



**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH PHÚ YÊN**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10,
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG, NĂM HỌC 2024 - 2025**

Môn thi: TOÁN (Chuyên)

Ngày thi: 02/6/2024

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (5,00 điểm)

a) Biết $x = \sqrt{2} + 1$, tính $A = \sqrt{\sqrt{2}(x+1)(x^2+1)(x^4+1) + x - \sqrt{2}}$.

b) Rút gọn biểu thức: $B = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{9} + \sqrt{10}}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}}$.

c) Cho biết $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Tính $x + y$.

Câu 2. (3,50 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < AC < BC$) ngoại tiếp đường tròn (I) với các tiếp điểm trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F . Gọi G và H lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ B và C xuống CI và BI . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $BGED$ là hình thang.

b) Tứ giác $BGFD$ nội tiếp.

c) Các điểm E, F, G, H thẳng hàng.

Câu 3. (4,50 điểm)

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} |x - y| = 4 \\ |x^2 - y^2| + |x + y| = 10. \end{cases}$$

b) Không giải phương trình, tìm M^2 với M là tổng các giá trị tuyệt đối của tất cả các nghiệm của phương trình: $x = \sqrt{3} + \frac{7}{\sqrt{3} + \frac{7}{\sqrt{3} + \frac{7}{x}}}$.

Câu 4. (3,00 điểm) Cho tam giác ABC cân tại A , có đường cao AH . Gọi M là trung điểm của AH ; E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên BM, AC . Đường thẳng CE cắt các đường thẳng HF và BF lần lượt tại G và K . Chứng minh rằng:

a) $BEC = HEA$.

b) AG vuông góc với BF .

Câu 5. (2,00 điểm) Cho $x \geq 0, y \geq 0, xy \leq \frac{1}{4}$. Chứng minh rằng: $\frac{2}{1 + 2\sqrt{xy}} \geq \frac{1}{1 + 2x} + \frac{1}{1 + 2y}$.

Câu 6. (2,00 điểm) Hãy xác định n số nguyên dương liên tiếp, biết rằng tổng của n số đó bằng 2024.

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....;Số báo danh:.....

Chữ kí giám thị 1:.....;Chữ kí giám thị 2:.....



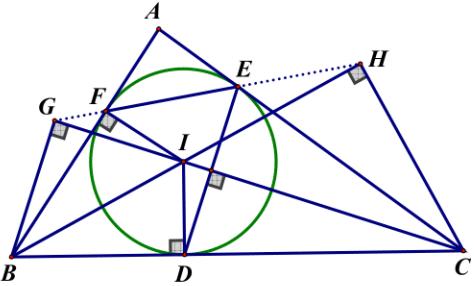
HƯỚNG DẪN CHẤM THI
MÔN TOÁN (chuyên) – ĐỀ CHÍNH THỨC
(Hướng dẫn chấm có 06 trang)

1. Hướng dẫn chung

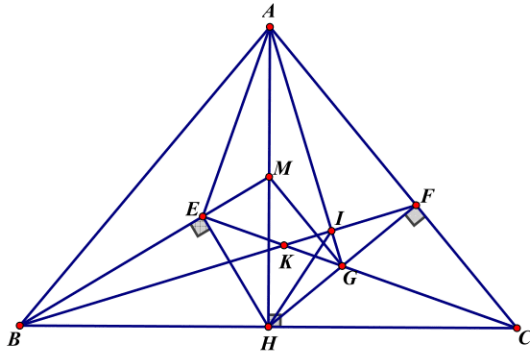
- Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án mà vẫn đúng thì cho đủ điểm từng phần như hướng dẫn quy định.
- Việc chi tiết hóa thang điểm (nếu có) so với thang điểm chấm phải bảo đảm không sai lệch với hướng dẫn chấm và được thống nhất thực hiện trong Hội đồng chấm thi.
- Các bài toán hình học, nếu không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì không chấm điểm.
- Điểm bài thi không làm tròn số.

2. Nội dung và thang điểm

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
1		5,00 đ
a)	Biết $x = \sqrt{2} + 1$, tính $A = \sqrt{\sqrt{2}(x+1)(x^2+1)(x^4+1)+x-\sqrt{2}}$.	2,00 đ
	Từ $x = \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow x - \sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{2}$. Áp dụng kết quả này ta có:	0,50 đ
	$A = \sqrt{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)+1}$	0,50 đ
	$= \sqrt{(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)+1}$	0,50 đ
	$= \sqrt{(x^4-1)(x^4+1)+1} = \sqrt{x^8-1+1} = \sqrt{x^8} = x^4 = (\sqrt{2}+1)^4$.	0,50 đ
	Lưu ý: Có thể thí sinh tính ra kết quả tương đương: $A = 17 + 12\sqrt{2}$.	
b)	Rút gọn biểu thức: $B = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{9}+\sqrt{10}}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}}$	2,00 đ
	Ta có $B = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+(\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+2+\sqrt{10})}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}}$	0,50 đ
	$= 1 + \frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{10}}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}}$	0,50 đ
	$= 1 + \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5})}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}} = 1 + \sqrt{2}$.	1,00 đ
c)	Cho biết $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Tính $x+y$.	1,00 đ
	Do $(\sqrt{y^2+1}+y)(\sqrt{y^2+1}-y)=1$ nên $\sqrt{y^2+1}-y \neq 0$, ta có	
	$x+\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}} \cdot \frac{y-\sqrt{y^2+1}}{y-\sqrt{y^2+1}} = \sqrt{y^2+1}-y$ $\Leftrightarrow x+y = \sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1} \quad (1).$	0,50 đ
	Tương tự: $y+\sqrt{y^2+1} = \sqrt{x^2+1}-x \Leftrightarrow x+y = \sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1} \quad (2).$	0,25 đ
	Cộng (1) và (2) về theo về ta được $x+y=0$.	0,25 đ

2	Cho tam giác ABC ($AB < AC < BC$) ngoại tiếp đường tròn (I) với các tiếp điểm trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Gọi G và H lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ B và C xuống CI và BI. Chứng minh rằng: a) $BGED$ là hình thang. b) Tứ giác $BGFD$ nội tiếp. c) Các điểm E, F, G, H thẳng hàng.	3,50 đ
		
	a) $BGED$ là hình thang	1,00 đ
	Ta có: $BG \perp IC$ (gt) và $IC \perp DE$ (tính chất tiếp tuyến)	0,50 đ
	Suy ra $BG \parallel DE$, do đó tứ giác $BGED$ là hình thang.	0,50 đ
	b) Tứ giác $BGFD$ nội tiếp	1,00 đ
	Do $AB < AC < BC$ nên $\widehat{ACB} < \widehat{ABC} < \widehat{BAC}$. Do $\frac{\widehat{ACB}}{2} + \widehat{ABC} < \frac{\widehat{ACB} + \widehat{ABC} + \widehat{BAC}}{2} = 90^\circ$ nên tia BF nằm giữa hai tia BE và BG. Tương tự ta cũng chứng minh được tia CE nằm giữa hai tia CF và CH.	0,25 đ
	Ta có $\widehat{BGI} = \widehat{BDI} = 90^\circ \Rightarrow BGID$ nội tiếp đường tròn đường kính BI (1).	0,25 đ
	Ta có $\widehat{BFI} = 90^\circ$, suy ra F nằm trên đường tròn đường kính BI (2).	0,25 đ
	Từ (1) và (2) suy ra B, G, F, I, D cùng nằm trên đường tròn đường kính BI hay $BGFD$ là tứ giác nội tiếp.	0,25 đ
	c) Các điểm E, F, G, H thẳng hàng	1,50 đ
	$BGFD$ là tứ giác nội tiếp (cmt) suy ra $\widehat{GFD} + \widehat{GBD} = 180^\circ$ (3). Lại có $\widehat{EFD} = \widehat{EDC}$ vì cùng chắn cung ED của đường tròn (I) (4).	0,50 đ
	Hơn nữa, do $BG \parallel ED$ (cmt) nên $\widehat{GBD} = \widehat{EDC}$ (5). Từ (3), (4) và (5) suy ra $\widehat{GFD} + \widehat{EFD} = 180^\circ$ hay G, F, E thẳng hàng.	0,50 đ
	Tương tự H, E, F thẳng hàng, suy ra đpcm.	0,50 đ

3		4,50 đ
a) Giải hệ phương trình:	$\begin{cases} x-y =4 \\ x^2-y^2 + x+y =10. \end{cases}$	3,00 đ
Ta có	$\begin{cases} x-y =4 \\ x^2-y^2 + x+y =10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y =4 \\ x-y \cdot x+y + x+y =10 \end{cases}$	0,75 đ
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y =4 \\ 5 x+y =10 \end{cases}$	0,50 đ
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y =4 \\ x+y =2. \end{cases}$	0,50 đ
Trường hợp 1:	$\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1. \end{cases}$	0,25 đ
Trường hợp 2:	$\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3. \end{cases}$	0,25 đ
Trường hợp 3:	$\begin{cases} x-y=-4 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3. \end{cases}$	0,25 đ
Trường hợp 4:	$\begin{cases} x-y=-4 \\ x+y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=1. \end{cases}$	0,25đ
	Vậy nghiệm của hệ phương trình $(x; y)$ là $(3; -1)$, $(1; -3)$, $(-1; 3)$, $(-3; 1)$.	0,25 đ
b) Tìm M^2 với M là tổng các giá trị tuyệt đối của tất cả các nghiệm của phương trình:	$x = \sqrt{3} + \frac{7}{\sqrt{3} + \frac{7}{\sqrt{3} + \frac{7}{x}}}.$	1,50 đ
Điều kiện	$x \neq 0.$	
Ta có	$\frac{7}{\sqrt{3} + \frac{7}{\sqrt{3} + \frac{7}{x}}} = \frac{7\left(\sqrt{3} + \frac{7}{x}\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3} + \frac{7}{x}\right) + 7} = \frac{7\sqrt{3}x + 49}{10x + 7\sqrt{3}}$	0,50 đ
Do đó	$x = \sqrt{3} + \frac{7\sqrt{3}x + 49}{10x + 7\sqrt{3}} \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{3}x - 7 = 0 \quad (1).$	0,50 đ
(1) là phương trình bậc hai, có $ac = -7$ nên luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Áp dụng định lí Viet ta được:	$\begin{cases} x_1 + x_2 = \sqrt{3} \\ x_1 x_2 = -7. \end{cases}$	0,25 đ
Ta có	$\begin{aligned} M^2 &= (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2 x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2 x_1x_2 \\ &= (\sqrt{3})^2 - 2(-7) + 2 -7 = 31. \end{aligned}$	0,25 đ
	Vậy $M^2 = 31$ là kết quả cần tìm.	

4	Cho tam giác ABC cân tại A, có đường cao AH. Gọi M là trung điểm của AH; E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên BM, AC. Đường thẳng CE cắt các đường thẳng HF và BF lần lượt tại G và K. Chứng minh rằng: a) $\widehat{BEC} = \widehat{HEA}$. b) AG vuông góc với BF.	3,00 đ
		
	a) $\widehat{BEC} = \widehat{HEA}$	1,00 đ
	Do $HE \perp BM$ và $AH \perp BC$ (gt) nên $\widehat{HBE} = \widehat{MHE}$ (1). Suy ra hai tam giác vuông HBE và MHE đồng dạng.	0,50 đ
	Suy ra $\frac{BH}{BE} = \frac{HM}{HE}$ (2). Do M, H lần lượt là trung điểm của AH, BC nên $BC = 2BH$ và $HA = 2HM$ (3). Từ (2) & (3) suy ra $\frac{BC}{BE} = \frac{HA}{HE}$ (4); từ (1) & (4) $\Rightarrow \triangle EBC \sim \triangle EHA$ (c.g.c); Do vậy $\widehat{BEC} = \widehat{HEA}$.	0,50 đ
	b) AG vuông góc với BF	2,00 đ
	Do $\triangle EBC \sim \triangle EHA$ nên $\widehat{HCE} = \widehat{BCE} = \widehat{HAE}$ dẫn đến tứ giác $AEHC$ nội tiếp.	1,00 đ
	Do tứ giác $AEHC$ nội tiếp nên $\widehat{HEA} + \widehat{HCA} = 180^\circ$ (5).	
	Do M, E, B thẳng hàng nên $\widehat{MEG} + \widehat{BEC} = 180^\circ$ (6).	
	Do $\triangle EBC \sim \triangle EHA$ nên $\widehat{BEC} = \widehat{HEA}$ (7).	
	Từ (5), (6) & (7) suy ra $\widehat{HCA} = \widehat{MEG}$ (8).	
	Lại có $\widehat{HCA} = \widehat{MHG}$ vì cùng phụ $\widehat{HAC}$ (9).	
	Từ (8) & (9) suy ra $\widehat{MEG} = \widehat{MHG}$ dẫn đến tứ giác $MEHG$ nội tiếp, suy ra	
	$\widehat{HGM} = \widehat{MEH} = 90^\circ$ hay $MG \perp HF$, suy ra $MG \parallel AF$.	
	Mà M là trung điểm của HA nên G là trung điểm của HF .	
	Ta có $\widehat{AHF} = \widehat{ACH}$ vì cùng phụ $\widehat{CHF}$ dẫn đến hai tam giác vuông HFA và	
	CFH đồng dạng, suy ra $\frac{HA}{HF} = \frac{CH}{CF}$.	
	Do H, G lần lượt là trung điểm của BC, HF nên $BC = 2CH$ và $HF = 2HG$.	
	Khi đó $\frac{HA}{2HG} = \frac{BC}{2CF} \Leftrightarrow \frac{HA}{HG} = \frac{CB}{CF}$.	
	Kết hợp với (9) dẫn đến $\triangle BCF \sim \triangle AHG \Rightarrow \widehat{HBI} = \widehat{CBF} = \widehat{HAG} = \widehat{HAI}$ (Với	
	I là giao điểm của AG và BF). Từ đó suy ra $ABHI$ nội tiếp, vì thế	
	$\widehat{AIK} = \widehat{AIB} = \widehat{AHB} = 90^\circ$ (đpcm).	0,50 đ

5	Cho $x \geq 0, y \geq 0, xy \leq \frac{1}{4}$. Chứng minh rằng: $\frac{2}{1+2\sqrt{xy}} \geq \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+2y}$.	2,00 đ
	Cách 1. Ta có: $\frac{2}{1+2\sqrt{xy}} - \left(\frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+2y} \right) = \left(\frac{1}{1+2\sqrt{xy}} - \frac{1}{1+2x} \right) + \left(\frac{1}{1+2\sqrt{xy}} - \frac{1}{1+2y} \right)$ $= \frac{2x-2\sqrt{xy}}{(1+2\sqrt{xy})(1+2x)} + \frac{2y-2\sqrt{xy}}{(1+2\sqrt{xy})(1+2y)}$	0,50 đ
	$= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(1+2\sqrt{xy})(1+2x)} - \frac{2\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(1+2\sqrt{xy})(1+2y)}$ $= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})(1+2y) - 2\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})(1+2x)}{(1+2\sqrt{xy})(1+2x)(1+2y)}$ $= \frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}+2\sqrt{x.y}-2\sqrt{y.x})}{(1+2\sqrt{xy})(1+2x)(1+2y)}$	0,50 đ
	$= \frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})((\sqrt{x}-\sqrt{y})-2\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y}))}{(1+2\sqrt{xy})(1+2x)(1+2y)}$ $= \frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2(1-2\sqrt{xy})}{(1+2\sqrt{xy})(1+2x)(1+2y)}.$	0,50 đ
	Vì $x \geq 0, y \geq 0, xy \leq \frac{1}{4}$ nên $\frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2(1-2\sqrt{xy})}{(1+2\sqrt{xy})(1+2x)(1+2y)} \geq 0$ (1), đpcm.	0,25 đ
	Dấu “=” xảy ra trong (1) khi và chỉ khi $x = y \geq 0$ hoặc x, y không âm và $xy = \frac{1}{4}$.	0,25 đ
	Cách 2. Đặt $a = \sqrt{x}, b = \sqrt{y}$ ($a, b \geq 0; ab \leq \frac{1}{2}$). Ta cần chứng minh $\frac{2}{1+2ab} \geq \frac{1}{1+2a^2} + \frac{1}{1+2b^2} \quad (1)$	0,50 đ
	$\Leftrightarrow \frac{1}{1+2ab} - \frac{1}{1+2a^2} \geq \frac{1}{1+2b^2} - \frac{1}{1+2ab}$ $\Leftrightarrow \frac{a^2-ab}{1+2a^2} \geq \frac{ab-b^2}{1+2b^2} \quad (do\ 1+2ab > 0)$	0,50 đ
	$\Leftrightarrow a(a-b)(1+2b^2) \geq b(a-b)(1+2a^2) \quad (do\ 1+2a^2 > 0; 1+2b^2 > 0)$ $\Leftrightarrow (a-b)(a+2ab^2-b-2a^2b) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)((a-b)-2ab(a-b)) \geq 0$	0,50 đ
	$\Leftrightarrow (a-b)^2(1-2ab) \geq 0 \quad (2).$ Do $(a-b)^2 \geq 0$ và $1-2ab \geq 0$ nên (2) đúng $\Leftrightarrow$ (1) đúng. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y \geq 0$ hoặc x, y không âm và $xy = \frac{1}{4}$.	0,50 đ

6	Hãy xác định n số nguyên dương liên tiếp, biết rằng tổng của n số đó bằng 2024.	2,00 đ
	Ta có: $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ Và: $S = n + (n-1) + \dots + 1$ Cộng: $2S = (n+1)n \Leftrightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$.	0,25 đ
	Giả sử n số nguyên dương liên tiếp thỏa mãn yêu cầu đề bài bắt đầu từ số nguyên dương $k+1$. Ta có: $(k+1) + (k+2) + \dots + (k+n-1) + (k+n) = 2024 \Leftrightarrow nk + \frac{n(n+1)}{2} = 2024$ $\Leftrightarrow 2nk + n(n+1) = 4048$ $\Leftrightarrow n(2k+n+1) = 2^4 \cdot 11 \cdot 23.$	0,25 đ
	Do $n, n+1$ có tính chẵn lẻ khác nhau nên n và $2k+n+1$ có tính chẵn lẻ khác nhau.	0,25 đ
	Do $n < 2k+n+1$ nên ta có các trường hợp sau	0,25 đ
	i) $\begin{cases} n = 16 \\ 2k + n + 1 = 253 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 16 \\ k = 118. \end{cases}$	0,75 đ
	ii) $\begin{cases} n = 11 \\ 2k + n + 1 = 368 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 11 \\ k = 178. \end{cases}$	
	iii) $\begin{cases} n = 23 \\ 2k + n + 1 = 176 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 23 \\ k = 76. \end{cases}$	
	Vậy các dãy số cần tìm là các liên tiếp: 119, 120, ..., 134; 179, 180, ..., 189 và 77, 78, ..., 99.	0,25 đ
	Lưu ý: học sinh có thể chỉ ra 2 dãy số là các số nguyên dương liên tiếp thì có thể cho đủ điểm tối đa.	