

Câu 1 (2,0 điểm)

1) Chứng minh $a = \frac{4}{3-\sqrt{7}} - \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{4-\sqrt{7}}}$ là một số tự nhiên.

2) Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + 4\sqrt{x} \right) : \left(\frac{x^2+4x\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} \right)$ với $x > 0, x \neq 1$.

Tìm x để $P < 0$.

Câu 2 (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $\sqrt{x^2+x+2}(\sqrt{x^2+x+2}+1)=6$.

2) Cho phương trình $x^2+(m+1)x-2m^2+5m-2=0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn $2x_1-5x_2=7$.

Câu 3 (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp trong đường tròn tâm O , $AB < AC$. Các đường cao AD, BM, CN của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H (D, M, N lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB). Các đường thẳng MN và BC cắt nhau tại điểm E , đường thẳng AE cắt đường tròn (O) tại điểm G (G không trùng với A), đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm A' (A' không trùng với A), I là trung điểm của đoạn thẳng BC .

1) Chứng minh $EB \cdot EC = EN \cdot EM = EG \cdot EA$.

2) Chứng minh tứ giác $DIMN$ nội tiếp.

3) Tính tỉ số $\frac{AA'}{OI+HD}$.

Câu 4 (2,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (\sqrt{x^2+2024}+x)(\sqrt{y^2+2024}-y)=2024 \\ \sqrt{x+4}+2x^2=9y-\sqrt{y-1}+10 \end{cases}$$

2) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2+5y^2+2x-4xy-4y=168$.

Câu 5 (1,0 điểm) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ và $a^2+b^2+c^2=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab}$.

HẾT

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.
- Giám thị không được giải thích gì thêm.

UBND TỈNH KON TUM
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10

Năm học 2024 – 2025

Môn: TOÁN (Môn chuyên)

Ngày thi: 04/6/2024

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (2,0 điểm).

- 1) Chứng minh $a = \frac{4}{3 - \sqrt{7}} - \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{4 - \sqrt{7}}}$ là một số tự nhiên.
- 2) Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} + 4\sqrt{x} \right) : \left(\frac{x^2 + 4x\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 4} \right)$ với $x > 0, x \neq 1$. Tìm x để $P < 0$.

Câu 2 (2,0 điểm).

- 1) Giải phương trình $\sqrt{x^2 + x + 2} \cdot (\sqrt{x^2 + x + 2} + 1) = 6$.
- 2) Cho phương trình $x^2 + (m + 1)x - 2m^2 + 5m - 2 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn $2x_1 - 5x_2 = 7$.

Câu 3 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp trong đường tròn tâm O , $AB < AC$. Các đường cao AD, BM, CN của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H (D, M, N lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB). Các đường thẳng MN và BC cắt nhau tại điểm E , đường thẳng AE cắt đường tròn (O) tại điểm G (G không trùng với A), đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm A' (A' không trùng với A), I là trung điểm của đoạn thẳng BC .

- 1) Chứng minh $EB \cdot EC = EN \cdot EM = EG \cdot EA$.
- 2) Chứng minh tứ giác $DIMN$ nội tiếp.
- 3) Tính tỉ số $\frac{AA'}{OI + HD}$.

Câu 4 (2,0 điểm).

- 1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (\sqrt{x^2 + 2024} + x)(\sqrt{y^2 + 2024} - y) = 2024 \\ \sqrt{x + 4} + 2x^2 = 9y - \sqrt{y - 1} + 10 \end{cases}$$
- 2) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (x, y) thỏa mãn $x^2 + 5y^2 + 2x - 4xy - 4y = 168$.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{a}{1 + bc} + \frac{b}{1 + ca} + \frac{c}{1 + ab}.$$

LỜI GIẢI THAM KHẢO

Câu 1. (2,0 điểm)

- 1) Chứng minh $a = \frac{4}{3 - \sqrt{7}} - \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{4 - \sqrt{7}}}$ là một số tự nhiên.
- 2) Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} + 4\sqrt{x} \right) : \left(\frac{x^2 + 4x\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 4} \right)$ với $x > 0, x \neq 1$. Tìm x để $P < 0$.

Giải

1) Ta có $a = \frac{4}{3 - \sqrt{7}} - \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{4 - \sqrt{7}}} = 6 + 2\sqrt{7} - 2 - 2\sqrt{7} = 4$ là số tự nhiên.

2) Ta có $P = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} + 4\sqrt{x} \right) : \left(\frac{x^2 + 4x\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 4} \right)$ với $x > 0, x \neq 1$.

$$P = \frac{x + 2\sqrt{x} + 1 - x + 2\sqrt{x} - 1 + 4x\sqrt{x} - 4\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$P = \frac{4x\sqrt{x}}{x - 1} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{4}{x - 1}.$$

$$\text{Để } P < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

Kết hợp ĐKXD thì $0 < x < 1$ thỏa mãn $P < 0$.

Vậy $0 < x < 1$ thì $P < 0$.

Câu 2. (2,0 điểm)

- 1) Giải phương trình $\sqrt{x^2 + x + 2} \cdot (\sqrt{x^2 + x + 2} + 1) = 6$.
- 2) Cho phương trình $x^2 + (m + 1)x - 2m^2 + 5m - 2 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn $2x_1 - 5x_2 = 7$.

Giải

1) $\sqrt{x^2 + x + 2} \cdot (\sqrt{x^2 + x + 2} + 1) = 6$.

Điều kiện xác định: $x^2 + x + 2 \geq 0$ (luôn đúng)

Đặt $\sqrt{x^2 + x + 2} = t$ ($t > 0$), phương trình đã cho trở thành

$$t(t + 1) = 6 \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -3 \text{ (không thỏa mãn)} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 2, \text{ tức là } \sqrt{x^2 + x + 2} = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ (thỏa mãn ĐKXD)} \\ x = 1 \text{ (thỏa mãn ĐKXD)} \end{cases}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -2$ và $x = 1$.

2) Ta có $\Delta = (m + 1)^2 - 4(-2m^2 + 5m - 2) = 9m^2 - 18m + 9 = 9(m - 1)^2$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Áp dụng hệ thức Vi - ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(m + 1) & (1) \\ x_1 x_2 = -2m^2 + 5m - 2 & (2) \end{cases}$

Lại có $2x_1 - 5x_2 = 7$ (3).

Từ (1), (3) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(m + 1) \\ 2x_1 - 5x_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-5m + 2}{7} \\ x_2 = \frac{-2m - 9}{7} \end{cases}$

Thay $x_1 = \frac{-5m + 2}{7}, x_2 = \frac{-2m - 9}{7}$ vào (2) ta được

$$\frac{-5m + 2}{7} \cdot \frac{-2m - 9}{7} = -2m^2 + 5m - 2$$

$$\Leftrightarrow 27m^2 - 51m + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{4}{3} \text{ (thỏa mãn ĐK)} \\ m = \frac{5}{9} \text{ (thỏa mãn ĐK)} \end{cases}.$$

Vậy $m \in \left\{ \frac{4}{3}; \frac{5}{9} \right\}$.

Câu 3. (3,0 điểm)

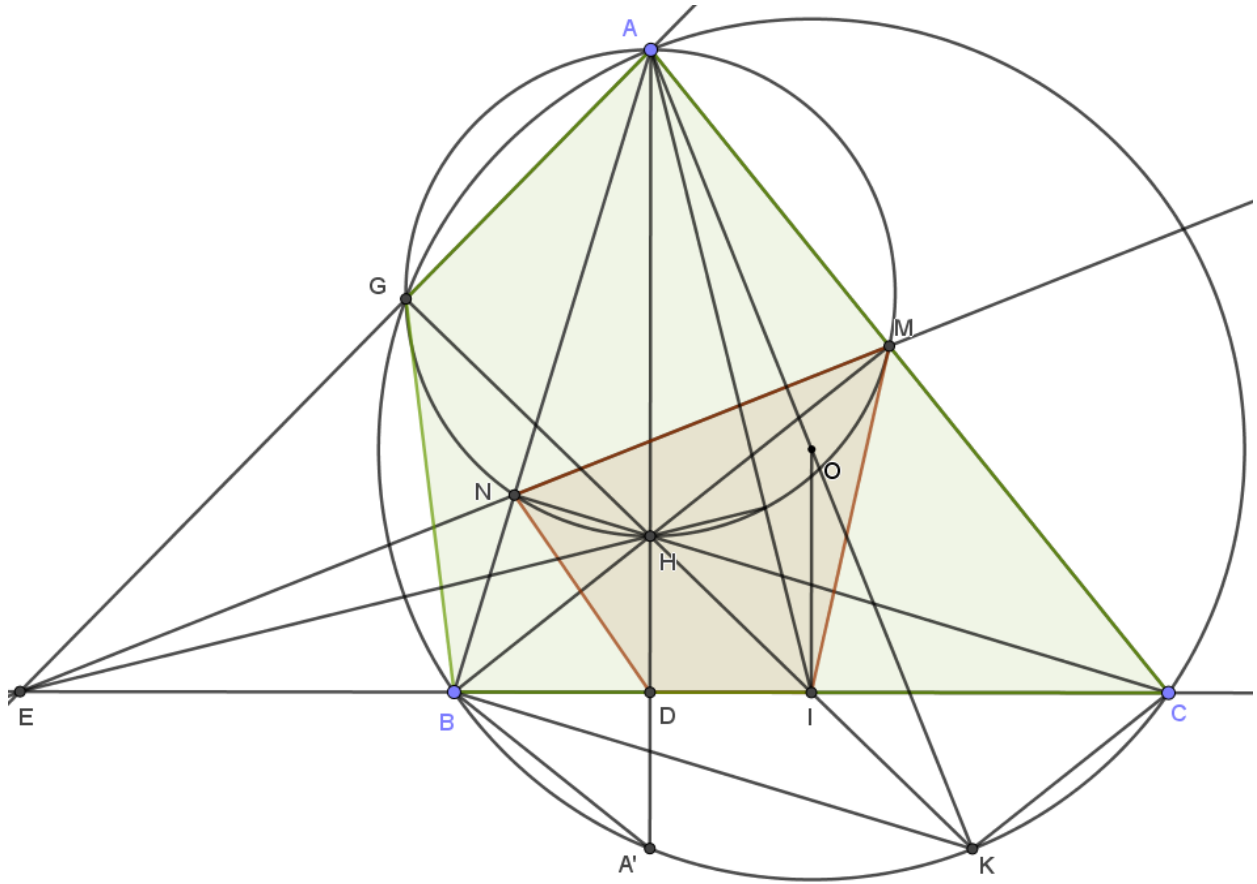
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp trong đường tròn tâm O , $AB < AC$. Các đường cao AD, BM, CN của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H (D, M, N lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB). Các đường thẳng MN và BC cắt nhau tại điểm E , đường thẳng AE cắt đường tròn (O) tại điểm G (G không trùng với A), đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm A' (A' không trùng với A), I là trung điểm của đoạn thẳng BC .

1) Chứng minh $EB \cdot EC = EN \cdot EM = EG \cdot EA$.

2) Chứng minh tứ giác $DIMN$ nội tiếp.

3) Tính tỉ số $\frac{AA'}{OI + HD}$.

Giải



- $$\Rightarrow \widehat{ENB} = \widehat{ECM}.$$

$$\Rightarrow \frac{EN}{EC} = \frac{EB}{EM} \Leftrightarrow EB \cdot EC = EN \cdot EM \quad (1).$$
$$\Rightarrow \frac{EG}{EC} = \frac{EB}{EA} \Leftrightarrow EG \cdot EA = EB \cdot EC \quad (2)$$

Từ (3), (4) suy ra G, H, I, K thẳng hàng hay $IG \perp AE$.

Xét $\triangle AED$ và $\triangle IEG$ có $\left. \begin{array}{l} \widehat{AEI} \text{ chung} \\ \widehat{ADE} = \widehat{IGE} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AED \sim \triangle IEG \text{ (góc - góc)}$
 $\Rightarrow \frac{ED}{EG} = \frac{AE}{IE} \Leftrightarrow ED \cdot EI = EA \cdot EG = EN \cdot EM$.
 $\Rightarrow$ Tứ giác $DIMN$ nội tiếp.

3) Xét $\triangle AHK$ có $AO = OK, HI = IK$ nên OI là đường trung bình của $\triangle AHK$.

$$\Rightarrow OI = \frac{1}{2}AH \quad (5).$$

Ta có $\widehat{BHA'} = \widehat{AHM} = \widehat{ACB} = \widehat{AA'B} = \widehat{BA'H}$ nên $\triangle BHA'$ cân tại B .

$$\text{Mà } BD \perp A'H \text{ nên } HD = DA' \text{ hay } HD = \frac{1}{2}HA' \quad (6).$$

$$\text{Từ (5) và (6) suy ra } OI + HD = \frac{1}{2}(AH + HA') = \frac{1}{2}AA' \Rightarrow \frac{AA'}{OI + HD} = 2.$$

Câu 4. (2,0 điểm)

$$1) \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} (\sqrt{x^2 + 2024} + x)(\sqrt{y^2 + 2024} - y) = 2024 \\ \sqrt{x + 4} + 2x^2 = 9y - \sqrt{y - 1} + 10 \end{cases}$$

2) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (x, y) thỏa mãn $x^2 + 5y^2 + 2x - 4xy - 4y = 168$.

Giải

$$1) \begin{cases} (\sqrt{x^2 + 2024} + x)(\sqrt{y^2 + 2024} - y) = 2024 & (1) \\ \sqrt{x + 4} + 2x^2 = 9y - \sqrt{y - 1} + 10 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện xác định: $x \geq -4, y \geq 1$.

Xét phương trình (1), ta có:

$$(\sqrt{x^2 + 2024} + x)(\sqrt{x^2 + 2024} - x) = 2024 = (\sqrt{x^2 + 2024} + x)(\sqrt{y^2 + 2024} - y)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 2024} - x = \sqrt{y^2 + 2024} - y \quad (*).$$

$$\text{Tương tự } (\sqrt{y^2 + 2024} - y)(\sqrt{y^2 + 2024} + y) = 2024 = (\sqrt{x^2 + 2024} + x)(\sqrt{y^2 + 2024} - y)$$

$$\Rightarrow \sqrt{y^2 + 2024} + y = \sqrt{x^2 + 2024} + x \quad (**).$$

Từ (*), (**) suy ra $-x + y = -y + x$ hay $x = y$.

Thay $x = y$ vào (2) ta được

$$\sqrt{y + 4} + 2y^2 = 9y - \sqrt{y - 1} + 10$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 9y - 10 + \sqrt{y + 4} + \sqrt{y - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2y^2 - 10y) + (y - 5) + (\sqrt{y + 4} - 3) + (\sqrt{y - 1} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 5) \left(2y + 1 + \frac{1}{\sqrt{y + 4} + 3} + \frac{1}{\sqrt{y - 1} + 2} \right) = 0.$$

Vì $y \geq 1$ nên $2y + 1 + \frac{1}{\sqrt{y+4}+3} + \frac{1}{\sqrt{y-1}+2} > 0$, do đó $y = 5 \Rightarrow x = 5$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x, y) = (5; 5)$.

$$2) \quad x^2 + 5y^2 + 2x - 4xy - 4y = 168.$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x(2y - 1) + (2y - 1)^2 + y^2 = 169.$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y + 1)^2 + y^2 = 13^2.$$

$$\text{Vì } (x - 2y + 1)^2 \geq 0, y^2 > 0 \text{ nên } y^2 \leq 169 \Leftrightarrow 0 < y \leq 13.$$

$$\text{Với } y = 1 \text{ thì } (x - 2y + 1)^2 = 168 \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } y = 2 \text{ thì } (x - 2y + 1)^2 = 165 \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } y = 3 \text{ thì } (x - 2y + 1)^2 = 160 \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } y = 4 \text{ thì } (x - 2y + 1)^2 = 153 \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } y = 5 \text{ thì } (x - 2y + 1)^2 = 144 \Leftrightarrow (x - 9)^2 = 144 \Leftrightarrow x = 21 \text{ (vì } x > 0) \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } y = 6 \text{ thì } (x - 2y + 1)^2 = 133 \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } y = 7 \text{ thì } (x - 2y + 1)^2 = 120 \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } y = 8 \text{ thì } (x - 2y + 1)^2 = 105 \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } y = 9 \text{ thì } (x - 2y + 1)^2 = 85 \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } y = 10 \text{ thì } (x - 2y + 1)^2 = 69 \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } y = 11 \text{ thì } (x - 2y + 1)^2 = 48 \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } y = 12 \text{ thì } (x - 2y + 1)^2 = 25 \Leftrightarrow (x - 23)^2 = 25 \Leftrightarrow x = 28 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } y = 13 \text{ thì } (x - 2y + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 25)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 25$$

$$\text{Vậy } (x, y) \in \{(21; 5); (28; 12); (25; 13)\}.$$

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab}.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM và Cauchy-Schwarz ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{a^2}{a+abc} + \frac{b^2}{b+abc} + \frac{c^2}{c+abc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3abc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+\frac{(a+b+c)^2}{3}} \\ &= \frac{3(a+b+c)}{3+ab+bc+ca} \end{aligned}$$

$$\text{Ta chứng minh } \frac{3(a+b+c)}{3+ab+bc+ca} \geq 1 \quad (1).$$

$$\Leftrightarrow 3(a+b+c) \geq ab+bc+ca+3.$$

$$\Leftrightarrow 9(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2) \geq [3(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca]^2.$$

Đặt $a^2+b^2+c^2=k(ab+bc+ca)$ ($k \geq 1$), ta có

$$9[k(ab+bc+ca)+2(ab+bc+ca)]k(ab+bc+ca) \geq [3k(ab+bc+ca)+ab+bc+ca]^2$$

$$\Leftrightarrow 9(k+2)k \geq (3k+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 9k^2+18k \geq 9k^2+6k+1$$

$$\Leftrightarrow 12k-1 \geq 0 \text{ (đúng vì } k \geq 1\text{)}.$$

Do đó, (1) đúng, ta hoàn tất chứng minh.

Dấu "=" xảy ra chẳng hạn $\Leftrightarrow a=1, b=c=0$.

Vậy $Q_{\min}=1$ khi $(a,b,c)=(1,0,0)$ và các hoán vị.

—— HẾT ——

Lời giải được thực hiện bởi Vũ Đức Huy 9A1 – THCS Trọng điểm Lê Hữu Trác, Mỹ Hòa, Hưng Yên.