}{3}$ , (Loại)

$+3y-2=11$  suy ra  $3y=13$  nên  $y=\frac{13}{3}$ , (Loại)

$+3y-2=55$  suy ra  $3y=57$  nên  $y=19$ , thay vào (1) ta được  $x=-1$ .

$+3y-2=-1$  suy ra  $3y=1$  nên  $y=\frac{1}{3}$ , (loại)

$+3y-2=-5$  suy ra  $3y=-3$  nên  $y=-1$ , thay vào (1) ta được  $x=5$

$+3y-2=-11$  suy ra  $3y=-9$  nên  $y=-3$ , thay vào (1) ta được  $x=2$

$+3y-2=-55$  suy ra  $3y=-53$  nên  $y=\frac{-53}{3}$ , (loại)

Vậy ta có 4 cặp số  $x, y$  nguyên thoả mãn là

$$(x, y) \in \{(28; 1); (-1; 19); (5; -1); (2; 3)\}$$

**Bài 40:** Tìm các số nguyên  $a, b$  biết rằng:  $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$ .

*Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022*

**Lời giải**

$$\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3} \Rightarrow \frac{2a-7}{14} = \frac{1}{b+3} \Rightarrow (2a-7)(b+3) = 14$$

Do  $a, b \in \mathbb{Z}$  nên  $2a-7 \in U(14)$

Vì  $2a-7$  lẻ nên  $2a-7 \in \{\pm 1; \pm 7\} \Rightarrow a \in \{0; 3; 4; 7\}$

Vậy  $(a; b) = \{(0; -5); (3; -17); (4; 11); (7; -1)\}$

**Bài 41:** Tìm tất cả các cặp số nguyên sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

*Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019*

**Lời giải**

$M = -a$  Gọi hai số nguyên đó là  $x$  và  $y$

Theo bài ra ta có:  $xy = x + y$

$$\Rightarrow xy - x - y + 1 = 1$$

$$\Rightarrow (x-1)(y-1) = 1$$

$\Rightarrow x-1, y-1$  là các ước của 1

$\Rightarrow x-1 = y-1 = 1$  hoặc  $x-1 = y-1 = -1$

$\Rightarrow x = y = 2$  hoặc  $x = y = 0$

**Bài 42:** Tìm số nguyên  $x$ , biết:

$$a) 2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7$$

$$b) \frac{x}{6} + \frac{x}{10} + \frac{x}{15} + \frac{x}{21} + \frac{x}{28} + \frac{x}{36} + \frac{x}{45} + \frac{x}{55} + \frac{x}{66} + \frac{x}{78} = \frac{220}{39}$$

*Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018- 2019*

**Lời giải**

$$a) 2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7 \Leftrightarrow 2016 : [25 - (3x + 2)] = 63$$

$$\Leftrightarrow 25 - (3x + 2) = 2016 : 63 \Rightarrow 25 - (3x + 2) = 32$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2 = -7 \Leftrightarrow 3x = -9 \Leftrightarrow x = -3$$

$$b) \frac{x}{6} + \frac{x}{10} + \frac{x}{15} + \frac{x}{21} + \frac{x}{28} + \frac{x}{36} + \frac{x}{45} + \frac{x}{55} + \frac{x}{66} + \frac{x}{78} = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{36} + \frac{1}{45} + \frac{1}{55} + \frac{1}{66} + \frac{1}{78} \right) = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110} + \frac{1}{132} + \frac{1}{156} \right) = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \left( \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 13} \right) = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} \right) = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{13} \right) = \frac{220}{39} \Rightarrow x = 11$$

**Bài 43:** Tìm các cặp số nguyên  $(x; y)$  biết:  $\frac{x}{5} + 1 = \frac{1}{y-1}$

*Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019*

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \frac{x}{5} + 1 = \frac{1}{y-1} \Leftrightarrow \frac{x+5}{5} = \frac{1}{y-1} \Leftrightarrow (x+5)(y-1) = 5 \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow (x+5)(y-1) = 5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = -5 \cdot (-1) = (-1) \cdot (-5)$$

Thay hết tất cả các trường hợp ta có:

$$(x; y) = \{(0; 2); (-4; 6); (-10; 0); (-6; -4)\}$$



## B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

(copy đề bài ở các dạng trên để làm phiếu phô tô cho HS)

### I. Ước và bội.

#### Dạng 1: Chứng minh sự chia hết.

**Bài 1:** Chứng tỏ rằng  $a^2 + 3a + 1$  không thể chia hết cho 2 với  $a$  là số nguyên.

*Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022*

**Bài 2:** Chứng tỏ  $4x + 3y$  chia hết cho 7 khi  $2x + 5y$  chia hết cho 7.

*Trích đề HSG cấp huyện năm 2018-2019*

**Bài 3:** Tìm số nguyên  $n$  sao cho  $4n - 5$  chia hết cho  $2n - 1$ .

*Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015-2016*

#### Bài 4:

a) Cho  $\overline{ababab}$  là số có sáu chữ số, chứng tỏ số  $\overline{ababab}$  là bội của 3

c) Chứng tỏ :  $S = 16^5 + 2^{15}$  chia hết cho 33

*Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018 - 2019*

**Bài 5:** Chứng minh rằng với mọi số nguyên  $n$  ta có  $n^3 - n : 6$

*Trích đề chọn HSG Trục Ninh năm 2017-2018*

**Bài 6:** Cho  $M = (-a + b) - (b + c - a) + (c - a)$ . Trong đó  $b, c \in \mathbb{Z}$  còn  $a$  là một số nguyên âm. Chứng minh rằng biểu thức  $M$  luôn dương

*Trích đề HSG huyện Lâm Thao, năm 2017 - 2018*

**Bài 7:** Cho  $\overline{ababab}$  là số có sáu chữ số, chứng tỏ số  $\overline{ababab}$  là bội của 3.

*Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018 - 2019*

**Bài 8:** Tìm các giá trị nguyên  $n$  của để phân số  $B = \frac{2n+5}{n+3}$  có giá trị là số nguyên.

*Trích đề KS HSG huyện năm 2021 - 2022*

**Bài 9:** Tìm số nguyên  $n$  để  $A = 2n^2 + n - 6$  chia hết cho  $2n + 1$

*Trích đề HSG Trường Nghĩa Đồng huyện Tân Kỳ năm 2021-2022.*

**Bài 10:** Chứng minh rằng trong hai số:  $5^n + 2023$  và  $5^n + 2024$ , luôn có một số chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên  $n$ .

*Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021 - 2022*

#### Dạng 2: Tìm số thỏa mãn điều kiện chia hết.

#### Trắc nghiệm

**Bài 1:** Tập hợp các số tự nhiên  $x$  thỏa mãn  $6 : (x - 2)$  là:

A.  $\{1; 2; 3; 6\}$ .

B.  $\{3; 6\}$ .

C.  $\{5; 8\}$ .

D.  $\{3; 4; 5; 8\}$ .

*Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021-2022*

#### Tự luận

**Bài 1:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia số đó cho 3 dư 1 ; chia cho 4 dư 2 ; chia cho 5 dư 3 ; chia cho 6 dư 4 và chia hết cho 11 .

*Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022*

**Bài 2:** Tìm các số nguyên  $x$  sao cho  $4x-3 \vdots x-2$

*Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019*

**Bài 3:** Tìm các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn  $2xy + y - 10x = 11$  .

*Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022*

Vậy cặp thỏa mãn là  $(x; y) \in \{(-1; -1), (0; 11), (-2; 3), (1; 7)\}$

**Bài 4.** Tìm số tự nhiên  $n$  để phân số  $\frac{6n+4}{2n-1}$  có giá trị là một số nguyên.

*Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022*

**Bài 5.** Tìm số tự nhiên  $n$  để phân số  $\frac{n+3}{2n-2}$  có giá trị là số nguyên.

*Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019*

**Bài 6:** Tìm số nguyên  $n$  để  $A = 2n^2 + n - 6$  chia hết cho  $2n+1$ .

*Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2021-2022*

**Bài 7:** Tìm các số nguyên  $n$  sao cho:  $n^2 + 5n + 9$  là bội của  $n+3$ .

*HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014 -2015*

**Bài 8:** Tìm các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn :  $2xy - x - y = 2$  .

*Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022*

**Bài 9:** Tìm tất cả các cặp số tự nhiên khác không  $(x, y)$  sao cho  $(2x+5) \cdot (x+2) = 3^y$

*Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022*

**Bài 10:** Tìm các số nguyên  $a, b$  biết rằng:  $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$

*Trích đề HSG huyện Hoài Nhơn năm 2015-2016*

**Bài 11:** Tìm các cặp số tự nhiên  $x, y$  sao cho  $(2x+1)(y-5) = 12$

*Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015-2016*

**Bài 12:** Tìm tất cả các số nguyên  $n$  để:

a) Phân số  $\frac{n+1}{n-2}$  có giá trị là một số nguyên

b) Phân số  $\frac{12n+1}{30n+2}$  là phân số tối giản

*Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015-2016*

**Bài 13:** Cho biểu thức :  $P = \frac{2n+1}{n-4}$  .

a) Với điều kiện nào của số nguyên  $n$  thì  $P$  là một phân số. Tính giá trị của  $P$  khi  $n = -203$  .

b) Viết tập hợp  $M$  các số nguyên  $n$  sao cho phân số  $P$  có giá trị là một số nguyên.

*Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-2022*

**Bài 14:** Tìm  $x$  nguyên dương để  $2x-1$  chia hết cho  $x-3$ .

*Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022*

**Bài 15:** Tìm số tự nhiên  $n$  lớn nhất biết rằng khi chia các số 6355;1705;1271 cho  $n$  được các số dư lần lượt là 55;25 và 1111.

*Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022*

**Bài 16:** Tìm số tự nhiên  $x$  biết:  $24 \vdots x$ ;  $36 \vdots x$ ;  $160 \vdots x$  và  $x$  là số lớn nhất.

*Trích đề HSG Huyện Đông Hưng năm 2021-2022*

**Bài 17:** Tìm số tự nhiên  $a$  nhỏ nhất sao cho:  $a$  chia cho 5 dư 3,  $a$  chia cho 7 dư 4

*Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019*

**Bài 18:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng số đó chia cho 9 dư 5, chia cho 7 dư 4 và chia cho 5 dư 3

*Trích đề HSG cấp trường Bá Thước năm 2018-2019*

**Bài 19:** Tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng bằng 84, Ư CLN, của chúng bằng 6

*Trích đề HSG cấp trường vòng 2 THCS Tân Lập năm 2018-2019*

**Bài 20:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khác 0 biết rằng số đó có 15 ước dương

*Trích đề chọn HSG Tam Dương năm 2016-2017*

**Bài 21:** Tìm số nguyên  $n$  để phân số  $M = \frac{2n-7}{n-5}$  có giá trị là số nguyên

*Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019*

**Bài 22:** Tìm các cặp số nguyên  $(x; y)$  biết:  $2x(3y-2) + (3y-2) = -55$

*Trích đề HSG cấp trường Hà Huy Tập năm 2018-2019*

**Bài 23:** Cho  $a$  là một số nguyên có dạng  $a = 3b + 7 (b \in \mathbb{Z})$ . Hỏi  $a$  có thể nhận những giá trị nào trong các giá trị sau:  $a = 11; a = 2002; a = 2003; a = 11570; a = 22789; a = 29563; a = 299537$

*Trích đề HSG cấp trường Bá Thước năm 2018-2019*

**Bài 24:** Xét phân số  $A = \frac{n^2+4}{n+5}$ . Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên  $n$  trong khoảng từ 1 đến 2022 sao cho phân số  $A$  chưa tối giản.

B. 79

B. 89

C. 99

D. 69

*Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022*

**Bài 25:** Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị nguyên của  $x$  để  $x+3$  chia hết cho  $x-2$ . Số tập hợp con của tập hợp  $S$  là:

B. 4

B. 16

C. 15

D. 5

*Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022*

**Bài 26:** Số nguyên dương nhỏ nhất không phải là ước của tích  $1.2.3.4 \dots .96.97.98$  là

B. 78

B. 99

C. 101

D. 100

*Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2021 - 2022*

**Bài 27:** Tìm số nguyên  $n$  để  $(n+3) \vdots (n+1)$

*Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019*

**Bài 28:** Có ba chồng sách: Văn, Âm nhạc, Toán, mỗi chồng chỉ gồm một loại sách. Mỗi cuốn Văn dày 15 mm, mỗi cuốn Âm nhạc dày 6 mm, mỗi cuốn Toán dày 8 mm. Người ta xếp cho 3 chồng sách cao bằng nhau. Tính chiều cao nhỏ nhất của ba chồng sách đó.

*Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022*

**Bài 29:** Tìm tất cả các cặp số nguyên  $x, y$  sao cho  $xy - 2x + y + 1 = 0$

*Trích đề HSG huyện Thạch Thành, năm 2018- 2019*

**Bài 30:** Tìm số nguyên  $n$  để phân số  $\frac{4n+5}{2n-1}$  có giá trị là một số nguyên.

*Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018- 2019*

**Bài 31:** Tìm số nguyên  $n$  để phân số  $\frac{4n+5}{2n-1}$  có giá trị là một số nguyên

*Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019*

**Bài 32:** Tìm hai số nguyên tố  $x$  và  $y$  sao cho:  $x^2 - 2x + 1 = 6y^2 - 2x + 2$

*Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019*

**Bài 33:** Số học sinh khối 6 của một trường chưa đến 400 bạn, biết khi xếp hàng 10; hàng 12; 15 đều dư 3 nhưng nếu xếp hàng 11 thì không dư. Tính số học sinh khối 6 của trường đó.

*Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019*

**Bài 34:** Tìm các giá trị nguyên của  $n$  để phân số  $B = \frac{2n+5}{n+3}$  có giá trị là số nguyên.

*Trích đề KS HSG huyện năm 2021 – 2022*

**Bài 35:** Tìm số nguyên  $n$  để  $A = 2n^2 + n - 6$  chia hết cho  $2n + 1$

*Trích đề HSG Trường Nghĩa Đồng huyện Tân Kỳ năm 2021-2022.*

**Bài 36:** Tìm các cặp số nguyên  $x, y$  thỏa mãn:  $3xy + 2x - 5y = 6$

*Trích đề HSG Trường Nghĩa Đồng huyện Tân Kỳ năm 2021-2022.*

**Bài 37:** Tìm số nguyên  $n$  sao cho  $n - 2022$  chia hết cho  $n - 2017$ .

*Trích đề HSG Quận Hà Đông năm 2021-2022.*

**Bài 38:** Tìm hai số nguyên, biết tích của chúng lớn hơn ba lần tổng của chúng là 1

*Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021-2022*

**Bài 39:** Tìm  $x, y$  nguyên biết :  $2x(3y - 2) + (3y - 2) = -55$

*Trích đề ks HSG Trường Thiện Quang huyện Kim Sơn năm 2021-2022*

**Bài 40:** Tìm các số nguyên  $a, b$  biết rằng:  $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$ .

*Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022*

**Bài 41:** Tìm tất cả các cặp số nguyên sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

*Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019*

**Bài 42:** Tìm số nguyên  $x$ , biết:

a)  $2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7$

b)  $\frac{x}{6} + \frac{x}{10} + \frac{x}{15} + \frac{x}{21} + \frac{x}{28} + \frac{x}{36} + \frac{x}{45} + \frac{x}{55} + \frac{x}{66} + \frac{x}{78} = \frac{220}{39}$



*Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018- 2019*

**Bài 43:** Tìm các cặp số nguyên  $(x; y)$  biết:  $\frac{x}{5} + 1 = \frac{1}{y-1}$

*Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019*

**C. SỬU TÂM CÁC BÀI TRONG CÁC ĐỀ CỦA NHỮNG NĂM TRƯỚC ĐÓ**

(Phần này lấy các câu từ những năm trước, trước năm 2020-2021, tối thiểu 10 bài)

**Bài 1:** Cho  $A = \frac{3n-5}{n+4}$ , tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để  $A$  có giá trị nguyên.*Trích đề HSG huyện Tĩnh Gia năm 2018 - 2019***Lời giải**

Ta có

$$A = \frac{3n-5}{n+4} = 3 + \frac{-17}{n+4}$$

 $A$  có giá trị nguyên khi và chỉ khi  $(n+4) \in U(-17) = \{\pm 1; \pm 17\}$ .

Ta có bảng sau:

$n+4$	-17	-1	1	17
$n$	-21	-5	-3	13

Vậy  $n \in \{-21; -5; -3; 13\}$  thì  $A$  có giá trị nguyên.**Bài 2:** Tìm các số nguyên  $n$  sao cho  $n^2 + 5n + 9$  là bội của  $n + 3$ .*Trích đề HSG huyện Hưng Hà (Thái Bình) năm 2018 - 2019***Lời giải**Ta có  $n^2 + 5n + 9 = n(n+3) + 2n + 1 = n(n+3) + 2(n+3) - 5 = (n+3).(n+2) - 5 : n+3$ Vì  $(n+3).(n+2) : n+3$  nên  $5 : n+3$ Suy ra  $n+3 \in U(5) = \{-5; -1; 1; 5\}$ hay  $n \in \{-8; -4; -2; 2\}$ Vậy  $n \in \{-8; -4; -2; 2\}$ .**Bài 3:** Tìm  $x, y$  nguyên biết  $\frac{2}{y} - \frac{1}{x} = \frac{8}{xy} + 1$ .**Lời giải**Từ  $\frac{2}{y} - \frac{1}{x} = \frac{8}{xy} + 1$ .Suy ra  $\frac{2x-y}{x.y} = \frac{8+xy}{x.y}$ 

$$2x - y = 8 + xy$$

$$xy - 2x + y = -8$$

$$x.(y-2) + y - 2 = -10$$

$$(y-2).(x+1) = -10.$$

Ta có bảng sau:

$x+1$	-10	-5	-2	-1	1	2	5	10
$x$	-11	-6	-3	-2	0	1	4	9

$y-2$	1	2	5	10	-10	-5	-2	-1
$y$	3	4	7	12	-8	-3	0	1

Vậy các cặp số  $(x; y)$  nguyên thoả mãn là  $(-11; 3), (-6; 4), (-3; 7), (-2; 12), (0; -8), (1; -3), (4; 0), (9; 1)$

**Bài 4:** Tìm số nguyên  $x, y$  biết  $6x^2 + 5y^2 = 74$ .

**Lời giải**

Từ  $6x^2 + 5y^2 = 74$

Suy ra  $6x^2 \leq 74$  do đó  $x^2 \leq \frac{74}{6}$  mà  $x \in \mathbb{Z}$  nên  $x^2 \in \{0; 1; 4; 9\}$ .

TH1:  $x^2 = 0$  suy ra  $5y^2 = 74$  (loại)

TH2:  $x^2 = 1$  suy ra  $6 + 5y^2 = 74$  hay  $5y^2 = 68$  (loại)

TH3:  $x^2 = 4$  suy ra  $6 \cdot 4 + 5y^2 = 74$  nên  $5y^2 = 50$  hay  $y^2 = 10$  (loại)

TH4:  $x^2 = 9$  ( $x = \pm 3$ ) suy ra  $6 \cdot 9 + 5y^2 = 74$  nên  $5y^2 = 20$  hay  $y^2 = 4$  suy ra  $y = \pm 2$ .

Vậy các cặp số  $(x; y)$  nguyên thoả mãn là  $(-3; -2), (-3; 2), (3; -2), (3; 2)$ .

**Bài 5:** Tìm các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn  $2x^2 + 3y^2 = 77$ .

**Lời giải**

Từ  $2x^2 + 3y^2 = 77$

Suy ra  $0 \leq 3y^2 \leq 77$  do đó  $0 \leq y^2 \leq 25$  mà  $y \in \mathbb{Z}$  và  $y^2$  là số chính phương nên  $y^2 \in \{1; 9; 25\}$ .

TH1:  $y^2 = 1$  suy ra  $2x^2 + 3 = 77$  nên  $2x^2 = 74$  hay  $x^2 = 37$  (loại).

TH2:  $y^2 = 9$  ( $y = \pm 3$ ) suy ra  $2x^2 + 3 \cdot 9 = 77$  nên  $2x^2 = 50$  hay  $x^2 = 25$  suy ra  $x = \pm 5$ .

TH3:  $y^2 = 25$  ( $y = \pm 5$ ) suy ra  $2x^2 + 3 \cdot 25 = 77$  nên  $2x^2 = 2$  hay  $x^2 = 1$  suy ra  $x = \pm 1$ .

Vậy các cặp số  $(x; y)$  nguyên thoả mãn là

$(-5; -3), (-5; 3), (5; -3), (5; 3), (-1; -5), (-1; 5), (1; -5), (1; 5)$ .

**Bài 6:** Tìm các giá trị  $x, y$  nguyên thoả mãn:

a)  $x(y+2) = -8$

b)  $x(y-3) = -12$

c)  $(x+1)y = 3$

**Lời giải**

a) Vì  $x, y$  là các số nguyên nên  $x, (y+2)$  cũng là các số nguyên

Mà  $x(y+2) = -8$ . Nên  $x, (y+2) \in U(-8) = \{1; 2; 4; 8; -1; -2; -4; -8\}$

Ta có bảng sau:

$x$	1	2	4	8	-1	-2	-4	-8
$y+2$	-8	-4	-2	-1	8	4	2	1
$y$	-10	-6	-4	-3	6	2	0	-1

Vậy các cặp số  $(x; y)$  nguyên thoả mãn là

$(1; -10), (2; -6), (4; -4), (8; -3), (-1; 6), (-2; 2), (-4; 0), (-8; -1)$ .

b) Vì  $x, y$  là các số nguyên nên  $x, (y-3)$  cũng là các số nguyên

Mà  $x(y-3) = -12$  nên  $x, (y-3) \in U(-12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12; -1; -2; -3; -4; -6; -12\}$

Ta có bảng sau:

$x$	1	2	3	4	6	12	-1	-2	-3	-4	-6	-12
$y-3$	-12	-6	-4	-3	-2	-1	12	6	4	3	2	1
$y$	-9	-3	-1	0	1	2	15	9	7	6	5	4

Vậy các cặp số  $(x; y)$  nguyên thoả mãn là

$$(1; -9), (2; -3), (3; -1), (4; 0), (6; 1), (12; 2), (-1; 15), (-2; 9), (-3; 7), (-4; 6), (-6; 5), (-12; 4).$$

c) Vì  $x, y$  là các số nguyên nên  $(x+1), y$  cũng là các số nguyên

Mà  $(x+1)y = 3$  nên  $(x+1), y \in U(3) = \{1; 3; -1; -3\}$ .

Ta có bảng sau:

$x+1$	1	3	-1	-3
$x$	0	2	-2	-4
$y$	3	1	-3	-1

Vậy các cặp số  $(x; y)$  nguyên thoả mãn là  $(0; 3), (2; 1), (-2; -3), (-4; -1)$ .

**Bài 7:** Tìm các giá trị  $x, y$  nguyên thoả mãn  $(x+1)(y-3) = 3$

**Lời giải**

Vì  $x, y$  là các số nguyên nên  $(x+1), (y-3)$  cũng là các số nguyên. Mà  $(x+1)(y-3) = 3$  nên  $(x+1), (y-3) \in U(3) = \{1; 3; -1; -3\}$ . Ta có bảng sau:

$x+1$	1	3	-1	-3
$x$	0	2	-2	-4
$y-3$	3	1	-3	-1
$y$	6	4	0	2

Vậy các cặp số nguyên  $(x; y)$  cần tìm là  $(0; 6), (2; 4), (-2; 0), (-4; 2)$ .

**Bài 8:** Tìm các giá trị  $x, y$  nguyên thoả mãn  $(2x+1)(y-5) = 12$

**Lời giải**

Vì  $x, y$  là các số nguyên nên  $(2x+1), (y-5)$  cũng là các số nguyên.

Mà  $(2x+1)(y-5) = 12$  nên  $(2x+1), (y-5) \in U(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12; -1; -2; -3; -4; -6; -12\}$

Vì  $2x+1$  là số lẻ nên ta có bảng sau:

$2x+1$	1	3	-1	-3
$x$	0	1	-1	-2
$y-5$	12	4	-12	-4
$y$	17	9	-7	1



Vậy các cặp số nguyên  $(x; y)$  cần tìm là  $(0; 17), (1; 9), (-1; -7), (-2; 1)$ .

**Bài 9:** Tìm  $x, y$  nguyên thỏa mãn:  $(x-3) = y(x+2)$  với  $x \neq -2$ .

**Lời giải**

$$\text{Vì } (x-3) = y(x+2) \quad (1)$$

$$\text{nên } x-3 : x+2$$

$$\text{Suy ra } x+2-5 : x+2$$

Mà  $x+2 : x+2$  với mọi  $x$  nguyên,  $x \neq -2$ .

$$\text{Nên } 5 : x+2 \text{ suy ra } x+2 \in U(5) = \{1; 5; -1; -5\}.$$

$$\text{suy ra } x \in \{-1; 3; -3; -7\}.$$

Với  $x = -1$  thay vào (1) ta được  $-4 = y \cdot 1$  suy ra  $y = -4$ .

Với  $x = 3$  thay vào (1) ta được  $0 = y \cdot 5$  suy ra  $y = 0$ .

Với  $x = -3$  thay vào (1) ta được  $-6 = y \cdot (-1)$  suy ra  $y = 6$ .

Với  $x = -7$  thay vào (1) ta được  $-10 = y \cdot (-5)$  suy ra  $y = 2$ .

Vậy các cặp số nguyên  $(x; y)$  cần tìm là  $(-1; -4), (3; 0), (-3; 6), (-7; 2)$ .

**Bài 10:** Tìm các số nguyên  $x$ , biết:

a)  $3x+2 : x-1$

b)  $2x-5 : x-1$

c)  $2x+3 : x+1$

**Lời giải**

a)  $3x+2 : x-1$

$$\text{Suy ra } 3x-3+5 : x-1$$

$$\text{hay } 3(x-1)+5 : x-1$$

Vì  $3(x-1) : x-1$  với mọi  $x \neq 1$

$$\text{nên } 5 : x-1 \text{ suy ra } x-1 \in U(5) = \{1; 5; -1; -5\}.$$

$$\text{suy ra } x \in \{2; 6; 0; -4\}.$$

b)  $2x-5 : x-1$

$$\text{Suy ra } 2x-2-3 : x-1$$

$$\text{hay } 2(x-1)-3 : x-1$$

Vì  $2(x-1) : x-1$  với mọi  $x \neq 1$

$$\text{nên } 3 : x-1 \text{ suy ra } x-1 \in U(3) = \{1; 3; -1; -3\}.$$

$$\text{suy ra } x \in \{2; 4; 0; -2\}.$$

c)  $2x+3 : x+1$

$$\text{Suy ra } 2x+2+1 : x+1$$

$$\text{hay } 2(x+1)+1 : x+1$$

Vì  $2(x+1) : x+1$  với mọi  $x \neq -1$ .

$$\text{nên } 1 : x+1 \text{ suy ra } x+1 \in U(1) = \{-1; 1\}.$$

$$\text{suy ra } x \in \{0; -2\}.$$

**Bài 11:** Tìm các số nguyên  $x$ , biết

a)  $2x+5 : 2x-1$

b)  $4x-5 : 2x-1$

c)  $10-2x : x-2$

**Lời giải**

$$a) 2x+5:2x-1 \Rightarrow 2x-1+6:2x-1$$

Vì  $2x-1:2x-1$  với mọi  $x$  nguyên

$$\text{Nên } 6:2x-1 \Rightarrow 2x-1 \in U(6) = \{1; 2; 3; 6; -1; -2; -3; -6\}$$

$$\Rightarrow 2x \in \{2; 3; 4; 7; 0; -1; -2; -5\}$$

$$\Rightarrow x \in \left\{1; \frac{3}{2}; 2; \frac{7}{2}; 0; \frac{-1}{2}; -1; \frac{-5}{2}\right\}.$$

Vì  $x \in \mathbb{Z}$  nên  $x \in \{1; 2; 0; -1\}$ .

$$b) \quad 4x-5:2x-1$$

$$\Rightarrow 4x-2-3:2-1$$

$$\Rightarrow 2(2x-1)-3:2x-1$$

Vì  $2(2x-1):2x-1$  với mọi  $x$  nguyên

$$\text{Nên } 3:2x-1 \Rightarrow 2x-1 \in U(3) = \{1; 3; -1; -3\}$$

$$\Rightarrow 2x \in \{2; 4; 0; -2\}$$

$$\Rightarrow x \in \{1; 2; 0; -1\}.$$

Vậy  $x \in \{1; 2; 0; -1\}$ .

**Bài 12:** Tìm các số nguyên  $x$ , biết  $10-2x:x-2$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } 10-2x:x-2$$

$$\Rightarrow 2x-10:x-2$$

$$\Rightarrow 2x-4-6:x-2$$

$$\Rightarrow 2(x-2)-6:x-2$$

Vì  $2(x-2):x-2$  với mọi  $x$  nguyên khác 2.

$$\text{Nên } 6:x-2 \Rightarrow x-2 \in U(6) = \{1; 2; 3; 6; -1; -2; -3; -6\}$$

$$\Rightarrow x \in \{3; 4; 5; 8; 1; 0; -1; -4\}$$

Vậy  $x \in \{3; 4; 5; 8; 1; 0; -1; -4\}$ .

**Bài 13:** Tìm số nguyên  $n$  với  $n \neq 2$  để phân số  $A = \frac{n+1}{n-2}$  có giá trị là số nguyên.

**Lời giải**

Để phân số  $A$  có giá trị là một số nguyên thì  $n+1:n-2$

$$\Rightarrow n-2+3:n-2$$

Vì  $n-2:n-2$  với mọi số nguyên  $n$  khác 2.

$$\text{Nên } 3:n-2 \Rightarrow n-2 \in U(3) = \{1; 3; -1; -3\}$$

$$\Rightarrow n \in \{3; 5; 1; -1\}.$$

**Bài 14:** Tìm số nguyên  $n$  với  $n \neq 1$  để phân số  $A = \frac{n+2}{n-1}$  có giá trị là số nguyên.

**Lời giải**

Để phân số  $A$  có giá trị là một số nguyên thì  $n+2:n-1 \Rightarrow n-1+3:n-1$

Vì  $n-1:n-1$  với mọi số nguyên  $n$  khác 1

Nên  $3: n-1 \Rightarrow n-1 \in U(3) = \{1; 3; -1; -3\}$

$\Rightarrow n \in \{2; 4; 0; -2\}$ .

**Bài 15:** Tìm  $x, y$  nguyên thỏa mãn  $xy - 3x = -19$ .

**Lời giải**

$$xy - 3x = -19$$

$$\Rightarrow x(y-3) = -19.$$

Vì  $x, y$  là các số nguyên nên  $x, (y-3)$  cũng là các số nguyên

Nên  $x, (y-3) \in U(-19) = \{1; 19; -1; -19\}$

Ta có bảng sau:

$x$	1	19	-1	-19
$y-3$	-19	-1	19	1
$y$	-16	2	22	4

Vậy các cặp số nguyên  $(x; y)$  cần tìm là  $(1; -16), (19; 2), (-1; 22), (-19; 4)$ .

**Bài 16:** Tìm  $x, y$  nguyên thỏa mãn  $2x + xy - y = 9$ .

**Lời giải**

Ta có  $2x + xy - y = 9$

$$\Rightarrow x(y+2) - y - 2 + 2 = 9$$

$$\Rightarrow x(y+2) - (y+2) = 7$$

$$\Rightarrow (y+2)(x-1) = 7.$$

Vì là  $x, y$  các số nguyên nên  $(x-1), (y+2)$  cũng là các số nguyên.

Nên  $(x-1), (y+2) \in U(7) = \{1; 7; -1; -7\}$ .

Ta có bảng sau:

$x-1$	1	7	-1	-7
$x$	2	8	0	-6
$y+2$	7	1	-7	-1
$y$	5	-1	-9	-3

Vậy các cặp số nguyên  $(x; y)$  cần tìm là  $(2; 5), (8; -1), (0; -9), (-6; -3)$ .

**Bài 17:** Tìm  $x, y$  nguyên thỏa mãn  $(x+6) = y(x-1)$  với  $x \neq 1$ .

**Lời giải**

$$\text{Vì } y(x-1) = x+6 \quad (1)$$

$$\text{Nên } x+6: x-1 \Rightarrow x-1+7: x-1$$

Mà  $x-1: x-1$  với mọi  $x$  nguyên khác 1.

$$\text{Nên } 7: x-1 \Rightarrow x-1 \in U(7) = \{1; 7; -1; -7\}$$

$$\Rightarrow x \in \{2; 8; 0; -6\}.$$

Với  $x=2$  thay vào (1) ta được  $y.1 = 8 \Rightarrow y = 8$

Với  $x=8$  thay vào (1) ta được  $y.7 = 14 \Rightarrow y = 2$

Với  $x=0$  thay vào (1) ta được  $y.(-1) = 6 \Rightarrow y = -6$

Với  $x = -6$  thay vào (1) ta được  $y \cdot (-7) = 0 \Rightarrow y = 0$ .

**Bài 18:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia nó cho 6, 7, 9 được các số dư lần lượt là 2, 3, 5.

### Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là  $a$  với  $a \in \mathbb{N}$ .

Vì  $a$  chia 6 dư 2 nên  $a - 2$  chia hết cho 6.

Vì  $a$  chia 7 dư 3 nên  $a - 3$  chia hết cho 7.

Vì  $a$  chia 9 dư 5 nên  $a - 5$  chia hết cho 9.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a-2:6 \\ a-3:7 \\ a-5:9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-2+6:6 \\ a-3+7:7 \\ a-5+9:9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+4:6 \\ a+4:7 \\ a+4:9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+4 \in BC(6;7;9) = B(126) = \{0;126;252;.....\}$$

$$\Rightarrow a \in \{122;248;.....\}. \text{ Vì } a \text{ là số tự nhiên nhỏ nhất nên } a = 122.$$

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm là 122.

**Bài 19:** Tìm số tự nhiên có ba chữ số biết rằng nếu bớt số đó đi 8 thì được số chia hết cho 7, nếu bớt số đó đi 9 thì được số chia hết cho 8, nếu bớt số đó đi 10 thì được số chia hết cho 9.

### Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là  $a$  với  $a \in \mathbb{N}$ .

Vì  $a$  bớt đi 8 thì chia hết cho 7 nên  $a - 8$  chia hết cho 7.

Vì  $a$  bớt đi 9 thì chia hết cho 8 nên  $a - 9$  chia hết cho 8.

Vì  $a$  bớt đi 10 thì chia hết cho 9 nên  $a - 10$  chia hết cho 9.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a-8:7 \\ a-9:8 \\ a-10:9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-8+7:7 \\ a-9+8:8 \\ a-10+9:9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-1:7 \\ a-1:8 \\ a-1:9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a-1 \in BC(7;8;9) = B(504) = \{0;504;1008;.....\}$$

$$\Rightarrow a \in \{1;505;1009;.....\}. \text{ Vì } a \text{ là số tự nhiên có ba chữ số nên } a = 505.$$

Vậy số tự nhiên cần tìm là 505.

**Bài 20:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 11, 17, 29 thì có dư lần lượt là 6, 12, 24.

### Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là  $a$ .

Vì  $a$  chia cho 11 dư 6 nên  $a - 6$  chia hết cho 11.

Vì  $a$  chia cho 17 dư 12 nên  $a - 12$  chia hết cho 17.

Vì  $a$  chia cho 29 dư 24 nên  $a - 24$  chia hết cho 29.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a-6:11 \\ a-12:17 \\ a-24:29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-6+11:11 \\ a-12+17:17 \\ a-24+29:29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+5:11 \\ a+5:17 \\ a+5:29 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+5 \in BC(11;17;29) = B(5423) = \{0;5423;10846;.....\}$$

$$\Rightarrow a \in \{5418;10841;.....\}. \text{ Vì } a \text{ nhỏ nhất nên } a = 5418.$$

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm là 5418.

**Bài 21:** Tìm số tự nhiên  $n$  lớn nhất có ba chữ số, sao cho  $n$  chia 8; 31 được dư lần lượt là 7; 28.

### Lời giải

Vì  $n$  chia cho 8 dư 7 nên  $n - 7$  chia hết cho 8

Và  $n$  chia cho 31 dư 28 nên  $n - 28$  chia hết cho 31

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \begin{cases} n-7:8 \\ n-28:31 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} n-7+72:8 \\ n-28+93:31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+65:8 \\ n+65:31 \end{cases} \\ &\Rightarrow n+65 \in BC(8;31) = B(248) = \{0; 248; 496; 744; 992; \dots\} \\ &\Rightarrow n \in \{183; 431; 679; 927; \dots\}. \end{aligned}$$

Vì  $n$  là số tự nhiên lớn nhất có ba chữ số nên  $n = 927$ .

**Bài 22:** Cho phân số:  $A = \frac{n-5}{n+1}$  ( $n \in \mathbb{Z}; n \neq -1$ )

- a) Tìm  $n$  để  $A$  có giá trị nguyên  
b) Tìm  $n$  để  $A$  là phân số tối giản

**Lời giải:**

$$\text{a) } A = \frac{n-5}{n+1} = \frac{n+1-6}{n+1} = 1 - \frac{6}{n+1}$$

$A$  nhận giá trị nguyên  $n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$ .

$n+1$	1	-1	2	-2	3	-3	6	-6
$n$	0	-2	1	-3	2	-4	5	-7

b)  $A$  tối giản  $(n+1, n-5) = 1$

$$(n+1, 6) = 1$$

$\Rightarrow n+1$  không chia hết cho 2 và  $n+1$  không chia hết cho 3.

**Bài 23:**

a) Tìm hai số tự nhiên  $a$  và  $b$  biết  $BCNN(a, b) = 180$ ;  $UCLN(a, b) = 12$

b) Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để phân số  $A = \frac{4n-1}{2n+3}$  có giá trị nguyên.

**Lời giải:**

a) Ta có  $ab = 180 \cdot 12 = 2160$

Giả sử  $a \leq b$ . Vì  $UCLN(a, b) = 12$  nên  $a = 12m, b = 12n$  với  $(m, n) = 1$  và  $m \leq n$

Suy ra  $12m \cdot 12n = 2160 \Rightarrow mn = 15$ . Ta có bảng sau:

$m$	$n$	$a$	$b$
1	15	12	180
3	5	36	60

Vậy ta có hai cặp  $(a; b)$  là  $(12; 180), (36; 60)$ .

$$\text{b) } A = \frac{4n-1}{2n+3} = \frac{2(2n+3)}{2n+3} - \frac{7}{2n+3} = 2 - \frac{7}{2n+3}$$

A có giá trị nguyên  $\Leftrightarrow 2n+3 \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$ .

Ta có bảng sau

$2n+3$	1	-1	7	-7
$n$	-1	-2	2	-5

Vậy  $n \in \{-1; -2; 2; -5\}$

**Bài 24:** Cho  $A = \frac{12n+1}{2n+3}$ . Tìm giá trị của  $n$  để:

- a)  $A$  là một phân số                      b)  $A$  là một số nguyên

**Lời giải:**

a)  $A = \frac{12n+1}{2n+3}$  là phân số khi  $12n+1 \in \mathbb{Z}, 2n+3 \in \mathbb{Z}, 2n+3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \neq -1, 5 \end{cases}$

b)  $A = \frac{12n+1}{2n+3} = 6 - \frac{17}{2n+3}$

$A$  là số nguyên khi  $2n+3 \in U(17) \Leftrightarrow 2n+3 \in \{\pm 1; \pm 17\} \Leftrightarrow n \in \{-10; -2; -1; 7\}$

**Bài 25:**

a) Tìm giá trị  $n$  là số tự nhiên để  $n+7$  chia hết cho  $n+2$

b) Tìm  $x$  là số chia trong phép chia 235 cho  $x$  được số dư là 14

**Lời giải:**

a)  $(x+7):(x+2) \Leftrightarrow 5:(x+2) \Leftrightarrow (x+2) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

$\Rightarrow x \in \{-3; -1; -7; 3\}$ .

b)  $235 : x$  dư 14  $\Rightarrow 235 - 14 : x (x > 14) \Rightarrow 221 : x (x > 14) \Rightarrow x \in \{17; 221\}$

**Bài 26:** Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  biết:  $(3n+8):(n+1)$

**Lời giải:**

Ta có:  $3n+8 = 3n+3+5 = 3(n+1)+5$

Suy ra:  $(3n+8):(n+1)$  khi  $(n+1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

Tìm được:  $n \in \{-6; -2; 0; 4\}$

**Bài 27:**

a) Cho  $\overline{abc} - \overline{deg} : 7$ . Chứng minh  $\overline{abc deg} : 7$

b) Tìm số nguyên  $n$  sao cho  $n^2 + 1 : n + 1$

**Lời giải:**

a) Ta có:  $\overline{abc deg} = 1000 \cdot \overline{abc} + \overline{deg}$

$$= (1001 - 1)\overline{abc} + \overline{\text{deg}} = 1001\overline{abc} - \overline{abc} + \overline{\text{deg}} = 1001\overline{abc} - (\overline{abc} - \overline{\text{deg}})$$

$$\text{Vì } 1001\overline{abc} = 7.143\overline{abc} \Rightarrow 7.143.\overline{abc}:7 \quad (1)$$

$$\overline{abc} - \overline{\text{deg}}:7 \text{ (gt)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\overline{abc} \text{ deg}:7$

b) Ta có:

$$n^2 + 2 = n(n+1) + [-(n+1)] + 3$$

$$\text{Vì } n(n+1):n+1 \text{ và } -(n+1):n+1$$

$$\text{Đề } n^2 + 2:n+1 \text{ thì } 3:n+1 \Rightarrow n+1 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\} \Rightarrow n \in \{-2; 0; -4; 2\}.$$

### Bài 28:

a) Cho  $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{90}$ . Chứng minh  $A$  chia hết cho 11 và 13.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên  $x, y$  sao cho  $xy - 2x + y + 1 = 0$ .

#### Lời giải:

a)  $A$  có 90 số hạng mà  $90:5$  nên  $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{90}$

$$A = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + (3^6 + 3^7 + 3^8 + 3^9 + 3^{10}) + \dots + (3^{86} + 3^{87} + 3^{88} + 3^{89} + 3^{90})$$

$$= 3.(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^6.(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{86}.(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4)$$

$$= 121.(3 + 3^6 + \dots + 3^{86}):11 \Rightarrow A:11$$

$A$  có 90 số hạng mà  $90:3$  nên:

$$A = (3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6) + \dots + (3^{88} + 3^{89} + 3^{90})$$

$$= 3.(1 + 3 + 3^2) + 3^4.(1 + 3 + 3^2) + \dots + 3^{88}.(1 + 3 + 3^2)$$

$$= 13.(3 + 3^4 + \dots + 3^{88}):13 \Rightarrow A:13$$

$$\text{b) } xy - 2x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow x(y - 2) + (y - 2) = -3$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(y - 2) = -3 = 1.(-3) = (-3).1$$

Từ đó suy ra  $(x; y) \in \{(0; -1); (-4; 3)\}$

**Bài 29:** Tìm tất cả các số nguyên  $n$  để:

Phân số  $\frac{12n+1}{30n+2}$  là phân số tối giản

#### Lời giải:

Gọi  $d$  là ƯC của  $12n+1$  và  $30n+2$  ( $d \in \mathbb{N}^*$ )  $\Rightarrow 12n+1:d, 30n+2:d$

$$[5(12n+1) - 2(30n+2)]:d \Leftrightarrow (60n+5 - 60n-4):d \Leftrightarrow 1:d$$

mà  $d \in \mathbb{N}^* \Rightarrow d = 1$

Vậy phân số đã cho tối giản

**Bài 30:** Tìm số nguyên  $n$  để phân số  $M = \frac{2n-7}{n-5}$  có giá trị là số nguyên

**Lời giải:**

$$a) M = \frac{2n-7}{n-5} = \frac{2n-10+3}{n-5} = 2 + \frac{3}{n-5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n-5 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

Suy ra  $n \in \{2; 4; 6; 8\}$

**Bài 31:** Tìm số tự nhiên  $n$  để phân số  $\frac{n+3}{2n-2}$  có giá trị là số nguyên

**Lời giải:**

Để phân số  $\frac{n+3}{2n-2}$  có giá trị là nguyên thì  $n+3 : 2n-2$

$$2(n+3) : 2n-2$$

$$(2n+6) - (2n-2) : (2n-2)$$

$$(2n-2n) + (6+2) : 2n-2 \Rightarrow 8 : 2n-2$$

Suy ra  $(2n-2) \in \{\pm 2; \pm 4; \pm 8\}$

Sau khi thử các trường hợp ta được  $n = 5$ .

**Bài 32:** Cho  $A = \frac{3n-5}{n+4}$ , tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để  $A$  có giá trị nguyên.

**Lời giải:**

$$\text{Ta có } A = \frac{3n-5}{n+4} = 3 + \frac{-17}{n+4}$$

Để  $A \in \mathbb{Z}$  thì  $(n+4) \in U(-17) = \{\pm 1; \pm 17\}$ .

Lập bảng và xét các giá trị ta có  $n \in \{-5; -3; 21; 13\}$  thì  $A$  nguyên.

**Bài 33.** Tìm các giá trị nguyên của  $n$  để phân số  $A = \frac{3n+2}{n-1}$  có giá trị là số nguyên

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } A = \frac{3n+2}{n-1} = \frac{3n-3+5}{n-1} = 3 + \frac{5}{n-1}$$

Để  $A$  có giá trị nguyên  $\frac{5}{n-1} \in \mathbb{Z}$  suy ra  $(n-1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$  suy ra  $n \in \{2; 0; 6; -4\}$

**Bài 34.** Tìm số tự nhiên  $n$  để phân số  $\frac{2n+1}{n+2}$  là phân số rút gọn được

**Lời giải**

Gọi  $d$  là ƯCLN( $2n+1, n+2$ ) ( $d \in \mathbb{N}^*$ )

Ta có:  $2n+1 : d, n+2 : d$  suy ra  $[(2n+4) - (2n+1)] : d$  suy ra  $3 : d$

Vì  $d \in \mathbb{N}^*$  nên  $d \in \{1; 3\}$ . Để phân số  $\frac{2n+1}{n+2}$  rút gọn được thì  $d = 3$



Suy ra  $n+2=3k$  suy ra  $n=3k-2 (k \in \mathbb{N}^*)$

Vậy với  $n=3k-2 (k \in \mathbb{N}^*)$  thì phân số  $\frac{2n+1}{n+2}$  là phân số rút gọn được

**Bài 35:** Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  biết:  $(3n+8):(n+1)$

**Lời giải**

Ta có:  $3n+8=3n+3+5=3(n+1)+5$

Suy ra :  $(3n+8):(n+1)$  khi  $(n+1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$ .

Vậy  $n \in \{-6; -2; 0; 4\}$ .

**Bài 36:** Tìm số nguyên  $n$  để  $5+n^2-2n$  chia hết cho  $n-2$

**Lời giải**

Ta có  $5+n^2-2n=5+n(n-2)$

Vì  $n(n-2):(n-2)$ , nên để  $(5+n^2-2n):(n-2)$  thì  $5:(n-2)$

Suy ra  $(n-2)$  phải là ước của 5 suy ra  $(n-2) \in \{-5; -1; 1; 5\}$  suy ra :  $n \in \{-3; -1; 3; 7\}$

Vậy  $n \in \{-3; -1; 3; 7\}$  thì  $5+n^2-2n$  chia hết cho  $n-2$

**Bài 37:** Cho  $A=3+3^2+3^3+3^4+\dots+3^{90}$ . Chứng minh  $A$  chia hết cho 11 và 13.

**Lời giải:**

$A$  có 90 số hạng mà  $90:5$  nên  $A=3+3^2+3^3+3^4+\dots+3^{90}$

$A=(3+3^2+3^3+3^4+3^5)+(3^6+3^7+3^8+3^9+3^{10})+\dots+(3^{86}+3^{87}+3^{88}+3^{89}+3^{90})$

$=3.(1+3+3^2+3^3+3^4)+3^6.(1+3+3^2+3^3+3^4)+\dots+3^{86}.(1+3+3^2+3^3+3^4)$

$=121.(3+3^6+\dots+3^{86}):11$  suy ra  $A:11$

$A$  có 90 số hạng mà  $90:3$  nên:

$A=(3+3^2+3^3)+(3^4+3^5+3^6)+\dots+(3^{88}+3^{89}+3^{90})$

$=3.(1+3+3^2)+3^4.(1+3+3^2)+\dots+3^{88}.(1+3+3^2)$

$=13.(3+3^4+\dots+3^{88}):13$  suy ra :  $A:13$

**Bài 38.** Tìm tất cả các cặp số nguyên  $x, y$  sao cho  $xy-2x+y+1=0$ .

**Lời giải:**

$xy-2x+y+1=0$  suy ra :  $x(y-2)+(y-2)=-3$

suy ra :  $(x+1)(y-2)=-3=1.(-3)=(-3).1$

Từ đó suy ra  $(x; y) \in \{(0; -1); (-4; 3)\}$

**Bài 39:** Tìm các số nguyên  $a, b$  biết rằng:  $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$

**Lời giải:**

$$\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3} \text{ suy ra } \frac{2a-7}{14} = \frac{1}{b+3} \text{ suy ra } (2a-7)(b+3) = 14$$

Do  $a, b \in \mathbb{Z}$  nên  $2a-7 \in U(14)$

Vì  $2a-7$  lẻ nên  $2a-7 \in \{\pm 1; \pm 7\}$  suy ra  $a \in \{0; 3; 4; 7\}$

Vậy  $(a; b) = \{(0; -5); (3; -17); (4; 11); (7; -1)\}$

**Bài 40:** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$  thì  $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$  chia hết cho 10.

#### Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n &= (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n) = 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) \\ &= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 = 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}) \text{ chia hết cho 10.} \end{aligned}$$

Vậy với mọi số nguyên dương  $n$  thì  $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$  chia hết cho 10.

**Bài 41:** Tìm số tự nhiên  $n$  thỏa mãn  $(2n+7):n+1$

#### Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (2n+7):n+1 &\Leftrightarrow 2n+7-2(n+1):n+1 \\ &\Leftrightarrow (2n+7)-(2n+2):n+1 \Leftrightarrow 2n+7-2n-2:n+1 \Leftrightarrow 5:n+1 \\ &\Rightarrow n+1 \in \{\pm 1; \pm 5\} \Rightarrow n \in \{-6; -2; 0; 4\} \end{aligned}$$

Vì  $n \in \mathbb{N}$  nên  $n \in \{0; 4\}$

Vậy với  $n \in \{0; 4\}$  thì  $(2n+7):n+1$

**Bài 42:** Tìm số nguyên  $n$  để  $A = 2n^2 + n - 6$  chia hết cho  $2n+1$

#### Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 2n^2 + n - 6 = n(2n+1) - 6$$

Vì  $A$  chia hết cho  $2n+1$  nên  $n(2n+1) - 6:2n+1$  mà  $n(2n+1):2n+1$  nên

$$6:2n+1 \Rightarrow 2n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}.$$

Do  $2n+1$  là số lẻ nên  $2n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 3\}$ . Ta có bảng sau:

$2n+1$	1	-1	3	-3
$2n$	0	-2	2	-4
$n$	0	-1	1	-2

Vậy  $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$

**Bài 43:** Tìm các cặp số nguyên  $x, y$  thỏa mãn:  $3xy + 2x - 5y = 6$

#### Lời giải

$$3xy + 2x - 5y = 6 \Rightarrow x(3y+2) - 5y = 6 \Rightarrow 3x(3y+2) - 15y = 18$$

$$\Rightarrow 3x(3y+2) - 15y - 10 = 18 - 10 \Rightarrow 3x(3y+2) - 5(3y+2) = 8$$

$$\Rightarrow (3x-5)(3y+2) = 8$$

$$\Rightarrow 3y+2 \in U(8) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$$

Mà  $3y+2$  là số chia cho 3 dư 2  $\Rightarrow 3y+2 \in \{-1; 2; -4; 8\}$ .

Ta có bảng sau:

$3y+2$	-4	-1	2	8
$3x-5$	-2	-8	4	1
$y$	-2	-1	0	2
$x$	1	-1	3	2

Vậy  $(x; y) \in \{(1; -2), (-1; -1), (3; 0), (2; 2)\}$

**Bài 44:** Tìm các số nguyên dương  $x, y$  thỏa mãn  $2x+3y=14$

**Lời giải**

Xét  $2x+5y=14$  (1)

Ta có:  $14:2; 2x:2 \Rightarrow 5y:2 \Rightarrow y:2$

$5y < 14 \Rightarrow y < 14:5 \Rightarrow y \leq 2$

mà  $y$  chẵn nên  $y=2$  thay vào (1)  $\Rightarrow x=2$

Vậy  $x=2; y=2$

**Bài 45:** Tìm các số nguyên  $x, y$  sao cho:  $(x+1)(xy-1)=3$

**Lời giải**

Vì  $(x+1)(xy-1)=3, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x+1 \in \mathbb{Z}, xy-1 \in \mathbb{Z}$

Do đó,  $(x+1), (xy-1) \in \{\pm 1; \pm 3\}$

Ta có:

$x+1$	1	-1	3	-3
$xy-1$	3	-3	1	-3
$x$	0	-2	2	-4
$y$	Ktm	1	1	0

Vậy các cặp  $(x, y)$  thỏa mãn là:  $(-2; 1); (2; 1); (-4; 0)$

**Bài 46:** Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  biết:  $(3n+8):(n+1)$

**Lời giải:**

Ta có:  $3n+8 = 3n+3+5 = 3(n+1)+5$

Suy ra :  $(3n+8):(n+1)$  khi  $(n+1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$ .

Vậy  $n \in \{-6; -2; 0; 4\}$ .

**Bài 47:** Tìm số nguyên  $n$  để  $(n^2 + 3n + 6):(n+3)$

**Lời giải:**

Ta có  $n^2 + 3n + 6 = n(n+3) + 6$

Vì  $n(n+3):(n+3)$ , nên để  $(n^2 + 3n + 6):(n+3)$  thì  $6:(n+3)$

Mà  $n \in \mathbb{Z}$  nên  $(n+3)$  là ước của 6

$\Rightarrow (n+3) \in \{\pm 3; \pm 6\} \Rightarrow n \in \{0; -6; 3; -9\}$

Vậy  $n \in \{0; -6; 3; -9\}$  thì  $(n^2 + 3n + 6):(n+3)$

**Bài 48:** Tìm tất cả các số nguyên  $n$  để phân số  $\frac{n+1}{n-2}$  có giá trị là một số nguyên

**Lời giải:**

Ta có  $\frac{n+1}{n-2}$  là một số nguyên khi  $(n+1):(n-2)$

Ta có  $n+1 = (n-2) + 3$ , do đó  $(n+1):(n-2)$  khi  $3:(n-2)$

$\Rightarrow (n-2)$  là ước của 3

$\Rightarrow (n-2) \in \{-3; -1; 1; 3\} \Rightarrow n \in \{-1; 1; 3; 5\}$

Vậy  $n \in \{-1; 1; 3; 5\}$  thì  $\frac{n+1}{n-2}$  có giá trị là một số nguyên.

**Bài 49:** Cho  $A = 999993^{1999} - 555557^{1997}$ . Chứng minh rằng A chia hết cho 5

**Trích đề HSG huyện Mường Ảng, năm 2014- 2015**

**Lời giải**

Để chứng minh  $A:5$  ta xét chữ số tận cùng của A bằng việc xét chữ số tận cùng của từng số hạng.

Ta có:  $3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3 = 81^{499} \cdot 27$  nên  $3^{1999}$  có tận cùng là 7

$$7^{1997} = (7^4)^{499} \cdot 7 = 2401^{499} \cdot 7 \Rightarrow 7^{1997} \text{ tận cùng là } 7$$

Vậy A có tận cùng là 0 nên  $A:5$

**Bài 50:** Tìm số nguyên  $n$  để  $n^2 + 3:n-1$

**Trích đề HSG huyện Xuân Trường, năm 2013- 2014**

**Lời giải**

Ta có  $n^2 + 3 = n(n-1) + n + 3$  (Thêm bớt  $n$  để làm xuất hiện tích  $n-1$ )  $= n(n-1) + (n-1) + 1 + 3$  (

Thêm bớt 1 để làm xuất hiện  $n-1$ )

$$= (n-1)(n+1) + 4 : n-1$$

Vì  $(n-1)(n+1) : n-1$  nên suy ra  $4 : n-1$

$$n-1 \in U(4) = \{-4; -2; 1; 2; 4\}$$

$$\Rightarrow n \in \{-3; -1; 0; 2; 3; 5\}$$

Vậy  $n \in \{-3; -1; 0; 2; 3; 5\}$  thì  $n^2 + 3 : n-1$

**Bài 51:** Chứng minh rằng với mọi số nguyên  $n$  ta có  $n^3 - n : 6$

*Trích đề HSG huyện Trực Ninh năm 2017-2018*

**Lời giải**

$$\text{Ta có } (n^3 - n) = n(n^2 - 1) = n(n^2 - n + n - 1) = n[n(n-1) + (n-1)] = n(n-1)(n+1)$$

Với mọi số nguyên dương  $n$  thì  $(n-1)n(n+1)$  là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp sẽ chia hết cho 2 và 3 mà  $(2,3) = 1$  nên  $n(n-1)(n+1) : 6$

**Bài 52:** Chứng tỏ rằng:  $\frac{2n+5}{n+3} (n \in \mathbb{N})$  là phân số tối giản

*Trích đề HSG huyện Quỳnh Lưu năm 2018-2019.*

Gọi  $d$  là ước chung của  $n+3$  và  $2n+5$  với  $d \in \mathbb{N}$

Suy ra  $n+3 : d$  và  $2n+5 : d$

$$2(n+3) - (2n+5) : d \text{ suy ra } 1 : d \text{ nên } d = 1$$

Do đó  $Ư_{CLN}(n+3, 2n+5) = 1$  suy ra  $\frac{2n+5}{n+3} (n \in \mathbb{N})$  là phân số tối giản.

**Bài 53:** Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để phân số  $A = \frac{4n-1}{2n+3}$  có giá trị nguyên

*Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2017-2018*

**Lời giải**

$$A = \frac{4n-1}{2n+3} = \frac{2(2n+3)}{2n+3} - \frac{7}{2n+3} = 2 - \frac{7}{2n+3}$$

A có giá trị nguyên thì  $2n+3 \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$

Ta có bảng sau

$2n+3$	1	-1	7	-7
$n$	-1	-2	2	-5

**Bài 54:** Tìm số nguyên dương  $n$  nhỏ nhất sao cho sau khi viết tiếp số đó sau số 2014 ta được số chia hết cho 101

*Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2017-2018*

**Lời giải**

Giả sử  $n$  có  $k$  chữ số ( $k \geq 1$ )

Ta có :  $2014 = 19 \cdot 101 + 95$ , do đó:

$$\overline{2014n} = 2014 \cdot 10^k + n = 19 \cdot 101 \cdot 10^k + 95 \cdot 10^k + n$$

Suy ra  $\overline{2014n} : 101$  khi và chỉ khi  $95 \cdot 10^k + n : 101$

Với  $k=1$  thì  $95 \cdot 10^k + n = 950 + n = 101 \cdot 9 + (41+n) : 101$  khi và chỉ khi  $41+n : 101$  nhưng  $n$  có một chữ số nên  $41+n \leq 41+9 < 101$ , nên không có số  $n$  thỏa mãn đầu bài.

Với  $k = 2$  thì  $95 \cdot 10^k + n = 9500 + n = 101 \cdot 94 + (6+n) : 101$  suy ra  $6+n : 101$ , và số  $n$  nhỏ nhất được xác định bởi  $6+n = 101$  suy ra  $n = 95$

Vậy  $n = 95$  thỏa mãn đề bài

**Bài 55:** Tìm  $x, y$  nguyên biết:  $x + y + xy = 40$

*Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2017-2018*

*Lời giải*

Ta có  $x + y + xy = 40$

$(y+1)x + y + 1 = 41$

$(x+1)(y+1) = 41$

Mà  $x, y$  nguyên nên  $x+1, y+1$  là ước của 41

Tính được  $(x, y) \in \{(40, 0); (0, 40); (-2, -42); (-42, -2)\}$

**Bài 56:** Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  biết:  $(3n+8) : (n+1)$

*Trích đề HSG huyện Bạch Thông năm 2018-2019*

*Lời giải*

Ta có:  $3n+8 = 3n+3+5 = 3(n+1)+5$

Suy ra:  $(3n+8) : (n+1)$  khi  $(n+1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

Tìm được:  $n \in \{-6; -2; 0; 4\}$

**Bài 57:** Tìm các số nguyên  $x, y$  biết:  $2x - y + 4xy = 6$

*Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2017-2018*

*Lời giải*

Ta có  $2x - y + 4xy = 6$

Hay  $2x(2y+1) - y = 6$

$(2y+1)(4x-1) = 11$

Do  $x, y$  nguyên nên  $4x-1 \in U(11) = \{1; -1; 11; -11\}$

Mà  $4x-1$  chia 4 dư  $-1$  (hoặc 3) nên  $4x-1 = -1$  hoặc  $4x-1 = 11$

Tìm được  $x = 0; y = -6$  hoặc  $x = 3; y = 0$

**Bài 58:** Tìm các số nguyên  $n$  để  $\frac{2n+1}{n+2}$  có giá trị là một số nguyên

*Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2017-2018*

*Lời giải*

Để  $\frac{2n+1}{n+2}$  có giá trị là số nguyên thì  $2n+1 : n+2$  (1)

Vì  $n+2 : n+2$  nên  $2(n+2) : n+2$  (2)

Từ (1), (2) suy ra  $2(n+2) - (2n+1) : n+2$  chia hết cho  $n+2$  hay  $3 : (n+2)$

Vì  $n+2$  nguyên nên  $n+2 \in \{-1; 1; -3; 3\}$

$n \in \{-3; -5; -1; 1\}$  Vậy với  $n \in \{-3; -5; -1; 1\}$  thì phân số  $\frac{2n+1}{n+2}$  là số nguyên.

**Bài 59:** Chứng tỏ rằng với mọi số nguyên  $n$  thì phân số  $\frac{3n-10}{2n-7}$  là phân số tối giản

*Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2018-2019*

**Lời giải**

Gọi Ư CLN( $3n-10; 2n-7$ ) =  $d$  ( $d \in \mathbb{N}^*$ )

thì  $3n-10 \vdots d$  và  $2n-7 \vdots d$

$2(3n-10) \vdots d$  và  $3(2n-7) \vdots d$

$2(3n-10) - 3(2n-7) \vdots d$

Suy ra  $1 \vdots d$  nên  $d \in \{1; -1\}$

Vậy với mọi số nguyên  $n$  thì phân số  $\frac{3n-10}{2n-7}$  là phân số tối giản.

**Bài 60:** Tìm số nguyên  $n$  để  $A = 2n^2 + n - 6$  chia hết cho  $2n+1$

**Đề Sưu tầm**

**Lời giải**

Ta có:  $A = 2n^2 + n - 6 = n(2n+1) - 6$

Vì  $A$  chia hết cho  $2n+1$  nên  $n(2n+1) - 6 \vdots 2n+1$  mà  $n(2n+1) \vdots 2n+1$  nên

$6 \vdots 2n+1$  hay  $2n+1 \in \text{Ư}(6)$ .

Do  $2n+1$  là số lẻ nên ta có bảng sau:

$2n+1$	1	-1	3	-3
$2n$	0	-2	2	-4
$n$	0	-1	1	-2

Vậy với  $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$  thì  $A = 2n^2 + n - 6$  chia hết cho  $2n+1$

**PHIẾU BÀI TẬP SỐ 2**

**Bài 1:** Cho  $A = \frac{3n-5}{n+4}$ , tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để  $A$  có giá trị nguyên.

*Trích đề HSG huyện Tĩnh Gia năm 2018 - 2019*

**Bài 2:** Tìm các số nguyên  $n$  sao cho  $n^2 + 5n + 9$  là bội của  $n+3$ .

*Trích đề HSG huyện Hưng Hà (Thái Bình) năm 2018 - 2019*

**Bài 3:** Tìm  $x, y$  nguyên biết  $\frac{2}{y} - \frac{1}{x} = \frac{8}{xy} + 1$ .

**Bài 4:** Tìm số nguyên  $x, y$  biết  $6x^2 + 5y^2 = 74$ .

**Bài 5:** Tìm các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn  $2x^2 + 3y^2 = 77$ .

**Bài 6:** Tìm các giá trị  $x, y$  nguyên thỏa mãn:

b)  $x(y+2) = -8$

b)  $x(y-3) = -12$

c)  $(x+1)y = 3$

**Bài 7:** Tìm các giá trị  $x, y$  nguyên thỏa mãn  $(x+1)(y-3) = 3$

**Bài 8:** Tìm các giá trị  $x, y$  nguyên thỏa mãn  $(2x+1)(y-5) = 12$

**Bài 9:** Tìm  $x, y$  nguyên thỏa mãn:  $(x-3) = y(x+2)$  với  $x \neq -2$ .

**Bài 10:** Tìm các số nguyên  $x$ , biết:

b)  $3x+2 \vdots x-1$

b)  $2x-5 \vdots x-1$

c)  $2x+3 \vdots x+1$

**Bài 11:** Tìm các số nguyên  $x$ , biết

d)  $2x+5 \vdots 2x-1$

e)  $4x-5 \vdots 2x-1$

f)  $10-2x \vdots x-2$

**Bài 12:** Tìm các số nguyên  $x$ , biết  $10-2x \vdots x-2$

**Bài 13:** Tìm số nguyên  $n$  với  $n \neq 2$  để phân số  $A = \frac{n+1}{n-2}$  có giá trị là số nguyên.

**Bài 14:** Tìm số nguyên  $n$  với  $n \neq 1$  để phân số  $A = \frac{n+2}{n-1}$  có giá trị là số nguyên.

**Bài 15:** Tìm  $x, y$  nguyên thỏa mãn  $xy-3x=-19$ .

**Bài 16:** Tìm  $x, y$  nguyên thỏa mãn  $2x+xy-y=9$ .

**Bài 17:** Tìm  $x, y$  nguyên thỏa mãn  $(x+6)=y(x-1)$  với  $x \neq 1$ .

**Bài 18:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia nó cho 6,7,9 được các số dư lần lượt là 2,3,5.

**Bài 19:** Tìm số tự nhiên có ba chữ số biết rằng nếu bớt số đó đi 8 thì được số chia hết cho 7, nếu bớt số đó đi 9 thì được số chia hết cho 8, nếu bớt số đó đi 10 thì được số chia hết cho 9.

**Bài 20:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 11,17,29 thì có dư lần lượt là 6,12,24.

**Bài 21:** Tìm số tự nhiên  $n$  lớn nhất có ba chữ số, sao cho  $n$  chia 8;31 được dư lần lượt là 7;28.

**Bài 22:** Cho phân số:  $A = \frac{n-5}{n+1}$  ( $n \in \mathbb{Z}; n \neq -1$ )

a) Tìm  $n$  để  $A$  có giá trị nguyên

b) Tìm  $n$  để  $A$  là phân số tối giản

**Bài 23:**

a) Tìm hai số tự nhiên  $a$  và  $b$  biết  $BCNN(a,b)=180$  ;  $UCLN(a,b)=12$

b) Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để phân số  $A = \frac{4n-1}{2n+3}$  có giá trị nguyên.

**Bài 24:** Cho  $A = \frac{12n+1}{2n+3}$ . Tìm giá trị của  $n$  để:

a)  $A$  là một phân số

b)  $A$  là một số nguyên

**Bài 25:**

a) Tìm giá trị  $n$  là số tự nhiên để  $n+7$  chia hết cho  $n+2$

b) Tìm  $x$  là số chia trong phép chia 235 cho  $x$  được số dư là 14

**Bài 26:** Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  biết:  $(3n+8) \vdots (n+1)$

**Bài 27:**

a) Cho  $\overline{abc} - \overline{deg} \vdots 7$ . Chứng minh  $\overline{abcdeg} \vdots 7$

b) Tìm số nguyên  $n$  sao cho  $n^2+1 \vdots n+1$

**Bài 28:**

a) Cho  $A = 3+3^2+3^3+3^4+\dots+3^{90}$ . Chứng minh  $A$  chia hết cho 11 và 13.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên  $x, y$  sao cho  $xy-2x+y+1=0$ .

**Bài 29:** Tìm tất cả các số nguyên  $n$  để:



Phân số  $\frac{12n+1}{30n+2}$  là phân số tối giản

**Bài 30:** Tìm số nguyên  $n$  để phân số  $M = \frac{2n-7}{n-5}$  có giá trị là số nguyên

**Bài 31:** Tìm số tự nhiên  $n$  để phân số  $\frac{n+3}{2n-2}$  có giá trị là số nguyên

**Bài 32:** Cho  $A = \frac{3n-5}{n+4}$ , tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để  $A$  có giá trị nguyên.

**Bài 33:** Tìm các giá trị nguyên của  $n$  để phân số  $A = \frac{3n+2}{n-1}$  có giá trị là số nguyên

**Bài 34:** Tìm số tự nhiên  $n$  để phân số  $\frac{2n+1}{n+2}$  là phân số rút gọn được

**Bài 35:** Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  biết:  $(3n+8):(n+1)$

**Bài 36:** Tìm số nguyên  $n$  để  $5+n^2-2n$  chia hết cho  $n-2$

**Bài 37:** Cho  $A = 3+3^2+3^3+3^4+\dots+3^{90}$ . Chứng minh  $A$  chia hết cho 11 và 13.

**Bài 38:** Tìm tất cả các cặp số nguyên  $x, y$  sao cho  $xy-2x+y+1=0$ .

**Bài 39:** Tìm các số nguyên  $a, b$  biết rằng:  $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$

**Bài 40:** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$  thì  $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$  chia hết cho 10.

**Bài 41:** Tìm số tự nhiên  $n$  thỏa mãn  $(2n+7):n+1$

**Bài 42:** Tìm số nguyên  $n$  để  $A = 2n^2 + n - 6$  chia hết cho  $2n+1$

**Bài 43:** Tìm các cặp số nguyên  $x, y$  thỏa mãn:  $3xy + 2x - 5y = 6$

**Bài 44:** Tìm các số nguyên dương  $x, y$  thỏa mãn  $2x + 3y = 14$

**Bài 45:** Tìm các số nguyên  $x, y$  sao cho:  $(x+1)(xy-1) = 3$

**Bài 46:** Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  biết:  $(3n+8):(n+1)$

**Bài 47:** Tìm số nguyên  $n$  để  $(n^2+3n+6):(n+3)$

**Bài 48:** Tìm tất cả các số nguyên  $n$  để phân số  $\frac{n+1}{n-2}$  có giá trị là một số nguyên

**Bài 49:** Cho  $A = 999993^{1999} - 555557^{1997}$ . Chứng minh rằng  $A$  chia hết cho 5

*Trích đề HSG huyện Mường Ảng, năm 2014-2015*

**Bài 50:** Tìm số nguyên  $n$  để  $n^2+3:n-1$

*Trích đề HSG huyện Xuân Trường, năm 2013-2014*

**Bài 51:** Chứng minh rằng với mọi số nguyên  $n$  ta có  $n^3 - n : 6$

*Trích đề HSG huyện Trực Ninh năm 2017-2018*

**Bài 52:** Chứng tỏ rằng:  $\frac{2n+5}{n+3} (n \in \mathbb{N})$  là phân số tối giản

*Trích đề HSG huyện Quỳnh Lưu năm 2018-2019.*

**Bài 53:** Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để phân số  $A = \frac{4n-1}{2n+3}$  có giá trị nguyên

*Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2017-2018*

**Bài 54:** Tìm số nguyên dương  $n$  nhỏ nhất sao cho sau khi viết tiếp số đó sau số 2014 ta được số chia hết cho 101

*Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2017-2018*

**Bài 55:** Tìm  $x, y$  nguyên biết:  $x + y + xy = 40$

*Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2017-2018*

**Bài 56:** Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  biết:  $(3n+8):(n+1)$

*Trích đề HSG huyện Bạch Thông năm 2018-2019*

**Bài 57:** Tìm các số nguyên  $x, y$  biết:  $2x - y + 4xy = 6$

*Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2017-2018*

**Bài 58:** Tìm các số nguyên  $n$  để  $\frac{2n+1}{n+2}$  có giá trị là một số nguyên

*Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2017-2018*

**Bài 59:** Chứng tỏ rằng với mọi số nguyên  $n$  thì phân số  $\frac{3n-10}{2n-7}$  là phân số tối giản

*Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2018-2019*

**Bài 60:** Tìm số nguyên  $n$  để  $A = 2n^2 + n - 6$  chia hết cho  $2n + 1$

*Đề Sư tầm*

## CHỦ ĐỀ 4: SỐ NGUYÊN

### A. PHẦN NỘI DUNG

#### I. Ước và bội.

##### Dạng 1: Chứng minh sự chia hết.

**Bài 1:** Cho  $M = (-a+b) - (b+c-a) + (c-a)$ . Trong đó  $b, c \in \mathbb{Z}$  còn  $a$  là một số nguyên âm. Chứng minh rằng biểu thức  $M$  luôn dương

*Trích đề HSG huyện Lâm Thao, năm 2017 - 2018*

##### Lời giải

$M = -a$  mà  $a$  là số nguyên âm nên  $M$  luôn dương

**Bài 2:** Cho  $\overline{ababab}$  là số có sáu chữ số, chứng tỏ số  $\overline{ababab}$  là bội của 3.

*Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018 - 2019*

##### Lời giải

$$\overline{ababab} = \overline{ab}.10000 + \overline{ab}.100 + \overline{ab} = 10101.\overline{ab}$$

Do 10101 chia hết cho 3 nên  $\overline{ababab}$  chia hết cho 3 hay  $\overline{ababab}$  là bội của 3.

**Bài 3:** Tìm số nguyên  $n$  sao cho  $4n-5$  chia hết cho  $2n-1$ .

*Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015-2016*

##### Lời giải

Tìm số nguyên  $n$  sao cho  $4n-5$  chia hết cho  $2n-1$ .

$$\text{Ta có : } 4n-5 = 4n-2-3 = 2(2n-1)-3$$

$$\text{Đề } 4n-5 : 2n-1$$

$$3 : 2n-1$$

$$2n-1 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

$2n-1$	-1	1	-3	3
$n$	0 (TM)	1 (TM)	-1 (TM)	2 (TM)

Vậy  $n \in \{0; 1; 1; 2\}$ .

##### Bài 4:

a) Cho  $\overline{ababab}$  là số có sáu chữ số, chứng tỏ số  $\overline{ababab}$  là bội của 3

b) Chứng tỏ :  $S = 16^5 + 2^{15}$  chia hết cho 33

*Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018 - 2019*

##### Lời giải

$$\text{a) } \overline{ababab} = \overline{ab}.10000 + \overline{ab}.100 + \overline{ab} = 10101.\overline{ab}$$

Do 10101 chia hết cho 3 nên  $\overline{ababab}$  chia hết cho 3 hay  $\overline{ababab}$  là bội của 3

b) Chứng minh  $S = 16^5 + 2^{15}$  chia hết cho 33

$$\text{Có } S = 16^5 + 2^{15} = (2^4)^5 + 2^{15} = 2^{20} + 2^{15} = 2^{15} \cdot (2^5 + 1) = 2^{15} \cdot 33$$

Nên  $S$  chia hết cho 33

**Bài 5:** Chứng minh rằng với mọi số nguyên  $n$  ta có  $n^3 - n : 6$

**Lời giải**

Ta có  $(n^3 - n) = n(n^2 - 1) = n(n^2 - n + n - 1) = n[n(n-1) + (n-1)] = n(n-1)(n+1)$

Với mọi số nguyên dương  $n$  thì  $(n-1)n(n+1)$  là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp sẽ chia hết cho 2 và 3 mà  $(2,3)=1$  nên  $n(n-1)(n+1):6$

**Bài 6:** Chứng tỏ rằng  $a^2 + 3a + 1$  không thể chia hết cho 2 với  $a$  là số nguyên.

**Lời giải**

Ta có  $a^2 + 3a + 1 = a^2 + a + 2a + 1 = a(a+1) + 2a + 1$

Vì  $a(a+1)$  là tích hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 ;

$2a$  chia hết cho 2 ;

1 không chia hết cho 2 .

Suy ra  $a^2 + 3a + 1$  không chia hết cho 2 với  $a$  là số nguyên.

**Bài 7:** Chứng tỏ  $4x + 3y$  chia hết cho 7 khi  $2x + 5y$  chia hết cho 7 .

**Lời giải**

Ta có:

$$4x + 3y : 7$$

$$\text{Suy ra } 4(4x + 3y) : 7$$

$$\text{Suy ra } 16x + 12y : 7$$

$$\text{Suy ra } 14x + 7y + 2x + 5y : 7$$

$$\text{Mà } 14x + 7y : 7 \text{ suy ra } 2x + 5y : 7$$

$$\text{Vậy } 4x + 3y : 7 \text{ khi } 2x + 5y : 7$$

**Dạng 2: Tìm số thỏa mãn điều kiện chia hết.**

**Bài 1:** Xét phân số  $A = \frac{n^2 + 4}{n + 5}$ . Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên  $n$  trong khoảng từ 1 đến 2022 sao cho

phân số  $A$  chưa tối giản.

A. 79

B. 89

C. 99

D. 69

**Bài 2:** Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị nguyên của  $x$  để  $x + 3$  chia hết cho  $x - 2$ . Số tập hợp con của tập hợp  $S$  là:

A. 4

B. 16

C. 15

D. 5

**Bài 3:** Số nguyên dương nhỏ nhất không phải là ước của tích  $1.2.3.4. \dots .96.97.98$  là

A. 78

B. 99

C. 101

D. 100

**Bài 4:** Tìm số nguyên  $n$  để  $(n + 3):(n + 1)$

### Lời giải

$$(n+3):(n+1)$$

$$\Rightarrow (n+1+2):(n+1)$$

$$\Rightarrow 2:(n+1) \text{ vì } (n+1):(n+1)$$

$$\Rightarrow n+1 \in \{1; 2; -1; -2\}$$

Trường hợp 1:  $n+1=1 \Rightarrow n=0$  (thỏa mãn)

Trường hợp 2:  $n+1=2 \Rightarrow n=1$  (thỏa mãn)

Trường hợp 2:  $n+1=-1 \Rightarrow n=-2$  (thỏa mãn)

Trường hợp 2:  $n+1=-2 \Rightarrow n=-3$  (thỏa mãn)

Vậy  $n \in \{-3; -2; 0; 1\}$  thì  $(n+3):(n+1)$

**Bài 5:** Có ba chồng sách: Văn, Âm nhạc, Toán, mỗi chồng chỉ gồm một loại sách. Mỗi cuốn Văn dày 15 mm, mỗi cuốn Âm nhạc dày 6 mm, mỗi cuốn Toán dày 8 mm. Người ta xếp cho 3 chồng sách cao bằng nhau. Tính chiều cao nhỏ nhất của ba chồng sách đó.

*Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022*

### Lời giải

Vì chiều cao của ba chồng sách bằng nhau nên ta gọi là  $a$  (mm) (Điều kiện  $a > 0$ )

Theo đề bài ta có:  $a:15; a:6; a:8$  mà  $a$  là số nhỏ nhất

Suy ra  $a = BCNN(15, 6, 8) = 120$  (thỏa mãn)

Vậy chiều cao nhỏ nhất của ba chồng sách đó là 120 mm.

**Bài 6:** Tìm tất cả các cặp số nguyên  $x, y$  sao cho  $xy - 2x + y + 1 = 0$

*Trích đề HSG huyện Thạch Thành, năm 2018- 2019*

### Lời giải

$$xy - 2x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow x(y-2) + (y-2) = -3$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(y-2) = -3 = 1 \cdot (-3) = (-3) \cdot 1$$

Từ đó suy ra  $(x; y) \in \{(0; -1); (-4; 3)\}$

**Bài 7:** Tìm số nguyên  $n$  để phân số  $\frac{4n+5}{2n-1}$  có giá trị là một số nguyên.

*Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018- 2019*

### Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{4n+5}{2n-1} = \frac{4n-2+7}{2n-1} = n + \frac{7}{2n-1}$$

Vì  $n \in \mathbb{Z}$  nên để  $\frac{4n+5}{2n-1}$  nguyên thì  $(2n-1) \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\} \Rightarrow n \in \{-3; 0; 1; 4\}$

**Bài 8:** Tìm số nguyên  $n$  để phân số  $\frac{4n+5}{2n-1}$  có giá trị là một số nguyên

*Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019*

### Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{4n+5}{2n-1} = \frac{4n-2+7}{2n-1} = n + \frac{7}{2n-1}$$

Vì  $n \in \mathbb{Z}$  nên để  $\frac{4n+5}{2n-1}$  nguyên thì  $(2n-1) \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\} \Rightarrow n \in \{-3; 0; 1; 4\}$

**Bài 9:** Tìm hai số nguyên tố  $x$  và  $y$  sao cho:  $x^2 - 2x + 1 = 6y^2 - 2x + 2$

*Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019*

### Lời giải

$$\text{Ta có: } x^2 - 2x + 1 = 6y^2 - 2x + 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 6y^2 \Rightarrow 6y^2 = (x-1)(x+1):2, \text{ do } 6y^2:2$$

Mặt khác  $x-1+x+1=2x:2 \Rightarrow (x-1)$  và  $(x+1)$  cùng chẵn hoặc cùng lẻ

Vậy  $(x-1)$  và  $(x+1)$  cùng chẵn  $\Rightarrow (x-1)$  và  $(x+1)$  là hai số chẵn liên tiếp

$$\Rightarrow (x-1)(x+1):8 \Rightarrow 6y^2:8 \Rightarrow 3y^2:4 \Rightarrow y^2:4 \Rightarrow y:2$$

$$\Rightarrow y = 2 \text{ (} y \text{ là số nguyên tố), tìm được: } x = 5$$

**Bài 10:** Số học sinh khối 6 của một trường chưa đến 400 bạn, biết khi xếp hàng 10; hàng 12; 15 đều dư 3 nhưng nếu xếp hàng 11 thì không dư. Tính số học sinh khối 6 của trường đó.

*Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2018-2019*

### Lời giải

Gọi số học sinh là  $a$  ( $a \in \mathbb{Z}^+$ )

$$\text{Ta có: } a - 3 \in BC(10; 12; 15) \Rightarrow a - 3 = 60k \text{ (} k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow a = 60k + 3$$

$k$	1	2	3	4	5	6	7
$a$	63	123	183	243	303	363	423

Ta xem với giá trị nào của  $k$  thì  $a < 400$  và  $a:11$

Trong các giá trị trên, chỉ có  $a = 363 < 400$  và  $a:11$

Vậy số học sinh cần tìm là 363 học sinh.

**Bài 11:** Tìm số nguyên  $n$  để  $A = 2n^2 + n - 6$  chia hết cho  $2n+1$ .

*Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2021-2022*

### Lời giải

$$\text{Ta có } A = 2n^2 + n - 6 = n(2n+1) - 6$$

Do  $n(2n+1):2n+1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ , để  $A:2n+1$  thì  $6:2n+1$

Hay  $2n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$ , mà  $2n+1$  là số nguyên lẻ nên  $2n+1$  là các ước lẻ của 6, ta có bảng sau:

$2n + 1$	- 1	1	- 3	3
$n$	- 1	0	- 2	1

Các giá trị của  $n$  tìm được đều thỏa mãn đề bài

Vậy  $n \in \{-1; 0; -2; 1\}$ .

**Bài 12:** Tìm các số nguyên  $n$  sao cho:  $n^2 + 5n + 9$  là bội của  $n + 3$ .

*HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014 -2015*

**Lời giải**

Ta có :  $n^2 + 5n + 9 = n^2 + 3n + 2n + 9 = n.(n+3) + 2n + 9$

Vì  $n(n+3)$  chia hết cho  $n+3 \Rightarrow 2n+9$  chia hết cho  $n+3$

Vì  $2n+9$  chia hết cho  $n+3$

Vì  $n+3$  chia hết cho  $n+3 \Rightarrow 2(n+3)$  chia hết cho  $n+3$

$2n+6$  chia hết cho  $n+3$

$2n+9 - (2n+6)$  chia hết cho  $2n+3$

3 chia hết cho  $2n+3$

$2n+3 \in U(7) = \{1; -1; 7; -7\}$

$2n+3$	-1	1	-7	7
$n$	-2 (TM)	-1(TM)	-5(TM)	2(TM)

Vậy  $n \in \{-1; -2; 2; -5\}$ .

**Bài 13:** Tìm các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn :  $2xy - x - y = 2$ .

*Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022*

**Lời giải**

Ta có  $2xy - x - y = 2$ .

$4xy - 2x - 2y = 4$

$2x(2y-1) - 2y + 1 = 5$

$2x(2y-1) - (2y-1) = 5$

$(2y-1)(2x-1) = 5$

Ta có bảng sau:

$2x-1$	1	5	-1	-5
$2y-1$	5	1	-5	-1
$x$	1	3	0	-2
$y$	3	1	-2	0

Vậy các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn là  $(1; 3), (3; 1), (-2; 0), (0; -2)$

**Bài 14:** Tìm tất cả các cặp số tự nhiên khác không  $(x, y)$  sao cho  $(2x+5) \cdot (x+2) = 3^y$

*Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022*

**Lời giải**

Vì  $(2x+5)(x+2) = 3^y$  mà 3 nguyên tố nên ta có  $2x+5 = 3^a, x+2 = 3^b$  với  $a, b \in \mathbb{N}$  và  $a+b = y$ .

Vì  $x$  là số tự nhiên khác 0 nên  $2x+5 > x+2$  nên  $3^a > 3^b$

Do đó  $3^a : 3^b$

$$(2x+5):(x+2)$$

Ta có  $2x+5 = 2(x+2)+1$ ;

Lập luận suy ra  $1:(x+2)$  vô lý vì  $1 < x+2$

KL: Vậy không có giá trị nào của  $x, y$  thỏa mãn bài toán.

**Bài 15:** Tìm các số nguyên  $a, b$  biết rằng:  $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$

*Trích đề HSG huyện Hoài Nhơn năm 2015-2016*

**Lời giải**

$$\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$$

$$\frac{2a-7}{14} = \frac{1}{b+3}$$

$$(2a-7)(b+3) = 14.$$

Do  $a, b \in \mathbb{Z}$  nên  $2a-7 \in \mathcal{U}(14)$

Vì  $2a-7$  lẻ nên  $2a-7 \in \{-7; -1; 1; 7\}$  nên  $a \in \{0; 3; 4; 7\}$ .

Từ đó tính được:  $(a, b) = (0; -5), (3; -17); (4; 11), (7; -1)$

**Bài 16:** Tìm các cặp số tự nhiên  $x, y$  sao cho  $(2x+1)(y-5) = 12$

*Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015-2016*

**Lời giải**

$(2x+1); (y-5)$  là các ước của 12

$$\mathcal{U}(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

Vì  $2x+1$  lẻ nên

- $2x+1=1$ . Do đó  $x=0, y=17$
- $2x+1=3$ . Do đó  $x=1, y=9$

**Bài 17:** Tìm tất cả các số nguyên  $n$  để:

a) Phân số  $\frac{n+1}{n-2}$  có giá trị là một số nguyên

b) Phân số  $\frac{12n+1}{30n+2}$  là phân số tối giản

*Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015-2016*

**Lời giải**

a)  $\frac{n+1}{n-2}$  là số nguyên khi  $(n+1):(n-2)$

Ta có:  $n+1 = (n-2)+3$ ,

vậy  $(n+1):(n-2)$  khi  $3:(n-2)$

$$(n-2) \in \mathcal{U}(3) = \{-3; -1; 1; 3\} \Rightarrow n \in \{-1; 1; 3; 5\}$$



b) Gọi  $d$  là Ư C của  $12n+1$  và  $30n+2$  ( $d \in \mathbb{N}^*$ )

$$12n+1:d; 30n+2:d$$

$$[5(12n+1)-2(30n+2)]:d$$

$$(60n+5-60n-4):d$$

$$1:d$$

mà  $d \in \mathbb{N}^*$  nên  $d=1$

Vậy phân số đã cho tối giản.

**Bài 18:** Cho biểu thức :  $P = \frac{2n+1}{n-4}$ .

a) Với điều kiện nào của số nguyên  $n$  thì  $P$  là một phân số. Tính giá trị của  $P$  khi  $n=-203$ .

b) Viết tập hợp  $M$  các số nguyên  $n$  sao cho phân số  $P$  có giá trị là một số nguyên.

*Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-2022*

**Lời giải**

Xét biểu thức  $P = \frac{2n+1}{n-4}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

a) Để  $P$  là phân số thì  $n-4 \neq 0 \Rightarrow n \neq 4$ .

$$\text{Với } n = -203 \text{ thì } P = \frac{2(-203)+1}{-203-4} = \frac{-406+1}{-207} = \frac{-405}{-207} = \frac{45}{23}.$$

b)  $P \in \mathbb{Z}$  nên  $(2n+1):(n-4)$

$$(2n-8+9):(n-4)$$

$$[2(n-4)+9]:(n-4)$$

$$9:n-4$$

$$n-4 \in \text{Ư}(9) = \{\pm 1; \pm 3; \pm 9\}.$$

Ta có bảng sau:

$n-4$	1	-1	3	-3	9	-9
$n$	5	3	7	1	13	-5

Vậy  $n \in \{5; 3; 7; 1; 13; -5\}$  thì  $P \in \mathbb{Z}$ .

**Bài 19:** Tìm  $x$  nguyên dương để  $2x-1$  chia hết cho  $x-3$ .

*Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022*

**Lời giải**

$$\text{Vi } (2x-1):(x-3)$$

$$[2(x-3)+5]:(x-3)$$

mà  $2(x-3):x-3$  nên  $5:x-3$

$$x-3 \in \text{Ư}(5) \text{ mà } \text{Ư}(5) = \{1; -1; 5; -5\}$$

$$x-3 \in \{1; -1; 5; -5\}$$

$$x \in \{4; 2; 8; -2\}$$

Mà  $x$  nguyên dương nên  $x \in \{4; 2; 8\}$

Vậy  $x \in \{4; 2; 8\}$

**Bài 20:** Tìm số tự nhiên  $n$  lớn nhất biết rằng khi chia các số 6355; 1705; 1271 cho  $n$  được các số dư lần lượt là 55; 25 và 1111.

*Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022*

**Lời giải**

Vì khi chia 6355 cho  $n$  được số dư là 55 nên  $(6355 - 55) : n$ .

Vì khi chia 1680 cho  $n$  được số dư là 25 nên  $(1680 - 25) : n$ .

Vì khi chia 1260 cho  $n$  được số dư là 11 nên  $(1260 - 11) : n$

Suy ra  $n$  là Ư C(6300, 1680, 1260)

Mà  $n$  là số tự nhiên lớn nhất nên  $n = \text{Ư CLN}(6300, 1680, 1260)$

Mà  $\text{Ư CLN}(6300, 1680, 1260) = 420$  nên  $n = 420$ .

Vậy số tự nhiên  $n$  cần tìm là 420.

**Bài 21:** Tìm số tự nhiên  $x$  biết:  $24 : x$ ;  $36 : x$ ;  $160 : x$  và  $x$  là số lớn nhất.

*Trích đề HSG Huyện Đông Hưng năm 2021-2022*

**Lời giải**

Ta có số tự nhiên  $x$  biết:  $24 : x$ ;  $36 : x$ ;  $160 : x$  và  $x$  là số lớn nhất

$x = \text{Ư CLN}(24, 36, 160)$ ;

Ta có:  $24 = 2^3 \cdot 3$ ;  $36 = 2^2 \cdot 3^2$ ;  $160 = 2^5 \cdot 5$

$\text{Ư CLN}(24, 36, 160) = 2^2 = 4$ .

Vậy  $x = 4$  (thỏa mãn).

**Bài 22:** Tìm số tự nhiên  $a$  nhỏ nhất sao cho:  $a$  chia cho 5 dư 3,  $a$  chia cho 7 dư 4

*Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019*

**Lời giải**

Ta có:  $a = 5q + 3$ ;  $a = 7p + 4$

Xét  $a + 17 = 5q + 20 = 7p + 21$

$a + 17$  chia hết cho cả 5 và 7

$a + 17 \in BC(5; 7)$

Vì  $a$  là số tự nhiên nhỏ nhất nên  $a + 17 = BCNN(5, 7) = 35$

$a = 18$

**Bài 23:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng số đó chia cho 9 dư 5, chia cho 7 dư 4 và chia cho 5 dư 3

*Trích đề HSG cấp trường Bá Thước năm 2018-2019*

**Lời giải**

Gọi số cần tìm là  $a$

Ta có  $a$  chia cho 9 dư 5 nên  $a = 9k + 5 (k \in \mathbb{N})$

$2a = 9k_1 + 1$

$$(2a-1):9$$

Ta có  $a$  chia cho 7 dư 4 nên  $a = 7m + 4 (m \in \mathbb{N})$

$$2a = 7m_1 + 1$$

$$(2a-1):7$$

Ta có  $a$  chia cho 5 dư 3 nên  $a = 5t + 3 (t \in \mathbb{N})$

$$2a = 5t_1 + 1$$

$$(2a-1):5$$

$(2a-1):\{9;7;5\}$ , mà  $(9;7;5) = 1$  và  $a$  là số tự nhiên nhỏ nhất

$$2a-1 = BCNN(9,7,5) = 315.$$

Vậy  $a = 158$

**Bài 24:** Tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng bằng 84, Ư CLN, của chúng bằng 6

*Trích đề HSG cấp trường vòng 2 THCS Tân Lập năm 2018-2019*

**Lời giải**

Gọi 2 số phải tìm là  $a$  và  $b$  ( $a \leq b$ ) ta có:  $(a,b) = 1$

$$\begin{cases} a = 6a' \\ b = 6b' \end{cases}, (a',b') = 1 (a,b,a'b' \in \mathbb{N}^*)$$

$$a' + b' = 14$$

$a'$	1	3	5
$b'$	13	11	9
$a$	6	18	30
$b$	78	66	54

**Bài 25:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khác 0 biết rằng số đó có 15 ước dương

*Trích đề chọn HSG Tam Dương năm 2016-2017*

**Lời giải**

Vì  $15 = 1.15 = 3.5$  nên số cần tìm có dạng  $a^{14}$  hoặc  $b^2.c^4$  ( $a,b,c$  là các số nguyên tố và  $b \neq c$ )

Th1: Số cần tìm có dạng  $a^{14}$  mà số đó là nhỏ nhất nên  $a = 2$ . Do đó  $2^{14} = 16384$

Th2: Số cần tìm có dạng  $b^2.c^4$  mà số đó nhỏ nhất nên  $c = 2; a = 3$ . Do đó  $3^2.2^4 = 144$

Do  $144 < 16384$  nên số cần tìm là 144

**Bài 26:** Tìm số nguyên  $n$  để phân số  $M = \frac{2n-7}{n-5}$  có giá trị là số nguyên

*Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019*

**Lời giải**

$$M = \frac{2n-7}{n-5} = \frac{2n-10+3}{n-5} = 2 + \frac{3}{n-5} \in \mathbb{Z}$$

$$n-5 \in \text{Ư}(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

$$n \in \{2; 4; 6; 8\}$$

Vậy  $n \in \{2; 4; 6; 8\}$

**Bài 27:** Tìm các cặp số nguyên  $(x; y)$  biết:  $2x(3y-2)+(3y-2)=-55$

*Trích đề HSG cấp trường Hà Huy Tập năm 2018-2019*

**Lời giải**

$$2x(3y-2)+(3y-2)=-55$$

$$(3y-2)(2x+1)=-55=-5.11=5.(-11)$$

Sau khi thử các trường hợp ta có  $(x; y)=(5; -1)$

**Bài 28:** Cho  $a$  là một số nguyên có dạng  $a=3b+7 (b \in \mathbb{Z})$ . Hỏi  $a$  có thể nhận những giá trị nào trong các giá trị sau:  $a=11; a=2002; a=2003; a=11570; a=22789; a=29563; a=299537$

*Trích đề HSG cấp trường Bá Thước năm 2018-2019*

**Lời giải**

Số nguyên có dạng  $a=3b+7 (b \in \mathbb{Z})$  hay  $a$  là số chia 3 dư 1

Vậy  $a$  có thể nhận những giá trị là  $a=2002; a=22789; a=29563$

**Trắc nghiệm**

**Bài 29:** Tập hợp các số tự nhiên  $x$  thỏa mãn  $6:(x-2)$  là:

- A.  $\{1; 2; 3; 6\}$ .      B.  $\{3; 6\}$ .      C.  $\{5; 8\}$ .      D.  $\{3; 4; 5; 8\}$ .

*Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021-2022*

**Đáp án: D**

**Tự luận**

**Bài 30:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia số đó cho 3 dư 1 ; chia cho 4 dư 2 ; chia cho 5 dư 3 ; chia cho 6 dư 4 và chia hết cho 11 .

*Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022*

**Lời giải**

Gọi số phải tìm là  $x$ . Theo bài ra ta có  $x+2$  chia hết cho 3, 4, 5, 6.

nên  $x+2$  là bội chung của 3, 4, 5, 6

Mà  $BCNN(3; 4; 5; 6) = 60$  nên  $x+2 = 60.n$ .

Do đó  $x = 60.n - 2 (n = 1; 2; 3...)$ .

Mặt khác  $x:11$  nên lần lượt cho  $n = 1; 2; 3...$  Ta thấy  $n = 7$  thì  $x = 418:11$

Vậy số nhỏ nhất phải tìm là 418 .

**Bài 31:** Tìm các số nguyên  $x$  sao cho  $4x-3 : x-2$

*Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019*

**Lời giải**

Ta có:  $4x-3 = 4x-8+5 = 4(x-2)+5$

Vì  $4(x-2) : x-2$

Suy ra  $4x-3 : x-2$  hay  $5 : x-2$

Suy ra  $x-2 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

Suy ra  $x \in \{1; -3; 3; 7\}$

**Bài 32:** Tìm các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn  $2xy + y - 10x = 11$ .

*Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022*

**Lời giải**

Ta có:

$$2xy + y - 10x = 11$$

$$y(2x + 1) - 5(2x + 1) = 6$$

$$(y - 5)(2x + 1) = 6$$

Vì  $x, y \in \mathbb{Z}$  nên  $y - 5, 2x + 1$  là Ư(6) mà lẻ nên ta có bảng sau

$2x+1$	-1	1	-3	3
$y-5$	-6	6	-2	2
$x$	-1	0	-2	1
$y$	-1	11	3	7

Vậy cặp thỏa mãn là  $(x; y) \in \{(-1; -1), (0; 11), (-2; 3), (1; 7)\}$

**Bài 33.** Tìm số tự nhiên  $n$  để phân số  $\frac{6n+4}{2n-1}$  có giá trị là một số nguyên.

*Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022*

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \frac{6n+4}{2n-1} = \frac{6n-3+7}{2n-1} = 3n + \frac{7}{2n-1}$$

Vì  $n \in \mathbb{N}$  nên để  $\frac{6n+4}{2n-1}$  nguyên thì  $\frac{7}{2n-1}$  nguyên.

Khi đó  $(2n-1) \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$  nên  $n \in \{-3; 0; 1; 4\}$

Do  $n \in \mathbb{N}$  nên  $n \in \{0; 1; 4\}$

**Bài 34.** Tìm số tự nhiên  $n$  để phân số  $\frac{n+3}{2n-2}$  có giá trị là số nguyên.

*Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019*

**Lời giải**

Để phân số  $\frac{n+3}{2n-2}$  có giá trị là nguyên thì  $n+3 : 2n-2$

$$2(n+3) : 2n-2$$

Suy ra  $(2n+6) - (2n-2) : (2n-2)$

Suy ra  $(2n-2n) + (6+2) : 2n-2$  suy ra  $8 : 2n-2$

Suy ra  $(2n-2) \in \{\pm 2; \pm 4; \pm 8\}$

Sau khi thử các trường hợp ta được  $n = 5$

## II. Tìm số thỏa mãn điều kiện cho trước

**Bài 1:** Tìm tất cả các cặp số nguyên sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

*Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018-2019*

**Lời giải**

$M = -a$  Gọi hai số nguyên đó là  $x$  và  $y$

Theo bài ra ta có:

$$xy = x + y$$

$$\Rightarrow xy - x - y + 1 = 1$$

$$\Rightarrow (x-1)(y-1) = 1$$

$\Rightarrow x-1, y-1$  là các ước của 1

$\Rightarrow x-1 = y-1 = 1$  hoặc  $x-1 = y-1 = -1$

$$\Rightarrow x = y = 2 \text{ hoặc } x = y = 0$$

**Bài 2:** Tìm số nguyên  $x$ , biết:

$$a) 2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7$$

$$b) \frac{x}{6} + \frac{x}{10} + \frac{x}{15} + \frac{x}{21} + \frac{x}{28} + \frac{x}{36} + \frac{x}{45} + \frac{x}{55} + \frac{x}{66} + \frac{x}{78} = \frac{220}{39}$$

*Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018- 2019*

**Lời giải**

$$a) 2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7 \Leftrightarrow 2016 : [25 - (3x + 2)] = 63$$

$$\Leftrightarrow 25 - (3x + 2) = 2016 : 63 \Rightarrow 25 - (3x + 2) = 32$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2 = -7 \Leftrightarrow 3x = -9 \Leftrightarrow x = -3$$

$$b) \frac{x}{6} + \frac{x}{10} + \frac{x}{15} + \frac{x}{21} + \frac{x}{28} + \frac{x}{36} + \frac{x}{45} + \frac{x}{55} + \frac{x}{66} + \frac{x}{78} = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{36} + \frac{1}{45} + \frac{1}{55} + \frac{1}{66} + \frac{1}{78} \right) = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110} + \frac{1}{132} + \frac{1}{156} \right) = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \left( \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 13} \right) = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} \right) = \frac{220}{39}$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{13} \right) = \frac{220}{39} \Rightarrow x = 11$$

**Bài 3:** Tìm các cặp số nguyên  $(x; y)$  biết:  $\frac{x}{5} + 1 = \frac{1}{y-1}$

*Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019*

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \frac{x}{5} + 1 = \frac{1}{y-1} \Leftrightarrow \frac{x+5}{5} = \frac{1}{y-1} \Leftrightarrow (x+5)(y-1) = 5 \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow (x+5)(y-1) = 5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = -5 \cdot (-1) = (-1) \cdot (-5)$$

Thay hết tất cả các trường hợp ta có:

$$(x; y) = \{(0; 2); (-4; 6); (-10; 0); (-6; -4)\}$$

## B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

### I. Ước và bội.

#### Dạng 1: Chứng minh sự chia hết.

**Bài 1:** Cho  $M = (-a+b) - (b+c-a) + (c-a)$ . Trong đó  $b, c \in \mathbb{Z}$  còn  $a$  là một số nguyên âm. Chứng minh rằng biểu thức  $M$  luôn dương

*Trích đề HSG huyện Lâm Thao, năm 2017 - 2018*

**Bài 2:** Cho  $\overline{ababab}$  là số có sáu chữ số, chứng tỏ số  $\overline{ababab}$  là bội của 3.

*Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2018 - 2019*

**Bài 3:** Tìm số nguyên  $n$  sao cho  $4n-5$  chia hết cho  $2n-1$ .

*Trích đề HSG huyện Lập Thạch năm 2015-2016*

#### Bài 4:

a) Cho  $\overline{ababab}$  là số có sáu chữ số, chứng tỏ số  $\overline{ababab}$  là bội của 3

b) Chứng tỏ :  $S = 16^5 + 2^{15}$  chia hết cho 33

*Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2018 - 2019*

**Bài 5:** Chứng minh rằng với mọi số nguyên  $n$  ta có  $n^3 - n : 6$

*Trích đề chọn HSG Trục Ninh năm 2017-2018*

**Bài 6:** Chứng tỏ rằng  $a^2 + 3a + 1$  không thể chia hết cho 2 với  $a$  là số nguyên.

*Trích đề HSG huyện Hiệp Hoà năm 2021-2022*

**Bài 7:** Chứng tỏ  $4x+3y$  chia hết cho 7 khi  $2x+5y$  chia hết cho 7.

*Trích đề HSG cấp huyện năm 2018-2019*

#### Dạng 2: Tìm số thỏa mãn điều kiện chia hết.

**Bài 1:** Xét phân số  $A = \frac{n^2 + 4}{n + 5}$ . Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên  $n$  trong khoảng từ 1 đến 2022 sao cho phân số  $A$  chưa tối giản.

A. 79

B. 89

C. 99

D. 69

*Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021 - 2022*

**Bài 2:** Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị nguyên của  $x$  để  $x+3$  chia hết cho  $x-2$ . Số tập hợp con của tập hợp  $S$  là:

A. 4

B. 16

C. 15

D. 5

*Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021 - 2022*

**Bài 3:** Số nguyên dương nhỏ nhất không phải là ước của tích  $1.2.3.4 \dots 96.97.98$  là

A. 78

B. 99

C. 101

D. 100

*Trích đề HSG huyện Tân Yên năm 2021 - 2022*

**Bài 4:** Tìm số nguyên  $n$  để  $(n+3):(n+1)$

*Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019*

**Bài 5:** Có ba chồng sách: Văn, Âm nhạc, Toán, mỗi chồng chỉ gồm một loại sách. Mỗi cuốn Văn dày 15 mm, mỗi cuốn Âm nhạc dày 6 mm, mỗi cuốn Toán dày 8 mm. Người ta xếp cho 3 chồng sách cao bằng nhau. Tính chiều cao nhỏ nhất của ba chồng sách đó.

*Trích đề HSG huyện Nghi Sơn năm 2021 - 2022*

**Bài 6:** Tìm tất cả các cặp số nguyên  $x, y$  sao cho  $xy - 2x + y + 1 = 0$

*Trích đề HSG huyện Thạch Thành, năm 2018- 2019*

**Bài 7:** Tìm số nguyên  $n$  để phân số  $\frac{4n+5}{2n-1}$  có giá trị là một số nguyên.

*Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018- 2019*

**Bài 8:** Tìm số nguyên  $n$  để phân số  $\frac{4n+5}{2n-1}$  có giá trị là một số nguyên

*Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018-2019*

**Bài 9:** Tìm hai số nguyên tố  $x$  và  $y$  sao cho:  $x^2 - 2x + 1 = 6y^2 - 2x + 2$

*Trích đề HSG huyện Việt Yên năm 2018-2019*

**Bài 10:** Số học sinh khối 6 của một trường chưa đến 400 bạn, biết khi xếp hàng 10; hàng 12; 15 đều dư 3 nhưng nếu xếp hàng 11 thì không dư. Tính số học sinh khối 6 của trường đó.

*Trích đề HSG huyện Tân Uyên năm 2018-2019*

**Bài 11:** Tìm số nguyên  $n$  để  $A = 2n^2 + n - 6$  chia hết cho  $2n + 1$ .

*Trích đề HSG huyện Hậu Lộc năm 2021-2022*

**Bài 12:** Tìm các số nguyên  $n$  sao cho:  $n^2 + 5n + 9$  là bội của  $n + 3$ .

*HSG huyện Hoàng Hóa năm 2014 -2015*

**Bài 13:** Tìm các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn :  $2xy - x - y = 2$ .

*Trích đề HSG huyện Triệu Sơn năm 2021-2022*

**Bài 14:** Tìm tất cả các cặp số tự nhiên khác không  $(x, y)$  sao cho  $(2x+5) \cdot (x+2) = 3^y$

*Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022*

**Bài 15:** Tìm các số nguyên  $a, b$  biết rằng:  $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$

*Trích đề HSG huyện Hoài Nhơn năm 2015-2016*

**Bài 16:** Tìm các cặp số tự nhiên  $x, y$  sao cho  $(2x+1)(y-5) = 12$

*Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015-2016*

**Bài 17:** Tìm tất cả các số nguyên  $n$  để:

a) Phân số  $\frac{n+1}{n-2}$  có giá trị là một số nguyên

b) Phân số  $\frac{12n+1}{30n+2}$  là phân số tối giản

*Trích đề HSG huyện Lương Tài năm 2015-2016*

**Bài 18:** Cho biểu thức :  $P = \frac{2n+1}{n-4}$ .



- a) Với điều kiện nào của số nguyên  $n$  thì  $P$  là một phân số. Tính giá trị của  $P$  khi  $n = -203$ .  
b) Viết tập hợp  $M$  các số nguyên  $n$  sao cho phân số  $P$  có giá trị là một số nguyên.

*Trích đề HSG huyện Đông Hưng năm 2021-2022*

**Bài 19:** Tìm  $x$  nguyên dương để  $2x-1$  chia hết cho  $x-3$ .

*Trích đề HSG TP Bắc Giang năm 2021-2022*

**Bài 20:** Tìm số tự nhiên  $n$  lớn nhất biết rằng khi chia các số  $6355; 1705; 1271$  cho  $n$  được các số dư lần lượt là  $55; 25$  và  $1111$ .

*Trích đề HSG TP Bắc Ninh năm 2021-2022*

**Bài 21:** Tìm số tự nhiên  $x$  biết:  $24 : x$ ;  $36 : x$ ;  $160 : x$  và  $x$  là số lớn nhất.

*Trích đề HSG Huyện Đông Hưng năm 2021-2022*

**Bài 22:** Tìm số tự nhiên  $a$  nhỏ nhất sao cho:  $a$  chia cho 5 dư 3,  $a$  chia cho 7 dư 4

*Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019*

**Bài 23:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng số đó chia cho 9 dư 5, chia cho 7 dư 4 và chia cho 5 dư 3

*Trích đề HSG cấp trường Bá Thước năm 2018-2019*

**Bài 24:** Tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng bằng 84, ƯCLN, của chúng bằng 6

*Trích đề HSG cấp trường vòng 2 THCS Tân Lập năm 2018-2019*

**Bài 25:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khác 0 biết rằng số đó có 15 ước dương

*Trích đề chọn HSG Tam Dương năm 2016-2017*

**Bài 26:** Tìm số nguyên  $n$  để phân số  $M = \frac{2n-7}{n-5}$  có giá trị là số nguyên

*Trích đề HSG huyện Thanh Chương năm 2018-2019*

**Bài 27:** Tìm các cặp số nguyên  $(x; y)$  biết:  $2x(3y-2) + (3y-2) = -55$

*Trích đề HSG cấp trường Hà Huy Tập năm 2018-2019*

**Bài 28:** Cho  $a$  là một số nguyên có dạng  $a = 3b + 7 (b \in \mathbb{Z})$ . Hỏi  $a$  có thể nhận những giá trị nào trong các giá trị sau:  $a = 11; a = 2002; a = 2003; a = 11570; a = 22789; a = 29563; a = 299537$

*Trích đề HSG cấp trường Bá Thước năm 2018-2019*

### Trắc nghiệm

**Bài 29:** Tập hợp các số tự nhiên  $x$  thỏa mãn  $6 : (x-2)$  là:

- A.  $\{1; 2; 3; 6\}$ .      B.  $\{3; 6\}$ .      C.  $\{5; 8\}$ .      D.  $\{3; 4; 5; 8\}$ .

*Trích đề HSG trường THCS Việt Tiến (Việt Yên) năm 2021-2022*

### Tự luận

**Bài 30:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia số đó cho 3 dư 1 ; chia cho 4 dư 2 ; chia cho 5 dư 3 ; chia cho 6 dư 4 và chia hết cho 11 .

*Trích đề HSG Trường THCS Minh Đức năm 2021 - 2022*

**Bài 31:** Tìm các số nguyên  $x$  sao cho  $4x-3 : x-2$

*Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019*

**Bài 32:** Tìm các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn  $2xy + y - 10x = 11$  .

*Trích đề HSG huyện Bình Xuyên năm 2021-2022*

**Bài 33.** Tìm số tự nhiên  $n$  để phân số  $\frac{6n+4}{2n-1}$  có giá trị là một số nguyên.

*Trích đề HSG Liên trường năm 2021-2022*

**Bài 34.** Tìm số tự nhiên  $n$  để phân số  $\frac{n+3}{2n-2}$  có giá trị là số nguyên.

*Trích đề HSG cấp trường năm 2018-2019*

## II. Tìm số thỏa mãn điều kiện cho trước

**Bài 1:** Tìm tất cả các cặp số nguyên sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

*Trích đề HSG huyện Lâm Thao năm 2018- 2019*

**Bài 2:** Tìm số nguyên  $x$ , biết:

a)  $2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7$

b)  $\frac{x}{6} + \frac{x}{10} + \frac{x}{15} + \frac{x}{21} + \frac{x}{28} + \frac{x}{36} + \frac{x}{45} + \frac{x}{55} + \frac{x}{66} + \frac{x}{78} = \frac{220}{39}$

*Trích đề HSG huyện Thạch Thành năm 2018- 2019*

**Bài 3:** Tìm các cặp số nguyên  $(x; y)$  biết:  $\frac{x}{5} + 1 = \frac{1}{y-1}$

*Trích đề HSG huyện Vũ Thư, năm 2018- 2019*

### C. SỬU TÀM CÁC BÀI TƯƠNG TỰ

**Bài 1:** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$  thì  $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$  chia hết cho 10.

#### Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n &= (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n) = 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) \\ &= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 = 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}) \text{ chia hết cho 10.} \end{aligned}$$

Vậy với mọi số nguyên dương  $n$  thì  $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$  chia hết cho 10.

**Bài 2:** Tìm số tự nhiên  $n$  thỏa mãn  $(2n+7):n+1$

#### Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (2n+7):n+1 &\Leftrightarrow 2n+7-2(n+1):n+1 \\ &\Leftrightarrow (2n+7)-(2n+2):n+1 \Leftrightarrow 2n+7-2n-2:n+1 \Leftrightarrow 5:n+1 \\ &\Rightarrow n+1 \in \{\pm 1; \pm 5\} \Rightarrow n \in \{-6; -2; 0; 4\} \end{aligned}$$

Vì  $n \in \mathbb{N}$  nên  $n \in \{0; 4\}$

Vậy với  $n \in \{0; 4\}$  thì  $(2n+7):n+1$

**Bài 3:** Tìm số nguyên  $n$  để  $A = 2n^2 + n - 6$  chia hết cho  $2n+1$

#### Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 2n^2 + n - 6 = n(2n+1) - 6$$

Vì  $A$  chia hết cho  $2n+1$  nên  $n(2n+1) - 6:2n+1$  mà  $n(2n+1):2n+1$  nên

$$6:2n+1 \Rightarrow 2n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3 \pm 6\}.$$

Do  $2n+1$  là số lẻ nên  $2n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 3\}$ . Ta có bảng sau:

$2n+1$	1	-1	3	-3
$2n$	0	-2	2	-4
$n$	0	-1	1	-2

Vậy  $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$

**Bài 4:** Tìm các cặp số nguyên  $x, y$  thỏa mãn:  $3xy + 2x - 5y = 6$

#### Lời giải

$$\begin{aligned} 3xy + 2x - 5y = 6 &\Rightarrow x(3y+2) - 5y = 6 \Rightarrow 3x(3y+2) - 15y = 18 \\ &\Rightarrow 3x(3y+2) - 15y - 10 = 18 - 10 \Rightarrow 3x(3y+2) - 5(3y+2) = 8 \\ &\Rightarrow (3x-5)(3y+2) = 8 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3y+2 \in U(8) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$$

Mà  $3y+2$  là số chia cho 3 dư 2  $\Rightarrow 3y+2 \in \{-1; 2; -4; 8\}$ .

Ta có bảng sau:

$3y+2$	-4	-1	2	8
$3x-5$	-2	-8	4	1
$y$	-2	-1	0	2
$x$	1	-1	3	2

Vậy  $(x; y) \in \{(1; -2), (-1; -1), (3; 0), (2; 2)\}$

**Bài 5:** Tìm các số nguyên dương  $x, y$  thỏa mãn  $2x + 3y = 14$

**Lời giải**

Xét  $2x + 3y = 14$  (1)

Ta có:  $14 : 2; 2x : 2 \Rightarrow 5y : 2 \Rightarrow y : 2$

$5y < 14 \Rightarrow y < 14 : 5 \Rightarrow y \leq 2$

mà  $y$  chẵn nên  $y = 2$  thay vào (1)  $\Rightarrow x = 2$

Vậy  $x = 2; y = 2$

**Bài 6:** Tìm các số nguyên  $x, y$  sao cho:  $(x+1)(xy-1) = 3$

**Lời giải**

Vì  $(x+1)(xy-1) = 3, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x+1 \in \mathbb{Z}, xy-1 \in \mathbb{Z}$

Do đó,  $(x+1), (xy-1) \in \{\pm 1; \pm 3\}$

Ta có:

$x+1$	1	-1	3	-3
$xy-1$	3	-3	1	-3
$x$	0	-2	2	-4
$y$	Ktm	1	1	0

Vậy các cặp  $(x, y)$  thỏa mãn là:  $(-2; 1); (2; 1); (-4; 0)$

**Bài 7:** Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  biết:  $(3n+8):(n+1)$

**Lời giải:**

Ta có:  $3n+8 = 3n+3+5 = 3(n+1)+5$

Suy ra:  $(3n+8):(n+1)$  khi  $(n+1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$ .

Vậy  $n \in \{-6; -2; 0; 4\}$ .

**Bài 8:** Tìm số nguyên  $n$  để  $(n^2+3n+6):(n+3)$

**Lời giải:**

Ta có  $n^2+3n+6 = n(n+3)+6$

Vì  $n(n+3):(n+3)$ , nên để  $(n^2+3n+6):(n+3)$  thì  $6:(n+3)$

Mà  $n \in \mathbb{Z}$  nên  $(n+3)$  là ước của 6

$$\Rightarrow (n+3) \in \{\pm 3; \pm 6\} \Rightarrow n \in \{0; -6; 3; -9\}$$

Vậy  $n \in \{0; -6; 3; -9\}$  thì  $(n^2 + 3n + 6) : (n+3)$

**Bài 9:** Tìm tất cả các số nguyên  $n$  để phân số  $\frac{n+1}{n-2}$  có giá trị là một số nguyên

**Lời giải:**

Ta có  $\frac{n+1}{n-2}$  là một số nguyên khi  $(n+1) : (n-2)$

Ta có  $n+1 = (n-2) + 3$ , do đó  $(n+1) : (n-2)$  khi  $3 : (n-2)$

$\Rightarrow (n-2)$  là ước của 3

$$\Rightarrow (n-2) \in \{-3; -1; 1; 3\} \Rightarrow n \in \{-1; 1; 3; 5\}$$

Vậy  $n \in \{-1; 1; 3; 5\}$  thì  $\frac{n+1}{n-2}$  có giá trị là một số nguyên.

**Bài 10:** Cho  $A = 999993^{1999} - 555557^{1997}$ . Chứng minh rằng A chia hết cho 5

*Trích đề HSG huyện Mường Ảng, năm 2014- 2015*

**Lời giải**

Để chứng minh  $A : 5$  ta xét chữ số tận cùng của A bằng việc xét chữ số tận cùng của từng số hạng.

Ta có:  $3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3^3 = 81^{499} \cdot 27$  nên  $3^{1999}$  có tận cùng là 7

$$7^{1997} = (7^4)^{499} \cdot 7 = 2401^{499} \cdot 7 \Rightarrow 7^{1997} \text{ tận cùng là } 7$$

Vậy A có tận cùng là 0 nên  $A : 5$

**Bài 11:** Tìm số nguyên  $n$  để  $n^2 + 3 : n - 1$

*Trích đề HSG huyện Xuân Trường, năm 2013- 2014*

**Lời giải**

Ta có  $n^2 + 3 = n(n-1) + n + 3$  (Thêm bớt  $n$  để làm xuất hiện tích  $n-1$ )  $= n(n-1) + (n-1) + 1 + 3$  (

Thêm bớt 1 để làm xuất hiện  $n-1$ )

$$= (n-1)(n+1) + 4 : n-1$$

Vì  $(n-1)(n+1) : n-1$  nên suy ra  $4 : n-1$

$$n-1 \in U(4) = \{-4; -2; 1; 2; 4\}$$

$$\Rightarrow n \in \{-3; -1; 0; 2; 3; 5\}$$

Vậy  $n \in \{-3; -1; 0; 2; 3; 5\}$  thì  $n^2 + 3 : n - 1$

**Bài 12:** Cho  $A = \frac{3n-5}{n+4}$ , tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để A có giá trị nguyên.

*Trích đề HSG huyện Tĩnh Gia năm 2018 - 2019*

**Lời giải**

Ta có

$$A = \frac{3n-5}{n+4} = 3 + \frac{-17}{n+4}$$

A có giá trị nguyên khi và chỉ khi  $(n+4) \in U(-17) = \{\pm 1; \pm 17\}$ .

Ta có bảng sau:

$n+4$	-17	-1	1	17
$n$	-21	-5	-3	13

Vậy  $n \in \{-21; -5; -3; 13\}$  thì A có giá trị nguyên.

**Bài 13:** Tìm các số nguyên  $n$  sao cho  $n^2 + 5n + 9$  là bội của  $n+3$ .

*Trích đề HSG huyện Hưng Hà (Thái Bình) năm 2018 - 2019*

**Lời giải**

Ta có  $n^2 + 5n + 9 = n(n+3) + 2n + 1 = n(n+3) + 2(n+3) - 5 = (n+3) \cdot (n+2) - 5 : n+3$

Vì  $(n+3) \cdot (n+2) : n+3$  nên  $5 : n+3$

Suy ra  $n+3 \in U(5) = \{-5; -1; 1; 5\}$

hay  $n \in \{-8; -4; -2; 2\}$

Vậy  $n \in \{-8; -4; -2; 2\}$ .

**Bài 14:** Tìm  $x, y$  nguyên biết  $\frac{2}{y} - \frac{1}{x} = \frac{8}{xy} + 1$ .

**Lời giải**

Từ  $\frac{2}{y} - \frac{1}{x} = \frac{8}{xy} + 1$ .

Suy ra  $\frac{2x-y}{x \cdot y} = \frac{8+xy}{x \cdot y}$

$$2x - y = 8 + xy$$

$$xy - 2x + y = -8$$

$$x \cdot (y-2) + y - 2 = -10$$

$$(y-2) \cdot (x+1) = -10.$$

Ta có bảng sau:

$x+1$	-10	-5	-2	-1	1	2	5	10
$x$	-11	-6	-3	-2	0	1	4	9
$y-2$	1	2	5	10	-10	-5	-2	-1
$y$	3	4	7	12	-8	-3	0	1

Vậy các cặp số  $(x, y)$  nguyên thoả mãn là  $(-11; 3), (-6; 4), (-3; 7), (-2; 12), (0; -8), (1; -3), (4; 0), (9; 1)$

**Bài 15:** Tìm số nguyên  $x, y$  biết  $6x^2 + 5y^2 = 74$ .

**Lời giải**

Từ  $6x^2 + 5y^2 = 74$

Suy ra  $6x^2 \leq 74$  do đó  $x^2 \leq \frac{74}{6}$  mà  $x \in \mathbb{Z}$  nên  $x^2 \in \{0; 1; 4; 9\}$ .

TH1:  $x^2 = 0$  suy ra  $5y^2 = 74$  (loại)

TH2:  $x^2 = 1$  suy ra  $6 + 5y^2 = 74$  hay  $5y^2 = 68$  (loại)

TH3:  $x^2 = 4$  suy ra  $6.4 + 5y^2 = 74$  nên  $5y^2 = 50$  hay  $y^2 = 10$  (loại)

TH4:  $x^2 = 9$  ( $x = \pm 3$ ) suy ra  $6.9 + 5y^2 = 74$  nên  $5y^2 = 20$  hay  $y^2 = 4$  suy ra  $y = \pm 2$ .

Vậy các cặp số  $(x; y)$  nguyên thoả mãn là  $(-3; -2), (-3; 2), (3; -2), (3; 2)$ .

**Bài 16:** Tìm các số nguyên  $x, y$  thoả mãn  $2x^2 + 3y^2 = 77$ .

**Lời giải**

Từ  $2x^2 + 3y^2 = 77$

Suy ra  $0 \leq 3y^2 \leq 77$  do đó  $0 \leq y^2 \leq 25$  mà  $y \in \mathbb{Z}$  và  $y^2$  là số chính phương nên  $y^2 \in \{1; 9; 25\}$ .

TH1:  $y^2 = 1$  suy ra  $2x^2 + 3 = 77$  nên  $2x^2 = 74$  hay  $x^2 = 37$  (loại).

TH2:  $y^2 = 9$  ( $y = \pm 3$ ) suy ra  $2x^2 + 3.9 = 77$  nên  $2x^2 = 50$  hay  $x^2 = 25$  suy ra  $x = \pm 5$ .

TH3:  $y^2 = 25$  ( $y = \pm 5$ ) suy ra  $2x^2 + 3.25 = 77$  nên  $2x^2 = 2$  hay  $x^2 = 1$  suy ra  $x = \pm 1$ .

Vậy các cặp số  $(x; y)$  nguyên thoả mãn là

$(-5; -3), (-5; 3), (5; -3), (5; 3), (-1; -5), (-1; 5), (1; -5), (1; 5)$ .

**Bài 17:** Tìm các giá trị  $x, y$  nguyên thoả mãn:

a)  $x(y+2) = -8$

b)  $x(y-3) = -12$

c)  $(x+1)y = 3$

**Lời giải**

a) Vì  $x, y$  là các số nguyên nên  $x, (y+2)$  cũng là các số nguyên

Mà  $x(y+2) = -8$ . Nên  $x, (y+2) \in U(-8) = \{1; 2; 4; 8; -1; -2; -4; -8\}$

Ta có bảng sau:

$x$	1	2	4	8	-1	-2	-4	-8
$y+2$	-8	-4	-2	-1	8	4	2	1
$y$	-10	-6	-4	-3	6	2	0	-1

Vậy các cặp số  $(x; y)$  nguyên thoả mãn là

$(1; -10), (2; -6), (4; -4), (8; -3), (-1; 6), (-2; 2), (-4; 0), (-8; -1)$ .

b) Vì  $x, y$  là các số nguyên nên  $x, (y-3)$  cũng là các số nguyên

Mà  $x(y-3) = -12$  nên  $x, (y-3) \in U(-12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12; -1; -2; -3; -4; -6; -12\}$

Ta có bảng sau:

$x$	1	2	3	4	6	12	-1	-2	-3	-4	-6	-12
$y-3$	-12	-6	-4	-3	-2	-1	12	6	4	3	2	1
$y$	-9	-3	-1	0	1	2	15	9	7	6	5	4

Vậy các cặp số  $(x; y)$  nguyên thoả mãn là

$(1; -9), (2; -3), (3; -1), (4; 0), (6; 1), (12; 2), (-1; 15), (-2; 9), (-3; 7), (-4; 6), (-6; 5), (-12; 4)$ .

c) Vì  $x, y$  là các số nguyên nên  $(x+1), y$  cũng là các số nguyên

Mà  $(x+1)y = 3$  nên  $(x+1), y \in U(3) = \{1; 3; -1; -3\}$ .

Ta có bảng sau:

$x+1$	1	3	-1	-3
$x$	0	2	-2	-4
$y$	3	1	-3	-1

Vậy các cặp số  $(x; y)$  nguyên thỏa mãn là  $(0;3), (2;1), (-2;-3), (-4;-1)$ .

**Bài 18:** Tìm các giá trị  $x, y$  nguyên thỏa mãn  $(x+1)(y-3)=3$

**Lời giải**

Vì  $x, y$  là các số nguyên nên  $(x+1), (y-3)$  cũng là các số nguyên. Mà  $(x+1)(y-3)=3$  nên  $(x+1), (y-3) \in U(3) = \{1; 3; -1; -3\}$ . Ta có bảng sau:

$x+1$	1	3	-1	-3
$x$	0	2	-2	-4
$y-3$	3	1	-3	-1
$y$	6	4	0	2

Vậy các cặp số nguyên  $(x; y)$  cần tìm là  $(0;6), (2;4), (-2;0), (-4;2)$ .

**Bài 19:** Tìm các giá trị  $x, y$  nguyên thỏa mãn  $(2x+1)(y-5)=12$

**Lời giải**

Vì  $x, y$  là các số nguyên nên  $(2x+1), (y-5)$  cũng là các số nguyên.

Mà  $(2x+1)(y-5)=12$  nên  $(2x+1), (y-5) \in U(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12; -1; -2; -3; -4; -6; -12\}$

Vì  $2x+1$  là số lẻ nên ta có bảng sau:

$2x+1$	1	3	-1	-3
$x$	0	1	-1	-2
$y-5$	12	4	-12	-4
$y$	17	9	-7	1

Vậy các cặp số nguyên  $(x; y)$  cần tìm là  $(0;17), (1;9), (-1;-7), (-2;1)$ .

**Bài 20:** Tìm  $x, y$  nguyên thỏa mãn:  $(x-3)=y(x+2)$  với  $x \neq -2$ .

**Lời giải**

$$\text{Vì } (x-3)=y(x+2) \quad (1)$$

$$\text{nên } x-3 \vdots x+2$$

$$\text{Suy ra } x+2-5 \vdots x+2$$

$$\text{Mà } x+2 \vdots x+2 \text{ với mọi } x \text{ nguyên, } x \neq -2.$$

$$\text{Nên } 5 \vdots x+2 \text{ suy ra } x+2 \in U(5) = \{1; 5; -1; -5\}.$$

$$\text{suy ra } x \in \{-1; 3; -3; -7\}.$$

$$\text{Với } x=-1 \text{ thay vào (1) ta được } -4=y.1 \text{ suy ra } y=-4.$$

$$\text{Với } x=3 \text{ thay vào (1) ta được } 0=y.5 \text{ suy ra } y=0.$$

$$\text{Với } x=-3 \text{ thay vào (1) ta được } -6=y.(-1) \text{ suy ra } y=6.$$

$$\text{Với } x=-7 \text{ thay vào (1) ta được } -10=y.(-5) \text{ suy ra } y=2.$$



Vậy các cặp số nguyên  $(x; y)$  cần tìm là  $(-1; -4), (3; 0), (-3; -6), (-7; 2)$ .

**Bài 21:** Tìm các số nguyên  $x$ , biết:

a)  $3x+2 \vdots x-1$

b)  $2x-5 \vdots x-1$

c)  $2x+3 \vdots x+1$

**Lời giải**

a)  $3x+2 \vdots x-1$

Suy ra  $3x-3+5 \vdots x-1$

hay  $3(x-1)+5 \vdots x-1$

Vì  $3(x-1) \vdots x-1$  với mọi  $x \neq 1$

nên  $5 \vdots x-1$  suy ra  $x-1 \in U(5) = \{1; 5; -1; -5\}$ .

suy ra  $x \in \{2; 6; 0; -4\}$ .

b)  $2x-5 \vdots x-1$

Suy ra  $2x-2-3 \vdots x-1$

hay  $2(x-1)-3 \vdots x-1$

Vì  $x-1 \vdots x-1$  với mọi  $x \neq 1$

nên  $3 \vdots x-1$  suy ra  $x-1 \in U(3) = \{1; 3; -1; -3\}$ .

suy ra  $x \in \{2; 4; 0; -2\}$ .

c)  $2x+3 \vdots x+1$

Suy ra  $2x+2+1 \vdots x+1$

hay  $2(x+1)+1 \vdots x+1$

Vì  $2(x+1) \vdots x+1$  với mọi  $x \neq -1$ .

nên  $1 \vdots x+1$  suy ra  $x+1 \in U(1) = \{-1; 1\}$ .

suy ra  $x \in \{0; -2\}$ .

**Bài 22:** Tìm các số nguyên  $x$ , biết

a)  $2x+5 \vdots 2x-1$

b)  $4x-5 \vdots 2x-1$

c)  $10-2x \vdots x-2$

**Lời giải**

a)  $2x+5 \vdots 2x-1 \Rightarrow 2x-1+6 \vdots 2x-1$

Vì  $2x-1 \vdots 2x-1$  với mọi  $x$  nguyên

Nên  $6 \vdots 2x-1 \Rightarrow 2x-1 \in U(6) = \{1; 2; 3; 6; -1; -2; -3; -6\}$

$\Rightarrow 2x \in \{2; 3; 4; 7; 0; -1; -2; -5\}$

$\Rightarrow x \in \left\{1; \frac{3}{2}; 2; \frac{7}{2}; 0; \frac{-1}{2}; -1; \frac{-5}{2}\right\}$ .

Vì  $x \in \mathbb{Z}$  nên  $x \in \{1; 2; 0; -1\}$ .

b)  $4x-5 \vdots 2x-1$

$\Rightarrow 4x-2-3 \vdots 2x-1$

$\Rightarrow 2(2x-1)-3 \vdots 2x-1$

Vì  $2(2x-1) \vdots 2x-1$  với mọi  $x$  nguyên

Nên  $3 \vdots 2x-1 \Rightarrow 2x-1 \in U(3) = \{1; 3; -1; -3\}$

$\Rightarrow 2x \in \{2; 4; 0; -2\}$

$\Rightarrow x \in \{1; 2; 0; -1\}$ .

Vậy  $x \in \{1; 2; 0; -1\}$ .

**Bài 23:** Tìm các số nguyên  $x$ , biết  $10 - 2x \vdots x - 2$

**Lời giải**

Ta có:  $10 - 2x \vdots x - 2$

$$\Rightarrow 2x - 10 \vdots x - 2$$

$$\Rightarrow 2x - 4 - 6 \vdots x - 2$$

$$\Rightarrow 2(x - 2) - 6 \vdots x - 2$$

Vì  $2(x - 2) \vdots x - 2$  với mọi  $x$  nguyên khác 2.

$$\text{Nên } 6 \vdots x - 2 \Rightarrow x - 2 \in U(6) = \{1; 2; 3; 6; -1; -2; -3; -6\}$$

$$\Rightarrow x \in \{3; 4; 5; 8; 1; 0; -1; -4\}$$

Vậy  $x \in \{3; 4; 5; 8; 1; 0; -1; -4\}$ .

**Bài 24:** Tìm số nguyên  $n$  với  $n \neq 2$  để phân số  $A = \frac{n+1}{n-2}$  có giá trị là số nguyên.

**Lời giải**

Để phân số  $A$  có giá trị là một số nguyên thì  $n + 1 \vdots n - 2$

$$\Rightarrow n - 2 + 3 \vdots n - 2$$

Vì  $n - 2 \vdots n - 2$  với mọi số nguyên  $n$  khác 2.

$$\text{Nên } 3 \vdots n - 2 \Rightarrow n - 2 \in U(3) = \{1; 3; -1; -3\}$$

$$\Rightarrow n \in \{3; 5; 1; -1\}.$$

**Bài 25:** Tìm số nguyên  $n$  với  $n \neq 1$  để phân số  $A = \frac{n+2}{n-1}$  có giá trị là số nguyên.

**Lời giải**

Để phân số  $A$  có giá trị là một số nguyên thì  $n + 2 \vdots n - 1 \Rightarrow n - 1 + 3 \vdots n - 1$

Vì  $n - 1 \vdots n - 1$  với mọi số nguyên  $n$  khác 1

$$\text{Nên } 3 \vdots n - 1 \Rightarrow n - 1 \in U(3) = \{1; 3; -1; -3\}$$

$$\Rightarrow n \in \{2; 4; 0; -2\}.$$

**Bài 26:** Tìm  $x, y$  nguyên thỏa mãn  $xy - 3x = -19$ .

**Lời giải**

$$xy - 3x = -19$$

$$\Rightarrow x(y - 3) = -19.$$

Vì  $x, y$  là các số nguyên nên  $x, (y - 3)$  cũng là các số nguyên

$$\text{Nên } x, (y - 3) \in U(-19) = \{1; 19; -1; -19\}$$

Ta có bảng sau:

$x$	1	19	-1	-19
$y - 3$	-19	-1	19	1
$y$	-16	2	22	4

Vậy các cặp số nguyên  $(x; y)$  cần tìm là  $(1; -16), (19; 2), (-1; 22), (-19; 4)$ .

**Bài 27:** Tìm  $x, y$  nguyên thỏa mãn  $2x + xy - y = 9$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } 2x + xy - y = 9$$

$$\Rightarrow x(y + 2) - y - 2 + 2 = 9$$

$$\Rightarrow x(y+2)-(y+2)=7$$

$$\Rightarrow (y+2)(x-1)=7.$$

Vì là  $x, y$  các số nguyên nên  $(x-1), (y+2)$  cũng là các số nguyên.

Nên  $(x-1), (y+2) \in U(7) = \{1; 7; -1; -7\}$ .

Ta có bảng sau:

$x-1$	1	7	-1	-7
$x$	2	8	0	-6
$y+2$	7	1	-7	-1
$y$	5	-1	-9	-3

Vậy các cặp số nguyên  $(x; y)$  cần tìm là  $(2; 5), (8; -1), (0; -9), (-6; -3)$ .

**Bài 28:** Tìm  $x, y$  nguyên thỏa mãn  $(x+6) = y(x-1)$  với  $x \neq 1$ .

**Lời giải**

$$\text{Vì } y(x-1) = x+6 \quad (1)$$

$$\text{Nên } x+6 : x-1 \Rightarrow x-1+7 : x-1$$

Mà  $x-1 : x-1$  với mọi  $x$  nguyên khác 1.

$$\text{Nên } 7 : x-1 \Rightarrow x-1 \in U(7) = \{1; 7; -1; -7\}$$

$$\Rightarrow x \in \{2; 8; 0; -6\}.$$

$$\text{Với } x=2 \text{ thay vào (1) ta được } y \cdot 1 = 8 \Rightarrow y=8$$

$$\text{Với } x=8 \text{ thay vào (1) ta được } y \cdot 7 = 14 \Rightarrow y=2$$

$$\text{Với } x=0 \text{ thay vào (1) ta được } y \cdot (-1) = 6 \Rightarrow y=-6$$

$$\text{Với } x=-6 \text{ thay vào (1) ta được } y \cdot (-7) = 0 \Rightarrow y=0.$$

**Bài 29:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia nó cho 6, 7, 9 được các số dư lần lượt là 2, 3, 5.

**Lời giải**

Gọi số tự nhiên cần tìm là  $a$  với  $a \in \mathbb{N}$ .

Vì  $a$  chia 6 dư 2 nên  $a-2$  chia hết cho 6.

Vì  $a$  chia 7 dư 3 nên  $a-3$  chia hết cho 7.

Vì  $a$  chia 9 dư 5 nên  $a-5$  chia hết cho 9.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a-2:6 \\ a-3:7 \\ a-5:9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-2+6:6 \\ a-3+7:7 \\ a-5+9:9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+4:6 \\ a+4:7 \\ a+4:9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+4 \in BC(6; 7; 9) = B(126) = \{0; 126; 252; \dots\}$$

$$\Rightarrow a \in \{122; 248; \dots\}. \text{ Vì } a \text{ là số tự nhiên nhỏ nhất nên } a=122.$$

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm là 122.

**Bài 30:** Tìm số tự nhiên có ba chữ số biết rằng nếu bớt số đó đi 8 thì được số chia hết cho 7, nếu bớt số đó đi 9 thì được số chia hết cho 8, nếu bớt số đó đi 10 thì được số chia hết cho 9.

**Lời giải**

Gọi số tự nhiên cần tìm là  $a$  với  $a \in \mathbb{N}$ .

Vì  $a$  bớt đi 8 thì chia hết cho 7 nên  $a-8$  chia hết cho 7.

Vì  $a$  bớt đi 9 thì chia hết cho 8 nên  $a-9$  chia hết cho 8.

Vì  $a$  bớt đi 10 thì chia hết cho 9 nên  $a-10$  chia hết cho 9.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a-8:7 \\ a-9:8 \\ a-10:9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-8+7:7 \\ a-9+8:8 \\ a-10+9:9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-1:7 \\ a-1:8 \\ a-1:9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a-1 \in BC(7;8;9) = B(504) = \{0;504;1008;.....\}$$

$$\Rightarrow a \in \{1;505;1009;.....\}. \text{ Vì } a \text{ là số tự nhiên có ba chữ số nên } a = 505.$$

Vậy số tự nhiên cần tìm là 505.

**Bài 31:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 11,17,29 thì có dư lần lượt là 6,12,24.

### Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là  $a$ .

Vì  $a$  chia cho 11 dư 6 nên  $a-6$  chia hết cho 11.

Vì  $a$  chia cho 17 dư 12 nên  $a-12$  chia hết cho 17.

Vì  $a$  chia cho 29 dư 24 nên  $a-24$  chia hết cho 29.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a-6:11 \\ a-12:17 \\ a-24:29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-6+11:11 \\ a-12+17:17 \\ a-24+29:29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+5:11 \\ a+5:17 \\ a+5:29 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+5 \in BC(11;17;29) = B(5423) = \{0;5423;10846;.....\}$$

$$\Rightarrow a \in \{5418;10841;.....\}. \text{ Vì } a \text{ nhỏ nhất nên } a = 5418.$$

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm là 5418.

**Bài 32:** Tìm số tự nhiên  $n$  lớn nhất có ba chữ số, sao cho  $n$  chia 8;31 được dư lần lượt là 7;28.

### Lời giải

Vì  $n$  chia cho 8 dư 7 nên  $n-7$  chia hết cho 8

Và  $n$  chia cho 31 dư 28 nên  $n-28$  chia hết cho 31

$$\text{Ta có } \begin{cases} n-7:8 \\ n-28:31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n-7+72:8 \\ n-28+93:31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+65:8 \\ n+65:31 \end{cases}$$

$$\Rightarrow n+65 \in BC(8;31) = B(248) = \{0;248;496;744;992;.....\}$$

$$\Rightarrow n \in \{183;431;679;927;.....\}.$$

Vì  $n$  là số tự nhiên lớn nhất có ba chữ số nên  $n = 927$ .

**Bài 33:** Cho phân số:  $A = \frac{n-5}{n+1}$  ( $n \in \mathbb{Z}; n \neq -1$ )

a) Tìm  $n$  để  $A$  có giá trị nguyên

b) Tìm  $n$  để  $A$  là phân số tối giản

### Lời giải:

$$\text{a) } A = \frac{n-5}{n+1} = \frac{n+1-6}{n+1} = 1 - \frac{6}{n+1}$$

$A$  nhận giá trị nguyên  $n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$ .

$n+1$	1	-1	2	-2	3	-3	6	-6
$n$	0	-2	1	-3	2	-4	5	-7

b)  $A$  tối giản  $(n+1, n-5) = 1$

$$(n+1, 6) = 1$$

$\Rightarrow n+1$  không chia hết cho 2 và  $n+1$  không chia hết cho 3.

**Bài 34:**

a) Tìm hai số tự nhiên  $a$  và  $b$  biết  $BCNN(a,b) = 180$  ;  $UCLN(a,b) = 12$

b) Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để phân số  $A = \frac{4n-1}{2n+3}$  có giá trị nguyên.

**Lời giải:**

a) Ta có  $ab = 180.12 = 2160$

Giả sử  $a \leq b$ . Vì  $UCLN(a,b) = 12$  nên  $a = 12m, b = 12n$  với  $(m,n) = 1$  và  $m \leq n$

Suy ra  $12m.12n = 2160 \Rightarrow mn = 15$ . Ta có bảng sau:

$m$	$n$	$a$	$b$
1	15	12	180
3	5	36	60

Vậy ta có hai cặp  $(a;b)$  là  $(12;180), (36;60)$ .

$$b) A = \frac{4n-1}{2n+3} = \frac{2(2n+3)}{2n+3} - \frac{7}{2n+3} = 2 - \frac{7}{2n+3}$$

$A$  có giá trị nguyên  $\Leftrightarrow 2n+3 \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$ .

Ta có bảng sau

$2n+3$	1	-1	7	-7
$n$	-1	-2	2	-5

Vậy  $n \in \{-1; -2; 2; -5\}$

**Bài 35:** Cho  $A = \frac{12n+1}{2n+3}$ . Tìm giá trị của  $n$  để:

a)  $A$  là một phân số                      b)  $A$  là một số nguyên

**Lời giải:**

$$a) A = \frac{12n+1}{2n+3} \text{ là phân số khi } 12n+1 \in \mathbb{Z}, 2n+3 \in \mathbb{Z}, 2n+3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \neq -1, 5 \end{cases}$$

$$b) A = \frac{12n+1}{2n+3} = 6 - \frac{17}{2n+3}$$

$A$  là số nguyên khi  $2n+3 \in U(17) \Leftrightarrow 2n+3 \in \{\pm 1; \pm 17\} \Leftrightarrow n \in \{-10; -2; -1; 7\}$

**Bài 36:**

a) Tìm giá trị  $n$  là số tự nhiên để  $n+7$  chia hết cho  $n+2$

b) Tìm  $x$  là số chia trong phép chia 235 cho  $x$  được số dư là 14

**Lời giải:**

$$a) (x+7):(x+2) \Leftrightarrow 5:(x+2) \Leftrightarrow (x+2) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$$

$$\Rightarrow x \in \{-3; -1; -7; 3\}.$$

$$b) 235 : x \text{ dư } 14 \Rightarrow 235 - 14 : x (x > 14) \Rightarrow 221 : x (x > 14) \Rightarrow x \in \{17; 221\}$$

**Bài 37:** Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  biết:  $(3n+8) : (n+1)$

**Lời giải:**

$$\text{Ta có: } 3n+8 = 3n+3+5 = 3(n+1)+5$$

$$\text{Suy ra : } (3n+8) : (n+1) \text{ khi } (n+1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$$

$$\text{Tìm được: } n \in \{-6; -2; 0; 4\}$$

**Bài 38:**

a) Cho  $\overline{abc} - \overline{deg} : 7$ . Chứng minh  $\overline{abc deg} : 7$

b) Tìm số nguyên  $n$  sao cho  $n^2 + 1 : n + 1$

**Lời giải:**

$$\text{a) Ta có: } \overline{abc deg} = 1000 \cdot \overline{abc} + \overline{deg}$$

$$= (1001 - 1) \overline{abc} + \overline{deg} = 1001 \overline{abc} - \overline{abc} + \overline{deg} = 1001 \overline{abc} - (\overline{abc} - \overline{deg})$$

$$\text{Vì } 1001 \overline{abc} = 7 \cdot 143 \overline{abc} \Rightarrow 7 \cdot 143 \overline{abc} : 7 \quad (1)$$

$$\overline{abc} - \overline{deg} : 7 \text{ (gt)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\overline{abc deg} : 7$

b) Ta có:

$$n^2 + 2 = n(n+1) + [-(n+1)] + 3$$

$$\text{Vì } n(n+1) : n+1 \text{ và } -(n+1) : n+1$$

$$\text{Để } n^2 + 2 : n+1 \text{ thì } 3 : n+1 \Rightarrow n+1 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\} \Rightarrow n \in \{-2; 0; -4; 2\}.$$

**Bài 39:**

a) Cho  $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{90}$ . Chứng minh  $A$  chia hết cho 11 và 13.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên  $x, y$  sao cho  $xy - 2x + y + 1 = 0$ .

**Lời giải:**

$$\text{a) } A \text{ có } 90 \text{ số hạng mà } 90 : 5 \text{ nên } A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{90}$$

$$A = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + (3^6 + 3^7 + 3^8 + 3^9 + 3^{10}) + \dots + (3^{86} + 3^{87} + 3^{88} + 3^{89} + 3^{90})$$

$$= 3 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^6 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{86} \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4)$$

$$= 121 \cdot (3 + 3^6 + \dots + 3^{86}) : 11 \Rightarrow A : 11$$

$A$  có 90 số hạng mà  $90 : 3$  nên:

$$A = (3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6) + \dots + (3^{88} + 3^{89} + 3^{90})$$

$$= 3 \cdot (1 + 3 + 3^2) + 3^4 \cdot (1 + 3 + 3^2) + \dots + 3^{88} \cdot (1 + 3 + 3^2)$$

$$= 13.(3+3^4+\dots+3^{88}):13 \Rightarrow A:13$$

$$b) xy - 2x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow x(y-2) + (y-2) = -3$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(y-2) = -3 = 1.(-3) = (-3).1$$

Từ đó suy ra  $(x; y) \in \{(0; -1); (-4; 3)\}$

**Bài 40:** Tìm tất cả các số nguyên  $n$  để:

Phân số  $\frac{12n+1}{30n+2}$  là phân số tối giản

**Lời giải:**

Gọi  $d$  là ƯC của  $12n+1$  và  $30n+2$  ( $d \in \mathbb{N}^*$ )  $\Rightarrow 12n+1:d, 30n+2:d$

$$[5(12n+1) - 2(30n+2)]:d \Leftrightarrow (60n+5 - 60n-4):d \Leftrightarrow 1:d$$

mà  $d \in \mathbb{N}^* \Rightarrow d = 1$

Vậy phân số đã cho tối giản

**Bài 41:** Tìm số nguyên  $n$  để phân số  $M = \frac{2n-7}{n-5}$  có giá trị là số nguyên

**Lời giải:**

$$a) M = \frac{2n-7}{n-5} = \frac{2n-10+3}{n-5} = 2 + \frac{3}{n-5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n-5 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

Suy ra  $n \in \{2; 4; 6; 8\}$

**Bài 42:** Tìm số tự nhiên  $n$  để phân số  $\frac{n+3}{2n-2}$  có giá trị là số nguyên

**Lời giải:**

Để phân số  $\frac{n+3}{2n-2}$  có giá trị là nguyên thì  $n+3:2n-2$

$$2(n+3):2n-2$$

$$(2n+6)-(2n-2):(2n-2)$$

$$(2n-2n)+(6+2):2n-2 \Rightarrow 8:2n-2$$

Suy ra  $(2n-2) \in \{\pm 2; \pm 4; \pm 8\}$

Sau khi thử các trường hợp ta được  $n = 5$ .

**Bài 43:** Cho  $A = \frac{3n-5}{n+4}$ , tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để  $A$  có giá trị nguyên.

**Lời giải:**

$$Ta có A = \frac{3n-5}{n+4} = 3 + \frac{-17}{n+4}$$

Để  $A \in \mathbb{Z}$  Thì  $(n+4) \in U(-17) = \{\pm 1; \pm 17\}$ .

Lập bảng và xét các giá trị ta có  $n \in \{-5; -3; 21; 13\}$  thì  $A$  nguyên.

**Bài 33.** Tìm các giá trị nguyên của  $n$  để phân số  $A = \frac{3n+2}{n-1}$  có giá trị là số nguyên

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } A = \frac{3n+2}{n-1} = \frac{3n-3+5}{n-1} = 3 + \frac{5}{n-1}$$

Để  $A$  có giá trị nguyên  $\frac{5}{n-1} \in \mathbb{Z}$  suy ra  $(n-1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$  suy ra  $n \in \{2; 0; 6; -4\}$

**Bài 45.** Tìm số tự nhiên  $n$  để phân số  $\frac{2n+1}{n+2}$  là phân số rút gọn được

**Lời giải**

Gọi  $d$  là ƯCLN( $2n+1, n+2$ ) ( $d \in \mathbb{N}^*$ )

Ta có:  $2n+1 : d, n+2 : d$  suy ra  $[(2n+4) - (2n+1)] : d$  suy ra  $3 : d$

Vì  $d \in \mathbb{N}^*$  nên  $d \in \{1; 3\}$ . Để phân số  $\frac{2n+1}{n+2}$  rút gọn được thì  $d = 3$

Suy ra  $n+2 = 3k$  suy ra  $n = 3k - 2$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ )

Vậy với  $n = 3k - 2$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) thì phân số  $\frac{2n+1}{n+2}$  là phân số rút gọn được

**Bài 46:** Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  biết:  $(3n+8) : (n+1)$

**Lời giải**

Ta có:  $3n+8 = 3n+3+5 = 3(n+1)+5$

Suy ra:  $(3n+8) : (n+1)$  khi  $(n+1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$ .

Vậy  $n \in \{-6; -2; 0; 4\}$ .

**Bài 47:** Tìm số nguyên  $n$  để  $5+n^2-2n$  chia hết cho  $n-2$

**Lời giải**

Ta có  $5+n^2-2n = 5+n(n-2)$

Vì  $n(n-2) : (n-2)$ , nên để  $(5+n^2-2n) : (n-2)$  thì  $5 : (n-2)$

Suy ra  $(n-2)$  phải là ước của 5 suy ra  $(n-2) \in \{-5; -1; 1; 5\}$  suy ra:  $n \in \{-3; -1; 3; 7\}$

Vậy  $n \in \{-3; -1; 3; 7\}$  thì  $5+n^2-2n$  chia hết cho  $n-2$

**Bài 48:** Cho  $A = 3+3^2+3^3+3^4+\dots+3^{90}$ . Chứng minh  $A$  chia hết cho 11 và 13.

**Lời giải:**

$A$  có 90 số hạng mà  $90 : 5$  nên  $A = 3+3^2+3^3+3^4+\dots+3^{90}$

$$A = (3+3^2+3^3+3^4+3^5) + (3^6+3^7+3^8+3^9+3^{10}) + \dots + (3^{86}+3^{87}+3^{88}+3^{89}+3^{90})$$

$$= 3 \cdot (1+3+3^2+3^3+3^4) + 3^6 \cdot (1+3+3^2+3^3+3^4) + \dots + 3^{86} \cdot (1+3+3^2+3^3+3^4)$$

$$= 121 \cdot (3+3^6+\dots+3^{86}) : 11 \text{ suy ra } A : 11$$

$A$  có 90 số hạng mà  $90 : 3$  nên:

$$A = (3+3^2+3^3) + (3^4+3^5+3^6) + \dots + (3^{88}+3^{89}+3^{90})$$

$$= 3 \cdot (1+3+3^2) + 3^4 \cdot (1+3+3^2) + \dots + 3^{88} \cdot (1+3+3^2)$$



$$= 13.(3 + 3^4 + \dots + 3^{88}) : 13 \text{ suy ra } A : 13$$

**Bài 49.** Tìm tất cả các cặp số nguyên  $x, y$  sao cho  $xy - 2x + y + 1 = 0$ .

**Lời giải:**

$$xy - 2x + y + 1 = 0 \text{ suy ra } x(y - 2) + (y - 2) = -3$$

$$\text{suy ra } (x + 1)(y - 2) = -3 = 1 \cdot (-3) = (-3) \cdot 1$$

$$\text{Từ đó suy ra } (x; y) \in \{(0; -1); (-4; 3)\}$$

**Bài 50:** Tìm các số nguyên  $a, b$  biết rằng:  $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$

**Lời giải:**

$$\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3} \text{ suy ra } \frac{2a-7}{14} = \frac{1}{b+3} \text{ suy ra } (2a-7)(b+3) = 14$$

Do  $a, b \in \mathbb{Z}$  nên  $2a-7 \in U(14)$

$$\text{Vì } 2a-7 \text{ lẻ nên } 2a-7 \in \{\pm 1; \pm 7\} \text{ suy ra } a \in \{0; 3; 4; 7\}$$

$$\text{Vậy } (a; b) = \{(0; -5); (3; -17); (4; 11); (7; -1)\}$$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

**CHỦ ĐỀ 4: SỐ NGUYÊN**  
**A. PHẦN NỘI DUNG**

**I. Ước và bội.**

**Dạng 1: Chứng minh sự chia hết.**

**Bài 1:** Tìm các giá trị nguyên  $n$  của đề phân số  $B = \frac{2n+5}{n+3}$  có giá trị là số nguyên.

*Trích đề KS HSG huyện năm 2021 – 2022*

**Lời giải**

Ta có:  $\frac{2n+5}{n+3} = \frac{2(n+3)-1}{n+3} = 2 - \frac{1}{n+3}$

Để  $B$  có giá trị nguyên thì  $\frac{1}{n+3}$  nguyên

$1:(n+3)$

$n+3$  thuộc ước nguyên của 1

$n+3 \in \{-1; 1\}$

$n \in \{-4; -2\}$ .

Vậy  $n \in \{-4; -2\}$

**Bài 2:** Tìm số nguyên  $n$  để  $A = 2n^2 + n - 6$  chia hết cho  $2n+1$

*Trích đề HSG Trường Nghĩa Đồng huyện Tân Kỳ năm 2021-2022.*

**Lời giải**

Ta có  $A = 2n^2 + n - 6 = n.(2n+1) - 6$

Vì  $A$  chia hết cho  $2n+1$  nên  $6:2n+1$

$2n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$

Do  $2n+1$  là số lẻ nên ta có bảng sau

$2n+1$	1	-1	3	-3
$2n$	0	-2	2	-4
$n$	0	-1	1	-2

Vậy với  $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$  thì  $A$  chia hết cho  $2n+1$ .

**Bài 3:** Chứng minh rằng trong hai số:  $5^n + 2023$  và  $5^n + 2024$ , luôn có một số chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên  $n$ .

*Trích đề HSG huyện Yên Mỹ năm 2021 – 2022*

**Lời giải**

Vì  $5 \not\vdots 3$ , nên  $5^n \not\vdots 3$  do đó  $5^n$  nhận được một trong hai dạng sau:

$5^n = 3k+1$  hoặc  $5^n = 3k+2 (k \in \mathbb{Z})$

Nếu  $5^n = 3k+1$  thì  $5^n + 2024 = 3k + 2025 : 3$

Nếu  $5^n = 3k+2$  thì  $5^n + 2023 = 3k + 2025 : 3$ .

**Bài 4:** Một số tự nhiên chia hết cho 2, chia cho 3 dư 1, chia cho 337 dư 335. Hỏi số tự nhiên đó chia cho 2022 dư bao nhiêu?

*Trích đề HSG huyện Quế Võ năm 2021-2022*

**Lời giải**

Gọi số tự nhiên phải tìm là  $a (a \in \mathbb{N}^*)$ .

Vì  $a$  chia cho 3 dư 1, chia cho 337 dư 335  $\Rightarrow a+2$  chia hết cho cả 3 và 337

$\Rightarrow a+2$  là bội chung lớn hơn 0 của 3 và 337

Do  $(3;337)=1 \Rightarrow \text{BCNN}(3;337)=3 \cdot 337=1011$

$\Rightarrow BC(3;337)=B(1011)=\{0;1011;2022;3033;4044;5055;6066;\dots\}$

$\Rightarrow a+2 \in \{1011;2022;3033;4044;5055;6066;\dots\}$

Mà  $a$  chia hết cho 2  $\Rightarrow a+2$  chẵn  $\Rightarrow a+2 \in \{2022;4044;6066;\dots\}$

$\Rightarrow a+2$  chia hết cho 2022. Vậy  $a$  chia cho 2022 dư 2020.

**Bài 5:** CMR:  $2x+y \vdots 9$  thì  $5x+7y \vdots 9$

*Trích đề HSG huyện Chương Mỹ năm 2021 - 2022*

**Lời giải**

Ta có:

$$2x+y \vdots 9 \Rightarrow 7(2x+y) \vdots 9 \Rightarrow 14x+7y \vdots 9 \Rightarrow 9x+5x+7y \vdots 9 \Rightarrow 5x+7y \vdots 9$$

Vậy  $2x+y \vdots 9$  thì  $5x+7y \vdots 9$

**Dạng 2: Tìm số thỏa mãn điều kiện chia hết.**

**Bài 1:** Tìm các giá trị nguyên của  $n$  để phân số  $B = \frac{2n+5}{n+3}$  có giá trị là số nguyên.

*Trích đề KS HSG huyện năm 2021 – 2022*

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \frac{2n+5}{n+3} = \frac{2(n+3)-1}{n+3} = 2 - \frac{1}{n+3}$$

Để  $B$  có giá trị nguyên thì  $\frac{1}{n+3}$  nguyên

$$1 \vdots (n+3)$$

$n+3$  thuộc ước nguyên của 1

$$n+3 \in \{-1;1\}$$

$$n \in \{-4;-2\}.$$

$$\text{Vậy } n \in \{-4;-2\}$$

**Bài 2:** Tìm số nguyên  $n$  để  $A = 2n^2 + n - 6$  chia hết cho  $2n+1$

*Trích đề HSG Trường Nghĩa Đồng huyện Tân Kỳ năm 2021-2022.*

**Lời giải**

$$\text{Ta có } A = 2n^2 + n - 6 = n \cdot (2n+1) - 6$$

Vì  $A$  chia hết cho  $2n+1$  nên  $6 \vdots 2n+1$

$$2n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$$

Do  $2n+1$  là số lẻ nên ta có bảng sau

$2n+1$	1	-1	3	-3
$2n$	0	-2	2	-4
$n$	0	-1	1	-2

Vậy với  $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$  thì  $A$  chia hết cho  $2n+1$

**Bài 3:** Tìm các cặp số nguyên  $x, y$  thỏa mãn:  $3xy + 2x - 5y = 6$

*Trích đề HSG Trường Nghĩa Đồng huyện Tân Kỳ năm 2021-2022.*

**Lời giải**

$$3xy + 2x - 5y = 6 \text{ suy ra } x(3y+2) - 5y = 6$$

$$3x(3y+2)-15y=18$$

$$3x(3y+2)-15y-10=18-10$$

$$3x(3y+2)-5(3y+2)=8$$

$$(3x-5).(3y+2)=8$$

$$\text{Nên } 3y+2 \in U(8) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$$

$$\text{Mà } 3y+2 \text{ là số chia 3 dư 2 nên } 3y+2 \in \{-1; 2; -4; 8\}$$

Ta có bảng sau:

$3y+2$	-4	-1	2	8
$3x-5$	-2	-8	4	1
$y$	-2	-1	0	2
$x$	1	-1	3	2

$$\text{Vậy } (x;y) \in \{(1;-2); (-1;-1); (3;0); (2;2)\}$$

**Bài 4:** Tìm số nguyên  $n$  sao cho  $n-2022$  chia hết cho  $n-2017$ .

*Trích đề HSG Quận Hà Đông năm 2021-2022.*

**Lời giải**

Ta có:  $(n-2022):(n-2017)$  điều kiện  $n \neq 2017$ .

Mà  $(n-2017):(n-2017)$  nên  $(n-2022)-(n-2017):(n-2017)$  (tính chất chia hết của một hiệu).

$$\text{Suy ra } -5:(n-2017) \text{ nên } (n-2017) \in U(-5) = \{-1; 1; -5; 5\}$$

Ta có bảng sau:

$n-2017$	-1	1	-5	5
$n$	2016	2018	2012	2022
	thỏa mãn	thỏa mãn	thỏa mãn	thỏa mãn

Vậy với  $n \in \{2016; 2018; 2012; 2022\}$  thì  $n-2022$  chia hết cho  $n-2017$ .

**Bài 5:** Tìm hai số nguyên, biết tích của chúng lớn hơn ba lần tổng của chúng là 1

*Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021-2022*

**Lời giải**

Gọi 2 số đó là  $x, y$  ( $x; y \in Z$ )

$$\text{Ta có } xy-3(x+y)=1$$

$$xy-3x-3y=1$$

$$xy-3x-3y+9=10$$

$$(xy-3x)-(3y-9)=10$$

$$x(y-3)-3(y-3)=10$$

$$(x-3)(y-3)=10. \text{ Vì } x; y \in Z, \text{ vai trò } x, y \text{ như nhau. Giả sử } x > y.$$

Ta có bảng

$x-3$	5	10	-2	-1
$y-3$	2	1	-5	-10
$x$	8	13	1	2
$y$	5	4	-2	-7

Vậy  $(x; y) \in \{(8;5); (13;4); (1;-2); (2;-7)\}$ . Có 4 cặp số nguyên  $x, y$  thỏa mãn

**Bài 6:** Tìm  $x, y$  nguyên biết :  $2x(3y-2)+(3y-2)=-55$

*Trích đề ks HSG Trường Thiện Quang huyện Kim Sơn năm 2021-2022*

**Lời giải**

Tìm  $x, y$  nguyên biết :  $2x(3y-2)+(3y-2)=-55$

Ta có

$$(2x-1)(3y-2)=-55$$

$$\text{Suy ra } 2x-1 = \frac{-55}{3y-2} \quad (1)$$

Để  $x$  nguyên thì  $3y-2 \in U(-55) = \{1; 5; 11; 55; -1; -5; -11; -55\}$

$+3y-2=1$  suy ra  $3y=3$  nên  $y=1$ , thay vào (1) ta được  $x=28$

$+3y-2=5$  suy ra  $3y=7$  nên  $y=\frac{7}{3}$ , (Loại)

$+3y-2=11$  suy ra  $3y=13$  nên  $y=\frac{13}{3}$ , (Loại)

$+3y-2=55$  suy ra  $3y=57$  nên  $y=19$ , thay vào (1) ta được  $x=-1$ .

$+3y-2=-1$  suy ra  $3y=1$  nên  $y=\frac{1}{3}$ , (loại)

$+3y-2=-5$  suy ra  $3y=-3$  nên  $y=-1$ , thay vào (1) ta được  $x=5$

$+3y-2=-11$  suy ra  $3y=-9$  nên  $y=-3$ , thay vào (1) ta được  $x=2$

$+3y-2=-55$  suy ra  $3y=-53$  nên  $y=\frac{-53}{3}$ , (loại)

Vậy ta có 4 cặp số  $x, y$  nguyên thoả mãn là  $(x, y) \in \{(28;1); (-1;19); (5;-1); (2;3)\}$ .

**Bài 7:** Tìm các số nguyên  $a, b$  biết rằng:  $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$ .

*Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022*

**Lời giải**

$$\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3} \Rightarrow \frac{2a-7}{14} = \frac{1}{b+3} \Rightarrow (2a-7)(b+3) = 14$$

Do  $a, b \in \mathbb{Z}$  nên  $2a-7 \in U(14)$

Vì  $2a-7$  lẻ nên  $2a-7 \in \{\pm 1; \pm 7\} \Rightarrow a \in \{0; 3; 4; 7\}$

Vậy  $(a; b) = \{(0; -5); (3; -17); (4; 11); (7; -1)\}$

## B. PHẦN PHIẾU BÀI TẬP

### I. Ước và bội.

#### Dạng 1: Chứng minh sự chia hết.

**Bài 1:** Tìm các giá trị nguyên của  $n$  để phân số  $B = \frac{2n+5}{n+3}$  có giá trị là số nguyên.

*Trích đề KS HSG huyện năm 2021 – 2022*

**Bài 2:** Tìm số nguyên  $n$  để  $A = 2n^2 + n - 6$  chia hết cho  $2n+1$

*Trích đề HSG Trường Nghĩa Đồng huyện Tân Kỳ năm 2021-2022.*

**Bài 3:** Chứng minh rằng trong hai số:  $5^n + 2023$  và  $5^n + 2024$ , luôn có một số chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên  $n$ .

**Bài 4:** Một số tự nhiên chia hết cho 2, chia cho 3 dư 1, chia cho 337 dư 335. Hỏi số tự nhiên đó chia cho 2022 dư bao nhiêu?

*Trích đề HSG huyện Quế Võ năm 2021-2022*

**Bài 5:** CMR :  $2x + y : 9$  thì  $5x + 7y : 9$ .

*Trích đề HSG huyện Chương Mỹ năm 2021 - 2022*

#### Dạng 2: Tìm số thỏa mãn điều kiện chia hết.

**Bài 1:** Tìm các giá trị nguyên của  $n$  để phân số  $B = \frac{2n+5}{n+3}$  có giá trị là số nguyên.

*Trích đề KS HSG huyện năm 2021 – 2022*

**Bài 2:** Tìm số nguyên  $n$  để  $A = 2n^2 + n - 6$  chia hết cho  $2n+1$

*Trích đề HSG Trường Nghĩa Đồng huyện Tân Kỳ năm 2021-2022.*

**Bài 3:** Tìm các cặp số nguyên  $x, y$  thỏa mãn:  $3xy + 2x - 5y = 6$

*Trích đề HSG Trường Nghĩa Đồng huyện Tân Kỳ năm 2021-2022.*

**Bài 4:** Tìm số nguyên  $n$  sao cho  $n - 2022$  chia hết cho  $n - 2017$ .

*Trích đề HSG Quận Hà Đông năm 2021-2022.*

**Bài 5:** Tìm hai số nguyên, biết tích của chúng lớn hơn ba lần tổng của chúng là 1

*Trích đề HSG huyện Thanh Ba năm 2021-2022*

**Bài 6:** Tìm  $x, y$  nguyên biết :  $2x(3y - 2) + (3y - 2) = -55$ .

*Trích đề ks HSG Trường Thiện Quang huyện Kim Sơn năm 2021-2022*

**Bài 7:** Tìm các số nguyên  $a, b$  biết rằng:  $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$ .

*Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2021 - 2022*

## C. SỬ TÀM CÁC BÀI TRONG CÁC ĐỀ CỦA NHỮNG NĂM TRƯỚC ĐÓ

### I. Ước và bội.

#### Dạng 1: Chứng minh sự chia hết.

**Bài 1:** Chứng minh rằng với mọi số nguyên  $n$  ta có  $n^3 - n : 6$

*Trích đề HSG huyện Trực Ninh năm 2017-2018*

#### Lời giải

Ta có  $(n^3 - n) = n(n^2 - 1) = n(n^2 - n + n - 1) = n[n(n-1) + (n-1)] = n(n-1)(n+1)$

Với mọi số nguyên dương  $n$  thì  $(n-1)n(n+1)$  là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp sẽ chia hết cho 2 và 3 mà  $(2,3)=1$  nên  $n(n-1)(n+1) : 6$

**Bài 2:** Chứng tỏ rằng:  $\frac{2n+5}{n+3} (n \in \mathbb{N})$  là phân số tối giản

*Trích đề HSG huyện Quỳnh Lưu năm 2018-2019.*

Gọi  $d$  là ước chung của  $n+3$  và  $2n+5$  với  $d \in \mathbb{N}$

Suy ra  $n+3 : d$  và  $2n+5 : d$

$2(n+3) - (2n+5) : d$  suy ra  $1 : d$  nên  $d = 1$

Do đó  $U_{CLN}(n+3, 2n+5) = 1$  suy ra  $\frac{2n+5}{n+3} (n \in \mathbb{N})$  là phân số tối giản.

#### Dạng 2: Tìm số thỏa mãn điều kiện chia hết.

**Bài 1:** Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để phân số  $A = \frac{4n-1}{2n+3}$  có giá trị nguyên

*Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2017-2018*

#### Lời giải

$$A = \frac{4n-1}{2n+3} = \frac{2(2n+3)}{2n+3} - \frac{7}{2n+3} = 2 - \frac{7}{2n+3}$$

A có giá trị nguyên thì  $2n+3 \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$

Ta có bảng sau

$2n+3$	1	-1	7	-7
$n$	-1	-2	2	-5

**Bài 2:** Tìm số nguyên dương  $n$  nhỏ nhất sao cho sau khi viết tiếp số đó sau số 2014 ta được số chia hết cho 101

*Trích đề HSG huyện Nga Sơn năm 2017-2018*

#### Lời giải

Giả sử  $n$  có  $k$  chữ số ( $k \geq 1$ )

Ta có :  $2014 = 19 \cdot 101 + 95$ , do đó:

$$\overline{2014n} = 2014 \cdot 10^k + n = 19 \cdot 101 \cdot 10^k + 95 \cdot 10^k + n$$

Suy ra  $\overline{2014n} : 101$  khi và chỉ khi  $95 \cdot 10^k + n : 101$

Với  $k=1$  thì  $95 \cdot 10^k + n = 950 + n = 101 \cdot 9 + (41+n) : 101$  khi và chỉ khi  $41+n : 101$  nhưng  $n$  có một chữ số nên  $41+n \leq 41+9 < 101$ , nên không có số  $n$  thỏa mãn đầu bài.

Với  $k=2$  thì  $95 \cdot 10^k + n = 9500 + n = 101 \cdot 94 + (6+n) : 101$  suy ra  $6+n : 101$ , và số  $n$  nhỏ nhất được xác định bởi  $6+n = 101$  suy ra  $n = 95$

Vậy  $n = 95$  thỏa mãn đề bài

**Bài 3:** Tìm  $x, y$  nguyên biết:  $x + y + xy = 40$

*Trích đề HSG huyện Vĩnh Lộc năm 2017-2018*

*Lời giải*

Ta có  $x + y + xy = 40$

$$(y+1)x + y + 1 = 41$$

$$(x+1)(y+1) = 41$$

Mà  $x, y$  nguyên nên  $x+1, y+1$  là ước của 41

$$\text{Tính được } (x, y) \in \{(40, 0); (0, 40); (-2, -42); (-42, -2)\}$$

**Bài 4:** Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  biết:  $(3n+8):(n+1)$

*Trích đề HSG huyện Bạch Thông năm 2018-2019*

*Lời giải*

Ta có:  $3n+8 = 3n+3+5 = 3(n+1)+5$

Suy ra:  $(3n+8):(n+1)$  khi  $(n+1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

Tìm được:  $n \in \{-6; -2; 0; 4\}$

**Bài 5:** Tìm các số nguyên  $x, y$  biết:  $2x - y + 4xy = 6$

*Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2017-2018*

*Lời giải*

Ta có  $2x - y + 4xy = 6$

$$\text{Hay } 2x(2y+1) - y = 6$$

$$(2y+1)(4x-1) = 11$$

Do  $x, y$  nguyên nên  $4x-1 \in U(11) = \{1; -1; 11; -11\}$

Mà  $4x-1$  chia 4 dư  $-1$  (hoặc 3) nên  $4x-1 = -1$  hoặc  $4x-1 = 11$

Tìm được  $x = 0; y = -6$  hoặc  $x = 3; y = 0$

**Bài 6:** Tìm các số nguyên  $n$  để  $\frac{2n+1}{n+2}$  có giá trị là một số nguyên

*Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2017-2018*

*Lời giải*

Để  $\frac{2n+1}{n+2}$  có giá trị là số nguyên thì  $2n+1:n+2$  (1)

Vì  $n+2:n+2$  nên  $2(n+2):n+2$  (2)

Từ (1), (2) suy ra  $2(n+2) - (2n+1):n+2$  chia hết cho  $n+2$  hay  $3:(n+2)$

Vì  $n+2$  nguyên nên  $n+2 \in \{-1; 1; -3; 3\}$

$n \in \{-3; -5; -1; 1\}$  Vậy với  $n \in \{-3; -5; -1; 1\}$  thì phân số  $\frac{2n+1}{n+2}$  là số nguyên.

**Bài 7:** Chứng tỏ rằng với mọi số nguyên  $n$  thì phân số  $\frac{3n-10}{2n-7}$  là phân số tối giản

*Trích đề KS HSG huyện Tam Dương năm 2018-2019*

*Lời giải*

Gọi Ư CLN  $(3n-10; 2n-7) = d$  ( $d \in \mathbb{N}^*$ )

thì  $3n-10:d$  và  $2n-7:d$

$$2(3n-10):d \text{ và } 3(2n-7):d$$

$$2(3n-10) - 3(2n-7):d$$

Suy ra  $1:d$  nên  $d \in \{1; -1\}$



Vậy với mọi số nguyên  $n$  thì phân số  $\frac{3n-10}{2n-7}$  là phân số tối giản.

**Bài 8:** Tìm số nguyên  $n$  để  $A = 2n^2 + n - 6$  chia hết cho  $2n+1$

*Đề Suu tầm*

**Lời giải**

Ta có:  $A = 2n^2 + n - 6 = n(2n+1) - 6$

Vì  $A$  chia hết cho  $2n+1$  nên  $n(2n+1) - 6 : 2n+1$  mà  $n(2n+1) : 2n+1$  nên  $6 : 2n+1$  hay  $2n+1 \in U(6)$ .

Do  $2n+1$  là số lẻ nên ta có bảng sau:

$2n+1$	1	-1	3	-3
$2n$	0	-2	2	-4
$n$	0	-1	1	-2

Vậy với  $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$  thì  $A = 2n^2 + n - 6$  chia hết cho  $2n+1$ .

**Bài 9:** Chứng tỏ rằng mọi số tự nhiên có ba chữ số giống nhau đều chia hết cho 37

**Lời giải**

Chứng tỏ rằng mọi số tự nhiên có ba chữ số giống nhau đều chia hết cho 37

Gọi số tự nhiên có ba chữ số giống nhau có dạng  $\overline{aaa}$

( $a$  là chữ số khác 0)

Ta có:  $\overline{aaa} = 111.a = 37.3.a$

$\Rightarrow \overline{aaa} : 37$

Vậy mọi số tự nhiên có ba chữ số giống nhau đều chia hết cho 37

**Bài 10:** Cho  $3a + 2b$  chia hết cho 17. Chứng minh rằng  $10a + b$  chia hết cho 17.

**Lời giải**

Cho  $3a + 2b$  chia hết cho 17. Chứng minh rằng  $10a + b$  chia hết cho 17.

Ta xét:  $2(10a + b) - (3a + 2b) = (20a + 2b) - (3a + 2b) = 17a$

$\Rightarrow 2(10a + b) - (3a + 2b)$  chia hết cho 17

Mà  $3a + 2b$  chia hết cho 17

$\Rightarrow 2(10a + b)$  chia hết cho 17

$\Rightarrow 10a + b$  chia hết cho 17 vì  $(2, 17) = 1$ .

Vậy nếu  $3a + 2b$  chia hết cho 17 thì  $10a + b$  chia hết cho 17

*Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com*

<https://www.vnteach.com>